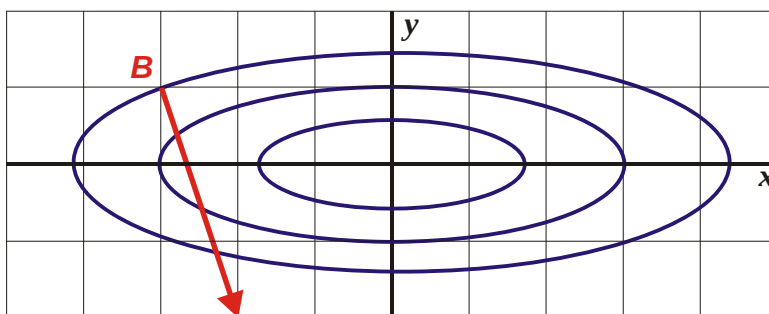


Operace s polem – příklady

1. Gradient

Zadání: Nadmořská výška libovolného bodu na povrchu kopce je dána formulí $h(x, y) = A \exp [-(x/l_0)^2 - 9(y/l_0)^2]$, kde $A = 500$ m, $l_0 = 100$ m. Nalezněte směr největšího stoupání do kopce (malé posunutí po povrchu kopce v tomto směru vyvolá největší přírůstek nadmořské výšky) v bodě $B = [-30, 10]$ m.



Řešení: Směr největšího stoupání vyjadřuje gradient skalární funkce, kterou je popsána povrchová plocha kopce. Platí

$$\mathbf{n} = \text{grad } h = (\partial h / \partial x, \partial h / \partial y) = -\frac{2A}{l_0^2} \exp \left[-(x/l_0)^2 - 9(y/l_0)^2 \right] (x, 9y) \approx (-x, -9y)$$

Nepodstatné konstanty mění jen délku vektoru, nikoliv jeho směr, proto jsou v konečném výsledku vynechány. V bodě B je tedy směr největšího stoupání určen vektorem

$$\mathbf{n}_B \approx (+30, -90) \approx (+10, -30) \approx (+1, -3).$$

2. Divergence

Zadání: Nalezněte divergenci elektrického pole bodového náboje v celém prostoru (pro bodový náboj je $r \rightarrow 0, \rho \rightarrow \infty$).

Řešení: Elektrické pole v okolí bodového náboje je dáno Coulombovým zákonem $\mathbf{E} = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \mathbf{n}$, kde r je vzdálenost daného místa od náboje, $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor $\mathbf{n} = (x/r, y/r, z/r)$ mířící od náboje. Elektrické pole má tedy složky ($k = Q/(4\pi\epsilon_0)$)

$$\begin{aligned} E_x &= k (x/r^3), \\ E_y &= k (y/r^3), \\ E_z &= k (z/r^3). \end{aligned}$$

Pro výpočet divergence budeme potřebovat derivaci vzdálenosti podle jednotlivých proměnných:

$$\begin{aligned} \partial r / \partial x &= \partial (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} / \partial x = x/r, \\ \partial r / \partial y &= \partial (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} / \partial y = y/r, \\ \partial r / \partial z &= \partial (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} / \partial z = z/r. \end{aligned}$$

Divergence elektrického pole je, jak známo

$$\text{div } \mathbf{E} = \partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z.$$

Derivace jednotlivých složek je v tomto případě optimální řešit jako derivace podílu

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{x}{r^3} \right) = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = k \frac{\frac{\partial x}{\partial x} r^3 - x 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = k \frac{r^3 - x 3r^2 \frac{x}{r}}{r^6} = k \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Podobně bude

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = k \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \quad \text{a} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = k \frac{r^2 - 3z^2}{r^5},$$

takže pro divergenci máme

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = k \frac{r^2 - 3x^2 + r^2 - 3y^2 + r^2 - 3z^2}{r^5} = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0; \quad r \neq 0.$$

Divergence elektrického pole je tedy v celém prostoru nulová (nejsou v něm zřídla toku) kromě množiny $r = 0$, ve které se toto zřídlo (zdroj pole – singulární hustota náboje) nachází.

3. Rotace

Zadání: Nalezněte rotaci magnetického pole v okolí vodiče protékaného proudem. Vodič je nekonečně dlouhý a limitně tenký ($R \rightarrow 0, \mathbf{j} \rightarrow \infty$).

Řešení: Magnetické pole v okolí nekonečného tenkého vodiče je ve válcových souřadnicích dáno Ampérovým zákonem: $\mathbf{B} = \mu_0 I / (2\pi r) \boldsymbol{\tau}$, kde r je kolmá vzdálenost daného místa od vodiče, osa z míří ve směru vodiče, $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor tečný ke (kruhovým) siločarám $\boldsymbol{\tau} = (-y/r, x/r, 0)$. Magnetické pole má tedy složky ($k = \mu_0 I / (2\pi)$)

$$\begin{aligned} B_x &= k(-y/r^2), \\ B_y &= k(+x/r^2), \\ B_z &= 0. \end{aligned}$$

Pro výpočet rotace budeme potřebovat derivaci vzdálenosti podle jednotlivých proměnných

$$\begin{aligned} \partial r / \partial x &= \partial (x^2 + y^2)^{1/2} / \partial x = x/r, \\ \partial r / \partial y &= \partial (x^2 + y^2)^{1/2} / \partial y = y/r. \end{aligned}$$

Jednotlivé složky vektoru $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ jsou

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}}_0, \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}}_0, \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}}_{\text{nutno dopočítat}} \end{pmatrix}.$$

Derivace jednotlivých složek je v tomto případě optimální řešit jako derivace podílu

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^2} \right) = k \frac{\frac{\partial x}{\partial x} r^2 - x 2r \frac{\partial r}{\partial x}}{r^4} = k \frac{r^2 - x 2r \frac{x}{r}}{r^4} = k \frac{r^2 - x^2}{r^4}$$

a podobně bude $\frac{\partial B_x}{\partial y} = -k \frac{r^2 - y^2}{r^4}$, takže poslední složka vektoru $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ je

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = k \frac{r^2 - x^2 + r^2 - y^2}{r^4} = k \frac{2r^2 - 2(x^2 + y^2)}{r^4} = 0; \quad r \neq 0.$$

Rotace magnetického pole je tedy v celém prostoru nulová (nejsou v něm víry) kromě množiny $r = 0$, ve které je centrum vírů a současně zdroj magnetického pole - singulární proudová hustota.

Poznámka: Čtenář si laskavě osvěží v paměti, že víry jsou v buňkách a v přeneseném významu též v počítačích, výři létají po lesích a naše výpočty se týkají vírů.

4. ABC toky

Zadání: Nalezněte rotaci a divergenci pole daného předpisem

$$\mathbf{V} = (A \cos y + B \sin z, B \cos z + C \sin x, C \cos x + A \sin y).$$

Řešení: $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$; $\operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{V}$. Pole nemá zdroje, ale je vírové. Promyslete si jak takové pole vypadá (jeho rotace je rovna samotnému poli) a ověřte (Mathlab, Mathematica...). Mohou taková pole existovat v přírodě? Ano, jde o konfigurace, ve kterých se nabitě částice pohybují podél siločar magnetického pole. Proudová hustota je v tomto případě rovnoběžná s magnetickým polem $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$. Z Maxwellovy rovnice $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$ (magnetický problém bez elektrických polí) plyne $\operatorname{rot} \mathbf{H} \parallel \mathbf{B}$, tj. rotace $\mathbf{B}$ je úměrná samotnému $\mathbf{B}$. V matematice se taková pole nazývají Beltramiho pole a mají šroubovicový (helikální charakter). Vír takového pole není nikdy plošný.

5. Helicita

Zadání: Nalezněte helicitu ABC toku z předchozího příkladu.

Návod: Helicita je matematická veličina, kterou se testuje šroubovitost pole. Je definována vztahem $\mathcal{H} = \mathbf{V} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V}$

Řešení: $\mathcal{H} = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB \cos y \sin z + 2BC \cos z \sin x + 2AC \cos x \sin y$