Kvantová fyzika I – příklady

1. Vlákno žárovky

Zadání: Určete, jaký proud by měl procházet kovovým vláknem o průměru 0,1 mm, které je umístěno ve vyčerpané baňce, aby se jeho teplota udržela na konstantní hodnotě 2 500 K. Předpokládejte, že vlákno vyzařuje jako absolutně černé těleso, tepelné ztráty spojené s vedením tepla zanedbejte. Rezistivita vodiče je ρ =2,5×10^{-4} Ωcm.

Řešení: Vzhledem k tomu, že vlákno září jako absolutně černé těleso, potom celkové množství energie, které je vyzářeno za 1 s z 1 m^2 plochy, můžeme určit ze Stefanova-Boltzmannova zákona

$$I = \sigma T^4 . \tag{1}$$

Celkové množství energie vyzařované plochou vodiče S za 1 s tedy je

$$W = IS = \sigma T^4 2\pi r\, l , \tag{2}$$

kde l je délka vodiče. Aby teplota vlákna byla konstantní, je třeba tuto vyzářenou energii kompenzovat energií, která vzniká při průchodu elektrického proudu I vodičem o odporu R za 1 s, tedy

$$W = RI^2 . \tag{3}$$

Dostáváme

$$RI^2 = \sigma T^4 2\pi rl . \tag{4}$$

Odpor vodiče o poloměru r je

$$R = \rho \frac{l}{\pi r^2} . \tag{5}$$

Dosazením za R do rovnice (4) pro proud dostáváme

$$I = \pi\, r T^2 \sqrt{\frac{2\sigma r}{\rho}} \approx 1{,}47 \text{ A}.$$

2. Slunce

Zadání: Jaká je povrchová teplota Slunce, budeme-li předpokládat, že Slunce září jako absolutně černé těleso a že maximum intenzity jeho záření při dané teplotě připadá na vlnovou délku λ_m = 5,1×10^{-7} m? Určete výkon, vyzařovaný z 1 m^2 povrchu Slunce.

Řešení: K určení teploty povrchu Slunce použijeme Wienův zákon posuvu

$$\lambda_\mathrm{m} T = b , \tag{6}$$

odkud dostáváme

$$T = 5700 \text{ K} .$$

Výkon vyzařovaný z 1 m^2 plochy slunečního povrchu určíme s použitím Stefanova-Boltzmannova zákona, do kterého dosadíme právě určenou teplotu povrchu Slunce:

$$I = \sigma T^4 = 5{,}9 \times 10^7 \,\mathrm{W m^{-2}} .$$

3. Fotoelektrický jev

Zadání: Elektromagnetické záření o vlnové délce 436 nm dopadá na povrch lithia, které je umístěno ve vakuu. Je-li výstupní práce lithia $W_i = 3{,}8\times10^{-19}$ J, určete maximální kinetickou energii emitovaných elektronů, jejich rychlost a maximální vlnovou délku záření, které ještě bude elektrony z kovu emitovat.

Řešení: Z Einsteinovy rovnice pro fotoelektrický jev

$$\hbar\omega = W_i + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (7)$$

určíme maximální kinetickou energii emitovaných elektronů

$$W_{\text{kin,max}} = \hbar\omega - W_i = \hbar\frac{2\pi c}{\lambda} - W_i = 7\times10^{-18}\ \text{J}\,.$$

Maximální rychlost těchto elektronů bude

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2W_{\text{kin,max}}}{m_e}} = 3{,}9\times10^5\ \text{m/s}\,.$$

Vlnová délka záření, které ještě bude elektrony z povrchu kovu uvolňovat, může být určena z podmínky

$$\hbar\omega = \hbar\frac{2\pi c}{\lambda} = W_i \qquad (8)$$

Pro tuto vlnovou délku dostáváme $\lambda = 5{,}2\times10^{-7}$ m. Je zřejmé, že emitovat elektrony z lithia může pouze elektromagnetické záření o vlnové délce kratší než $5{,}2\times10^{-7}$ m.

4. Hmotové vlny

Zadání: Určete vlnovou délku de Brogliovy vlny elektronu, který byl urychlen průchodem potenciálním rozdílem $U = 100$V.

Řešení: Rychlost elektronu určíme z jeho kinetické energie

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eU\,. \qquad (9)$$

Dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = 5{,}9\times10^6\,\text{m/s}.$$

Hybnost elektronu tedy je

$$p = m_e\, v = 5{,}4\times10^{-24}\ \text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}\,.$$

Vlnová délka de Brogliovy vlny je

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_e v} = 1{,}2\times10^{-10}\ \text{m}.$$

Povšimněte si, že tato vlnová délka je řádově stejně velká jako poloměr vodíkového atomu.

5. Bohrův model

Zadání: Určete poloměry, rychlosti a energie možných drah v Bohrově modelu.

Řešení: Bohrovu kvantovací podmínku budeme kombinovat s rovností odstředivé a coulombické síly:

$$
\begin{aligned}
2\pi r_n &= n\lambda\,; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m v_n} \\
\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} &= \frac{m v_n^2}{r_n}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Obě rovnice jsou soustavou pro určení poloměrů a rychlostí. Po snadném výpočtu vyjde:

$$
\begin{aligned}
r_n &= \frac{4\varepsilon_0\hbar^2}{m_\mathrm{e} e^2} n^2\,; \\
v_n &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar n}\,.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Po dosazení numerických hodnot dostaneme pro $n = 1$ dostaneme

$$r_1 = 0{,}53 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}.$$

Pro rychlost elektronu na této dráze pak dostáváme

$$v_1 = 2{,}18 \times 10^6\,\mathrm{ms^{-1}}.$$

Nakonec zbývá určit energii:

$$E_n = \frac{1}{2} m_\mathrm{e} v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = E_n = -\left(\frac{e^4 m_e}{32\pi\varepsilon_0^2\hbar^2}\right)\frac{1}{n^2}. \tag{12}$$

Základní stav atomu je charakterizován hlavním kvantovým číslem $n = 1$. Po dosazení numerických hodnot pro celkovou energii dostáváme

$$E_1 = -2{,}17 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} = -13{,}6\ \mathrm{eV}.$$

6. Fraunhoferova čára

Zadání: Na základě Bohrova modelu určete vlnovou délku elektromagnetického záření emitovaného vodíkovým atomem při přechodu elektronu z kvantové dráhy $n = 4$ na kvantovou dráhu $n = 2$. Rychlost světla je $c = 3\times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Řešení: Frekvenci a následně i vlnovou délku emitovaného záření určíme z energie fotonu, který je vyzářen při přechodu elektronu ze čtvrté kvantové dráhy na druhou:

$$E_m - E_s = \hbar\omega\,.$$

Dosazením za celkovou energii elektronu na n-té kvantové dráze

$$E_n = -\left(\frac{m_\mathrm{e} e^4}{32\pi\varepsilon_0^2\hbar^3}\right)\frac{1}{n^2}\,,$$

obdržíme pro úhlovou frekvenci emitovaného záření

$$\hbar\omega = \frac{m_\mathrm{e} e^4}{32\pi\varepsilon_0^2\hbar^3}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Po převodu úhlové frekvence na vlnovou délku dostaneme výsledek

$$\lambda = 0{,}485\times 10^{-6}\,\mathrm{m}\,.$$

Záření o této vlnové délce bylo pozorováno ve spektru Slunce (Fraunhofer, 1815) a popsáno jako Fraunhoferova čára F.