Elektromagnetické vlny – příklady II

1. Vlny ve vodiči (na přednášce)

Zadání: Nalezněme vlnovou rovnici pro elektromagnetickou vlnu šířící se v kovu.

Řešení: V Maxwellových rovnicích dosadíme za proudovou hustotu $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{D} &= \rho_Q, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1}$$

Aplikujme operaci divergence na třetí a za div **D** dosaďme z první rovnice

$$\frac{\partial\rho_Q}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_Q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho_Q \approx \rho_0 \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon}t\right] \tag{2}$$

Prostorová hustota náboje ve vodiči exponenciálně vymizí a nemusíme ji proto uvažovat. Za výchozí sadu Maxwellových rovnic pro vlny ve vodiči můžeme použít

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \mu\sigma\mathbf{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3}$$

Nyní provedeme Fourierovu transformaci a poté vyloučíme jedno z polí (například elektrické) a získáme disperzní relaci ve tvaru

$$\omega^2 = c^2k^2 - \mathrm{i}\,c^2\sigma\mu\omega \tag{4}$$

Je-li vodivost nulová ($\sigma = 0$), přejde tato disperzní relace ve známou disperzní relaci vln v nevodivém prostředí. Ve vodiči je disperzní relace komplexní, což obecně znamená útlum.

Útlum v prostoru: Hledejme nejprve prostorový útlum (řešení v k):

$$c^2k^2 = \omega^2 + \mathrm{i}\,c^2\sigma\mu\omega \approx \mathrm{i}\,c^2\sigma\mu\omega \tag{5}$$

Vzhledem k vysoké vodivosti kovů jsme první člen na pravé straně zanedbali. Tento výraz již snadno odmocníme. Nezapomeňte, že $\mathrm{i}^{1/2} = (1+\mathrm{i})/2^{1/2}$. Proto

$$k = k_1 + \mathrm{i}\,k_2\ ; \qquad k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}} \tag{6}$$

Reálná i imaginární část vlnového vektoru je stejně veliká (to je pro kovy typické). V prostoru tedy bude mít vlna charakter exp[i$k_1x - k_2x$]. Vlna je tlumená s charakteristickou vzdáleností útlumu

$$\delta = \frac{1}{k_2} = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \tag{7}$$

Tuto vzdálenost (do které vlna pronikne) nazýváme skinová hloubka.

Útlum v čase: Hledejme nyní útlum v čase (řešení v ω). Disperzní relace je kvadratická rovnice pro ω s řešením

$$\omega_{1,2} = \frac{-\mathrm{i}\,c^2\sigma\mu \pm \sqrt{-c^4\sigma^2\mu^2 + 4c^2k^2}}{2} \tag{8}$$

Uvědomíme-li si, že v diskriminantu je vodivostní člen dominantní (kov), zbývá jediné nenulové řešení

$$\omega \cong -\mathrm{i}\,c^2\sigma\mu \tag{9}$$

Řešení ve frekvenci je ryze imaginární

$$\omega = \omega_1 + \mathrm{i}\,\omega_2\;; \qquad \omega_1 = 0\,, \quad \omega_2 = -c^2\sigma\mu \tag{10}$$

a má charakter útlumu

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t} = \mathrm{e}^{\omega_2 t} = \mathrm{e}^{-c^2\sigma\mu t} \tag{11}$$

s charakteristickou dobou útlumu

$$\tau = \left|\frac{1}{\omega_2}\right| = \frac{1}{c^2\sigma\mu} \tag{12}$$

Povšimněte si, že při důsledném dodržení znaménkové konvence (u prostoru +, u času −) ve vlnění typu exp[i ($\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t$)] vyšel útlum v čase i v prostoru.

2. Grupová rychlost při disperzi (na přednášce)

Zadání: Vyjádřete grupovou rychlost za pomoci indexu lomu, který je frekvenčně závislý.

Řešení: V prostředí s disperzí závisí index lomu na frekvenci vlnění

$$n(\omega) \equiv \frac{c}{v_\mathrm{f}} = \frac{ck}{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad n(\omega)\omega = ck\,. \tag{13}$$

Získaný vztah budeme diferencovat

$$\begin{gathered} \omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega + n\,\mathrm{d}\omega = c\,\mathrm{d}k \quad \Rightarrow \\ \left(n + \omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\right)\mathrm{d}\omega = c\,\mathrm{d}k. \end{gathered} \tag{14}$$

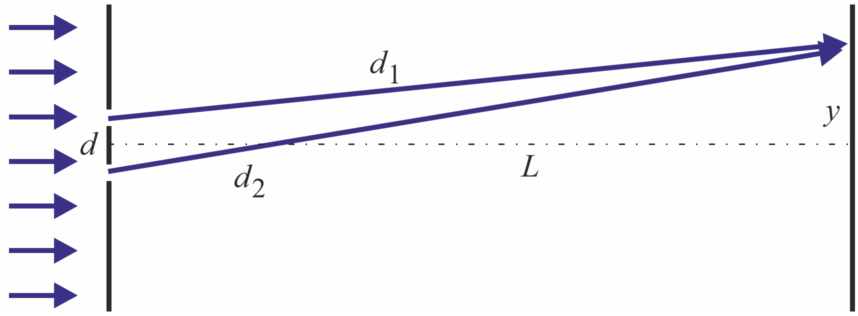
Z posledního vztahu snadno určíme grupovou rychlost

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}. \tag{15}$$

Vidíme, že grupová rychlost je malá v prostředích s velkým indexem lomu nebo s velkou disperzí (vysokou hodnotou $dn/d\omega$). Nejvyšší index lomu má diamant (cca 2,5) a grupová rychlost světla v něm jen 120 000 km/s. Existují ale i uměle připravená prostředí s vysokou disperzní, v nichž má rychlost šíření světla pouhou rychlost chodce. V roce 2000 se dokonce ve speciálně připraveném prostředí podařilo světlo zastavit.

3. Youngův experiment

Zadání: Určete polohu prvního maxima a prvního minima v Youngově experimentu se světlem o vlnové délce $\lambda = 500$ nm. Vzdálenost štěrbin je $d = 1$ mm, vzdálenost stínítka $L = 5$ m.



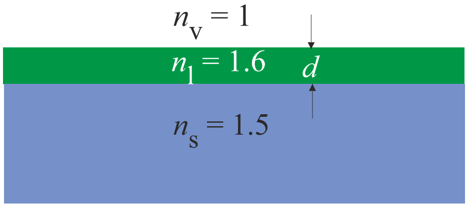
Řešení: Rozdíl optických drah (index lomu je roven jedné) bude

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 &= \sqrt{L^2 + (y + d/2)^2} - \sqrt{L^2 + (y - d/2)^2} = \\ &= L\sqrt{1 + \frac{(y + d/2)^2}{L^2}} - L\sqrt{1 + \frac{(y - d/2)^2}{L^2}} \approx \\ &\approx L\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(y + d/2)^2}{L^2}\right) - L\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(y - d/2)^2}{L^2}\right) = \frac{yd}{L}. \end{aligned} \tag{16}$$

Pro první maximum tedy bude $yd/L = \lambda$ a podmínka pro první minimum bude $yd/L = \lambda/2$. Odsud snadno určíme hodnoty y. První maximum bude ve vzdálenosti $y = 2.5$ mm a první minimum ve vzdálenosti 1.25 mm.

4. Antireflexní vrstva

Zadání: Na skleněné podložce o indexu lomu $n_s = 1.5$ je napařena vrstva laku tloušťky 0.5 μm s indexem lomu $n_l = 1.6$. Určete, které vlnové délky z viditelného spektra budou chybět v kolmo odraženém světle.



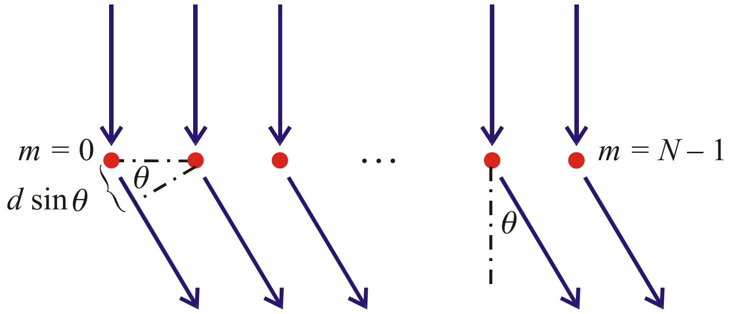
Řešení: Rozdíl optických drah na odrazu na horní a spodní vrstvě laku je $2nld$. Nesmíme zapomenout, že při odrazu na opticky hustším prostředí, (vrchní vrstva laku) se mění fáze na protifázi. V našem případě se tedy podmínky maxim a minim vymění. Pro minima tak máme:

$$2n_1 d = m\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_m = 2n_1 d/m \tag{17}$$

Do oblasti viditelného spektra spadají vlnové délky: 800 nm, 533 nm a 400 nm.

5. Optická mřížka

Zadání: Nalezněte součet rovinných vln ze všech ohybových center mřížky. Určete skutečný průběh světelné intenzity světla prošlého mřížkou. Počet ohybových center (vrypů) mřížky je N. Předpokládejte, že se vlny se za vrypy mohou šířit v prostředí o indexu lomu $n \neq 1$.



Řešení: Geometrický dráhový rozdíl sousedních paprsků je

$$\Delta l = d \sin\theta\,, \tag{18}$$

optický dráhový rozdíl (po přepočtení na vakuum)

$$\Delta\xi = nd\sin\theta\,, \tag{19}$$

odpovídající fázový rozdíl

$$\Delta\varphi = k\Delta\xi = \frac{2\pi}{\lambda} nd\sin\theta \tag{20}$$

(zde k je velikost vlnového vektoru). Pro získání výsledné intenzity světla (prostřednictvím intenzity elektrického pole) je tedy nutné sečíst (počet interferujících svazků štěrbin je m)

$$E(x) = \sum_{m=0}^{N-1} E_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(kx + m\Delta\varphi\right)\right] = E_0 \exp\left[\mathrm{i}kx\right] \underbrace{\sum_{m=0}^{m=N-1} \left[\exp\left(\mathrm{i}\Delta\varphi\right)\right]^m}_{\text{geom. řada}} =$$

$$= E_0 \exp\left[\mathrm{i}\,kx\right] \sum_{m=0}^{m=N-1} q^m = E_0 \exp\left[\mathrm{i}\,kx\right] \frac{q^N - 1}{q-1} = E_0 \exp\left[\mathrm{i}\,kx\right] \frac{\exp\left(\mathrm{i}\,N\Delta\varphi\right) - 1}{\exp\left(\mathrm{i}\,\Delta\varphi\right) - 1} =$$

$$= E_0 \exp\left[\mathrm{i}\,kx\right] \frac{\exp\left(\mathrm{i}\,N\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\exp\left(\mathrm{i}\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)} \cdot \frac{\exp\left(\mathrm{i}\,N\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\,N\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\exp\left(\mathrm{i}\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)} = E_0 \exp\left[\mathrm{i}\ldots\right] \frac{\sin\left(N\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}.$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímá intenzita světla $I \sim EE^*$, nejsou násobící komplexní jednotky v posledním výrazu ani vypsány. Intenzita světla po průchodu mřížkou je zjevně

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(N\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}, \tag{21}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi nd}{\lambda}\sin\theta\,. \tag{22}$$

Tento průběh intenzity není vůbec jednoduchý, má celou řadu maxim a minim, z nichž jen některá maxima jsou opravdu výrazná. V těchto maximech (hlavní maxima druhého řádu) je

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = k\pi, \ \left(k = 0, 1, 2, 3...\right),$$

což vede na známou podmínku maxim na mřížce $nd \sin\theta_{\mathrm{max}} = k\lambda$, užívanou pro vzduch $\left(n = 1\right)$ v obvyklejším tvaru $\sin\theta_{\mathrm{max}} = k\lambda / d$.

Poznámka: Pro $k = 0$ a tedy $\Delta\varphi = 0$ dává funkce (21) neurčitý výraz $0/0$. O existenci maxima i v tomto případě se můžeme přesvědčit použitím L'Hospitalova pravidla.