Vlnění – první sada

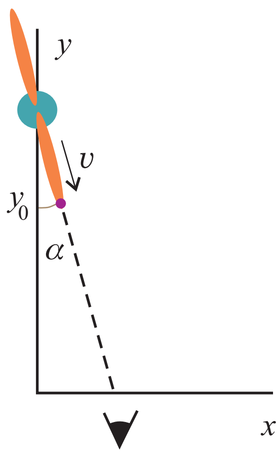
1. Nadsvětelné rychlosti – „prasátko“

Zadání: Světelným zdrojem můžeme otočit o 90° za 0.1 s. Jak daleko musí být projekční plocha, aby se světelná skvrna (prasátko) pohybovala nadsvětelnou rychlostí?

Řešení: Úhlová rychlost prasátka je $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$. Obvodová rychlost na projekční stěně ve vzdálenosti l bude $v = l\omega$. Tato rychlost má být větší než rychlost světla c. Odsud plyne podmínka $l > c\Delta t/\Delta\varphi$.

Výsledek: $l > 20\,000$ km. To je podstatně méně než je oběžná dráha Měsíce (384 000 km!) a srovnatelné s oběžnými výškami některých sond.

2. Jety kvasaru – fiktivní nadsvětelná rychlost



Zadání: Vzdálený kvasar je zdrojem dvou výtrysků látky (jetů) z nichž jeden se pohybuje směrem k pozorovateli pod malým úhlem téměř rychlostí světla. Určete, jakou rychlost naměří pozorovatel.

Řešení: Poloha objektu je dána vztahy:

$$x(t) = vt\sin\alpha\,;$$

$$y(t) = y_0 - vt\cos\alpha\,.$$

Signál přichází k pozorovateli se zpožděním v čase

$$\tau \doteq t + \frac{y(t)}{c}\,.$$

Rychlost, kterou zjistí pozorovatel proto bude

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t} = \frac{v\sin\alpha}{1-\frac{v}{c}\cos\alpha} \underset{v\to c}{\approx} \frac{c\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \underset{\alpha \ll 1}{\approx} \frac{c\alpha}{1-(1-\alpha^2/2)} = \frac{2c}{\alpha}\,.$$

Z výsledku je zřejmé, že pohybuje-li se jet směrem k pozorovateli, tato fiktivní pozorovaná rychlost snadno převýší rychlost světla.

3. Exploze

Zadání: Při explozi nálože byla uvolněna energie 10^5 J. Exploze trvala 1 s. Jaká bude maximální intenzita detonační vlny ve vzdálenosti 10 metrů od exploze a ve vzdálenosti 20 metrů od exploze?

Předpoklady: Detonační vlna je kulově symetrická.

Řešení: $I = \Delta E/(\Delta S\,\Delta t) = \Delta E/(4\pi r^2\,\Delta t)$

Výsledek: $I_1 = 80$ Wm^{-2}, $I_2 = 20$ Wm^{-2}.

4. Hluk

Zadání: Jak se sníží hladina hluku, vzdálím-li se od zdroje hluku do dvojnásobné vzdálenosti?

Předpoklady: Zdroj hluku je malý vzhledem ke vzdálenostem, ve kterých posloucháme a hluk se šíří sféricky symetricky.

Řešení: Intenzita je úměrná kvadrátu amplitudy a pro kulovou vlnu je $I \sim 1/r^2$. Proto ve dvojnásobné vzdálenosti bude $I_2 = I_1/4$. Hladina hluku se sníží o

$$\Delta L = 10 \log(I_1/I_0) - 10 \log(I_2/I_0) = 10 \log(I_1/I_2) = 10 \log(4).$$

Výsledek: $\Delta L = 6$ dB.

5. Kruhová vlna na membráně

Zadání: Tenkou pružnou homogenní membránu ve tvaru kruhu o poloměru 1,5 m ve středu prudkým úderem paličkou vychýlíme o 1 cm. Hlavice paličky má tvar válce o průměru 1,5 cm. Osa hlavice paličky při úderu byla kolmá na rovinu membrány. Rychlost úderu a tuhost membrány byly takové, že se při úderu protáhla membrána pouze v bezprostředním okolí hlavice paličky. Jaká bude amplituda vlny vzniklé na okraji membrány? Útlum a energii předanou zpět paličce zanedbejte.

Řešení: U kruhové vlny pro amplitudu platí

$$A \sim \sqrt{\frac{1}{r}} \tag{1}$$

Proto

$$A_2 = A_1 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \tag{2}$$

Výsledek: Pro hodnoty $r_1 = 15$ mm, $r_2 = 1\,500$ mm a $A_1 = 10$ mm vychází $A_2 = 1$ mm.

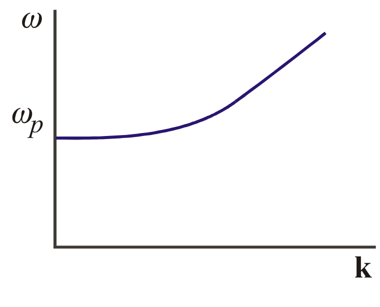
6. Elektromagnetická vlna v ionosféře

Zadání: Standardní disperzní relace rovinné elektromagnetické vlny $\omega^2 = c^2 k^2$ je při průchodu světla plazmatem modifikována na tvar $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$. Rychlost šíření světla ve vakuu je označena c. Veličina ω_p se nazývá plazmová frekvence (jde o frekvenci oscilací elektronů kolem iontů). Nalezněte závislost $\omega(k)$ a diskutujte její průběh. Určete fázovou a grupovou rychlost šíření této vlny.

Řešení: Zadaný výraz pro disperzní relaci nejprve upravíme do tvaru

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2} = ck\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2}}\ . \tag{3}$$

Závislost $\omega(k)$ lze nyní snadno vykreslit a je uvedena na obrázku. Z grafu je zřejmé, že vlna se šíří jen pro frekvence $\omega > \omega_p$. Při nižších frekvencích elektromagnetické vlny se elektrony prostředí totiž "stihnou" rozkmitat a vlna je absorbována, plazma je pro takovou vlnu neprůhledné.



Fázová rychlost je

$$v_\mathrm{f} = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1+\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{c^2k^2}} = c\sqrt{1+\frac{\omega_\mathrm{p}^2\lambda^2}{4\pi^2c^2}}\,, \tag{4}$$

závisí na vlnové délce vlny (disperze!) a je větší než rychlost světla.
Grupová rychlost

$$v_\mathrm{g} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{\omega_\mathrm{p}^2\lambda^2}{4\pi^2c^2}}} \tag{5}$$

je menší než rychlost šíření světla (jde o rychlost šíření informace). Součin obou rychlostí splňuje relaci

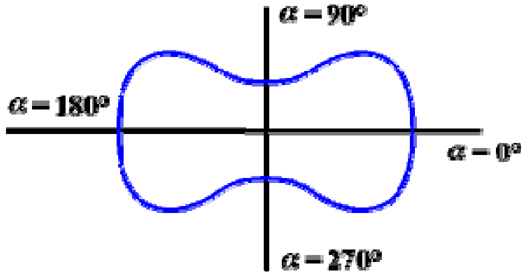
$$v_\mathrm{f}v_\mathrm{g} = c^2\,. \tag{6}$$

7. Směrový diagram

Zadání: Nalezněte tvar vlnoploch pro vlnu s disperzní relací $\omega^2 = \omega_\mathrm{p}^2 + c^2k^2\cos^2\alpha$.

Řešení: Směrový diagram je závislost velikosti fázové rychlosti na úhlu α v polárním diagramu. Zřejmě je:

$$v_\mathrm{f} = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{\cos^2\alpha+\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{c^2k^2}} = c\sqrt{\cos^2\alpha+\frac{\omega_\mathrm{p}^2\lambda^2}{4\pi^2c^2}} \tag{7}$$



8. Okno

Zadání: Okno, jehož plocha je 2 m^2 , je otevřeno na ulici. Pouliční hluk má v rovině okna průměrnou hladinu intenzity 80 dB. Jak velký akustický výkon vstupuje zvukovými vlnami do pokoje?

Řešení: Zvukový výkon vstupující do místnosti

$$P = I\,S\,.$$

Intenzitu stanovíme ze zadané hladiny intenzity

$$L = 10\log\frac{I}{I_0} \quad\Rightarrow\quad I = I_0 10^{\frac{L}{10}}\,.$$

kde $L/10$ je hladina vyjádřená v bellech a I_0 je referenční intenzita, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.
Akustický výkon je

$$P = S I_0 10^{\frac{L}{10}} = 2\times10^{-4}\ \mathrm{W}\,.$$

9. Hluk stroje

Zadání: V prostředí, jehož hladina intenzity hlukového pozadí je 60 dB, byl změřen hluk stroje. Byla naměřena hodnota 64 dB. Jakou hodnotu hladiny intenzity hluku stroje bychom naměřili, kdybychom měřili v tiché místnosti?

Řešení: Sčítat můžeme v tomto případě pouze energie resp. intenzity zvuků. Ke skládání akustických tlaků nebo výchylek nemáme přesné informace o amplitudách a fázích jednotlivých složek zvukového spektra ve sčítacím bodě. Je tedy

$$I_{\mathrm{M}} = I_{\mathrm{P}} + I_{\mathrm{S}},$$

kde indexy znamenají: M (měření), P (pozadí), S (stroj). Platí

$$I_{\mathrm{S}} = I_{\mathrm{M}} - I_{\mathrm{P}}.$$

Intenzity vyjádříme pomocí příslušných hladin intenzity

$$I_0 10^{\frac{L_{\mathrm{S}}}{10}} = I_0 10^{\frac{L_{\mathrm{M}}}{10}} - I_0 10^{\frac{L_{\mathrm{P}}}{10}},$$

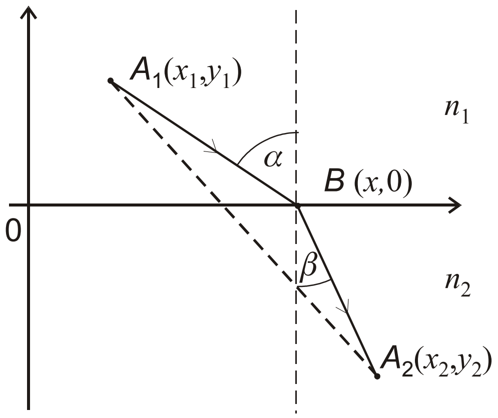
($L_{\mathrm{S}}/10$ je hladina v bellech atd.). Ve výrazu zkrátíme referenční intenzitu

$$10^{\frac{L_{\mathrm{S}}}{10}} = 10^{\frac{L_{\mathrm{M}}}{10}} - 10^{\frac{L_{\mathrm{P}}}{10}}$$

10. Fermatův princip (děláme na přednášce)

Zadání. Odvoďte zákon lomu z Fermatova principu.

Řešení: Podle Fermatova principu, ze všech možných trajektorií bude realizována trajektorie s minimální dobou chodu paprsku z bodu A_1 do bodu A_2.



Pro trajektorii na obrázku je celková doba

$$t = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}}{v_2}.$$

Tato doba je funkcí x, proto tuto závislost derivujeme podle proměnné x a položíme rovnou nule (nutná podmínka minima). Získáme tak podmínku

$$\frac{1}{v_1}\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{x_2-x}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}},$$

ze které plyne

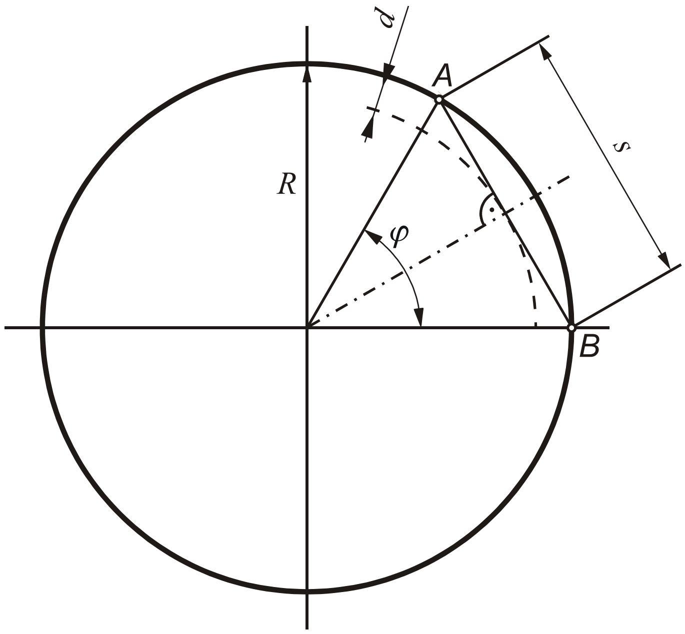
$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2} \quad \Rightarrow \quad n_1\sin\alpha = n_2\sin\beta \quad \Rightarrow .$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1} \tag{8}$$

(α – úhel dopadu, β – úhel lomu, n_1, n_2 jsou indexy lomu obou prostředí)

11. Seismografická stanice

Zadání. Vypočítejte úhlovou vzdálenost od hypocentra *A* do seismografické stanice *B*, je-li ze záznamu seismografu patrno, že podélné vlny přišly o Δt = 80 s dříve než vlny příčné. Rychlost šíření podélných vln v zemské kůře předpokládejte c_L = 6,5 km/s, rychlost příčných vln v témže prostředí c_T = 4,4 km/s. Stanovte interval úhlových vzdáleností, pro něž je metoda použitelná, je-li tloušťka zemské kůry d = 15 až 60 km. Poloměr Země je R = 6 378 km.



Řešení: Přímou vzdálenost s mezi body *A* a *B* lze vyjádřit pomocí rychlosti podélných nebo příčných vln a odpovídající doby průchodu vlny úsekem

$$s = c_L t_L = c_T t_T .$$

Časový interval mezi příchodem obou vln $\Delta t = t_T - t_L$ vyjádříme pomocí s, c_L a c_T

$$\Delta t = s\left(\frac{1}{c_T}-\frac{1}{c_L}\right)= s\frac{c_L - c_T}{c_L c_T} \tag{9}$$

a vzdálenost s pomocí úhlu φ

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{s}{2}}{R}=\frac{s}{2R} \tag{10}$$

Spojením (9) a (10) obdržíme pro hledané φ

$$\varphi = 2\arcsin\frac{\Delta t\, c_L c_T}{2R\left(c_L - c_T\right)} = 9{,}8^\circ .$$

Metoda je použitelná, pokud nedojde k průchodu nebo odrazu vln rozhraním mezi zemskou kůrou a zemským pláštěm (Mohorovičičova diskontinuita). Z obrázku lze psát

$$\cos\frac{\varphi_{\max}}{2}=\frac{R-d}{R}, \qquad \text{odkud} \qquad \varphi_{\max}=2\arccos\frac{R-d}{R}.$$

Pro $d=15$ km obdržíme $\varphi_{\max 15}=4{,}5^{\circ}$, pro $d=60$ km $\varphi_{\max 60}=15{,}7^{\circ}$.

12. Skládání vln

Zadání. Dvě rovinné harmonické vlny o stejné frekvenci a amplitudě, polarizované lineárně v navzájem kolmých směrech (os y a z) se šíří stejnou rychlostí v kladném směru osy x. Popište výslednou vlnu vzniklou jejich složením, má-li fázový rozdíl obou vln hodnotu

a) $\varphi=0$, b) $\varphi=\pi$, c) $\varphi=\pi/2$, d) $\varphi=3\pi/2$,

a rozhodněte, o jakou polarizaci výsledné vlny se v uvedených případech jedná.

Řešení: Polarizované vlnění musí být příčné. Kmitání se děje v různých směrech, proto je třeba skládat vlny vektorově. Vzhledem k příznivému zadání lze přímo konstatovat, že výsledný vektor výchylky **u** je

$$\mathbf{u}=\mathbf{j}\,U_0\sin\left(\omega t-kx\right)+\mathbf{k}\,U_0\sin\left(\omega t-kx+\varphi\right).$$

Zvolme nyní místo na ose x, v němž budeme sledovat polohu vektoru ***u*** a tedy i roviny kmitů v čase, pro jednoduchost $x=0$. Příklad se tak redukuje na skládání navzájem kolmých sinusových kmitů v rovině se vzájemným fázovým posunem

$$y=U_0\sin\omega t \tag{11}$$

a

$$z=U_0\sin\left(\omega t+\varphi\right) \tag{12}$$

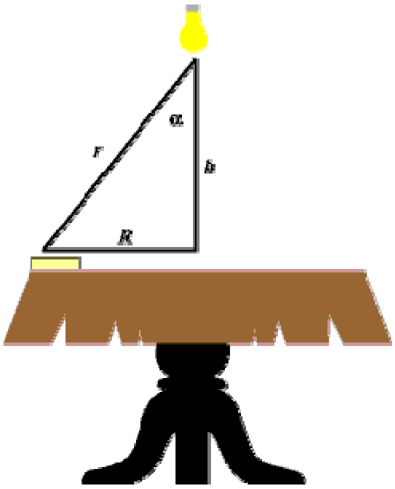
Rovnice (11) a (12) jsou parametrickou formulací trajektorie koncového bodu vektoru **u** v rovině y, z. Vyloučením parametru obdržíme rovnice trajektorií v názornější formě:

- Pro $\varphi=0$ je $y/z=1$. Příslušnou trajektorií je přímka $y=z$, vlna je tedy lineárně polarizována, rovina kmitu je určena osou x a uvedenou přímkou, polarizační rovina je k rovině kmitu kolmá.
- Pro $\varphi=\pi$ je $y/z=-1$. Situace je podobná, jen rovina kmitu i polarizační rovina jsou vůči předchozímu případu pootočeny o 90° (trajektorií je přímka $y=-z$).
- V případě $\varphi=\pi/2$ lze rovnici (12) přepsat do tvaru $z=U_0\sin\left(\omega t+\pi/2\right)=U_0\cos\omega t$. Umocněním na druhou a sečtením s kvadrátem (11) obdržíme vztah $y^2+z^2=U_0^2$. Koncový bod vektoru ***u*** se tedy pohybuje po kružnici o poloměru U_0, rovina kmitu i polarizační rovina se v prostoru otáčí; jde proto o polarizaci kruhovou.
- Případ $\varphi=3\pi/2$ se od předchozího liší pouze opačným směrem otáčení (levotočivá a pravotočivá polarizace).

13. Osvětlení stolu

Zadání: Lampa je umístěna nad kulatým stolem o poloměru R v jeho středu. Určete optimální výšku lampy nad stolem tak, aby osvětlení knihy ležící na okraji stolu bylo maximální.

Předpoklady: Zdroj je dostatečně malý, vlnoplochu považujte za kulovou.



Řešení: Osvětlení, stejně tak jako tok světelné energie, ubývá s kvadrátem vzdálenosti r od zdroje a závisí na úhlu dopadu:

$$I = \frac{I_0 \cos\alpha}{r^2}. \qquad (13)$$

Dosadíme-li cos α = h/r a za vzdálenost r z Pythagorovy věty $r = (h^2 + R^2)^{1/2}$, získáme závislost:

$$I(h) = I_0 \frac{h}{\left(h^2 + R^2\right)^{3/2}}. \qquad (14)$$

Při maximálním osvětlení musí být derivace této funkce podle h nulová, což vede na podmínku:

$$\left(h^2 + R^2\right)^{3/2} - 3h^2\left(h^2 + R^2\right)^{1/2} = 0 \qquad (15)$$

Po vydělení rovnice členem $(h^2 + R^2)^{1/2}$ snadno nalezneme řešení

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}}. \qquad (16)$$