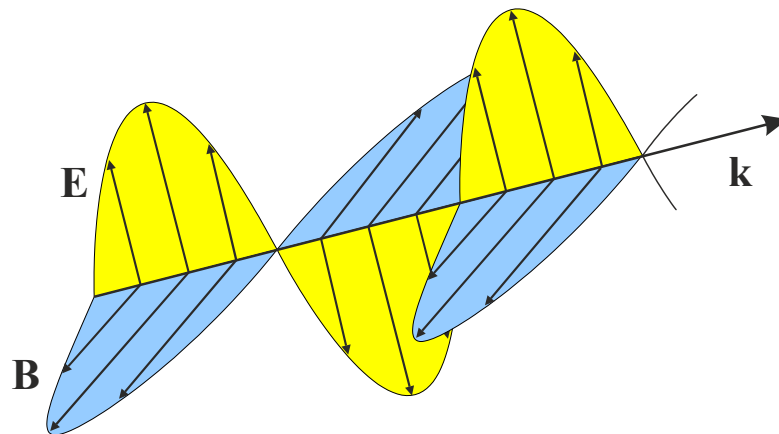


Fyzika II



STUDIJNÍ TEXT
PETR KULHÁNEK



OBSAH

PŘEDMLUVA, ÚVOD	3
1. GRADIENT, DIVERGENCE, ROTACE	4
GRADIENT	4
DIVERGENCE	8
GAUSSOVA VĚTA MAGNETOSTATIKY	11
GAUSSOVA VĚTA ELEKTROSTATIKY	12
ROTACE	13
FARADAYŮV INDUKČNÍ ZÁKON	14
AMPÉRŮV ZÁKON	15
2. VLNĚNÍ	16
ZÁKLADNÍ POJMY	16
RŮZNÉ DRUHY VLN	21
SKLÁDÁNÍ VLN	25
HUYGENSŮV A FERMATŮV PRINCIP	27
ZÁKON LOMU	28
DOPPLERŮV JEV	29
RÁZOVÉ VLNY A ČERENKOVOVO ZÁŘENÍ	31
VLNOVÁ ROVNICE	33
VLASTNOSTI PARCIÁLNÍCH MÓDŮ	34
3. ELEKTROMAGNETICKÉ POLE	36
VLNY VE VAKUU	36
VLNY V ANIZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ	38
VLNY VE VODIVÉM PROSTŘEDÍ	40
POLE NA ROZHRAŇÍ	42
VLNA NA ROZHRAŇÍ	44
ZÁKONY ZACHOVÁNÍ	46
POTENCIÁLY POLE	49
4. RELATIVITA	50
LORENTZOVA TRANSFORMACE	50
ČTYŘVEKTORY, INTERVAL A KAUZALITA	56
RELATIVISTICKÁ DYNAMIKA	63
RELATIVISTICKÉ PARADOXY	66
5. KVANTOVÁ TEORIE	68
VZNIK A VÝVOJ KVANTOVÉ TEORIE	69
OPERÁTORY V KVANTOVÉ TEORII	73
ZÁKLADNÍ PRINCIPY A POSTULÁTY	79
VLASTNÍ STAVY ENERGIE, SCHRÖDINGEROVA ROVNICE	83
KVANTOVÁ ČÍSLA	90

PŘEDMLUVA, ÚVOD

Fyzika II je volným pokračování Fyziky I. Je věnována zejména nejruznějším podobám vlnění. V první části prepíšeme Maxwellovy rovnice do diferenciálního tvaru. Poté se budeme věnovat elektromagnetickým vlnám ve vakuu a ve vodivém prostředí. Povšimneme si také zvukových vln, Dopplerova jevu a paprskové optiky. K dalším probíraným partiím patří speciální relativita, kvantová fyzika, termodynamika a statistická fyzika. Z množství oborů, kterých se přednáška dotýká, je jasné, že jde jen o zcela základní seznámení s jednotlivými partiemi fyziky. Skripta budou postupně vznikat „za pochodu“ v době koronavirové krize podzim roku 2020.

V Praze 23. září 2020,
Petr Kulhánec

1. GRADIENT, DIVERGENCE, ROTACE

Derivace je velmi účinným nástrojem ke zjišťování vlastností funkcí. Ve fyzice nejčastěji derivujeme skalární nebo vektorová pole. Skalární pole přiřazuje poloze jednu hodnotu, například hustotu, teplotu nebo tlak, vektorové pole přiřazuje trojici hodnot, například jde o rychlostní pole, elektrické pole nebo magnetické pole:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}): \quad R^3 &\rightarrow R, \\ \mathbf{K}(\mathbf{x}): \quad R^3 &\rightarrow R^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Pokud se pole mění s časem, přibude ještě časová souřadnice a jde o zobrazení z R^4 . V relativitě používáme čtyřvektory, takže nakonec může jít o zobrazení $R^4 \rightarrow R^4$. V teorii vlnění se používají většinou komplexní funkce, pak jde o zobrazení $R^4 \rightarrow C^4$. Jako zástupný symbol pro jakákoli pole, ať už skalární, vektorová či jiná často používáme symbol ψ . Při derivování podle prostorových souřadnic lze často využít naznačenou operaci

$$\blacktriangleright \quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2)$$

Existuje velké množství nejrůznějších zápisů této operace, nejčastěji používáme symbol ∇ :

$$\nabla \equiv \text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \equiv (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \equiv \partial_k. \quad (3)$$

Všechny zápisy jsou jen zkratkou pro tutéž operaci, která se nazývá gradient. Značíme ji symbolem obráceného písmene delta ∇ a říkáme „nabla“. Název zavedl skotský matematický fyzik Peter Guthrie Tait (1831–1901) podle trojúhelníkového tvaru asyrské harfy ze 7. století př. n. l. Asýrie byla v severní Mezopotámii. Slovo *nabla* (Nbl) je z aramejštiny, která ho upravila z hebrejského *Nev(b)el*. Stejný nástroj už ale znali Sumerové v období 3 100 před naším letopočtem. James Clerk Maxwell razil pro tento operátor název „slope“ z anglického slova znamenajícího spád či sklon. Návrh Taita ale zvítězil. Na skalární funkci je možné působit jediným způsobem, pro vektorová pole je více možností:

$$\blacktriangleright \quad \begin{array}{lll} \nabla f: & \partial_k f & \text{gradient} \\ \nabla \cdot \mathbf{K}: & \partial_k K_k & \text{divergence} \\ \nabla \times \mathbf{K}: & \varepsilon_{klm} \partial_l K_m & \text{rotace} \\ \nabla \otimes \mathbf{K}: & \partial_k K_l & \text{tenzorový gradient} \end{array} \quad (4)$$

Gradient

Zabývejme se nyní gradientem skalární funkce. Ukážeme si, při kterých úkonech může být gradient užitečný. Půjde o derivaci ve směru, Taylorův rozvoj, konvektivní derivaci, kolmici k izoploše a vztah mezi silou a potenciální energií. Samozřejmě, že jsou i další oblasti, v nichž má gradient nezastupitelné místo.

1. Derivace ve směru

Při výpočtu parciálních derivací se k dané funkci blížíme vždy ve směru os. Připusťme nyní, že se k ní budeme blížit v obecném směru a zavedme derivaci ve směru \mathbf{s} vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{s}) - f(\mathbf{x})}{h \|\mathbf{s}\|}. \quad (5)$$

Tuto limitu nyní snadno spočteme za pomoci Taylorova rozvoje:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_k} h s_k + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} h s_k h s_l + \dots - f(\mathbf{x})}{h \|\mathbf{s}\|} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{s_k}{\|\mathbf{s}\|}.$$

První a poslední výraz se odečte. Ve všech ostatních členech, s výjimkou druhého, zůstane veličina h , která se limitně blíží k nule. Zavedeme-li jednotkový vektor $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s}/\|\mathbf{s}\|$, máme pro derivaci ve směru užitečný vztah

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) f; \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}. \quad (6)$$

● **Příklad:** Derivujte skalární funkci ve směru (1, 2). Postup řešení je přímočarý:

$$\mathbf{s} = (1, 2);$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right);$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \cdot (\partial_x, \partial_y) = \frac{\partial_x}{\sqrt{5}} + 2 \frac{\partial_y}{\sqrt{5}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) f = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

2. Taylorův rozvoj

Za pomoci gradientu lze velmi snadno zapsat první netriviální člen Taylorova rozvoje skalárního či vektorového pole ve třech dimenzích:

$$\psi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \psi(\mathbf{x}) + \frac{\partial \psi}{\partial x_k} h_k + \dots = \psi(\mathbf{x}) + h_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \dots$$

Vztah nyní snadno zapíšeme s pomocí operace gradientu do finálního tvaru:

$$\blacktriangleright \quad \psi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \psi(\mathbf{x}) + (\mathbf{h} \cdot \nabla) \psi + \dots \quad (7)$$

Uvedený vztah je elegantní a ve fyzice se velmi často používá.

3. Konvektivní derivace

Předpokládejme, že máme nějaké pole, které se mění v čase i v prostoru a naším úkolem je nalézt jeho úplnou časovou derivaci:

$$\frac{d\psi(t, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_k} u_k,$$

kde jsme jako označili rychlostní pole proudění $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Využijeme-li gradient, máme:

$$\blacktriangleright \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \psi; \quad \text{resp.} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla). \quad (8)$$

První část derivace je partiální derivace v čase, vyjadřuje lokální změny funkce. Druhá část se nazývá *konvektivní* derivace a popisuje změny funkce způsobené prouděním.

Typickým využitím je například pohybová rovnice elementu tekutiny:

$$\Delta m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \Delta \mathbf{F} .$$

Rovnici vztáhneme na jednotku objemu a rozepíšeme úplnou časovou derivaci podle (8):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} , \quad (9)$$

kde \mathbf{f} je hustota sil působících na tekutinu.

4. Kolmice k izoploše

Obecnou nadplochu v N dimenzích můžeme implicitně zapsat jako

$$\phi(x_1, \dots, x_N) = \text{const} . \quad (10)$$

Příkladem může být rovnice povrchu koule ve třech dimenzích $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Obecně v N dimenzích představuje rovnice (10) $N-1$ rozměrnou množinu. Ve dvou dimenzích jde o křivku, ve třech dimenzích o plochu. Stejným způsobem můžeme zapsat rovnici konstantních ploch nějaké veličiny, tzv. izoploch – například izoterm pro teplotu, izobar pro tlak nebo izofot pro intenzitu světla. Za ϕ jen dosadíme příslušnou veličinu. Diferencujeme nyní vztah (10):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx_k = 0 ; \quad \Rightarrow \quad \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \phi \perp d\mathbf{l} . \quad (11)$$

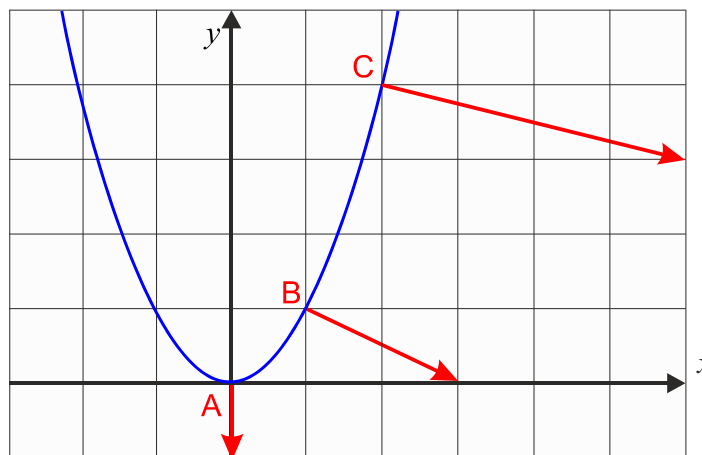
Gradient funkce ϕ je tedy kolmý na libovolný vektor plochy vedený z daného bodu. Tedy gradient je kolmý na izoplochu definovanou rovnicí (10). Derivace je směrnici funkce, proto gradient míří kolmo z dané izoplochy k dalším izoplochám s vyšší hodnotou. Kolmici k izoploše lze tedy nalézt velmi snadno:

$$\mathbf{n} = \nabla \phi ;$$

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \quad (12)$$

První varianta je obecná normála, druhá je normála normovaná k jedné, tj. normálový vektor \mathbf{v} má velikost rovnou jedné. U uzavřené plochy vždy volíme normálový vektor tak, aby z ní mířil směrem ven.

● **Příklad:** Nalezněte kolmice k parabole $y = x^2$ v různých bodech.



Rovnici nejprve prepíšeme do implicitního tvaru

$$\phi(x, y) = x^2 - y = 0 \quad (13)$$

Nyní už snadno nalezneme gradient, který je kolmý na nadplochu (v tomto případě parabolu):

$$\mathbf{n} = \nabla\phi = (2x, -1). \quad (14)$$

Pokud dosadíme různé body z obrázku, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_A &= (0, -1); \\ \mathbf{n}_B &= (2, -1); \\ \mathbf{n}_C &= (4, -1). \end{aligned} \quad (15)$$

5. Síla a energie

Předpokládejme, že máme potenciální pole, v němž se práce koná na úkor potenciální energie

$$dA = -dW_p. \quad (16)$$

Vykonanou práci nyní vyjádříme jako sílu násobenou dráhou a kosinem sevřeného úhlu a poté rozepíšeme diferenciál na pravé straně:

$$F dl \cos \alpha = -\frac{\partial W_p}{\partial x} dx_k,$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\nabla W_p \cdot d\mathbf{l}.$$

Vzhledem k tomu, že uvedený vztah platí pro jakýkoli element dráhy $d\mathbf{l}$, musí platit

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p. \quad (17)$$

Uvedený vztah říká, že síla míří vždy k minimu potenciální energie. U konzervativního pole tedy postačí k jeho popisu jediná skalární veličina – potenciální energie. Odpovídající sílu už vždy dostaneme ze vztahu (17). Například pro gravitační pole tělesa o hmotnosti M , které se nachází v počátku souřadnic a působí na těleso o hmotnosti $m \ll M$ máme:

$$W_p = -G \frac{mM}{r}. \quad (18)$$

Jednotlivé složky síly už snadno nalezneme:

$$\begin{aligned} F_k &= -\frac{\partial W_p}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[G \frac{mM}{r} \right] = GmM \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x_k} = \\ &= GmM \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_k} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{x_k}{r}. \end{aligned} \quad (19)$$

Skutečně jsme dostali správnou hodnotu složek sil včetně směrového vektoru:

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (20)$$

Snadno nalezneme velikost síly:

$$F = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{\frac{G^2 m^2 M^2}{r^6} (x^2 + y^2 + z^2)} = G \frac{mM}{r^2}. \quad (21)$$

Divergence

Velmi důležitou úlohou je zjištění, zda v nějakém bodě prostoru vektorové pole vyvěrá (příkladem může být elektrické pole vyvěrající z kladného náboje), nebo zda daným bodem prochází, či v něm zaniká (například elektrické pole v záporném náboji). K úvahám nad touto úlohou bude užitečné zavést element toku vektorového pole:

$$\blacktriangleright \quad d\phi \equiv \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}; \quad d\mathbf{S} = \mathbf{v} dS. \quad (22)$$

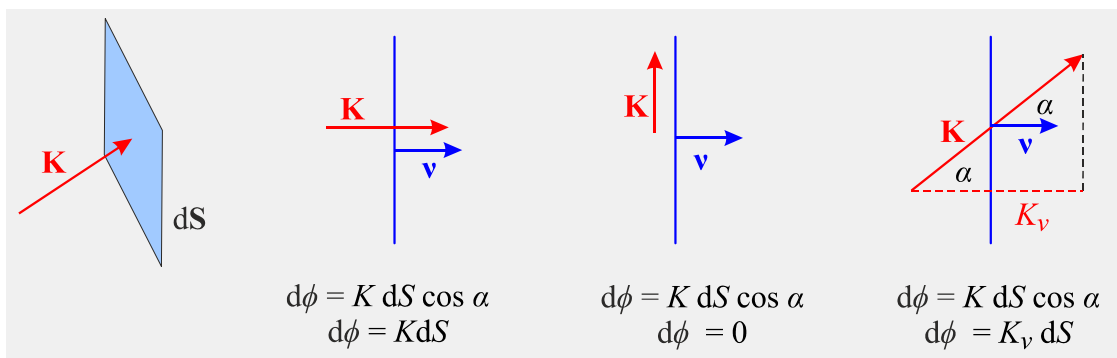
Elementární ploška je charakterizována vektorem, který má velikost této plošky a směr normály k této plošce (kolmý vektor o velikosti rovné 1). Rozměr takto zavedené veličiny je roven rozměru vektorového pole násobeného metrem na druhou:

$$[d\phi] = [\mathbf{K}] \text{m}^2. \quad (23)$$

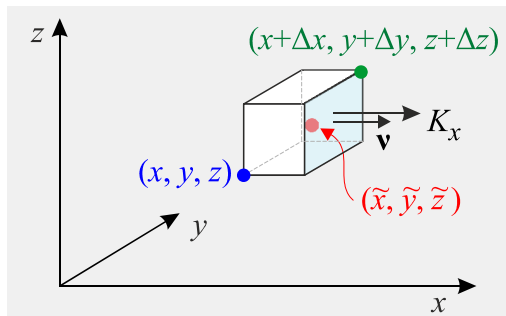
Tedy rozměr elementu toku magnetického pole bude Tm^2 , elektrického pole $\text{Vm}^{-1}\text{m}^2 = \text{Vm}$, rychlostního pole $\text{ms}^{-1}\text{m}^2 = \text{m}^3\text{s}^{-1}$ atd.

Poznámka: Tok vektorového pole se týká intenzivních vektorových veličin (nezávisí na množství látky), například elektrického, magnetického či rychlostního pole. Nezaměňujte tento tok s tokem aditivní (je úměrná množství látky) veličiny A , který je definován jako množství veličiny proteklé jednotkovou plochou za jednotku času (tok hmoty, tok energie, tok náboje, tok hybnosti, tok entropie atd.), tj. $[\mathbf{j}] = [A]/(\text{m}^2\text{s})$. Například tok náboje má jednotku $\text{Cm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Z definice (22) je jasné, že tok pole ve směru normály je maximální, kolmo na normálu nulový a při šikmém toku se z vektoru pole uplatní jen jeho průmět do směru normály:



Nyní určíme celkový tok pole v plochou kvádru, který vytvoříme kolem zvoleného bodu. Později pak limitním přechodem kvádr stáhneme až do daného bodu. Tok pole bude mít celkem šest členů (přes šest plošek kvádru). Nejbližší bod kvádru k počátku souřadnic označíme (x, y, z) , nejvzdálenější $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ a náš bod, tedy střed kvádru $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Celkový tok pole \mathbf{K} plochou kvádru bude (vektor pole lokalizujeme vždy uprostřed právě počítané stěny, vektor normály míří směrem ven):



$$\Delta\phi = \sum_{a=1}^6 \Delta\phi_a.$$

Toky zapíšeme v pořadí stěn: pravá, levá, zadní, přední, horní a dolní. Stěny kvádru mají hrany o velikosti Δx , Δy , Δz , z toho snadno určíme jejich velikosti:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= K_x(x + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z})\Delta y \Delta z - K_x(x, \tilde{y}, \tilde{z})\Delta y \Delta z + \\ &+ K_y(\tilde{x}, y + \Delta y, \tilde{z})\Delta z \Delta x - K_y(\tilde{x}, y, \tilde{z})\Delta z \Delta x + \\ &+ K_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z + \Delta z)\Delta x \Delta y - K_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z)\Delta x \Delta y.\end{aligned}$$

Nyní vytkneme ze všech členů objem kvádru:

$$\Delta\phi = \left[\begin{aligned} &\frac{K_x(x + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) - K_x(x, \tilde{y}, \tilde{z})}{\Delta x} + \\ &+ \frac{K_y(\tilde{x}, y + \Delta y, \tilde{z}) - K_y(\tilde{x}, y, \tilde{z})}{\Delta y} + \\ &+ \frac{K_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z + \Delta z) - K_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z)}{\Delta z} \end{aligned} \right] \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Provedeme-li nyní limitní přechod $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, objeví se v hranaté závorce součet parciálních derivací

$$d\phi = \left(\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \right) dV. \quad (24)$$

Výraz v kulaté závorce nazýváme divergencí pole. Jde o jedno jediné číslo, které značíme

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{K} \equiv \nabla \cdot \mathbf{K} = \partial_l K_l = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}. \quad (25)$$

Tok pole infinitezimálním kvádrem vedeným kolem našeho zvoleného bodu tedy je

$$\blacktriangleright \quad d\phi \equiv \sum_a \mathbf{K}_a \cdot d\mathbf{S}_a = \operatorname{div} \mathbf{K} dV. \quad (26)$$

Je jasné, že hledaným testem je právě operace divergence. Pokud je kladná, z bodu pole vyvěrá, pokud je záporná, do bodu se pole noří a pokud je nulová bodem pole prochází:

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{K} \begin{cases} > 0: & \text{pole vyvěrá,} \\ = 0: & \text{pole prochází,} \\ < 0: & \text{pole zaniká.} \end{cases} \quad (27)$$

Pokud bychom měli v prostoru konečnou množinu Ω , můžeme tok pole přes její hranici $\partial\Omega$ snadno spočítat. Oblast Ω vyplníme beze zbytku mnoha kvádry. Na jejich sousedících stěnách se tok vždy vyruší, protože vnější normály sousedních kvádrů budou mířit na opačnou stranu. Jediný nenulový tok bude na hranici oblasti, kde už žádné sousedící kvádry či jiné útvary nejsou. Proto bude platit

$$\phi \equiv \oiint_{S=\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V=\Omega} \operatorname{div} \mathbf{K} dV. \quad (28)$$

Levá integrace je naše sčítání toku přes jednotlivé plošky, napravo je výsledek (26). Odvozený vztah se nazývá *Gaussova věta* a je užitečný při odvozování různých vztahů ve fyzice a při převodu plošných a objemových integrálů. Gaussovu větu nejčastěji píšeme ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad \oiint_{\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{K} dV. \quad (29)$$

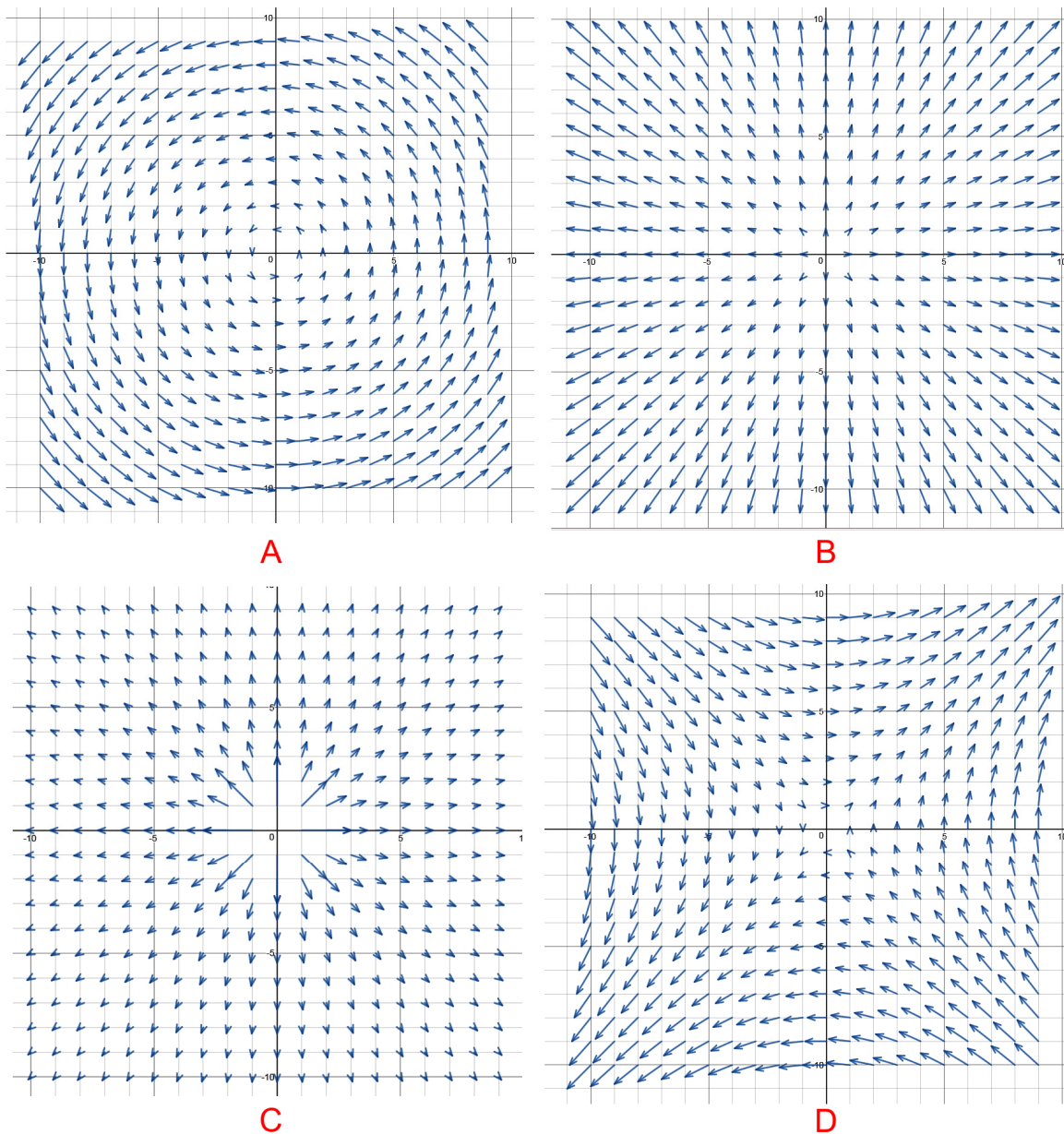
Ukažme si nyní výpočet divergence na čtyřech dvojrozměrných polích

$$\mathbf{A} = (-y, +x, 0);$$

$$\mathbf{B} = (+x, +y, 0);$$

$$\mathbf{C} = \alpha \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right); \quad (30)$$

$$\mathbf{D} = (+y, +x, 0)$$



Zakreslíme-li složky prvního pole v rovině (x, y) do obrázku, dostaneme typický vír kolem počátku, zakreslíme-li druhé pole, vzniknou radiální, stále se zvětšující vektory (úměrně vzdálenosti od počátku). Takové pole je nefyzikální a s rostoucí vzdáleností musí stále vznikat. Každý bod prostoru je jeho zdrojem. Třetí pole je intenzita elektrického pole bodového náboje, od počátku souřadnic pole klesá, jeho zdroj je pouze v počátku. Čtvrté pole nemá zjevně ani zdroje, ani netvoří víry. Spočtěme nyní divergence těchto polí:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0 + 0 = 0. \quad (31)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 1 + 1 = 2. \quad (32)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0 + 0 = 0. \quad (33)$$

První pole vytváří vír, ale nemá nikde zdroj, u druhého pole se v každém bodě prostoru vytváří radiální složka pole. Čtvrté pole nemá ani zdroje, ani víry. U třetího pole je výpočet divergence složitější, ale přímočarý:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{C} &= \partial_k C_k = \alpha \partial_k \left(\frac{x_k}{r^3} \right) = \alpha \left[\frac{(\partial_k x_k) r^3 - x_k \partial_k (r^3)}{r^6} \right] = \\ &= \alpha \left[\frac{3r^3 - x_k \frac{\partial r^3}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k}}{r^6} \right] = \alpha \left[\frac{3r^3 - x_k 3r^2 \frac{x_k}{r}}{r^6} \right] = \\ &= \alpha \left[\frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} \right] = \begin{cases} 0; & r \neq 0, \\ \infty; & r = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

Derivaci $\partial r / \partial x_k$ jsme již počítali ve vztahu (19), výsledek je x_k / r . Hodnota divergence je pochopitelná v tom smyslu, že zdroj pole je pouze v počátku (bodový náboj), všude jinde je divergence nulová a pole těmito body pouze prochází. Nekonečná hodnota divergence pole souvisí s tím, že náboj považujeme za bodový, tudíž je hustota náboje $\rho_Q = \Delta Q / \Delta V$ v počátku nekonečná. Je to analogické jako u pojmu hmotného bodu. Máli být nekonečně malý bod nositelem konečné hmotnosti, musí v něm být hustota hmoty $\rho_M = \Delta M / \Delta V$ nekonečná. S těmito problémy se formálně vypořádá až teorie distribucí, se kterou se seznámíme později.

Gaussova věta magnetostatiky

Ve Fyzice I jsme se seznámili s Gaussovou větou magnetostatiky:

$$\oiint_{S=\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (35)$$

Po aplikaci Gaussovy věty máme

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0. \quad (36)$$

Vzhledem k tomu, že relace platí pro jakýkoli objem, musí být integrand nulový (matematicky přesně by bylo „nulový až na množiny menší míry, resp. dimenze, než je oblast integrace“, těmito „jemnostmi“ se ale nebudeme zabývat a v dalších případech už na ně nebudeme upozorňovat):

$$\blacktriangleright \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (37)$$

Jde o první z Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru, která vyjadřuje nezdvojovost magnetického pole. Magnetické pole každým bodem prostoru jen prochází, nikde nejsou jeho zdroje. Magnetické monopóly neexistují. Podle některých teorií je ve vesmíru magnetických monopólů hodně, ale v průběhu inflační fáze se vesmír natolik nafoukl, že v námi pozorovatelné oblasti (nevidíme celý vesmír) zůstalo jen několik magnetických monopólů, a proto je nevidíme.

Gaussova věta elektrostatiky

Ve fyzice I jsme odvodili Gaussovu větu elektrostatiky v integrálním tvaru

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q; \quad \mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}), \quad (38)$$

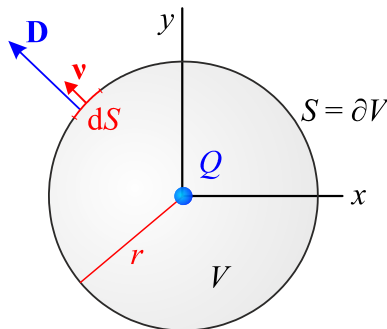
kde \mathbf{E} je intenzita elektrického pole, \mathbf{D} je tzv. indukce elektrického pole, která v sobě zahrnuje i reakci látky na přítomnost elektrického pole. Náboj na pravé straně je volný náboj pod integrační plochou. Rovnice (38) je integrální podobou další Maxwellovy rovnice. Převěďme vztah do diferenciálního tvaru. Nalevo budeme aplikovat Gaussovu větu (integrál bude přes objem ohraničený integrační plochou), pravou stranu napíšeme jako objemový integrál z hustoty elektrického náboje:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \iiint_V \rho_Q dV. \quad (39)$$

Uvedená relace musí platit pro jakýkoli objem, integrandy musí proto být totožné, tj.

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q. \quad (40)$$

Jde o diferenciální podobu Gaussovy věty elektrostatiky (zobecněného Coulombova zákona), která říká, že elektrická indukce \mathbf{D} vyvěrá z oblastí kladných nábojů a noří se do oblastí záporných nábojů. Na pravé straně vystupuje hustota volného náboje. Z diferenciální podoby Gaussovy věty elektrostatiky snadno odvodíme zpětně Coulombův zákon: zvolíme souřadnice s počátkem v náboji a kolem náboje opíšeme kulovou plochu. Rovnici (39) přeintegrujeme přes objem takto vzniklé koule:



$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \iiint_V \rho_Q dV. \quad (41)$$

Integrál nalevo za pomoci Gaussovy věty převedeme na ohraničující plochu. Integrál napravo dá celkový náboj uzavřený v ploše, v tomto případě náboj naší částice:

$$\oiint_{S=\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q. \quad (42)$$

Vektor elektrické indukce i vektor elementu plochy mají stejný směr, úhel mezi nimi je nulový a kosinus ve skalárním součinu roven jedné:

$$\oiint_{S=\partial V} D dS = Q. \quad (43)$$

Na celém povrchu koule je velikost D stejná, můžeme ji tedy z integrace vytknout. Zbývající integrál dá celkovou plochu ohraničující koule:

$$D 4\pi r^2 = Q. \quad (44)$$

Převědeme-li elektrickou indukci na intenzitu elektrického pole, máme výsledný integrální vztah, který není nic jiného než Coulombův zákon:

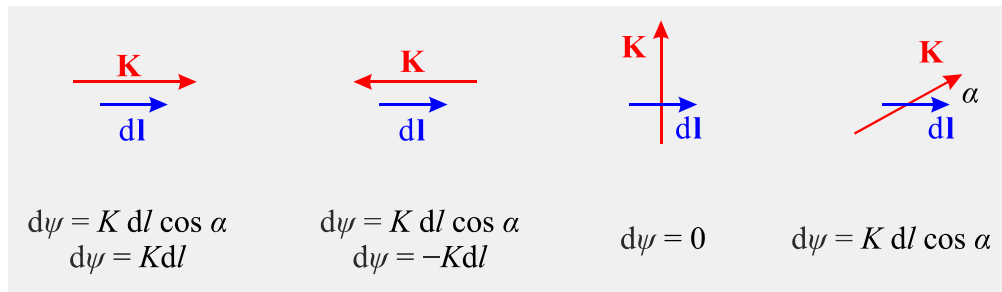
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (45)$$

Rotace

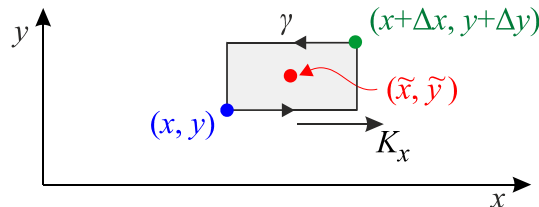
Přejdeme nyní k jiné úloze. Budeme testovat, zda naše vektorové pole vytváří v okolí zvoleného bodu vír. Pokud si představíte vír nakreslený na papíru, tak ho uvidíte pouze ze směru kolmého na papír. Bude-li se dívat v rovině papíru, vír neodhalíte. K detekci víru jsou zapotřebí tři nezávislé pohledy ze tří různých směrů. Proto bude mít test na víry vektorový charakter. Užitečným nástrojem pro naše testování bude element *cirkulace* pole:

$$d\psi \equiv \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}, \quad (46)$$

kde \mathbf{K} je sledované pole a $d\mathbf{l}$ element křivky. Teče-li pole ve směru křivky, bude cirkulace maximální, a to $K dl$, teče-li pole proti směru křivky, bude cirkulace minimální, a to $-K dl$. Teče-li pole kolmo na křivku, bude cirkulace nulová.



Představme si nyní bod v prostoru, kolem něhož nakreslíme obecně orientovaný obdélník a provedeme projekce bodu i s obdélníkem do všech tří souřadnicových rovin. V rovině (x, y) bude situace vypadat takto:



Nyní nalezneme cirkulaci pole kolem tohoto obdélníku po matematicky kladně orientované křivce γ tvořené hranami obdélníku (značení bodů je stejné jako při odvození divergence). Příspěvky zapíšeme v pořadí: dolní, pravá, horní a levá hrana, hodnotu pole vezmeme vždy uprostřed hrany. Hrany mají velikosti Δx , Δy :

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_{a=1}^4 \Delta\psi_a = K_x(\tilde{x}, y) \Delta x + K_y(x + \Delta x, \tilde{y}) \Delta y - K_x(\tilde{x}, y + \Delta y) \Delta x - K_y(x, \tilde{y}) \Delta y = \\ &= \left[\frac{K_y(x + \Delta x, \tilde{y}) - K_y(x, \tilde{y})}{\Delta x} - \frac{K_x(\tilde{x}, y + \Delta y) - K_x(\tilde{x}, y)}{\Delta y} \right] \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Nyní provedeme limitní přechod $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ a dostaneme (element plochy s normálou ve směru osy z označíme jako $dS_z \equiv dx dy$):

$$d\psi = \left[\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right] dS_z. \quad (47)$$

Provedeme-li superpozici všech tří projekcí, vznikne obecný obdélník a cirkulace kolem něho bude mít hodnotu (ostatní členy získáme cyklickou záměnou)

$$d\psi = \left[\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \right] dS_x + \left[\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \right] dS_y + \left[\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right] dS_z. \quad (48)$$

Je jasné, že v hranatých závorkách jsou složky vektorového součinu gradientu a naším vektorovým polem, proto můžeme pro element cirkulace pole psát:

$$\blacktriangleright \quad d\psi \equiv \sum_a \mathbf{K}_a \cdot d\mathbf{l}_a = (\nabla \times \mathbf{K}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (49)$$

O tom, zda je cirkulace pole kolem obdélníku nenulová (a pole tvoří vír) rozhoduje vektorový součin gradientu s polem, kterému říkáme rotace pole:

$$\blacktriangleright \quad \text{rot } \mathbf{K} \equiv \nabla \times \mathbf{K}. \quad (50)$$

Jednotlivé složky rotace korespondují s naším pohledem na vír ve směru odpovídajících si souřadnicových os. Pokud jsou všechny složky rotace nulové, pole netvoří kolem bodu vír. Pokud je libovolná složka nenulová, pole kolem daného body vytváří vír:

$$\blacktriangleright \quad \text{rot } \mathbf{K} \begin{cases} = (0, 0, 0): & \text{pole netvoří vír,} \\ \neq (0, 0, 0): & \text{pole tvoří vír.} \end{cases} \quad (51)$$

Určeme nyní rotaci polí \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} ze vztahu (30):

$$\text{rot } \mathbf{A} = (0, 0, 2); \quad \text{rot } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{C} = \text{rot } \mathbf{D} = (0, 0, 0). \quad (52)$$

Jedině první pole má nenulovou rotaci, vír je patrný pouze při pohledu ve směru osy z . Jde o nefyzikální vír, jehož intenzita roste se vzdáleností od středu (v každém bodě prostoru je jakési dmychadlo, které vír zesiluje). Proto je rotace nenulová ve všech bodech prostoru.

Uvažujme nyní konečnou plochu S ohraničenou uzavřenou křivkou γ . Naším úkolem bude spočítat cirkulaci pole podél této křivky. Plochu ohraničenou křivkou vyplníme mnoha malými obdélníčky, které spolu sousedí. Každý obdélník představuje matematicky kladně orientovanou uzavřenou křivku. Na společných hranách bude cirkulace pole vždy nulová, neboť jsou hrany opačně orientované. Jediná nenulová cirkulace bude na hranách přiléhajících k hranici našeho útvaru. Limitním přechodem z (49) máme

$$\blacktriangleright \quad \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{K}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (53)$$

což je *Stokesova věta* integrálního počtu, která převádí plošný integrál na křivkový.

Faradayův indukční zákon

Ve Fyzice I jsme si odvodili integrální podobu Faradayova indukčního zákona:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (54)$$

Faradayův indukční zákon zapsaný ve tvaru (54) je integrální podobou další z Maxwellových rovnic. Nás bude opět zajímat diferenciální tvar této rovnice. Proto převedeme integrál vlevo za pomoci Stokesovy věty na plošný integrál

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (55)$$

Oba integrály se musí rovnat pro jakoukoli zvolenou plochu, proto musí být integrandy totožné, což nás přivádí k diferenciální podobě další z Maxwellových rovnic – Faradayova indukčního zákona:

$$\blacktriangleright \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (56)$$

Ampérův zákon

Ve Fyzice I jsme odvodili integrální tvar Ampérova zákona:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}; \quad \mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{B}). \quad (57)$$

Druhý vztah je definičním vztahem intenzity magnetického pole, která v sobě zahrnuje jak původní pole \mathbf{B} , tak reakci látky \mathbf{M} . Proud na pravé straně je vodivostní proud tekoucí plochou uvnitř ohraničující křivky γ . Povšimněte si, že uzávorkování jednotlivých členů je z historických důvodů jiné než v případě elektrického pole (38). Rovnici opět převedeme do diferenciálního tvaru. Nalevo použijeme Stokesovu větu, napravo vyjádříme proud pomocí toku volného náboje plochou, kterou ohraničuje zvolená křivka:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (58)$$

Uvedené vztahy musí platit pro libovolnou plochu, proto jsou integrandy totožné:

$$\blacktriangleright \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (59)$$

Rovnice (59) říká, že vír magnetického pole může vzniknout jednak v okolí vodiče s proudem, a jednak působením proměnného elektrického pole. Taková situace je například v okolí deskového kondenzátoru (mezi deskami předpokládáme nezaplňenou mezeru). Pokud teče vodičem střídavý proud, generuje kolem vodiče magnetické pole (směr vírů se střídá ve shodě s momentálním směrem elektrického proudu). Na desky kondenzátoru je přiváděn v některých fázích kladný náboj, v jiných záporný náboj. Díky tomu vznikne mezi deskami časově proměnné elektrické pole, které je zdrojem magnetického pole v okolí desek. Vzdálený pozorovatel z magnetického pole nepozná, že je obvod přerušen deskami kondenzátoru.

Výsledná soustava Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru tedy je:

$$\blacktriangleright \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (60)$$

$$\blacktriangleright \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (61)$$

$$\blacktriangleright \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (62)$$

$$\blacktriangleright \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (63)$$

K této soustavě rovnic se opět vrátíme, jakmile si probereme základní teorii k vlnění.



2. VLNĚNÍ

Ve Fyzice I jsme se setkali s kmity. Je to periodický pohyb nějakého objektu, například kuličky zavěšené na pružině nebo změna vzdálenosti Země od Slunce. Představme si nyní, že je rozpořehované celé prostředí, například nějaký rosol. Každý jeho bod vykonává kmity. Takovému souboru kmitů říkáme vlnění. Vlnit se mohou různé veličiny: hustota, tlak, výška hladiny, teplota, elektrické pole, magnetické pole atd. Vlnící se veličiny tedy mohou být jak skalární, tak vektorové. Abychom nepoužívali v každé rovnici pro vlnící se entitu různý symbol (ρ , p , h , T , \mathbf{E} , \mathbf{B}), zavedeme jednotný zástupný symbol $\psi(t, \mathbf{x})$, kterému říkáme *vlnová funkce*. V daném konkrétním případě si pak za ψ dosadíme, co potřebujeme.

Základní pojmy

Vlnová funkce

Veličina $\psi(t, \mathbf{x})$ popisuje vlnění v čase a v prostoru. Položíme-li $t = \text{const}$, pozorujeme časový snímek vlnění. Můžete si představit, že vyfotografujeme například vlnící se mořskou hladinu a prohlížíme si vzniklou fotografii. Položíme-li $\mathbf{x} = \text{const}$, pozorujeme časový průběh sledované veličiny v jednom určitém místě. Vlnění většinou popisujeme komplexní vlnovou funkcí, použití komplexních čísel významně zjednoduší některé výpočty. Fyzikální význam (to, co měříme) má ale zpravidla jen reálná část vlnové funkce. Tak jako každou komplexní funkci, můžeme vlnovou funkci zapsat pomocí dvou reálných funkcí, amplitudy A a fáze φ :

$$\blacktriangleright \quad \psi(t, \mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}. \quad (64)$$

Vlnoplocha a paprsek

Plocha spojující místa s konstantní hodnotou fáze φ vlnové funkce se nazývá vlnoplocha. Na vlnoploše je vlnění ve stejné fázi (například vlnoplocha spojující místa, v nichž má tlak 75 % maximální hodnoty). Paprskem nazýváme kolmici na vlnoplochu.

Úhlová frekvence

Úhlovou frekvencí chápeme změnu fáze vlnění s časem, budeme ji definovat vztahem

$$\blacktriangleright \quad \omega \equiv -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (65)$$

Minus v definici není podstatné, zajišťuje jen, aby se rovinná vlna pohybovala ve směru vlnového vektoru. Později bude toto znaménko užitečné i ke správnému relativistickému zápisu vztahů. Většinou postačí udávat jen absolutní hodnotu úhlové frekvence, tedy kladné číslo. Úhlová frekvence se může měnit jak s časem, tak od místa k místu. Je-li úhlová frekvence neproměnná, lze její velikost zapsat pomocí celkové změny fáze $\partial \varphi = 2\pi$ a celkové změny časového úseku (jedné periody) $\partial t = T$ jako $\omega = 2\pi/T$.

Vlnový vektor

Vlnovým vektorem nazveme změnu fáze vlnění se všemi prostorovými proměnnými,

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} k_x &\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ k_y &\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ k_z &\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (66)$$

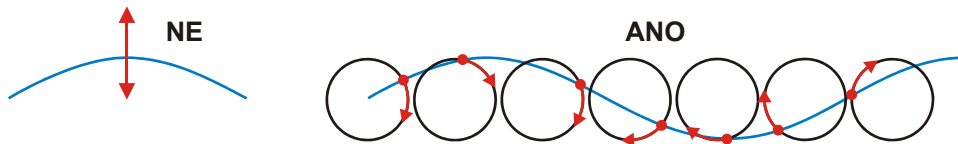
Tento zápis je sice jasný, ale zbytečně robustní. Na první pohled je jasné, že vlnový vektor není nic jiného než gradient fáze vlnění. Poslední vztah tedy můžeme zapsat kompaktněji

$$\mathbf{k} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \varphi. \quad (67)$$

Vlnový vektor jakožto gradient míří kolmo na vlnoplochu, tj. ve směru šíření vln. Jeho velikost i směr se může měnit s časem i od místa k místu. Je-li vlnový vektor neproměnný, lze jeho velikost zapsat pomocí vlnové délky λ jako celkovou změnu fáze 2π ku celkové periodě v prostoru $k = 2\pi/\lambda$.

Příčné a podélné vlnění

Pokud kmitá daná entita podél směru šíření (podél paprsku či vlnového vektoru), hovoříme o vlnění *podélném* (*longitudinálním*). Typickým podélným vlněním je zvuková vlna v plynu. Hlasivky rozvíbují atomy a molekuly plynu v místnosti podél směru šíření. Zvuková vlna se pak dostane k ušnímu bubínku, kde kmitající atomy a molekuly rozkmitají jeho membránu, a vzniklý nervový impuls se šíří dále do mozku. Druhým typem vlnění je *příčné* (*transverzální*) vlnění. Typickým příkladem *příčného* (*transverzálního*) vlnění je elektromagnetická vlna ve vakuu. Elektrický i magnetický vektor kmitá kolmo na směr šíření. Nejhorším příkladem v úvodním kurzu jsou vlny vzniklé hozením kamene do rybníku. Voda je nestlačitelná, takže nemůže dojít jen k pohybu atomů a molekul ve svislém směru. Ve skutečnosti vznikne směsice podélných a příčných vln a elementy kapaliny se u hladiny pohybují přibližně po kružnici.



Disperzní relace

Vlnění je v každém místě popsáno čtyřmi čísly (ω , \mathbf{k}), později uvidíme, že tvoří relativistický čtyřvektor. Tato čísla jsou závislá. Vztah mezi nimi lze odvodit z rovnic popisujících daný typ vlnění. Většinou má závislost obecný tvar

$$\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (68)$$

a nazývá se *disperzní relace*. V některých případech je možné z disperzní relace explicitně vypočítat úhlovou frekvenci v závislosti na vlnovém vektoru nebo vlnový vektor v závislosti na úhlové frekvenci:

$$\omega = \omega(\mathbf{k}), \quad (69)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega). \quad (70)$$

Tam, kde to explicitně možné není, můžeme použít větu o implicitní funkci a disperzní relaci ve tvaru $\omega(\mathbf{k})$ určit alespoň lokálně.

Rovinná (monochromatická) vlna

Jde o nejjednodušší typ vlny, která má konstantní amplitudu a fázi, jež je lineární funkcí času a prostoru:

$$A(t, \mathbf{x}) = A; \quad (71)$$

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = c_0 t + c_1 x + c_2 y + c_3 z = -\omega t + k_x x + k_y y + k_z z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t.$$

Význam koeficientů c_k plyne z definice úhlové frekvence a vlnového vektoru. Termín *monochromatická* v názvu vlny znamená, že ve vlně je zastoupena jediná frekvence neboli barva (*chromos*). Rovinná (monochromatická) vlna má tedy tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]}. \quad (72)$$

Na první pohled je zřejmé, že plochy konstantní fáze $\varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$ představují rovnice přesouvajících se rovin:

$$\begin{aligned}\varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const} &\Rightarrow \\ k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \text{const} &\Rightarrow \\ ax + by + cz + d(t) = 0.\end{aligned}$$

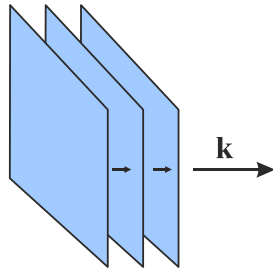
Přesun roviny budeme chápat jako kolmý k této rovině (šikmé přesuny rovin lze tak jako tak nahradit kolmým přesunem s rychlostí rovnou projekcí rychlosti do kolmého směru). Směr přesunu určíme jako gradient rovnice roviny:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \quad \Rightarrow \quad \nabla \varphi = \mathbf{k}.$$

Vlnový vektor proto míří ve směru šíření vlnění.

Fázová rychlost

Fázová rychlost je rychlost přesunu roviny konstantní fáze. Zvolme souřadnicový systém tak, aby se roviny přesouvaly ve směru první osy, tj. $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$



Diferencováním rovnice plochy konstantní fáze získáme rychlost přesunu plochy (fázovou rychlost)

$$kx - \omega t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad k dx - \omega dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Pro obecnou volbu souřadnicového systému platí

$$\blacktriangleright \quad v_f = \frac{\omega}{k}; \quad \mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k. \quad (73)$$

První výraz určuje jen velikost fázové rychlosti, druhý výraz ukazuje, že vektor fázové rychlosti míří ve směru $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/k$ vlnového vektoru. Pro naše účely postačí první, skalární, vztah. Fázová rychlost souvisí jen s přesunem místa, které má stejnou fázi vlnění, nesouvisí se skutečným makroskopickým přesunem hmoty (kola šířící se na vodní hladině mají jinou rychlost než voda samotná). Fázová rychlost může být, a v mnoha případech je, nadsvětelná. Tvar disperzní relace určuje hodnotu fázové rychlosti pro různé frekvence. Jev, kdy se vlny různých frekvencí šíří různou rychlostí, se nazývá *disperze*. Z odvození je patrné, že pokud by úhlová frekvence (65) byla definována s opačným znaménkem, vyšlo by $v_f = -\omega/k$ a vlna by se šířila v opačném směru, než míří vlnový vektor, což by bylo značně nelogické.

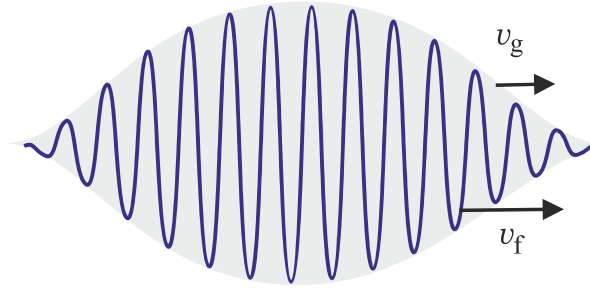
Obecná vlna

S rovinnými vlnami se velmi snadno pracuje a můžeme z nich poskládat vlnu obecného tvaru:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d^3 \mathbf{k}. \quad (74)$$

Jde vlastně o Fourierovu transformaci $\psi(t, \mathbf{x}) \leftrightarrow a(\omega, \mathbf{k})$. Amplitudy vln jsou Fourierovým obrazem vlnové funkce. Integrace se provádí jen přes složky vlnového vektoru. Úhlová frekvence je na vlnovém vektoru závislá prostřednictvím disperzní relace (69), a proto se přes ni neintegruje.

Grupová rychlost



Následující odvození lze při prvním čtení vynechat a pouze akceptovat výsledný vztah pro grupovou rychlost (76). Zkoumejme nyní rychlost přesunu vlnového balíku – klubka vln podobných frekvencí a vlnových vektorů. Pro jednoduchost budeme uvažovat balík šířící se ve směru osy x (tak zvolíme souřadnicový systém):

$$\psi(t, x) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(\omega, k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (75)$$

Amplituda vln je nenulová jen v intervalu $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ a nahradíme ji konstantní amplitudou:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega t)} dk.$$

V dalším kroku vytkneme z integrálu prostřední vlnu

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]} dk.$$

Nesmíme zapomenout, že $\omega = \omega(k)$ a integrace se „skrytě“ provádí i přes ω . Další úpravy jsou zřejmé:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) \left(x - \frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} t \right) \right] dk.$$

Zlomek v argumentu exponenciály lze nahradit derivací (pro $\Delta k \rightarrow 0$)

$$\frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} \approx \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} = v_g(k_0).$$

Veličina v_g má zatím význam jen označení pro výše definovanou parciální derivaci. Vlnový balík má nyní tvar:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) (x - v_g t) \right] dk.$$

Je zřejmé, že po integraci přes vlnový vektor bude výsledek integrálu funkcí $x - v_g t$:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} F(x - v_g t) = A(x - v_g t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Vlnový balík má tedy obálku šířící se rychlostí v_g , které říkáme *grupová rychlost*. Vnitřní část balíku je vyplněna nosnou vlnou $\exp[i(k_0x - \omega t)]$.

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (76)$$

Výpočet jsme pro jednoduchost provedli v jedné dimenzi. Pro obecně mířící vlnový vektor je

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right). \quad (77)$$

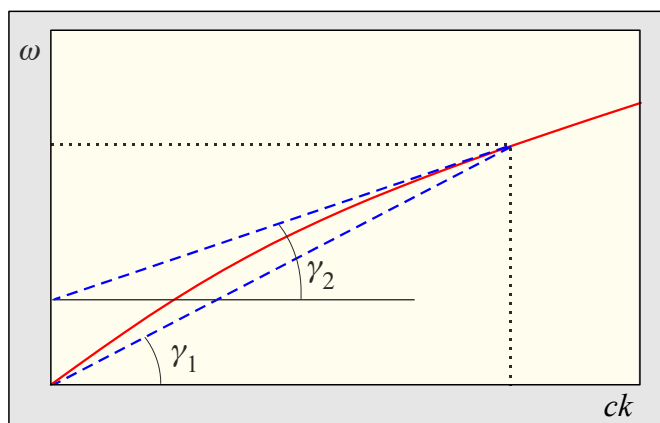
Rychlost šíření vlnového balíku jako celku se nazývá *grupová rychlost*. Je to rychlost šíření informace o tvaru balíku a rychlost přenosu energie balíku. Nutně musí být podsvětelná.

Grafický význam fázové a grupové rychlosti

Grafický význam fázové a grupové rychlosti vidíme na obrázku. Abychom mohli korektně zavést úhel tečny a sečny, potřebujeme mít na obou osách stejné měřítko. Proto na vodorovné ose výjimečně není pouze vlnový vektor, ale kombinace ck , kde c je nějaká typická rychlost šíření vln. Fázová rychlost je dána tangencí úhlu, který svírá spojnice bodu na křivce disperzní relace s počátkem (vzhledem k vodorovné ose), grupová rychlost je dána směrnicí tečny (jde o derivaci):

$$v_f = c \operatorname{tg} \gamma_1; \quad (78)$$

$$v_g = c \operatorname{tg} \gamma_2. \quad (79)$$



Intenzita a hladina intenzity

V teorii vlnění se často využívají i některé další pojmy: výkon vlnění, tok energie vlnění, intenzita vlnění a hladina intenzity vlnění. *Výkon vlnění* je množství energie přenášené vlněním za jednotku času:

$$\blacktriangleright \quad P \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}; \quad [P] = \frac{\text{J}}{\text{s}}. \quad (80)$$

Tok energie je množství energie přenášené vlněním jednotkovou plochou za jednotku času:

$$\blacktriangleright \quad J \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S}; \quad [J] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (81)$$

S tokem energie aditivní veličiny jsme se již setkali ve Fyzice I. Jak výkon vlnění, tak tok energie periodicky sledují vlnící se entitu. Pro praktické využití jsou použitelné jen střední hodnoty výkonu a toku energie vlnění. Střední hodnota toku energie vlnění se nazývá *intenzita vlnění*:

$$\blacktriangleright \quad I \equiv \langle J \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} J \, dt; \quad [I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (82)$$

Intenzita vlnění se často mění o mnoho řádů. Pro praktické využití je proto vhodnější dekadický logaritmus intenzity. Tuto veličinu nazýváme *hladina intenzity vlnění*:

$$\blacktriangleright \quad L = \log \frac{I}{I_0}; \quad [L] = \text{B}. \quad (83)$$

Hladinu intenzity měříme v belech (B). Někdy je výhodnější menší jednotka, decibel:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}; \quad [L] = \text{dB}. \quad (84)$$

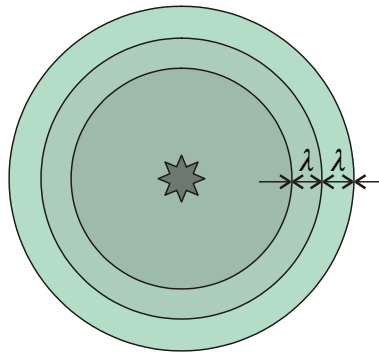
Už víme, že matematické veličiny musí mít bezrozměrné argumenty. Proto je v argumentu logaritmu intenzita dělená referenční hodnotou, která se u různých typů vlnění liší. Například u zvukových vln volíme referenční hodnotu $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Pokud se zabýváme pouze změnami hladiny intenzity, referenční veličinu nepotřebujeme:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \log \frac{I_2}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0} = \log \left(\frac{I_2}{I_0} \cdot \frac{I_0}{I_1} \right) = \log \frac{I_2}{I_1} \quad (85)$$

Různé druhy vln

Viděli jsme, že rovinné vlnoplochy mají konstantní amplitudu. To ale neplatí pro jiné tvary vlnoploch. Například při explozi vzniká kulová vlnoplocha šířící se od exploze a její amplituda postupně klesá. Stejně tak klesá amplituda kruhových vln, které vznikly po vhození kamene do rybníku. Odvoďme nyní vztahy pro tyto amplitudy.

Kulová vlnoplocha



Intenzita vlnění je vztažena na jednotku plochy. Vlnoplochy jsou povrchy koulí s plochou $S = \pi r^2$, takže intenzita klesá s druhou mocninou vzdálenosti od místa, kde vlna vzniká:

$$I \sim \frac{1}{S} \sim \frac{1}{r^2} \quad (86)$$

Na druhou stranu je energie oscilací, a tedy i intenzita, vždy úměrná druhé mocnině jejich amplitudy (vzpomeňte si na harmonický oscilátor ve Fyzice I):

$$I \sim A^2 \quad (87)$$

Porovnáním obou vztahů máme

$$\blacktriangleright \quad A(r) \sim \frac{1}{r} \quad (88)$$

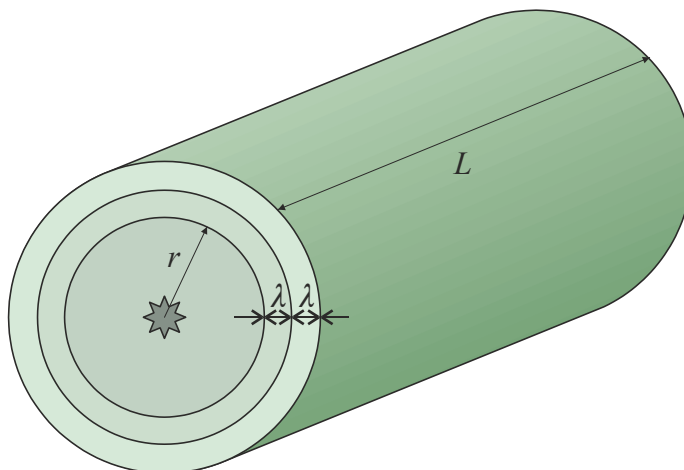
Amplituda kulové vlny se tedy snižuje nepřímě úměrně se vzdáleností od místa vzniku vln. Nemějte obavy ze vztahů, v nichž je znaménko úměrnosti. Vždy je lze přepsat do vztahu

vhodného pro výpočty (na základní škole se tomu v dobách, kdy se takové věci učily, říkalo trojčlenka). Z (88) plyne $Ar = \text{const}$, tj.

$$A_2 r_2 = A_1 r_1 \quad (89)$$

Ze tří známých hodnot snadno dopočteme čtvrtou.

Válcová a kruhová vlna



Výpočet je obdobný jako u kulové vlnoplochy. Intenzita se rozměňuje do stále větších vlnoploch daných plochou válce $S = 2\pi rL$, tedy

$$I \sim \frac{1}{S} \sim \frac{1}{r}. \quad (90)$$

Současně opět platí

$$I \sim A^2. \quad (91)$$

Kombinací obou vztahů máme

$$\blacktriangleright A(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (92)$$

U válcové a kruhové vlnoplochy klesá intenzita se vzdáleností pomaleji než u kulové vlnoplochy. Vztah můžeme opět přepsat do výpočetně užitečnější formule

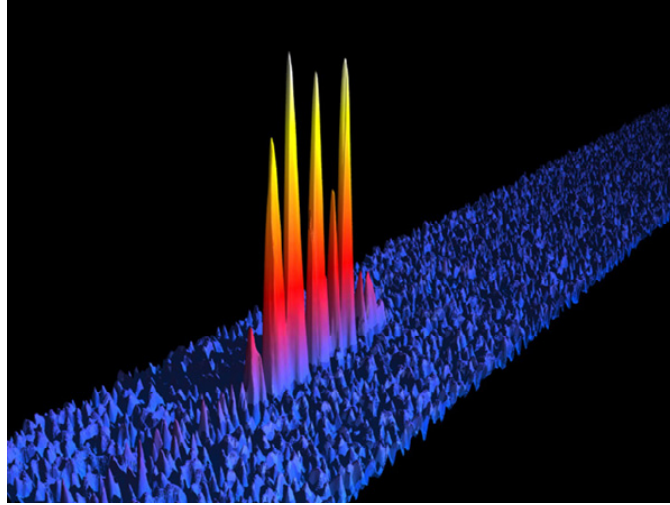
$$A_2 \sqrt{r_2} = A_1 \sqrt{r_1} \quad (93)$$

Kruhové vlny na vodní hladině mají stejnou závislost, rozprostírají se do obvodu kruhu, který je úměrný vzdálenosti stejně jako plocha válce.

Solitony

Podobně, jako lze skládáním kmitů blízkých frekvencí vytvořit rázy, je možné složit z vln blízkých frekvencí a vlnových vektorů vlnový balík. Přirozeným projevem vlnového balíku je jeho postupné rozplývání. Vlny různých frekvencí se šíří různou rychlostí a ty nejrychlejší postupně vlnový balík opouštějí, ty nejpomalejší se za ním opožďují, takže vlnový balík nestrhává svůj tvar a postupně se rozšiřuje a slabne. Hovoříme o disperzi, tj. závislosti fázové rychlosti na vlnové délce. V některých situacích může být přirozená disperze vlnového balíku kompenzována nelineárními jevy. V takovém případě vzniká tzv. osamocená vlna neboli soliton. Solitony se šíří beze změny tvaru a velikosti i na velké vzdálenosti. Solitony přenášejí energii z místa na místo a mohou skrz sebe procházet. První soliton pozoroval skotský vědec John Scott Russel na úzkém vodním kanále Union poblíž Edinburghu v roce 1834. Existenci solitonů poprvé teoreticky vysvětlili v roce 1895 holandský matematici Diederik Korteweg

a Gustav de Vries. Blízké solitonům jsou i vlny tsunami. Solitony nevznikají jen na vodní hladině, ale i v plazmatu, kde je nejznámější Langmuirův soliton – dutina vyplněná elektrickým polem, která se šíří beze změny tvaru a velikosti. Dnes se solitony využívají zejména v telekomunikacích. Solitonem je elektromagnetický impuls, který se šíří světelným vláknem v nezměněné podobě na velké vzdálenosti.



Langmuirův soliton: klubko elektrického pole šířící se plazmatem

Zvuk

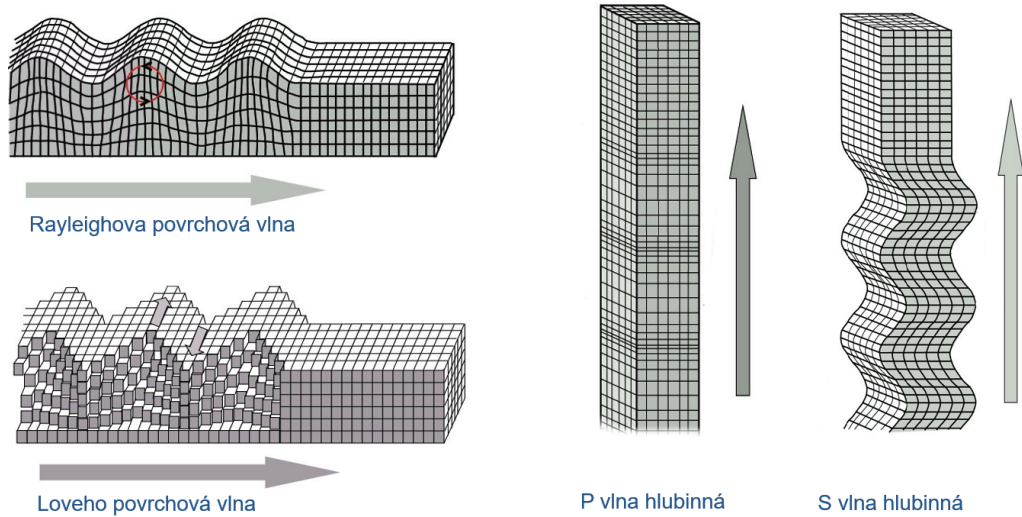
Člověk se nejčastěji setkává se zvukovými a elektromagnetickými vlnami. Elektromagnetické vlny si necháme na později a v rychlosti se seznámíme s některými vlastnostmi zvukových vln. Už jsme si řekli, že v plynech jde o podélné vlnění. Chaotická tlaková energie se periodicky mění na kinetickou energii kmitání molekul. V nejhrubším přiblížení proto můžeme odhadnout rychlost šíření zvukových vln z rovnosti tlaku a hustoty kinetické energie

$$p \approx \frac{1}{2} \rho v^2 \quad v \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}}. \quad (94)$$

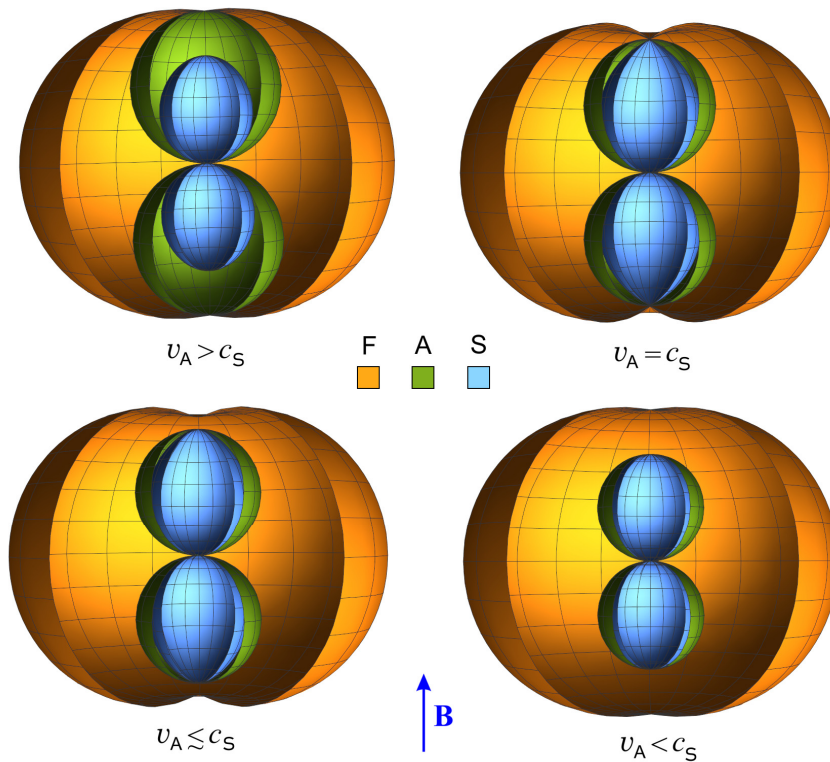
Jde o přibližný vztah, proto jsme koeficient 2 vynechali. Z uvedeného vztahu můžeme odhadnout řádově rychlost šíření zvuku v daném prostředí. Přesný vztah v sobě zahrnuje počet stupňů volnosti atomů v daném plynu a není pro naše účely důležitý. Lidský sluch je schopen zaznamenat frekvence od cca 20 hertzů až do 20 kilohertzů. Vlny s nižšími frekvencemi nazýváme *infrazvuk*, vlny s vyššími frekvencemi *ultrazvuk*. Infrazvukové a ultrazvukové vlny člověk neslyší.

Zvukové vlny v jiných prostředích než v obyčejných plynech jsou mnohem složitější. Zvukové vlny v pevných látkách a kapalinách už nejsou jen podélné, ale jde o směsici podélných a příčných módů. K takovým vlnám patří například zvukové vlny šířícím se v krystalech nebo seismické vlny postupující zemským nitrem. Pokud je prostředí nabitě a vodivé, jsou vlny ještě složitější. Příkladem mlže být zvuk v plazmatu, kde přítomnost magnetického pole vnáší do šíření anizotropii a vlny se šíří v různých směrech různou rychlostí. Zvuk v plazmatu se dokonce šíří naráz ve třech vlnoplochách, z nichž pouze jedna má přibližně kulový tvar, jak jsme zvyklí u zvuku v plynech. Zvukové vlny dnes využíváme k „vyšetřování“ nitra hvězd, například našeho Slunce, kde se tomuto zkoumání věnuje tzv. *helioseismologie*. Helioseismologií lze detekovat toky plazmatu v nitru Slunce a mnoho dalších procesů. Slunce je rozechvělé v mnoha zvukových módech a chová se jako zvon, který neustále rozechvívají narážející proudy plazmatu. Slunce má přes deset milionů vlastních frekvencí, které se skládají do sluneční hudby. Helioseismologie vznikla již v roce 1960. Američtí astronomové Robert Leighton, Robert Noyes a George Simon tenkrát objevili pětiminutové oscilace slunečního

povrchu. Pozorovali je v 18 metrů vysoké sluneční věži na observatoři Mt. Wilson v jižní Kalifornii a poté je systematicky zkoumali několik následujících let. V roce 1980 byly za pomoci helioseismologie objeveny pod povrchem Slunce velmi zvláštní oscilace, říká se jim torzní. Je to jako kdybyste kroutili gumovou hadicí sem a tam. V roce 1997 byly nalezeny hluboko v nitru Slunce plazmové řeky a od roku 2001 je dokonce rutinně zobrazována za pomoci zvukových vln odvrácená strana Slunce! Helioseismologie se stala účinným nástrojem pro výzkum naší nejbližší hvězdy.



Různé typy seismických vln. Po povrchu se šíří buď Loveho vlna (čistě příčná) nebo Rayleighova vlna (směsice podélných a příčných vln podobná vlnám na vodě). Nitrem zemského pláště se šíří podélné P vlny (místa zředění a zhuštění látky, někdy také hovoříme o kompresních či primárních vlnách, proto písmeno P) a S vlny (příčný mód, tzv. sekundární vlna, proto S). S vlny nejsou schopné projít jádrem Země, v něm jsou jen P vlny.



Vlnoplochy magnetoakustických vln v plazmatu jsou ovlivněné přítomností magnetického pole. Oranžová vlnoplocha se označuje F (Fast, rychlá), další dvě vlnoplochy S (Slow, pomalá) a A (Alfvénova) se dokonce kolmo na magnetické pole vůbec nešíří. Různé tvary vlnoploch jsou dány různou velikostí indukce magnetického pole.

Skládání vln

Vlny můžeme různými důmyslnými zařízeními dělit i skládat. Například na polopropustném zrcadle je možné rozdělit laserový svazek na dva: jeden se odrazí a druhý zrcadlem projde. Pokud se rozdělené svazky po určité době v nějakém místě opět sejdou, složí se do nové vlny. Podle způsobu skládání hovoříme o interferenci nebo o ohybu:

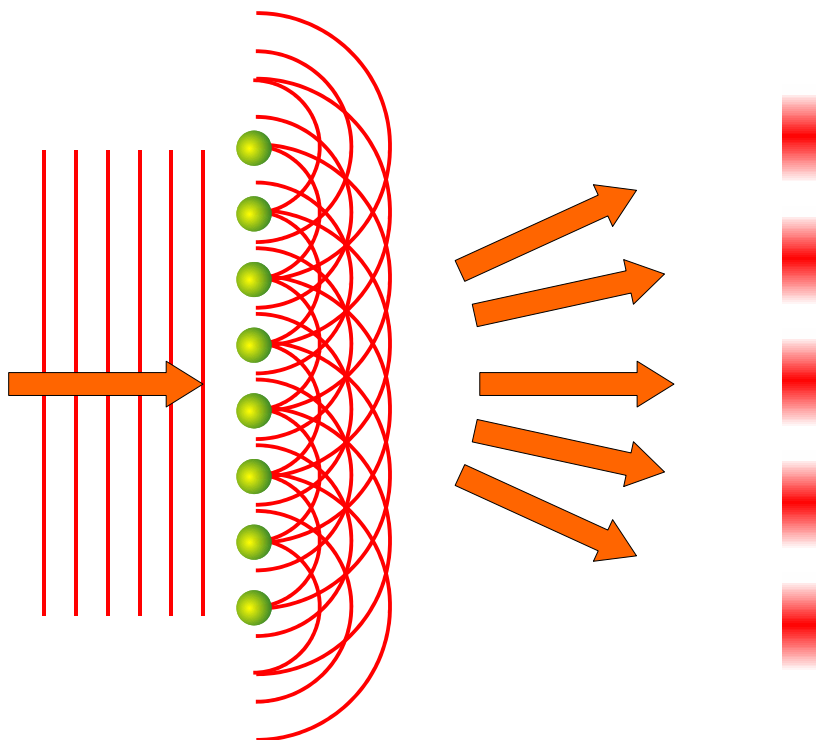
Interference

Skládání malého množství vln, typicky jednotek až stovek vln. Pokud se sejdou dvě vlny ve fázi, zesílí se, a dojde k tzv. *konstruktivní interferenci*. Pokud se sejdou v protifázi a mají stejnou amplitudu, dojde k zániku vln, k tzv. *destruktivní interferenci*. Okamžitě se naskytá otázka, kam se poděla energie dvou vln interferujících v protifázi. Korektní odpověď dává až kvantová teorie. Světlo můžeme popsat nejen jako vlnění, ale i jako soubor částic, kterým říkáme fotony. Při průchodu polopropustným zrcadlem nedojde k tomu, že by se polovina fotonů vydala jednou cestou a druhá polovina druhou. Naopak: každý foton se dostane do superpozice dvou stavů a pohybuje se oběma cestami naráz. V makrosvětě nic podobného neznáme. V mikrosvětě jde o běžnou věc a budeme se jí ještě zabývat v části věnované kvantové teorii. Právě superpozice je důvodem, že fotony nejsou lokalizované částice a ani energie s nimi spojená nepatří do jednoho konkrétního místa. Zákon zachování energie proto není lokální, tj. v jednom místě může energie zmizet a objevit se na místě úplně jiném.

Ohyb

Skládání obrovského množství vln, typicky tisíců až milionů. K ohybu dochází například na krystalické mříži, kdy se každý z uvězněných atomů po dopadu vlny stává sekundárním zdrojem vlnění a všechny takto vzniklé vlny se poté skládají do výsledné vlnoplochy. K nejčastějším případům ohybu patří

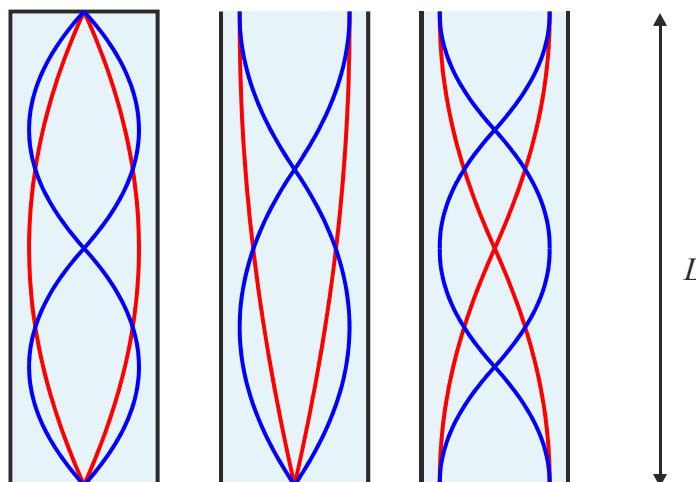
- **Fraunhoferův ohyb:** skládání rovinných vlnoploch,
- **Fresnelův ohyb:** skládání kulových vlnoploch.



Fraunhoferův ohyb. Na krystalickou mříž dopadají rovinné vlnoplochy. Každý atom se stává zdrojem kulových vlnoploch, které se následně skládají do výsledného ohybového obrazce. Ohybový obrazec v sobě nese cenné informace o uspořádání atomů v krystalické mříži.

Píšťaly

Jednoduchou aplikací skládání vln jsou píšťaly. Každý asi někdy foukal do láhve a rozezvučel ji na určité základní tónině. Výška tónu závisí na výšce láhve. Při silnějším foukání tón občas přeskočí do vyšší harmonické. V píšťale vznikají vlny, které se skládají do stojatého vlnění. Tak nazýváme vlnění, které nepostupuje, má fixní uzle s nulovou amplitudou a kmitny s maximální amplitudou. Stojaté vlnění může vzniknout například při skládání dvou vln pohybujících se opačným směrem. V píšťalách jsou na pevném konci vždy uzle stojatého vlnění a na otevřeném konci kmitny.



Na obrázku jsou tři základní typy píšťal: uzavřená, polouzavřená a otevřená (například trubka). Červeně je zobrazen základní frekvenční mód stojatého vlnění v píšťale, modrou barvou první vybuzený mód. Snadno odvodíme „povolené“ vlnové délky jednotlivých módů:

▶	uzavřená	$L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$	$\lambda_n = \frac{2L}{n}$	
	polouzavřená	$L = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow$	$\lambda_n = \frac{4L}{2n+1}$	(95)
	otevřená	$L = n \frac{\lambda}{2}$	$\lambda_n = \frac{2L}{n}$	

Fourierovo skládání

Francouzský matematik Joseph Fourier (1768-1830) přišel na to, že jakýkoli impuls konečné délky může být složen ze sinusových a kosinusových impulsů. Položil tak základy teorie trigonometrických řad. rigorózní matematika klade na dotýčnou funkci určité podmínky (existence integrálu z absolutní hodnoty nebo kvadrátu funkce, spojitost funkce a její první derivace). V komplexní notaci lze tento poznatek jednoduše zapsat jako

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t},$$

$$f(x) = \sum_n c_n e^{ik_n x}$$
(96)

Výsledná náhrada impulzu bude konvergovat na celém intervalu s výjimkou hraničních bodů. Zde dá rozvoj správnou hodnotu jen tehdy, má-li funkce v obou krajních bodech stejnou hodnotu (je periodická). První rozvoj se týká funkcí závislých na čase, druhý prostorových funkcí. V teorii Fourierových řad se určují jednotlivé frekvence (vlnová čísla) a amplitudy. Pokud je funkce definovaná na celé reálné ose, přecházejí Fourierovy řady v integrály

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{ikx} dk$$
(97)

a hovoříme o Fourierově transformaci. Nyní skládáme výsledné řešení ze všech frekvencí (vlnových čísel). V případě rovinné vlnoplochy je Fourierova transformace dána vztahem

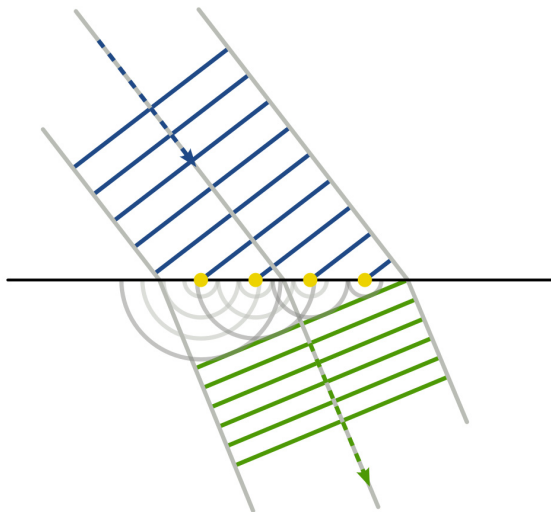
$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]} d^3\mathbf{k}.$$
(98)

Ve Fyzice II už nebudeme násobnost integrálu značit počtem integračních mezí, ale indexem nad závěrečným diferenciálem. Integrace probíhá i přes frekvence ω , neboť z disperzní relace víme, že $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Znaménko u ω je nepodstatné, stejně se procházejí všechny frekvence z intervalu $(-\infty, \infty)$. Je voleno tak, aby Fourierova transformace nebyla ničím jiným, než složením výsledné vlny z rovinných vlnoploch. Jednotlivé rovinné vlnoplochy $c(\omega)e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]}$ nazýváme *parciální módy* vlnění. Jak uvidíme později, parciální módy mají velmi jednoduché chování vzhledem k derivování, čehož lze využít při odvozování disperzních relací ze složitých soustav parciálních diferenciálních rovnic.

Huygensův a Fermatův princip

Huygensův princip

Holandský fyzik Christiaan Huygens (1629-1695) byl zastáncem názoru, že světlo je vlnové povahy. Ve svém díle *In Traité de la Lumiere* (1690) vysvětlil pojem vlnoplochy, ale nedokázal vysvětlit barvu světla. Huygens předpokládal, že pokud elektromagnetické vlnění zasáhne jakýkoli hmotný element, rozkmitá ho a tento element se stane dalším, sekundárním zdrojem vln. Všechny sekundární vlny se pak skládají do výsledné vlnoplochy. Dobře patrné to je na následujícím obrázku. Vlnoplochy dopadající na rozhraní vytvoří sekundární kulové vlnoplochy a ty se složí do rovinné vlnoplochy postupující prostředím za rozhraním pod jiným úhlem.



Huygens tuto konstrukci v roce 1690 shrnul do jednoduché poučky:

*Každý bod vlnoplochy se stává zdrojem elementárního vlnění.
Výslednou vlnoplochou je obálka elementárních vlnoploch.
Výsledná obálka se bere ve směru šíření. V opačném směru se vlny vylučují.*

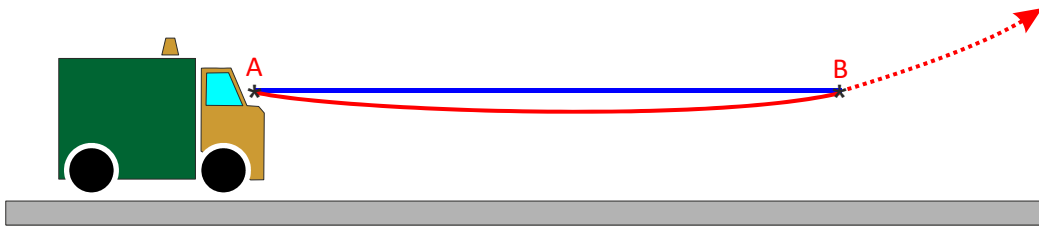
Poslední řádek doplnil k Huygensovu principu Gustav Kirchhof až v devatenáctém století. Z Huygensova principu je možné odvodit jak zákon lomu, tak zákon odrazu. My ale oba tyto zákony odvodíme z Fermatova principu, jehož použití je při výpočtech jednodušší. Zákon odrazu a lomu lze také odvodit přímo z Maxwellových rovnic.

Fermatův princip

Francouzský právník Pierre de Fermat (1601–1665) studoval matematiku jen ve svých volných chvílích. Přesto se stal světově uznávaným matematikem. Zabýval se i optikou, v níž objevil tzv. princip nejmenšího času, který dnes nese Fermatovo jméno:

Světlo mezi dvěma body neprostupuje prostředím nejkratší možnou cestou, ale vybírá si cestu, která je časově nejkratší.

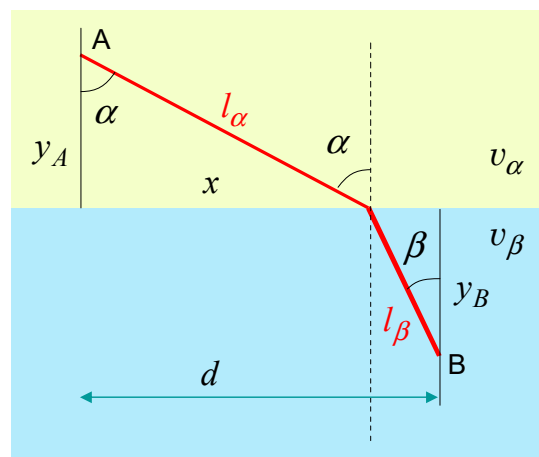
Fermat ve své době nemohl tušit, proč tomu tak je. Opět jde o důsledky kvantového chování mikrosvětla. Ve skutečnosti se světlo mezi dvěma body šíří po všech možných drahách současně. Je v superpozici mnoha stavů, z nich každý odpovídá jedné dráze. Jednotlivé dráhy spolu kvantově interferují. Na většině míst dojde k destruktivní interferenci, která extrémně sníží pravděpodobnost nalézt foton v daném místě. Některé dráhy se konstruktivní interferencí zesílí natolik, že je v makrosvětě prohlásíme za paprsek, po němž se světlo pohybuje. A právě tyto dráhy jsou časově nejkratší možné a odpovídají Fermatovu principu. Aplikaci Fermatova principu si ukážeme na dvou příkladech. Prvním z nich je jízda po horké silnici



Představme si, že se za horkého letního dne díváme z kabiny automobilu. Světlo se pohybuje rychleji v horkém vzduchu, který se drží u rozpálené silnice. Časově nejkratší dráha tedy nebude spojnice bodů AB na obrázku, ale červená křivka. Řidič se dívá před sebe a přitom mu zorný paprsek přináší obraz mraků na obloze. Mozek ale nemá zkušenost s mraky na rozpálené silnici a tak je interpretuje jako mokré fleky či louže na silnici. Až pojedete zase v létě autem po horké silnici, všimněte si tohoto jevu podrobněji.

Zákon lomu

Druhý příklad na Fermatův princip se bude týkat zákona lomu na rozhraní dvou prostředí. Podle Fermatova principu bude ze všech možných trajektorií realizována trajektorie s minimální dobou chodu paprsku z bodu A do bodu B.



Pro trajektorii na obrázku je celková doba

$$t_{AB} = \frac{l_A}{v_A} + \frac{l_B}{v_B} = \frac{\sqrt{y_A^2 + x^2}}{v_A} + \frac{\sqrt{y_B^2 + (d-x)^2}}{v_B}.$$

Obě vzdálenosti jsme vyjádřili z Pythagorovy věty (jde o přepony trojúhelníků). Tato doba je funkcí x , proto tuto závislost derivujeme podle proměnné x a položíme rovnou nule (nutná podmínka minima času šíření). Získáme tak podmínku

$$\frac{x}{v_A \sqrt{y_A^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{v_B \sqrt{y_B^2 + (d-x)^2}} = 0.$$

Příslušné odmocniny opět přepíšeme z Pythagorovy věty na příslušné vzdálenosti

$$\frac{x}{v_A l_A} = \frac{(d-x)}{v_B l_B}.$$

Podíly na obou stranách jsou siny úhlů α a β

$$\frac{\sin \alpha}{v_A} = \frac{\sin \beta}{v_B}.$$

Jednoduchou úpravou získáme nejčastější zápis Snellova zákona lomu

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (99)$$

(α – úhel dopadu, β – úhel lomu, n_1, n_2 jsou indexy lomu obou prostředí)

Dopplerův jev

Představte si, že jednosměrnou ulicí jezdí v pravidelných intervalech autobusy. Člověk stojící na zastávce zjistí, že každé tři minuty přijede autobus. Něco jiného bude ale vnímat cyklista projíždějící ulicí. Pokud pojedete proti autobusům, a autobusy ho nezajedou, bude je potkávat častěji – dejme tomu každé dvě minuty. A když pojedete ve směru pohybu autobusů, budou ho míjet v delších časových intervalech, dejme tomu jednou za 4 minuty. Pozorovaná frekvence závisí na pohybu pozorovatele a tento princip platí pro jakýkoli periodický děj. To, že jsme si pro vysvětlení vybrali pohybující se autobusy, není podstatné. Pokud se pozorovatel a zdroj jakéhokoli periodického děje vzájemně přibližují, frekvence se zvyšuje. Pokud se vzdalují, frekvence se snižuje. Může jít o zvukové vlny, elektromagnetické vlny i další periodické děje.

Tento jev poprvé popsal rakouský matematik a fyzik Christian Andreas Doppler v roce 1842. Doppler v té době působil na Královském českém stavovském učilišti technickém v Praze, což je předchůdce dnešního Českého vysokého učení technického. A právě za svého deseti-letého pražského pobytu objevil princip, který se stal nepostradatelným pomocníkem vědců, astrofyziků, inženýrů i dopravních policistů. Dopplerovo jméno je umístěno pod okny Národního muzea v Praze a je po něm pojmenováno pražské Gymnázium Christiana Dopplera.

Obyvatel města se s Dopplerovým jevem setká nejčastěji při průjezdu automobilem. Přijíždějící auto vydává zvuky s vyšší frekvencí než odjíždějící. Samozřejmě se to týká všech dopravních prostředků. Zaposlouchejte se do zvuku projíždějícího vlaku, změna frekvence je také velmi dobře patrná.

V civilních aplikacích se s Dopplerovým jevem nejčastěji setkáme u radarů. Radar využívá elektromagnetických vln v mikrovlnném a radiovém oboru. Kvalitní radar zjišťuje z doby příchodu odraženého signálu vzdálenost objektu, ze změny frekvence přijatého paprsku rychlost objektu a ze změny polarizace paprsku vlastnosti povrchu objektu. Připomeňme si

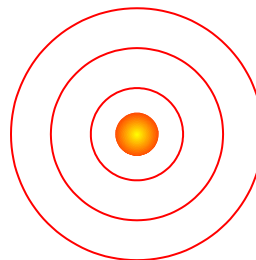
meteorologické radary, které s jistotou lokalizují polohu oblaků s deštěm. Navíc z Dopplerova jevu zjistí jejich rychlost a ze změny polarizace určí, zda jsou v oblaku přítomny dešťové kapky, kroupy nebo jen vodní pára. Jiné typy radarů se využívají k řízení letového provozu, k mapování povrchu Země nebo dalších planet. Bez radarů bychom těžko spatřili povrch planety Venuše, která je zahalena hustou atmosférou a ve viditelném spektru na povrch nevidíme. K nejkvalitnějším radarům patří vojenské radary, které jsou schopné ze změny polarizace paprsku detekovat i druh povrchu letadla či střely a určit, zda jde o objekt nepřátelský či nikoli. Naopak k těm nejjednodušším radarům patří ne zcela oblíbené policejní radary pro měření rychlosti projíždějícího automobilu.

Dopplerův jev je velmi dobrou pomůckou pro astronomy. Z posunu spektrálních čar ve spektru hvězdy nebo galaxie můžeme určit její rychlost vzhledem k nám. Pokud hvězda rotuje, část jejího povrchu se od nás vzdaluje a opačná část přibližuje. Dopplerův jev způsobí charakteristické rozšíření spektrálních čar, ze kterého můžeme určit rychlost rotace hvězdy. V poslední době se velmi rychle rozvíjí asteroseismologie. Na povrchu hvězdy se z Dopplerova jevu naleznou přibližující a vzdalující se oblasti způsobené zvukovými vlnami, které se šíří nitrem hvězdy. Z jejich analýzy je možné dokonce určovat vlastnosti nitra hvězd. U Slunce tuto techniku nazýváme helioseismologie. Obdobné metody využívá také medicína pro ultrazvukové zobrazování vnitřních orgánů.

K popisu Dopplerova jevu můžeme využívat jak úhlovou frekvenci, tak normální frekvenci (počet maxim či minim za sekundu). Mezi oběma frekvencemi je jednoduchý vztah

$$f = \frac{1}{T}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f. \quad (100)$$

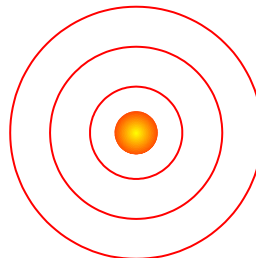
Zdroj i pozorovatel v klidu



Rychlost šíření signálu označíme c , periodu T a vlnovou délku λ . Pokud jsou zdroj i pozorovatel vůči sobě v klidu, vnímá pozorovatel skutečnou frekvenci vysílanou zdrojem:

$$\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (101)$$

Pozorovatel se pohybuje



Předpokládejme, že se pozorovatel pohybuje rychlostí v . Podle klasické mechaniky se jeho rychlost bude skládat s rychlostí zdroje, takže výsledná frekvence bude

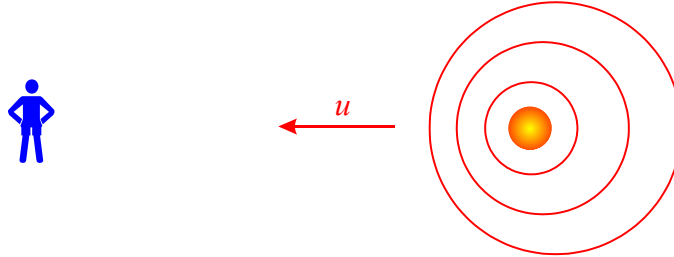
$$\omega = \frac{2\pi(c \pm v)}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda} \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad (102)$$

Vzhledem k tomu, že koeficient před závorkou je původní frekvencí, máme

$$\blacktriangleright \quad \omega = \omega_0 (1 \pm v/c) \quad (103)$$

Znaménko plus platí pro pozorovatele pohybujícího se směrem ke zdroji (frekvence se zvýší), minus platí pro pozorovatele pohybujícího se směrem od zdroje (frekvence se sníží).

Zdroj se pohybuje



Předpokládejme nyní, že se pohybuje zdroj, a to rychlostí u . Pokud se zdroj pohybuje k pozorovateli, bude tento pohyb vnímat jako zhušťování vlnoploch. Pokud se zdroj pohybuje od pozorovatele, bude pozorovatel naopak vnímat zředění vlnoploch (na obrázku by byl napravo). Za jednu periodu se vlnoplochy posunou o vzdálenost uT , proto bude platit

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda \pm uT} = \frac{2\pi c}{\lambda \left(1 \pm \frac{u}{c}\right)}. \quad (104)$$

Koeficient $2\pi c/\lambda$ je opět původní frekvencí, takže můžeme psát

$$\blacktriangleright \quad \omega = \frac{\omega_0}{1 \pm u/c}. \quad (105)$$

Pokud chceme pracovat s běžnou frekvencí, oba klíčové vztahy (103) a (105) mají tvar

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} f &= f_0 (1 \pm v/c); \\ f &= \frac{f_0}{1 \pm u/c}. \end{aligned} \quad (106)$$

Na první pohled zaujme fakt, že oprava na pohyb pozorovatele je v čitateli, zatímco oprava na pohyb zdroje je ve jmenovateli. Pohyb je relativní a nemělo by záležet na tom, zda se pohybuje zdroj či pozorovatel. Tato nesymetrie vznikla použitím klasického skládání rychlostí. Později odvodíme relativistický Dopplerův jev, který je už vzhledem k pohybu zdroje či pozorovatele symetrický. Pro malé rychlosti tato nesymetrie nevádí, protože opravy jsou malé a v lineární aproximaci platí

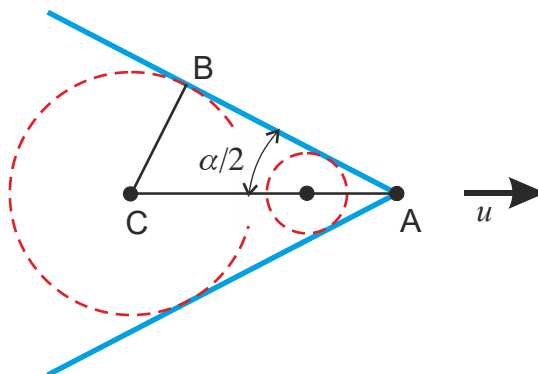
$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= (1+x)^{-1} \approx 1-x; \\ \frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} \approx 1+x. \end{aligned} \quad (107)$$

Pro malé hodnoty v/c , u/c můžeme opravy převádět bez problémů mezi jmenovatelem a čitatelem a vztahy jsou pro malé rychlosti ve skutečnosti symetrické.

Rázové vlny a Čerenkovovo záření

Velmi zajímavá situace nastane, pohybuje-li se zdroj rychlostí vyšší, než jakou se šíří samotný signál. Příkladem může být nadzvukové letadlo. Hluk, který vydává, se nikdy nemůže šířit před letadlo, protože letadlo letí rychleji. Za letadlem tak vzniká charakteristická kuželovitá rázová vlna, které říkáme zvuková bariéra, a zvukové vlny se nacházejí pouze

uvnitř tohoto kužele. Pozorovatel stojící na zemi uvidí letící letadlo, ale zpočátku neuslyší žádný zvuk. Ten se objeví až náraz, tedy v okamžiku, kdy kužel zvuku „tažený“ za letadlem projde místem, kde stojí pozorovatel.



Obdobně je tomu u všech zdrojů: Pohybuje-li se zdroj vlnění rychleji než vlnění samotné, nemůže se vlnění šířit do libovolného směru. Je pro něho nemožné dostat se z kužele za pohybujícím se zdrojem. Z geometrie problému je snadné určit vrcholový úhel kužele rázové vlny $\sin \alpha/2 = CB/CA = ct/ut = c/u$, kde c je rychlost šíření zvuku a u je rychlost pohybu zdroje. Vrcholový úhel tedy závisí jen na poměru rychlosti šíření signálu a rychlosti zdroje:



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{c}{u} \quad (108)$$

Čerenkovovo záření

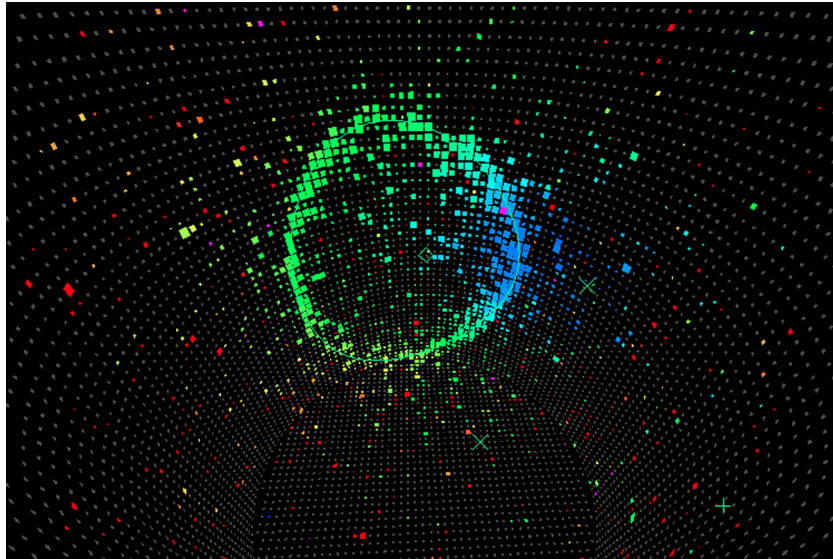
Částice se nemohou nikdy pohybovat rychlostí vyšší, než je rychlost světla ve vakuu, tj. přibližně 300 000 km/s. V materiálním prostředí se ale světlo šíří nižší rychlostí. Například v diamantu, který má index lomu 2.5, se světlo šíří rychlostí pouze 120 000 km/s (proto nám připadá tak krásný), ve vodě s indexem lomu 1.33 se světlo šíří rychlostí 226 000 km/s. V takovém prostředí se může nabitá částice pohybovat rychleji než světlo v tomto prostředí. Například mion (těžší obdoba elektronu) se ve vodě může pohybovat rychlostí 270 000 km/s, což je méně než rychlost světla ve vakuu, ale více než rychlost světla ve vodě.

Při takovém pohybu dojde k zajímavému jevu. Obdobně jako za sebou táhne letadlo letící nadzvukovou rychlostí kužel zvukových vln, objeví se za nabitou částicí kužel elektromagnetických vln. Elektromagnetické vlny generované částicí se pohybují v daném prostředí pomaleji než částice, a proto se nikdy nedostanou před ní. Toto záření se nazývá Čerenkovovo záření. Bylo pojmenováno po ruském fyzikovi Pavlu Čerenkovovi (1904–1990), který ho jako první popsal. Teoretické vysvětlení jevu podali v roce 1937 sovětsí vědci Ilja Frank (1908–1990) a Igor Tamm (1895–1971). Celá trojice získala Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1958.

Čerenkovovo záření se dnes využívá v celé řadě aplikací, především v detektorech nabitých částic. V kosmických detektorech se jako médium zpravidla používají různé gely nebo aerogely. V pozemských detektorech jde nejčastěji o obyčejnou vodu. Nabitá částice, která do média vnikla, za sebou vytvoří charakteristický kužel elektromagnetického záření. Na hranici oblasti bývají fotonásobiče, které toto záření detekují. Ze směru kužele lze určit, odkud částice přiletěla a z vrcholového úhlu kužele je možné dopočítat rychlost a energii částice (pokud víme, o jakou částici jde a známe její klidovou hmotnost).

Uveďme dva příklady takových zařízení. V roce 2011 byl namontován při předposledním letu raketoplánu na rameno Mezinárodní vesmírné stanice detektor AMS-02. Jde o obří zařízení pro detekci kosmického záření o hmotnosti 6 700 kg, které bylo navrženo a vyrobeno v Evropském středisku jaderného výzkumu CERN. Jde vlastně o zmenšeninu detektorů využívaných na největším urychlovači světa LHC. Součástí přístroje je také Čerenkovův detektor pro detekci nabitých částic, které k nám přilétají z hlubin vesmíru.

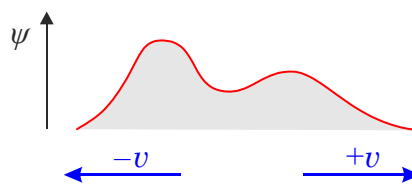
Jiným zařízením je neutrinový detektor– Super Kamiokande. Tato neutrinová observatoř byla otevřena v Japonsku v roce 1996. Leží 1 700 metrů pod zemí, pod horou Ikeno Jama, ve starém zinkovém dole v blízkosti městečka Kamioka. Samotný detektor tvoří obří nádoba o průměru 40 metrů, v níž je 50 000 tun vody. Po stěnách nádoby je 13 000 fotonásobičů. Částice kosmického záření se sráží s atomy a molekulami v horní atmosféře. Přitom vznikají elektronová a mionová neutrina, která projdou horninou do detektoru. V něm interagují s neutrony a protony obsaženými ve vodě. Přitom vzniknou elektrony a miony s nadsvětelnou rychlostí, které za sebou táhnou kužel Čerenkovova záření. V průměru je zachyceno jedno atmosférické neutrinó (vzniklé z kosmického záření v atmosféře) za hodinu a půl. Detektor je schopen rozlišit elektronové a mionové neutrinó. K největším úspěchům tohoto detektoru patří objev nenulové hmotnosti neutrin z roku 1998.



Signál fotonásobičů na stěnách nádoby detektoru Super Kamiokance.

Vlnová rovnice

Představme si vlnu obecného tvaru, které se přesouvá v určitém směru, aniž by svůj tvar měnila:



Volme pro jednoduchost osu x ve směru přesunu vlny, potom bude platit

$$\psi(t, x) = f(x \pm vt), \quad (109)$$

kde f je libovolná funkce popisující tvar vlny. Nalezněme nyní první a druhé derivace vlnové funkce podle proměnných t a x . Půjde o derivování složené funkce, jejíž jediný argument je $\eta \equiv x \pm vt$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{df}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{df}{d\eta} \quad (\eta \equiv x \pm vt), \quad (110)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\eta^2}, \quad (111)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{df}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \pm v \frac{df}{d\eta}, \quad (112)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{d\eta^2}. \quad (113)$$

Z obou vztahů pro druhé partiální derivace můžeme vyjádřit druhou derivaci funkce f :

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \quad \frac{d^2 f}{d\eta^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (114)$$

Porovnáním obou vyjádření získáme rovnici, kterou splňuje vlnová funkce

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (115)$$

Většinou ji zapisujeme ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (116)$$

Pokud budeme pracovat ve třech dimenzích, dostaneme

$$\blacktriangleright \quad \Delta \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (117)$$

Jde o nejjednodušší typ vlnové rovnice, která popisuje vlnění. Takovou rovnici splňují nejjednodušší vlny, například elektromagnetické vlny ve vakuu nebo zvukové vlny v plynném prostředí. Ve složitějším prostředí může vyjít vlnová rovnice komplikovanější. Operátor Δ se nazývá Laplaceův operátor. Je součtem druhých derivací podle prostorových proměnných. Tři stěny symbolu pro tento operátor naznačují, že jde o součet tří členů. Někdy se vlnová rovnice zapisuje za pomoci tzv. D'Alembertova operátoru:

$$\blacktriangleright \quad \square \psi = 0; \quad \square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (118)$$

Čtvereček v této rovnici není tiskovou chybou, jak se někteří studenti domnívají u zkoušky, ale je to operátor, jehož čtyři stěny symbolizují součet čtyř členů s druhými derivacemi.

Vlastnosti partiálních módů

Již jsme se několikrát zmínili, že obecnou vlnu můžeme složit s lineárních (rovinných, monochromatických) vln. Vlna je superpozicí partiálních módů, z nichž má každý tvar

$$\psi = A(\omega, \mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} \quad (119)$$

Jednotlivé módy se liší svou amplitudou, frekvencí a vlnovým vektorem. Tyto módy mají extrémně jednoduché vlastnosti vzhledem k derivování. Vyzkoušejme si například derivaci podle časové a první prostorové proměnné:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\partial}{\partial t} A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = -i \omega A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = -i \omega \psi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = \frac{\partial}{\partial x} A e^{i[k_x x + k_y y + k_z z - \omega t]} = +i k_x A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = +i k_x \psi.$$

Prohlédneme-li si začátek a konec obou vztahů, vidíme, že derivování nahrazujeme algebraickými výrazy dle schématu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \quad (120)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik_x \quad (121)$$

Obdobně tomu bude i u proměnných y a z . Vidíme, že pro parciální módy přecházejí parciální derivace na algebraické výrazy. Obdobně, jako je možné převést Laplaceovou transformací obyčejné diferenciální rovnice na algebraické, lze Fourierovou transformací převést na algebraický tvar parciální diferenciální rovnice. Jedinou podmínkou je, aby platil princip superpozice řešení, což je splněno u lineárních soustav, jakými jsou například Maxwellovy rovnice. Sestavme pravidla pro derivování parciálních módů do přehledné tabulky

Výraz	Příklad
$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$	$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f$
$\frac{\partial}{\partial x_l} \rightarrow +ik_l$	$\frac{\partial g}{\partial x_l} = +ik_l g$
$\nabla \rightarrow +i\mathbf{k}$	$\nabla h = +i\mathbf{k} h$
$\text{div} \rightarrow i\mathbf{k} \cdot$	$\text{div} \mathbf{B} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}$
$\text{rot} \rightarrow i\mathbf{k} \times$	$\text{rot} \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$
$\nabla^2 \rightarrow -k^2$	$\nabla^2 \phi = -k^2 \phi$

(122)

Pravidla na levé straně jsou jen naznačenými vztahy, podobně, jako je d/dx naznačenou derivací a výraz získá význam až po jeho aplikování na nějakou funkci, například dF/dx . V levé části tabulky má proto zásadní význam jak tečka, tak křížek. Jde o naznačené skalární a vektorové součiny (vzpomeňte si, že divergence je skalárním součinem gradientu s vektorovou funkcí a rotace je vektorovým součinem gradientu s vektorovou funkcí). Příklady použití těchto pravidel jsou v pravém sloupci. V příští kapitole tato pravidla využijeme při hledání řešení Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru.



3. ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

Vlny ve vakuu

Jako jednoduchý příklad na uvedený postup řešíme elektromagnetické vlny ve vakuu, kde platí $\rho_Q = 0$, $\mathbf{j}_Q = 0$ a materiálové vztahy jsou pouze $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. V soustavě (60) až (63) ponecháme vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t. \end{aligned} \quad (123)$$

Ukážeme dva postupy řešení. V prvním se pokusíme eliminovat proměnné ještě před provedením Fourierovy transformace, v druhém až po jejím provedení.

Postup 1

Z Maxwellových rovnic se pokusíme vyloučit magnetickou indukci a získat rovnici pro elektrické pole. Na čtvrtou rovnici zapůsobíme operací rotace a na pravé straně za $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ dosadíme z třetí rovnice:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ &(\operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2) \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, získáváme výslednou rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (124)$$

Jde o známou vlnovou rovnici pro elektrické pole. Obdobně bychom eliminací elektrického pole mohli z Maxwellových rovnic získat stejnou rovnici pro magnetické pole. Nyní provedeme Fourierovu transformaci podle pravidel uvedených na předchozí straně:

$$(-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Parciální diferenciální rovnici jsme převedli na algebraickou rovnici bez pravé strany. Nennulové řešení bude existovat pouze tehdy, když

$$-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k. \quad (125)$$

Z podmínky nenulovosti řešení jsme odvodili disperzní relaci. Fázová rychlost šíření (rychlost světla) je

$$\blacktriangleright \quad c \equiv v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (126)$$

Nalezená disperzní relace tvaru $\omega = ck$ je nejjednodušší možná, fázová i grupová rychlost je stejná a vlnění nejeví disperzi, tj. rychlost není závislá na vlnové délce.

Postup 2

Budeme předpokládat, že se nám nepodařilo ze soustavy Maxwellových rovnic eliminovat rovnici pro elektrické či magnetické pole. Provedme proto Fourierovu transformaci již v původní soustavě rovnic (123):

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= +\omega \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (127)$$

Eliminaci proměnných lze provést nyní. Dosadíme \mathbf{B} z poslední rovnice do předposlední:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} &= -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}. \end{aligned}$$

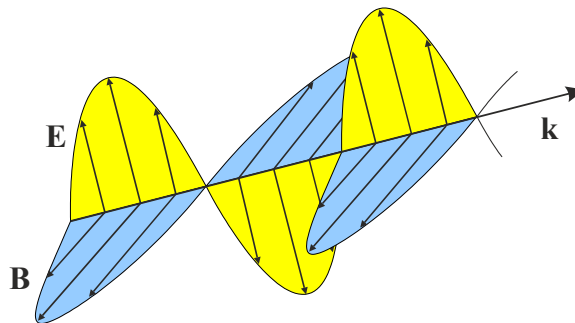
První výraz je podle první rovnice z (4.23) nulový a rovnice pro elektrické pole proto je

$$(k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Podmínkou nenulovosti elektrického pole je opět disperzní relace

$$k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k = ck.$$

Z původní soustavy (127) snadno zjistíme, že vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{k} jsou navzájem kolmé a elektromagnetické vlnění je proto příčné.



Vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} nejsou v elektromagnetické vlně nezávislé, z rovnice $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ plyne po Fourierově transformaci $kE = \omega B$ a tedy

$$\blacktriangleright \quad \frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = v_f \quad (128)$$

Tento vztah má hlubší význam. Podíl elektrické intenzity a magnetické indukce má vždy význam typické rychlosti v daném systému. Například pro plazma jde o driftovou rychlost částic, pro elektromagnetickou vlnu o fázovou rychlost jejího šíření. V případě vakua je fázová rychlost rovna c . V materiálovém prostředí zavádíme index lomu

$$\blacktriangleright \quad n \equiv \frac{c}{v_f} \quad (129)$$

a podíl obou polí je v elektromagnetické vlně roven $E/B = v_f = c/n$.

Polarizace

Polarizací elektromagnetické vlny rozumíme rovinu kmitů elektrického pole. Tato polarizace může být *rovinná* (žlutá rovina na obrázku), při níž vektor elektrického pole kmitá stále ve

stejně rovině. Rovina kmitů elektrického pole se ale může i stáčet (a s ní i rovina kmitů magnetického pole). Polarizace může být například *kruhová* (koncový bod elektrického pole opisuje kružnici) nebo *chaotická* (elektromagnetická vlna se skládá z mnoha emisních aktů různých polarizací).

Poznámka 1: Vidíme, že není důležité, v jaké fázi výpočtu provedeme Fourierovu transformaci, oba postupy vedou ke stejnému výsledku. Pokud neumíme zacházet s parciálními diferenciálními rovnicemi, je výhodné provést transformaci co nejdříve. Nepodaří-li se nám provést eliminaci proměnných ani před, ani po transformaci, bude podmínkou nenulovosti řešení nulovost determinantu celé soustavy.

Poznámka 2: Rychlost světla nám vyšla závislá pouze na permitivitě a permeabilitě vakua. Je dána vlastnostmi vakua. Rychlost je ve všech souřadnicových soustavách stejná. To je důsledkem faktu, že Maxwellovy rovnice mají odlišné transformační vlastnosti od klasické mechaniky, kde se rychlosti soustavy a zdroje sčítají. Nesoulad klasické mechaniky a elektrodynamiky vyústil v řadu experimentů, které ukázaly, že chování přírody odpovídá Maxwellově elektrodynamice. Proto bylo třeba klasickou mechaniku upravit tak, aby byla v souladu s elektrodynamikou. Tuto úpravu provedl Albert Einstein v roce 1905 – nazývá se speciální teorie relativity. Vede k dnes známé kontrakci délek a dilataci času.

Poznámka 3: Z Maxwellových rovnic plyne, že se elektromagnetické vlny mohou šířit i ve vakuu, daleko od zdrojů, z nichž vznikly.

Poznámka 4: Maxwell ze svých rovnic ukázal, že světlo je elektromagnetickým vlněním a že musí existovat i elektromagnetické vlnění kratších i delších vlnových délek, než má světlo. Taková vlnění byla později objevena.

Vlny v anizotropním prostředí

Vlastnosti látky mohou vnést do šíření elektromagnetických vln výraznou anizotropii. Totéž může způsobit vnější elektrické a ještě častěji magnetické pole. Věnujme se v této kapitole velmi krátce anizotropním materiálům. Pro jednoduchost předpokládejme lineární odezvu a pouze elektricky anizotropní prostředí (například obyčejnou sůl), kde platí $D_k = \varepsilon_{kl}E_l$:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (130)$$

Vektor \mathbf{D} už obecně nemíří ve směru vektoru \mathbf{E} , permitivita není jediné číslo, ale devítice čísel tvořících tenzor permitivity druhého řádu. Ze základních fyzikálních úvah, které jdou za hranici tohoto kurzu, plyne, že tenzor permitivity musí být symetrickou maticí tj. $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$. Symetrické matice ale mají reálná vlastní čísla a tři navzájem kolmé vlastní vektory, které mohou hrát roli přirozené báze, jinými slovy přirozené souřadnicové soustavy. Například v krystalické látce jde o osy, podél nichž se vlnění šíří podstatně jednodušeji než v ostatních směrech. Pokud budeme látku popisovat v takové souřadnicové soustavě, bude mít tenzor permitivity jen diagonální členy, tedy tři hodnoty permitivity lišící se ve třech směrech.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (131)$$

Různá permitivita v různých směrech znamená různé rychlosti šíření a různý index lomu:

$$n_k \equiv \frac{c}{v_k} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{1/\sqrt{\varepsilon_k\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_0}} \quad (132)$$

Pokud jsou všechny tři permitivity, a tím i indexy lomu, různé ($n_1 \neq n_2 \neq n_3$), hovoříme o dvouosém krystalu. U mnohých krystalů jsou ale dva ze tří indexů lomu stejné, tj. například

$$n_1 = n_2 \neq n_3 ; \quad (133)$$

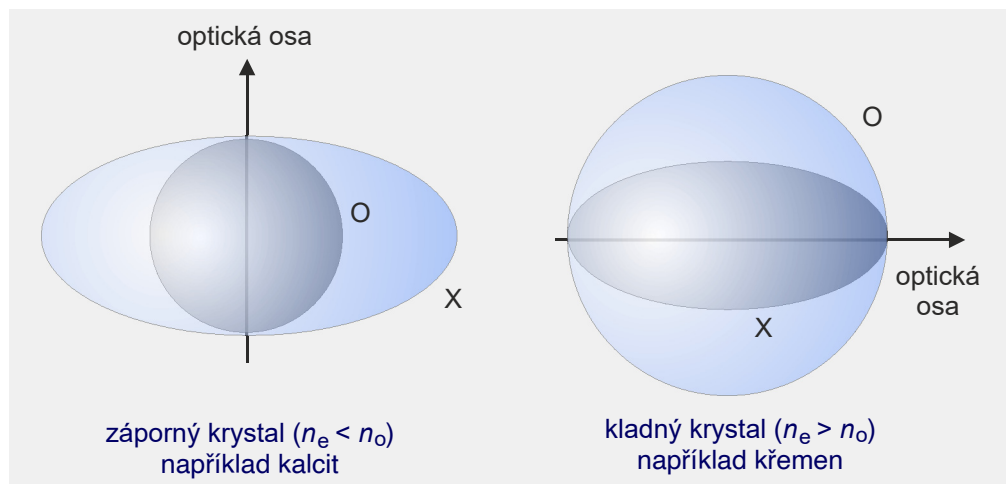
V tomto případě hovoříme o jednoosých krystalech, oba shodné indexy nazýváme řádným indexem lomu (*ordinary*) a třetí, lišící se od ostatních, nazýváme mimořádným (*extraordinary*) indexem:

$$\begin{aligned} n_o &= n_1 = n_2, \\ n_e &= n_3 \end{aligned} \quad (134)$$

Příklady indexů lomu některých jednoosých krystalů jsou v následující tabulce:

krystal	n_o	n_e
křemen	1,544	1,553
rutil	2,616	2,903
islandský vápenec	1,658	1,486
turmalín	1,669	1,638
beryl	1,598	1,590

U elektricky anizotropních látek se setkáváme s řadou nových vlastností. V krystalech se objevují současně dvě vlnoplochy odpovídající šíření řádné (O) a mimořádné vlny (X). Tomu odpovídají i dva vlnové vektory a dvojitý obraz věcí zobrazených dvojlomným krystalem. Vždy ale existuje jedna osa, v níž oba vlnové vektory splývají a vlnoplochy řádné a mimořádné vlny se dotýkají. Takové ose říkáme *optická osa*.

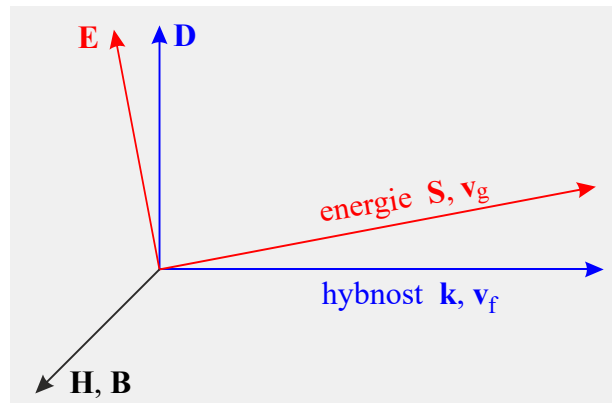


Směry jednotlivých vektorů získáme z Maxwellových rovnic, v nichž nebudeme uvažovat ani prostorové náboje, ani tekoucí proudy a ponecháme oba elektrické i oba magnetické vektory a provedeme Fourierovu transformaci:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}. \quad (135)$$

Vlnový vektor \mathbf{k} je kolmý na vektory \mathbf{D} a \mathbf{B} , tj. má směr hustoty hybnosti $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ a tedy fázové rychlosti vlnění. Naopak grupová rychlost má směr šíření energie, tedy směr Poyntingova vektoru (toky energie) $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Za paprsek považujeme směr šíření energie, tedy není už kolmý na vlnoplochy.

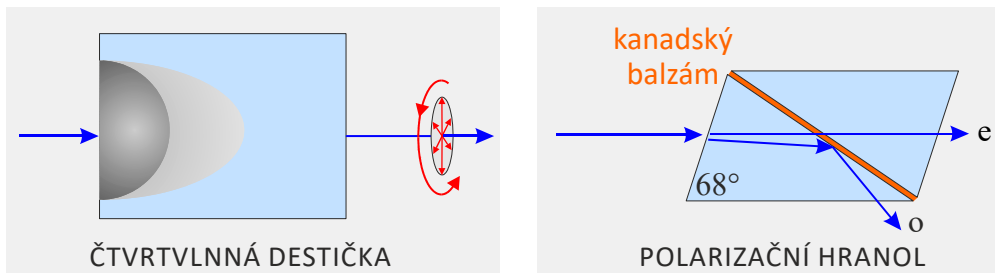


Zapamatujte si:

- Fázová rychlost a vlnový vektor míří ve směru hustoty hybnosti $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$;
- Grupová rychlost a paprsek míří ve směru toku energie $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$;
- Optická osa je směr s jediným vlnovým vektorem.

Pokud vstupuje paprsek do krystalu, rozdělí se původní vlna na dvě: řádnou a mimořádnou. Řádná vlna se láme podle indexu lomu n_o , mimořádná podle indexu lomu n_e . Obě nové vlny jsou polarizované a jejich polarizace (roviny kmitů elektrického pole) jsou navzájem kolmé.

Dvojlomné prostředí lze využít v řadě zajímavých zařízení. Jmenujme alespoň dvě. Prvním je **čtvrtvlnná destička**. Krystal je vybrušen tak, že jedním z povrchů vstupuje kolmý paprsek kolmo na optickou osu. Obě vzniklé vlny se šíří ve stejném směru. Různé polarizace se ale šíří různou rychlostí. Destička má takovou tloušťku, aby došlo k posunu obou polarizací o 90° . Na výstupu se obě vlny spojí. Kmity elektrického pole vln jsou navzájem kolmé a přitom posunutě o 90° . Tím vznikne kruhově polarizovaný elektromagnetický signál. Jiným zajímavým zařízením je **polarizační hranol** (tzv. nikol). v jehož nitru je řezná plocha slepená kanadským balzámem. Do anizotropního krystalu z islandského vápence vstupuje nepolarizovaný paprsek, který se rozdělí na dvě polarizace. Index lomu kanadského balzámu je takový, že u řádného paprsku dojde k úplnému odrazu a krystal opustí. Druhá vlna kanadským balzámem projde. Obě polarizace se oddělí, a hranol je proto zdrojem polarizovaného světla.



Vlny ve vodivém prostředí

Nalezneme vlnovou rovnici pro elektromagnetickou vlnu šířící se v kovu. V Maxwellových rovnicích dosadíme za proudovou hustotu $\mathbf{j}_Q = \sigma \mathbf{E}$, kde σ je diferenciální vodivost

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (136)$$

Na třetí rovnici aplikujeme operaci divergence a za $\operatorname{div} \mathbf{D}$ dosadíme z první rovnice:

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_Q \approx \rho_0 \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right]. \quad (137)$$

Prostorová hustota náboje ve vodiči exponenciálně vymizí a nemusíme ji proto uvažovat. Za výchozí sadu Maxwellových rovnic pro vlny ve vodiči můžeme použít

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (138)$$

Aplikací operace rotace na třetí rovnici můžeme eliminovat elektrické pole

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \sigma\mu \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} &= -\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

Obdobně můžeme získat i rovnici pro pole elektrické. Ve vodiči splňují elektromagnetické vlny tzv. telegrafní rovnici:

$$\left(\nabla^2 - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0.$$

Po dosažení rovinné vlny (provedení Fourierovy transformace) získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 - i c^2 \sigma \mu \omega. \quad (139)$$

Je-li vodivost nulová ($\sigma = 0$), přejde tato disperzní relace ve známou disperzní relaci vln v nevodivém prostředí. Ve vodiči je disperzní relace komplexní, což obecně znamená útlum.

Útlum v prostoru

Hledejme nejprve prostorový útlum (řešení v k):

$$c^2 k^2 = \omega^2 + i c^2 \sigma \mu \omega \approx i c^2 \sigma \mu \omega.$$

Vzhledem k vysoké vodivosti kovů jsme první člen na pravé straně zanedbali. Tento výraz již snadno odmocníme. Nezapomeňte, že $i^{1/2} = (1+i)/2^{1/2}$. Proto

$$k = k_1 + i k_2; \quad k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega}{2}}. \quad (140)$$

Reálná i imaginární část vlnového vektoru je stejně veliká (to je pro kovy typické). V prostoru tedy bude mít vlna charakter

$$\psi = \mathbf{A} \exp \left[i \sqrt{\sigma \mu \omega / 2} x - \sqrt{\sigma \mu \omega / 2} x \right] \quad (141)$$

Vlna je exponenciálně tlumená. Snadno určíme charakteristickou vzdálenost, na které se vlna utlumí faktorem e :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}.$$

Tuto vzdálenost (do které vlna ve vodivém prostředí pronikne) nazýváme *skinová hloubka*.

Útlum v čase

Hledejme nyní útlum v čase (řešení v ω). Disperzní relace je kvadratická rovnice pro frekvenci ω s řešením

$$\omega_{1,2} = -\frac{i}{2} c^2 \sigma \mu \pm \frac{1}{2} \sqrt{-c^4 \sigma^2 \mu^2 + 4c^2 k^2}.$$

V diskriminantu je vodivostní člen dominantní, poslední člen zanedbáme. V takovém případě zbývá jediné nenulové řešení

$$\omega \cong -i c^2 \sigma \mu. \quad (142)$$

Řešení ve frekvenci je ryze imaginární a má charakter útlumu

$$\psi = \mathbf{A} e^{-c^2 \sigma \mu t} \quad (143)$$

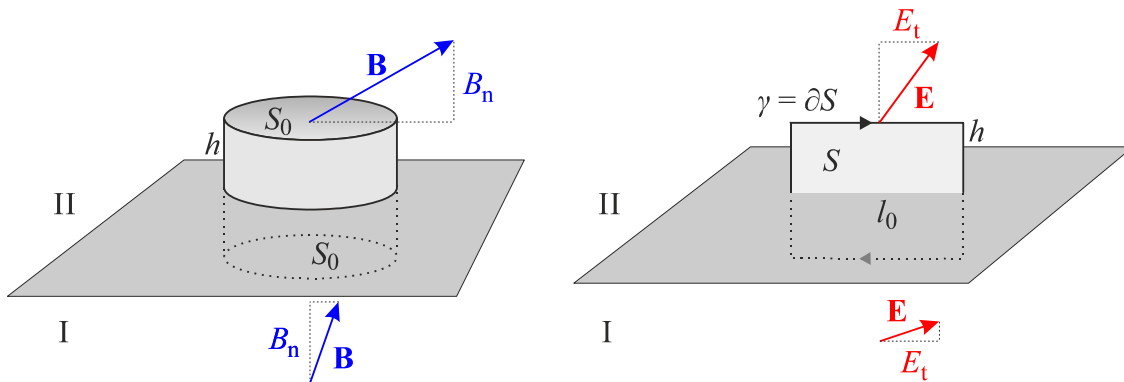
s charakteristickou dobou útlumu, na niž bude vlna utlumena faktorem e

►
$$\tau = 1 / (c^2 \sigma \mu). \quad (144)$$

Povšimněte si, že při dodržení znaménkové konvence (+ prostor, – čas) v zápise rovinných vln typu $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ vyšel pro elektromagnetickou vlnu pronikající do vodivého prostředí útlum v čase i v prostoru, což je správně.

Pole na rozhraní

Elektrická a magnetická pole nezřídka procházejí rozhraními, na nichž mění svůj směr. Tato změna směru má svá pravidla vyplývající z Maxwellových rovnic v integrálním tvaru. Podle následujícího obrázku budeme rovnice s divergencemi integrovat v okolí rozhraní dvou prostředí I a II přes váleček s objemem V a hranicí S . Pokud chceme znát podmínky na rozhraní, musíme limitně snižovat výšku válečku h k nule. Na tvaru podstavu válce nezáleží.



Vyzkoušejme si to nejprve na Gaussově větě magnetostatiky:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \oiint_{S=\partial V} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0.$$

Integrace probíhá přes plochu ohraničující válec. Pokud začneme jeho výšku snižovat, zůstane jen integrace přes horní a dolní podstavu. Vnější normála bude na těchto podstavách mířit opačným směrem:

$$\mathbf{B}_{\text{II}} \cdot \mathbf{n}_{\text{II}} S_0 + \mathbf{B}_{\text{I}} \cdot \mathbf{n}_{\text{I}} S_0 = 0$$

Předpokládejme, že normála k rozhraní \mathbf{n} míří například nahoru, potom je $\mathbf{n}_{\text{II}} = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_{\text{I}} = -\mathbf{n}$:

►
$$B_{n\text{II}} - B_{n\text{I}} = 0, \quad (145)$$

tedy normálová složka magnetické indukce se na rozhraní vždy zachovává (viz obrázek nalevo). Provedme stejnou úvahu pro druhou divergentní rovnici:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV = \iiint_V \rho_Q \, dV \quad \Rightarrow \quad \oiint_{S=\partial V} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \iiint_V \rho_Q \, dV.$$

Na levé straně budeme postupovat stejně, tj. budeme limitně snižovat výšku válečku, až dostaneme rozdíl normálových složek indukce elektrického pole. Na pravé straně je nyní situace

poněkud odlišná. Pokud je ve válečku jen prostorový náboj, dostaneme při integraci napravo nulu (objem válce se limitně blíží k nule) a normálové složky indukce elektrického pole budou spojité – stejně, jako je tomu u magnetického pole. Jiný výsledek obdržíme, pokud je na rozhraní lokalizovaný plošný náboj:

$$(D_{nII} - D_{nI})S_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \rho_Q V = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{S_0 h} S_0 h = \Delta Q.$$

Po převedení plochy z levé na pravou stranu vidíme, že platí

$$\blacktriangleright \quad D_{nII} - D_{nI} = \sigma. \quad (146)$$

V případě, že rozhraní obsahuje plošný náboj, bude se měnit normálová složka indukce elektrického pole skokem. Pokud na rozhraní náboj není, bude spojitá. Analyzujme nyní Faradayův indukční zákon. Provedeme integraci přes obdélník dle obrázku napravo:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \iint_S (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Při limitním snižování výšky obdélníku se bude integrál napravo blížit nule (plocha, přes kterou se integruje, vymizí). Nalevo z ohraničující křivky zůstanou po limitním přechodu jen části rovnoběžné s rozhraním:

$$\mathbf{E}_{II} \cdot \mathbf{t}_{II} l_0 + \mathbf{E}_I \cdot \mathbf{t}_I l_0 = 0,$$

kde \mathbf{t} je tečný vektor k rozhraní mířící ve směru integrační křivky. Vzhledem k tomu, že platí $\mathbf{t}_{II} = \mathbf{t}$, $\mathbf{t}_I = -\mathbf{t}$, dostáváme vztah

$$\blacktriangleright \quad E_{tII} - E_{tI} = 0, \quad (147)$$

tedy tečná složka intenzity elektrického pole je na rozhraní vždy spojitá (viz pravá část obrázku). Zbývá nám poslední z Maxwellových rovnic – Ampérův zákon. Opět provedeme integraci přes obdélník v pravé části obrázku:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \iint_S (\text{rot } \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow$$

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Integrál nalevo při limitním přechodu půjde k rozdílu tečných složek násobených délkou křivky podél rozhraní. Oba integrály napravo budou v případě prostorových proudů nulové (integrační plocha se limitně blíží k nule. V takovém případě budou tečné složky intenzity magnetického pole spojité tak, jak tomu bylo u intenzity elektrického pole. Pokud ale v ploše rozhraní poteče elektrický proud (plošný proud), bude situace jiná:

$$(H_{tII} - H_{tI})l_0 = \lim_{h \rightarrow 0} j_Q S = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{l_0 h} l_0 h = \Delta I.$$

Po převedení délky křivky z levé strany na pravou máme

$$\blacktriangleright \quad H_{tII} - H_{tI} = i. \quad (148)$$

V případě, že rozhraní obsahuje tekoucí proudy, bude se měnit tečná složka intenzity magnetického pole skokem. Velikost skoku bude rovna proudu tekoucímu rozhraním vztáženému na jednotku délky. Pokud v rozhraní proudy netečou, bude tečná složka intenzity magnetického pole spojitá. Uvedme na závěr všechny podmínky na rozhraní v jednom jediném vztahu:

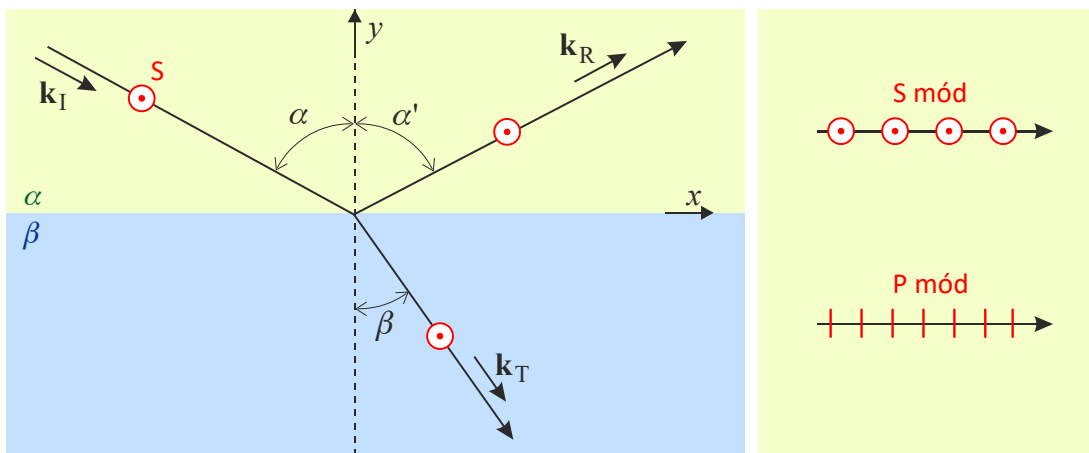
$$\begin{aligned}
 B_{nII} - B_{nI} &= 0, \\
 D_{nII} - D_{nI} &= \sigma, \\
 E_{tII} - E_{tI} &= 0, \\
 H_{tII} - H_{tI} &= i.
 \end{aligned}
 \tag{149}$$

Bez plošných proudů a nábojů se zachovávají normálové složky indukci \mathbf{B} , \mathbf{D} a tečné složky intenzit \mathbf{E} , \mathbf{H} . V případě plošných nábojů a proudů v rozhraní se mění skokem indukce elektrického pole a intenzita magnetického pole (ty veličiny, které v sobě zahrnují reakci látky na přiložená pole).

Vlna na rozhraní

Zákony odrazu a lomu poprvé odvodil arabský učenec Ibn Sahl (asi 940–1000) v roce 984. V západním světě znovuobjevil zákon lomu až holandský astronom a matematik Willebrord Snellius (1580–1626) v roce 1621. Jeho předchůdci popisovali lom světla pomocí experimentálně sestavených tabulek. Zákon lomu se také pokoušel nalézt francouzský filozof, fyzik a matematik René Descartes (1596–1650). Vycházel z analogie míčků, které při letu proniknou skrze tenkou překážku, ztratí energii a jejich dráha změní směr. Bohužel došel tímto postupem k výsledku, v němž sice správně vystupují siny úhlů dopadu a lomu, ale poměr rychlostí světla v obou prostředích mu vyšel obrácený. Správnou formuli odvodil také francouzský matematik a právník Pierre de Fermat (1601–1665) z principu minimálního času.

Způsobů odvození zákona lomu a odrazu je mnoho – od Huyghensova principu přes Fermatův princip až po přímý výpočet z podmínek na rozhraní, které okamžitě plynou z Maxwellových rovnic. Odvození provedeme dle následujícího obrázku:



Rovina rozhraní je (xz) , tj. $y = 0$. Rovina interakce je (xy) , tj. $z = 0$ (rovina papíru či monitoru). Pokud elektrický vektor míří kolmo na rovinu interakce, hovoříme o *S polarizaci* (*Stick*, propíchnout). Pokud elektrický vektor kmitá v rovině interakce, hovoříme o *P polarizaci* (*Parallel*, rovnoběžná). Z těchto polarizací lze superpozicí složit libovolnou jinou polarizaci. Vlnový vektor paprsku dopadajícího na rozhraní je označen \mathbf{k}_I (*Incident*), odraženého paprsku \mathbf{k}_R (*Reflected*) a paprsku prošlého rozhraním \mathbf{k}_T (*Transmitted*). Rovina kmitů elektrického pole je naznačena červenými body, elektrické pole míří směrem k vám – jde o S polarizaci, pro kterou provedeme výpočet. Elektrické pole má v tomto módu jen tečnou složku k rozhraní, která bude spojitá. Úhly jsou měřeny od kolmice k rozhraní, úhel dopadu je označen α , úhel odrazu α' a úhel lomu β . Vlnové vektory budou mít složky

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_I &= (k_I \sin \alpha, -k_I \cos \alpha, 0); \\
 \mathbf{k}_R &= (k_R \sin \alpha', k_R \cos \alpha', 0); \\
 \mathbf{k}_T &= (k_T \sin \beta, -k_T \cos \beta, 0).
 \end{aligned}
 \tag{150}$$

Tečné složky pole jsou spojité, tj.

$$\mathbf{E}_{0I} e^{i[\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega_I t]} + \mathbf{E}_{0R} e^{i[\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega_R t]} = \mathbf{E}_{0T} e^{i[\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega_T t]}. \quad (151)$$

Do posledního vztahu dosadíme jednotlivé vlnové vektory a rozhraní ($y = 0$):

$$E_{0I} e^{i[k_I x \sin \alpha - \omega_I t]} + E_{0R} e^{i[k_R x \sin \alpha' - \omega_R t]} = E_{0T} e^{i[k_T x \sin \beta - \omega_T t]}. \quad (152)$$

Tato podmínka na rozhraní musí platit v libovolném čase t a v libovolné poloze x , což bude splněno jen, pokud platí

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T, \quad (153)$$

$$k_I \sin \alpha = k_R \sin \alpha' = k_T \sin \beta. \quad (154)$$

Při odrazu ani lomu se nemění frekvence elektromagnetického záření. Z druhé podmínky už snadno odvodíme

$$\begin{aligned} \frac{\omega_I}{v_I} \sin \alpha = \frac{\omega_R}{v_R} \sin \alpha' = \frac{\omega_T}{v_T} \sin \beta &\Rightarrow \\ \frac{\sin \alpha}{v_\alpha} = \frac{\sin \alpha'}{v_\alpha} = \frac{\sin \beta}{v_\beta}. \end{aligned} \quad (155)$$

Z posledního vztahu okamžitě plyne jak zákon odrazu, tak zákon lomu:

$$\blacktriangleright \quad \alpha = \alpha', \quad (156)$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_\alpha}{v_\beta} = \frac{n_\beta}{n_\alpha} \quad (157)$$

Index lomu je definován jako podíl rychlosti světla ve vakuu ku rychlosti světla v daném prostředí, tedy platí:

$$n \equiv \frac{c}{v_f} \quad (158)$$

Brewsterův zákon

Každá z polarizací se při odrazu chová poněkud jinak. Odražené světlo má vždy zastoupenou S polarizaci, ale pro určitý úhel dopadu zcela vymizí P polarizace. Pokud mělo dopadající světlo smíšenou polarizaci, bude odražené světlo zcela polarizované. Experimentálně tento úhel poprvé určil skotský vynálezce sir David Brewster (1781–1868). Mimo jiné vynalezl kaleidoskop a vylepšil optický mikroskop. Pomocí dvouosých krystalů měřil v letech 1813 až 1814 úhel maximální polarizace a zjistil, že pokud je tangenta úhlu dopadu rovna indexu lomu, je polarizace maximální.

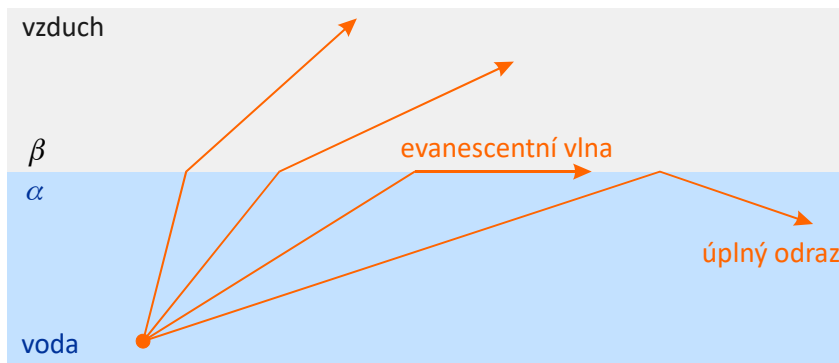
$$\blacktriangleright \quad \operatorname{tg} \alpha_B = n; \quad n \equiv \frac{n_\beta}{n_\alpha}. \quad (159)$$

Světlo odražené od Měsíce nebo vodní hladiny je vždy částečně polarizované. Dopadá-li pod Brewsterovým úhlem, obsahuje odražené světlo jen S polarizaci.

Úplný odraz (totální reflexe)

Dalším zajímavým jevem je úplný odraz. Nastává při dopadu paprsku na opticky řidší prostředí (například z vody nebo ze skla do vzduchu). Pokud budeme zvětšovat úhel dopadu, bude paprsek lomen stále více od kolmice, až se nakonec bude šířit podél rozhraní. V rozhraní vznikne tzv. *evanescentní* vlna, která je exponenciálně tlumená s rostoucí vzdáleností od rozhraní (vlnový vektor má komplexní složku). Při zkoumání evanescentních vln se ukázalo,

že ze zatím neznámých důvodů mají fotony pohybující se podél rozhraní atypickou složku spinu ve směru pohybu. Při ještě větších úhlech už k lomu nedochází. Světlo či elektromagnetická vlna se jen odrazí od rozhraní a zůstane v opticky hustším prostředí. Toho se využívá například ve světelných vláknech.



Pro mezní úhel je úhel lomu roven 90° a ze Snellova zákona máme

$$\sin \alpha_M = n; \quad n \equiv \frac{n_\beta}{n_\alpha}. \quad (160)$$

Z tzv. Fresnelových vztahů je možné detailně zkoumat poměry v S a P polarizaci při úplném odrazu, ale to už je za hranicí možností tohoto úvodního kurzu.

Zákony zachování

Elektromagnetické pole, které zavedl anglický fyzik Michael Faraday jako prostředí pro přenos interakce, není jen matematickou pomůckou pro popis elektrických a magnetických jevů, ale reálnou entitou, která je schopna přenášet z jednoho místa na druhé energii, hybnost a moment hybnosti. Zákony zachování těchto veličin jsou zakódovány do Maxwellových rovnic a my se s některými z nich v této kapitole postupně seznámíme. Vypišme zde proto ještě jednou všechny Maxwellovy rovnice, abychom se na ně při odvozování mohli snadno odkazovat:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (161)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (162)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (163)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (164)$$

Ve fyzice I jsme si odvodili rovnici kontinuity, což je základní podoba zákona zachování aditivní (neboli extenzivní) veličiny. Lokálně zformované zákony zachování platí v každém bodě časoprostoru. Postup z Fyziky I můžeme provést pro jakoukoli extenzivní veličinu, výsledkem je rovnice kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A = 0. \quad (165)$$

Veličina ρ_A je objemová hustota veličiny A , její jednotkou je $[A]/\text{m}^3$. Může jít například o hustotu hmoty (kg/m^3), hustotu energie (J/m^3), hustotu hybnosti ($\text{kg m s}/\text{m}^3$), hustotu náboje (C/m^3) atd. Veličina \mathbf{j}_A je tok veličiny A , má význam množství veličiny proteklé jednotkovou plochou za jednotku času a míří ve směru toku veličiny, tedy rychlostního pole. Jednotkou je $[A]/(\text{m}^2\text{s})$. Například tok energie má rozměr $\text{J} \cdot \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Zákon zachování náboje

Ve Fyzice I jsme do Maxwellovy soustavy přidali Maxwellův proud, který zajišťuje platnost zákona zachování náboje. Ukažme si, že Maxwellovy rovnice implicitně splňují tento klíčový zákon. Z rovnice (162) určíme časovou změnu hustoty náboje, za vzniklou časovou změnu elektrické indukce v dalším kroku dosadíme z rovnice (164):

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) = -\operatorname{div} \mathbf{j}_Q.$$

Porovnáme-li začátek a konec, okamžitě máme zákon zachování elektrického náboje:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_Q = 0. \quad (166)$$

Zákon zachování energie pole

Hustotu energie elektrického pole dobře známe – jde o polovinu skalárního součinu obou elektrických vektorů, tedy $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$. Jde například o hustotu energie v kondenzátoru. Obdobně je hustota energie v magnetickém poli dána vztahem $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/2$, příkladem může být hustota energie obsažené v solenoidu. Z Maxwellových rovnic (161) až (164) vypočteme časovou změnu hustoty energie a upravíme ji do tvaru zákona zachování. Pro zjednodušení výpočtů budeme uvažovat lineární vztahy mezi oběma elektrickými vektory a mezi oběma magnetickými vektory ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \\ &= \mathbf{E} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) + \mathbf{H} \cdot (-\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \\ &= \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E} = \\ &= -\operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Při odvození jsme využili vektorovou identitu $\operatorname{div} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$, kterou jsme odvodili pomocí Leviho-Civita tenzoru ve Fyzice I na přednášce. Výsledný zákon zachování energie pro pole má tvar rovnice kontinuity, jejíž členy snadno identifikujeme:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathcal{P}; \quad (167)$$

$$\blacktriangleright \quad u \equiv \rho_U \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}, \quad \mathbf{S} \equiv \mathbf{j}_U = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \mathcal{P} \equiv \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \quad (168)$$

V časové derivaci je celková hustota energie pole – skládá se z hustoty energie elektrické a magnetické. V prostorové derivaci (za divergencí) musí být tok energie. Vidíme, že je roven vektorovému součinu intenzit obou polí $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Tok energie elektromagnetického pole se nazývá *Poyntingův vektor* podle anglického fyzika Johna Henryho Poyntinga (1852–1914), obvykle ho značíme symbolem \mathbf{S} . Vidíme, že energie teče vždy kolmo na intenzitu elektrického pole a intenzitu magnetického pole. Na pravé straně není nula, což znamená, že se energie elektromagnetického pole nezachovává. Jak je to možné? Elektromagnetické pole může totiž svou energii předávat částicím. Například v mikrovlnné troubě, do které jste strčili oběd, dojde k jeho ohřevu elektromagnetickým polem. Člen $\mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}$ na pravé straně je hustotou Jouleova výkonu (W/m^3):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E} &= \rho_Q \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = Qn \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = n \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = \\ &= n \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = n \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{dt} = n P = \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Jouleův výkon popisuje, jak pole předává energii částicím. Pro pole jde o ztrátu energie, proto je na pravé straně znaménko minus. Teprve zákon zachování energie pro celou soustavu, tj. pole spolu s částicemi, by na pravé straně měl nulu.

Zákon zachování hybnosti pole (není povinné)

U skalárních veličin, jakými jsou například energie nebo náboj, jsou příslušnými toky vektory. U vektorových veličin tomu ale bude jinak, toky budou tenzory druhého řádu. Elektromagnetické pole můžeme chápat jako soustavu fotonů s nulovou klidovou hmotností. Takové částice mají energii rovnou

$$\mathcal{E} = pc. \quad (169)$$

Ukážeme si to ve speciální relativitě. Pro hustotu energie u a hustotu hybnosti pole γ máme

$$u = \gamma c \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{u}{c}. \quad (170)$$

Pro hustotu hybnosti γ jako vektor můžeme psát

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{u}{c} \mathbf{e}_c = \frac{u}{c} \frac{\mathbf{c}}{c}. \quad (171)$$

V čitateli je součin hustoty energie a rychlosti šíření, tj. tok energie, který je dán Poyntingovým vektorem, proto

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}. \quad (172)$$

Z kapitoly o elektromagnetických vlnách víme, že $c^2 = 1/\epsilon\mu$, proto:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \quad (173)$$

Povšimněte si, že vektorový součin intenzit polí má význam toku energie, zatímco vektorový součin indukcí polí má význam hustoty hybnosti. Naším cílem je nyní sestavit zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole, tedy najít časovou derivaci vztahu (173). Při úpravách využijeme soustavu Maxwellových rovnic (161) až (164):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times (-\text{rot } \mathbf{E}) = \dots$$

Následují standardní úpravy pro „kátou“ složku časové změny hustoty hybnosti, ve kterých členy s prostorovými derivacemi převedeme do tvaru divergence. Lze to provést například přepisem vektorových součinů pomocí Leviho-Civitova tenzoru. Výsledkem elementárních úprav s využitím Maxwellových rovnic je

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot \ddot{\mathbf{T}} = -\rho_Q \mathbf{E} - \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}; \quad (174)$$

$$\blacktriangleright \quad T_{kl} \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \delta_{kl} - E_k D_l + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{kl} - H_k B_l. \quad (175)$$

V zákonu zachování (174) vystupuje za časovou derivací hustota hybnosti elektromagnetického pole. Za prostorovou derivací (divergencí) je *tenzor toku hybnosti pole* \mathbf{T}^{EM} , který se nazývá *Maxwellův tenzor pnutí* nebo také někdy *tenzor tlaku*. Skládá se z elektrické a magnetické části, každá z nich má dva členy – skalární (diagonální) a tenzorový. Vidíme, že hybnost elektromagnetického pole se nezachovává. Je to dáno předáváním hybnosti pole částicím. Teprve celkový součet hybnosti všech částic a pole má tvar zákona zachování.

Potenciály pole

Vyjďeme z nezdroyové části Maxwellových rovnic:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (176)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (177)$$

Z první rovnice stejně jako ve stacionárním případě plyne existence takové funkce $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$, že

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (178)$$

Pole \mathbf{A} nazýváme vektorový potenciál, jeho zavedením je Maxwellova rovnice (176) automaticky splněna, neboť $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$. Nyní se věnujme druhé rovnici (177), do níž za \mathbf{B} dosadíme z definice vektorového potenciálu (178):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \\ \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že jde o dvakrát spojitě diferencovatelné funkce, a mohli jsme proto zaměnit pořadí druhých derivací. Má-li být rotace nějakého pole nulová, tj. $\operatorname{rot} \mathbf{K} = 0$, potom lze tuto rovnici automaticky splnit volbou $\mathbf{K} = \operatorname{grad} f$, neboť rotace z gradientu je vždy nulová. Můžeme tedy psát

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi.$$

Znaménko minus je, stejně jako ve stacionárním případě, voleno proto, aby síly mířily do minima potenciální energie. Vztah pro elektrické pole tedy bude mít tvar

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (179)$$

Jde o zobecnění stacionárního vztahu $\mathbf{E} = -\nabla \phi$. V případě proměnných polí je elektrické pole generováno i časovými změnami potenciálu \mathbf{A} . Potenciály nejsou určeny jednoznačně, v jejich volbě je značná libovůle. Velké množství potenciálů vede na stejná elektrická a magnetická pole. Tuto libovůli lze použít k volbě potenciálů, která zjednoduší výpočty.



4. RELATIVITA

Lorentzova transformace

Rozpor mezi elektrodynamikou a klasickou mechanikou

Poznávání relativnosti pohybu nás zasáhlo ve třech vlnách. První spadá do období sedmnáctého století, kdy Galileo Galilei a později Isaac Newton založili klasickou mechaniku, v níž jsou čas a prostor neměnným jevištěm pro pohyb těles. Druhou vlnu z roku 1905 nazýváme speciální relativita, čas a prostor jsou nadále absolutní, ale velikost časového nebo prostorového intervalu už závisí na tom, z jaké souřadnicové soustavy události sledujeme. Poslední je obecná relativita z roku 1916, kde se čas a prostor stává poprvé součástí dění, spoluvytvářejí ho všechny objekty ve vesmíru.

Galileův princip relativity zavádí inerciální soustavu, jakousi ideální souřadnicovou soustavu, v níž platí zákon setrvačnosti (setrvačnost se latinsky řekne *iners*, odsud inerciální soustava), tj. tělesa jsou v klidu nebo se pohybují rovnoměrně přímočaře, pokud na ně nepůsobí síla. Různé inerciální souřadnicové soustavy se vůči sobě mohou pohybovat jen konstantní rychlostí – pokud by vzájemná rychlost nebyla konstantní, nemohly by obě soustavy být současně inerciální. Předpokládejme, že pro polohový vektor částice platí transformace (jednu ze soustav označujeme vlnkou)

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad (180)$$

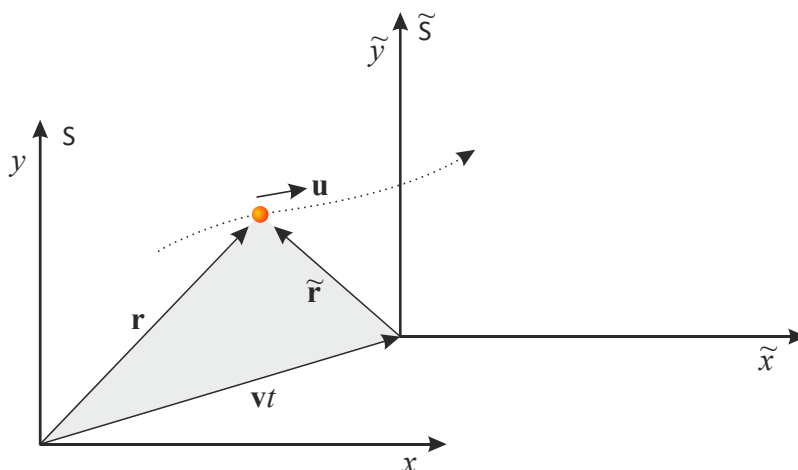
kde \mathbf{v} je vzájemná rychlost obou soustav a \mathbf{r} je polohový vektor částice. Derivováním podle času získáme transformaci rychlosti částice \mathbf{u} mezi oběma soustavami

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}. \quad (181)$$

Jde o klasické skládání rychlostí, na které jsme si v mechanice velmi zvykli. Dalším derivováním podle času získáme vztah mezi zrychleními (\mathbf{v} je konstantní):

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}. \quad (182)$$

V obou inerciálních soustavách působí stejná zrychlení a tedy stejné síly. Proto mechanické děje dopadnou ve všech inerciálních soustavách stejně a nelze nalézt nějakou preferovanou soustavu, která by byla lepší než ostatní. To je podstatou tzv. *Galileova principu relativity*.



V 18. a 19. století lidé postupně poznávali zákony elektřiny a magnetizmu a experimentálně nacházeli souvislosti mezi oběma jevy. V roce 1873 sepsal veškeré dosažené výsledky James Clerk Maxwell v monumentálním dvousvazkovém díle *A Treatise on Electricity and Magnetism*. V tomto spise jsou publikovány slavné Maxwellovy rovnice, z nichž plyne, že rychlosti by se měly skládat jiným způsobem, než předpokládal Galileo Galilei a že by rychlost světla

měla být dokonce nezávislá na volbě souřadnicové soustavy a ve všech soustavách mít stejnou hodnotu, jak nám vyšlo v kapitole 2.5.2. Tento zjevný rozpor mezi klasickou mechanikou a Maxwellovou elektrodynamikou nelze vyřešit „na papíře“, bylo třeba experimentálně rozhodnout, která z teorií je správně. Poprvé tak učinili Albert Abraham Michelson (1852–1931) a Edward Morley (1838–1923) ve svém slavném experimentu z roku 1887, v němž interferometricky měřili rozdíl rychlosti světla na letící Zemi ve směru jejího pohybu kolem Slunce a ve směru kolmém na tento pohyb. Výsledek dal za pravdu Maxwellově elektrodynamice, rychlost světla nijak nezávisela na pohybu Země. Od té doby byla učiněna řada dalších experimentů, které prokázaly správnost Maxwellovy elektrodynamiky.

Lorentzova transformace

Úprava klasické mechaniky do podoby, ve které je v souladu s elektrodynamikou se nazývá speciální relativita a pochází z roku 1905. Jejím autorem je Albert Einstein, který rozšířil princip relativity i na elektromagnetické děje a předpokládal, že mechanické a elektromagnetické experimenty dopadnou ve všech inerciálních soustavách stejně a žádným mechanickým ani elektromagnetickým experimentem nelze najít preferovanou souřadnicovou soustavu. To samozřejmě ale znamená, že rychlost světla musí být ve všech soustavách stejná. Předpokládejme pro jednoduchost, že se dvě inerciální souřadnicové soustavy pohybují vůči sobě jen v ose x a „opravme“ Galileovu transformaci (180) za pomoci opravného koeficientu $\gamma(v)$, který se pro malé rychlosti blíží k jedné:

$$\tilde{x} = \gamma(x - vt), \quad (183)$$

Ze symetrie obou soustav plyne, že inverzní transformace musí mít stejný tvar, ale opačný směr rychlosti, tj.:

$$x = \gamma(\tilde{x} + v\tilde{t}). \quad (184)$$

Představme si nyní, že v okamžiku, kdy se obě soustavy právě míjejí, blikneme v počátku obou soustav baterkou. Pokud se v obou soustavách světlo šíří stejnou rychlostí c , jak vyžadují Maxwellovy rovnice, musí platit

$$x = ct; \quad \tilde{x} = c\tilde{t}, \quad (185)$$

proto z (183) a (184) máme

$$\begin{aligned} c\tilde{t} &= \gamma(ct - vt); \\ ct &= \gamma(c\tilde{t} + v\tilde{t}). \end{aligned} \quad (186)$$

vynásobením obou rovnic získáme relaci

$$c^2\tilde{t}\tilde{t} = \gamma^2(c-v)(c+v)t\tilde{t}, \quad (187)$$

v níž můžeme vykrátit oba časy a poté spočítat opravný koeficient gamma:

$$\blacktriangleright \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (188)$$

Nová transformace souřadnic proto bude

$$\tilde{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (189)$$

Rychlost je vzdálenost dělená časovým intervalem. Pokud chceme, aby rychlost světla byla shodná v našich obou soustavách, musí se transformovat jak prostorové souřadnice, tak čas. K nalezení této transformace můžeme využít soustavu rovnic (183) a (184), v níž už známe koeficient γ . Z první rovnice dosadíme \tilde{x} do druhé rovnice a po snadném výpočtu vyjde

$$\tilde{t} = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (190)$$

Nalezená transformace se nazývá Lorentzova transformace a pro celou událost (časovou i prostorovou souřadnici) ji můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ \tilde{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ \tilde{y} &= y; \\ \tilde{z} &= z, \end{aligned} \quad (191)$$

Elegantnější je maticový zápis Lorentzovy transformace

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_S, \quad (192)$$

kde jsme označili

$$\beta = v/c; \quad (193)$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (194)$$

a souřadnice jsou $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ a $x_3 = z$. Koeficient β má význam bezrozměrné rychlosti, koeficient γ se nazývá Lorentzův kontrakční faktor (uvidíme, že vyjadřuje poměrnou kontrakci délek ve směru pohybu). Časová souřadnice x_0 má stejný rozměr jako prostorové souřadnice. Lorentzova transformace je pojmenována po holandském fyzikovi Hendriku Antoonovi Lorentzovi (1853–1928), který se zabýval transformačními vlastnostmi Maxwellových rovnic. Transformaci k úpravě rovnic klasické mechaniky použil Albert Einstein v roce 1905, kdy vytvořil speciální relativitu – mechaniku, která je v souladu s Maxwellovou elektrodynamikou.

Různé formulace Galileova principu relativity:

- Průběh mechanických dějů nezávisí na volbě inerciální souřadnicové soustavy.
- Ve všech inerciálních soustavách, vzájemně se pohybujících rovnoměrně přímočaře, dopadnou mechanické experimenty stejně.
- Žádným mechanickým experimentem nelze od sebe odlišit dvě inerciální souřadnicové soustavy. Neexistuje preferovaná inerciální soustava.
- Stav pohybu a klidu je relativní, neexistuje absolutní stav klidu, neexistuje jediná klidová inerciální soustava.

Různé formulace Einsteinova principu relativity:

- Průběh mechanických a elektromagnetických dějů nezávisí na volbě inerciální souřadnicové soustavy.
- Ve všech inerciálních soustavách, vzájemně se pohybujících rovnoměrně přímočaře, dopadnou mechanické a elektromagnetické experimenty stejně.
- Žádným mechanickým ani elektromagnetickým experimentem nelze od sebe odlišit dvě inerciální souřadnicové soustavy. Neexistuje preferovaná inerciální soustava.

Nové skládání rychlostí

Transformaci rychlostí získáme diferencováním vztahu (191):

$$\tilde{u} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{(dx - v dt) / \sqrt{\dots}}{(dt - v dx/c^2) / \sqrt{\dots}} = \frac{dx - v dt}{dt - v dx/c^2}.$$

Po „vydělení“ čitatele i jmenovatele diferenciálem dt máme

$$\tilde{u} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}. \quad (195)$$

V případě, že je vzájemný pohyb soustav opačný ($v \rightarrow -v$), máme

$$\tilde{u} = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}. \quad (196)$$

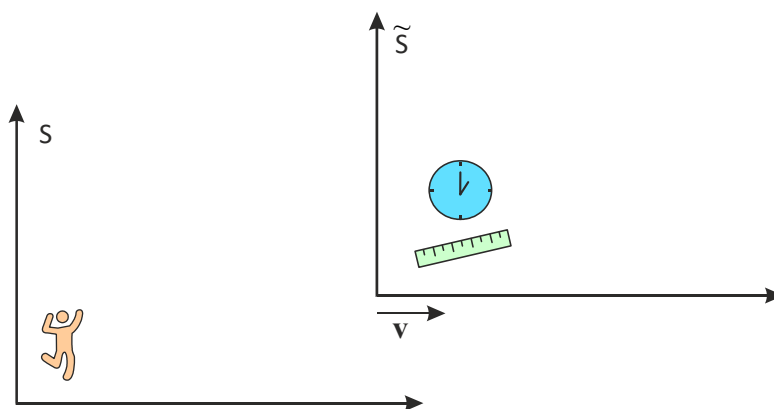
Transformace (195) a (196) představují nové skládání rychlostí. V čitateli je skládání shodné s Galileovým, ale ve jmenovateli je relativistická oprava, která se uplatní až při vysokých rychlostech. Ani Galileo, ani Newton neměli šanci tuto opravu z tehdejších experimentálních znalostí zjistit. Položíme-li ve vztahu (196) jednu z rychlostí, například rychlost u , rovnou rychlosti světla, máme

$$\tilde{u} = \frac{c + v}{1 + cv/c^2} = \frac{c + v}{(c + v)/c} = c.$$

Vidíme, že rychlost světla se skutečně v nové transformaci s ničím neskládá a zůstane ve všech inerciálních soustavách stejná. Pro malé rychlosti v porovnání s rychlostí světla je oprava ve jmenovateli zanedbatelná a rychlosti se skládají galileovskými.

Dilatace času a kontrakce délek z Lorentzovy transformace

Požadavek konstantní rychlosti světla s sebou přináší nové jevy. Rychlost světla je vzdálenost dělená časovým intervalem. Pokud má být tento poměr ve všech souřadnicových soustavách stejný, musí být vzdálenosti a časové intervaly závislé na tom, z jaké souřadnicové soustavy se díváme. Předpokládejme, že je pozorovatel v souřadnicové soustavě S , v pohybujiící se soustavě jsou hodiny a tyč mířící ve směru pohybu.



Napišme nyní přímou i zpětnou (bude se lišit znaménkem rychlosti) Lorentzovu transformaci pro čas a souřadnici x :

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & t &= \frac{\tilde{t} + v\tilde{x}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ \tilde{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & x &= \frac{\tilde{x} + v\tilde{t}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (197)$$

Pro konečné časové intervaly a pro konečné prostorové vzdálenosti máme:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{t} &= \frac{\Delta t - v \Delta x / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & \Delta t &= \frac{\Delta\tilde{t} + v \Delta\tilde{x} / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ \Delta\tilde{x} &= \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & \Delta x &= \frac{\Delta\tilde{x} + v \Delta\tilde{t}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\end{aligned}\quad (198)$$

Jde o lineární závislosti, a proto o přesné vztahy. Hodiny se ve vlastní soustavě nepohybují, $\Delta\tilde{x} = 0$, $\Delta\tilde{t} = \Delta t_0$, pro transformaci časového intervalu bude proto výhodné použít druhý vztah (198), ze kterého plyne tzv. *dilatace času*

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (199)$$

Časový interval je ve vlastní soustavě nejkratší možný. V jakékoli jiné soustavě se bude jevit časový interval delší. Náš život tedy u nás, v naší soustavě, trvá nejkratší dobu. Nyní přejděme k délce tyče. Její konce musíme měřit současně v souřadnicové soustavě pozorovatele, tj. $\Delta t = 0$, $\Delta\tilde{x} = \Delta x_0$. K odvození tedy bude nejvýhodnější třetí vztah (198), ze kterého plyne tzv. *kontrakce délek*

$$\Delta x = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta x_0. \quad (200)$$

Délka letících tyčí se zkracuje ve směru pohybu a nejdelší možná je ve vlastní souřadnicové soustavě. Oba vztahy můžeme přepsat s pomocí Lorentzova kontrakčního faktoru:

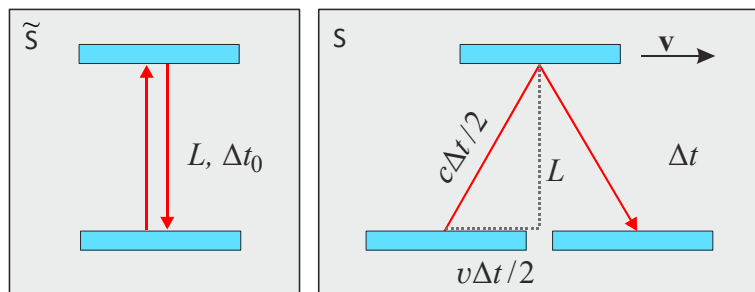
► $\Delta t = \gamma \Delta t_0,$ (201)

► $\Delta x = \Delta x_0 / \gamma.$ (202)

Odvození, které jsme provedli, bylo ryze formální a jak dilataci času, tak kontrakci délek jsme získali pouhým diferencováním Lorentzovy transformace. Pojďme nyní oba klíčové vztahy odvodit ještě jednou, ale na základě fyzikálního přístupu.

Dilatace času – fyzikální přístup

Změna chodu času nesmí záviset na způsobu realizace hodin. Proto si vymyslíme co možná nejjednodušší hodiny. Půjde o dvě rovnoběžná zrcadla, mezi nimiž se sem a tam odráží polarizovaný foton. Jeho odrazy budeme považovat za tikot našich hodin. Tyto odrazy budou ale vypadat jinak v soustavě spojené s těmito jednoduchými hodinami a jinak v soustavě, vůči níž se hodiny pohybují:



Vzdálenost mezi zrcadly označíme L , jedno tiknutí hodin (foton se vrátí do původního místa na zrcadle) označíme v soustavě spojené s hodinami Δt_0 a v soustavě spojené s pozorovatelem Δt . Nyní napíšeme Pythagorovu větu pro trojúhelník vyznačený v pravé části obrázku:

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4} = \frac{v^2 \Delta t^2}{4} + L^2 \quad (203)$$

Z tohoto vztahu snadno vypočteme časový interval Δt v soustavě pozorovatele

$$\Delta t = \frac{2L/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (204)$$

a opět tedy máme

$$\blacktriangleright \quad \Delta t = \gamma \Delta t_0. \quad (205)$$

Dilataci času můžeme tedy odvodit přímo z Lorentzovy transformace nebo nepřímo z chodu fotonů v jednoduchých fotonových hodinách. Výsledek je stejný.

Kontrakce délek – fyzikální přístup

Z vesmíru přilétají k Zemi nejrůznější částice s vysokými energiemi, kterým říkáme kosmické záření. Pokud částice kosmického záření atakuje zemskou atmosféru, dojde k její srážce s některým atomem či molekulou atmosféry a ve výšce přibližně 15 kilometrů nad zemí vznikne rozsáhlá sprška sekundárních částic. Mezi nimi jsou i miony (těžké elektrony), které objevil americký fyzik Carl Anderson v roce 1936. Střední doba života mionů je přibližně dvě mikrosekundy, a pokud by letěly nejvyšší možnou rychlostí, tj. rychlostí světla, urazily by za 2 mikrosekundy cca 600 metrů. Proto by na povrch Země miony neměly dopadat. Přesto jich dopadá za každou minutu přibližně 10 000 na metr čtvereční. Jak je to možné?

Z pohledu pozorovatele na Zemi mají při svém vzniku miony velmi velkou rychlost, přibližně 0,994 rychlosti světla. Pro ty miony, které se vydají směrem k pozorovateli na povrchu, dochází k dilataci času a jejich průměrná doba života se zvýší přibližně desetinásobně ($\gamma \approx 10$) a alespoň některé z nich doletí až k povrchu.

Jaké je ale vysvětlení z hlediska souřadnicové soustavy spojené s letícím mionem? Z hlediska mionu je jeho střední doba života pouhé 2 mikrosekundy. Povrch Země se ale přibližuje, dochází ke kontrakci vzdálenosti a mion nemusí uletět celých 15 kilometrů, ale méně. Z hlediska pozorovatele na Zemi vysvětluje dopad mionů na povrch Země dilatace času, z hlediska mionu kontrakce vzdálenosti. Vzhledem k tomu, že jde o stejný jev, musí se zkracovat vzdálenost k Zemi ve stejném poměru, v jakém dilatace prodlužuje život mionu, tedy

$$\blacktriangleright \quad \Delta l = \Delta l_0 / \gamma. \quad (206)$$

Kontrakci délek tedy opět můžeme odvodit přímo z Lorentzovy transformace nebo nepřímou úvahou o stejné povaze dilatace času a kontrakce délek.

Dnes je dilatace času a kontrakce délek ověřena mnoha experimenty, zejména na velkých urychlovačích hrají tyto jevy primární roli a bez jejich započtení by žádný urychlovač nefungoval. Ke kontrakci délek dochází jen ve směru pohybu obou soustav, v naší notaci jde o směr osy x . Letící objekty proto vidíme prostorově zdeformované.

Rapidita

Lorentzova transformace (192) má velmi jednoduché vlastnosti. Inverzní transformaci získáme pouhou záměnou znaménka rychlosti:

$$\blacktriangleright \quad A = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ +\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (207)$$

Determinant obou matic je roven jedné, například pro přímou transformaci platí:

$$\det A = \gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \cdot (1 - v^2/c^2) = 1. \quad (208)$$

Z matematického hlediska jde proto o rotační transformaci. Substitucí

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} u &= \gamma; \\ \operatorname{sh} u &= \gamma\beta \end{aligned} \quad (209)$$

můžeme Lorentzovu matici přepsat do jednoduchého tvaru

$$\blacktriangleright \quad A = \begin{pmatrix} +\operatorname{ch} u & -\operatorname{sh} u & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh} u & +\operatorname{ch} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (210)$$

Determinant je stále roven jedné, transformační matice je ale nyní formálně shodná s běžnou rotační maticí s obyčejnými siny a kosiny. Ty jsou v Lorentzově transformaci nahrazeny hyperbolickými funkcemi, což znamená, že úhel otočení je imaginární, tedy $\varphi = iu$. Je zjevné, že rotace probíhá v rovině (t, x) . Veličinu u nazýváme rapiditou a její hodnotu získáme vydělením rovnic (209):

$$\blacktriangleright \quad u = \operatorname{ath}\left(\frac{v}{c}\right). \quad (211)$$

Pro infinitezimální Lorentzovu transformaci můžeme Taylorovsky rozvinout (210):

$$A_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} 1 & -u & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - u \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (212)$$

Infinitezimální Lorentzovu transformaci tak lze rozložit na dvě maticové transformace, první je tvořena jednotkovou maticí (událost se nemění) a druhá matice jen zamění časovou a první prostorovou komponentu události. Infinitezimální Lorentzova transformace je tak jednou z nejjednodušších matematických transformací vůbec. Konečnou Lorentzovu transformaci je možné složit mnohonásobným opakováním transformace (212) s malou hodnotou rapidity.

Čtyřvektory, interval a kauzalita

Ukázali jsme si, že se událost (časová a prostorové souřadnice) transformují mezi dvěma inerciálními souřadnicovými soustavami Lorentzovou maticí. Existují i další čtveřice, které lze za pomoci Lorentzovy matice převést z jedné soustavy do druhé – říkáme jim *čtyřvektory*. Indexy čtyřvektorů píšeme řeckými písmeny, tedy událost bude x_α . Index $\alpha = 0$ odpovídá časové části, indexy $\alpha = 1, 2, 3$ odpovídají prostorové části, tedy indexy budou nabývat hodnot 0, 1, 2, 3. Protože čas dáváme na nultou pozici, hovoříme o časoprostoru. V některé literatuře preferují čas na čtvrté pozici, potom hovoří o prostoročase. V naší notaci je událost

$$x_\alpha = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (213)$$

V relativitě bývá často zvykem rozlišovat horní a dolní polohu indexů. Horní poloha znamená transformaci složek vektorů, dolní transformaci bázevých vektorů. Pro naše účely (úvod do speciální relativity) nebude třeba polohu indexů rozlišovat.

Čtyřvektory

Jaké jsou další čtyřvektory, které transformujeme Lorentzovou maticí? Při popisu částice nás zajímá její energie a hybnost. Z teorému Noetherové už víme, že energie souvisí se symetrií vůči časovému posunutí a hybnost se symetrií vůči prostorovému posunutí. Energie a hybnost tak opět tvoří přirozený čtyřvektor, kterému říkáme *čtyřhybnost*. U vlnění jsme se setkali s úhlovou frekvencí (změna fáze s časem) a s vlnovým vektorem (změna fáze s prostorem). I tato čtveřice je čtyřvektorem, hovoříme o tzv. *vlnovém čtyřvektoru*. V elektromagnetickém poli jsme zavedli skalární a vektorový potenciál, které opět tvoří čtyřvektor, tzv. *čtyřpotenciál*. V Maxwellových rovnicích figurují jako zdrojové členy hustota náboje a tok náboje (proudová hustota). I tato čtveřice čísel je čtyřvektorem, jde o tzv. *čtyřtok*. U čtyřvektorů je třeba, aby všechny čtyři složky měly stejný rozměr. Dosáhneme toho vynásobením nebo vydělením časové části rychlostí světla. Základní čtyřvektory, které budeme používat, tedy jsou:

$$\blacktriangleright \quad X \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; \quad P \equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}; \quad K \equiv \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; \quad A \equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; \quad J \equiv \begin{pmatrix} \rho_Q c \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix}. \quad (214)$$

Skalární součin čtyřvektorů

Z podmínky konstantní rychlosti světla ve všech inerciálních soustavách postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} = c &\Rightarrow dl = c dt \Rightarrow \\ \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} &= c dt \Rightarrow \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 &= c^2 dt^2 \Rightarrow \\ -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \quad -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0. \quad (215)$$

Poslední řádek je rovnicí šíření světla ve speciální relativitě. Současně je pro nás návodem, jak rozšířit definici skalárního součinu na čtyřvektory:

$$\blacktriangleright \quad A \cdot B \equiv -A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \quad (216)$$

Znaménko minus v časové části zajišťuje platnost konstantní rychlosti šíření světla. Už jsme se s ním setkali například u vlnové rovnice, kde má časová část opačné znaménko než prostorová. U skalárního součinu v zakřiveném časoprostoru nejsou koeficienty u jednotlivých členů jen $(-, +, +, +)$, ale dokonce obecné funkce času a prostoru. Speciální relativita a skalární součin v N dimenzích jsou pak jen speciálním případem volby těchto funkcí. Najdeme skalární součin vlnového čtyřvektoru a události:

$$K \cdot X = -k_0 x_0 + k_x x + k_y y + k_z z = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}.$$

Ve výrazu nepochybně poznáváte fázi rovinné vlnoplochy $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$.

Interval, kauzalita

Vztah (215) je diferenciální rovnicí pro šíření světla, jeho levá strana má ale i samostatný smysl. Označme ji

$$\blacktriangleright \quad ds^2 \equiv dX \cdot dX = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (217)$$

Této kombinaci se ve speciální relativitě říká interval. Ze své podstaty je interval skalárem, tedy invariantem, který nezávisí na volbě souřadnicové soustavy.

Při pohledu z různých souřadnicových soustav se mění časové intervaly dt (dilatace času) i prostorové vzdálenosti dx_k (kontrakce délek), ale jejich kombinace (217) je ve všech souřadnicových soustavách stejná. Ukažme si to v následujícím příkladu:

● **Příklad:** Neměnnost intervalu

Vyjáďřeme interval ve vlnkované souřadnicové soustavě a postupně převedme jednotlivé diferenciály pomocí Lorentzovy transformace (191) či (192)

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= -c^2 d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 = \\ &= -c^2 [\gamma dt - \gamma\beta dx/c]^2 + [\gamma dx - \gamma\beta c dt]^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= -c^2 \gamma^2 dt^2 + 2c\gamma^2 \beta dt dx - \gamma^2 \beta^2 dx^2 + \gamma^2 dx^2 - 2\gamma^2 \beta c dt dx + \gamma^2 \beta^2 c^2 dt^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= -c^2 [\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2] dt^2 + [\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2] dx^2 + dy^2 + dz^2. \end{aligned}$$

Koeficienty v hranatých závorkách jsou ale rovny jedné:

$$\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = (1 - \beta^2)^{-1} (1 - \beta^2) = 1,$$

a proto platí

$$\blacktriangleright \quad d\tilde{s}^2 = ds^2. \quad \blacktriangleleft$$

Ve speciální relativitě se tedy vše mění, jediný interval je jistotou, která dá ve všech souřadnicových soustavách stejné číslo. Interval ale můžeme použít i v rámci jedné jediné souřadnicové soustavy, a to pro vypočtení „časoprostorové odlehlosti“ dvou událostí, jak si ukážeme v zápětí.

Události jsou reprezentovány body v časoprostorovém diagramu. Na následujícím obrázku je například událost A se souřadnicemi (t_A, x_A, y_A, z_A) . Může jít například o zrnko písku položené na stůl. Posloupnost událostí související s jedním objektem se nazývá světočára objektu. Pokud bude naše zrnko písku nehybně ležet na stole, přísluší mu světočára b . Čas plyne, ale prostorové souřadnice se nemění. Interval mezi počáteční událostí A a koncovou B bude

$$\Delta s^2 = -c^2 (t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = -c^2 (t_B - t_A)^2 < 0.$$

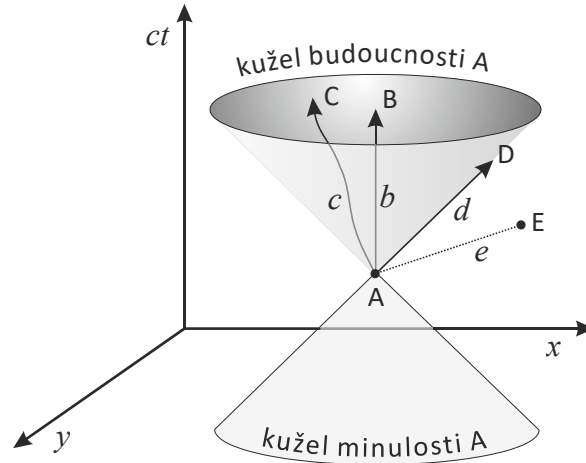
Spočteme-li interval mezi oběma událostmi, bude prostorová část nulová (zrnko se nepohybuje) a časová nenulová (čas plyne). Výsledek bude proto záporný. Pokud zafouká vítr, zrnko se bude pohybovat a jeho osud bude například popsán světočárou c . Interval mezi počátečním a koncovým stavem bude

$$\Delta s^2 = -c^2 (t_C - t_A)^2 + (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2$$

Výsledek je opět záporný, protože je světočára „přimknuta“ více k časové ose a časová část dává záporný vklad. Pokud je interval mezi dvěma událostmi záporný, může první událost ovlivnit druhou, neboť se objekt může do místa druhé události přemístit podsvětelnou rychlostí. O takové dvojici událostí říkáme, že je kauzálně (příčinně) spojená. Události B nebo C mohou být důsledkem události A . Obě se nacházejí v tzv. kuželu budoucnosti události A .

Představme si nyní, že událost A nesouvisí se zrnkem písku, ale s letícím fotonem. Po určité době foton doletí do jiného místa a na našem diagramu tomu bude odpovídat událost D . Jeho světočára d je na diagramu skloněná pod úhlem 45° , což odpovídá nejvyšší možné rychlosti. Do intervalu přispěje stejnou měrou jak záporná časová část, tak kladná prostorová část a interval mezi událostmi A a D bude nulový, což odpovídá rovnici šíření světla. Počáteční a koncová událost pro světlo leží na kuželové ploše dané vztahem $\Delta s^2 = 0$.

Na obrázku je ještě událost E , která leží mimo kužel budoucnosti události A . Pokud bychom se do ní chtěli přemístit z polohy odpovídající A , museli bychom letět nadsvětelnou rychlostí. Takové dvě události nejsou kauzálně spojené a jedna nemůže být příčinou druhé. Interval mezi nimi je kladný. Událost E se nenachází v kuželu budoucnosti události A . Obdobnými úvahami dospějeme k závěru, že událost A mohly ovlivnit pouze události ležící v jejím kuželu minulosti.



Příčinná souvislost

Dvě události mohou být kauzálně spojené, pokud platí $\Delta s^2 < 0$. Události nejsou v příčinné souvislosti, pokud je $\Delta s^2 > 0$.

Interval je invariantem Lorentzovy transformace, tedy ať ho spočítáme v kterékoli souřadnicové soustavě, dostaneme vždy stejný výsledek. Tento fakt zajišťuje, že příčina a důsledek jsou události, jejichž pořadí nelze zaměnit volbou jiné souřadnicové soustavy. Žádným způsobem nemůžeme ovlivnit události, které se už staly.

Vlastní čas

Pokud spojíme dvě události s letící částicí, můžeme interval vyjádřit jak v laboratorní soustavě, tak v soustavě spojené s částicí ($d\mathbf{x} = 0$, $t = \tau$):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 d\tau^2, \quad (218)$$

kde τ je tzv. vlastní čas, tj. čas plynoucí u částice samotné. Zřejmě platí

$$\blacktriangleright \quad ds^2 = -c^2 d\tau^2, \quad (219)$$

tedy vlastní čas je také invariantem Lorentzovy transformace. Jaký je vztah mezi vlastním časem τ a souřadnicovým časem t ? Abychom to zjistili, vyjádříme interval ve vlastní soustavě částice a v obecné souřadnicové soustavě. Odsud dostaneme vztah mezi oběma časy:

$$\begin{aligned} -c^2 d\tau^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \Rightarrow \\ c^2 d\tau^2 &= dt^2 \left(c^2 - (dx/dt)^2 - (dy/dt)^2 - (dz/dt)^2 \right) \quad \Rightarrow \\ d\tau &= \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} dt. \end{aligned}$$

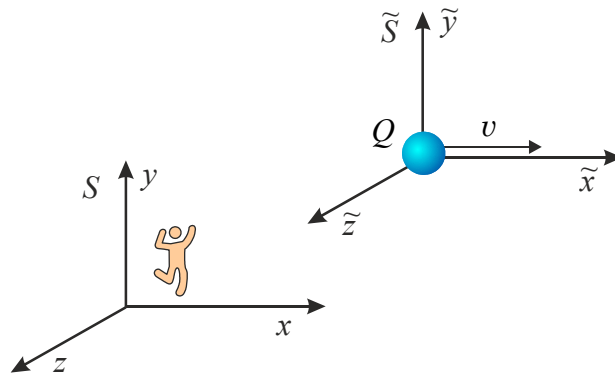
Mezi oběma časy platí tedy vztah

$$\blacktriangleright \quad dt = \gamma d\tau; \quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma. \quad (220)$$

Nejde o nic jiného než o vztah pro dilataci času. Ve vlastní soustavě plyne čas nejrychleji, časový úsek mezi dvěma událostmi ve vlastní soustavě bude nejkratší možný. Vlastní čas se využívá jako vhodný parametr při parametrizaci světočáry částice. Nelze ho ale použít pro světlo. U fotonů vlastní čas neplyne ($ds^2 = 0$) a pro parametrizaci je třeba využít jiný parametr, například prolétnutou vzdálenost (vlastní délku trajektorie).

Heavisideovo pole

Představme si, že kolem nás prolétá konstantní rychlostí nabitá částice. Jaké pole budeme, jakožto pozorovatelé, vnímat?



Využijeme transformaci čtyřpotenciálu pole (ϕ/c , \mathbf{A}). V soustavě spojené s nábojem je vektorový potenciál nulový (není zde přítomno magnetické pole) a skalární potenciál je dán Coulombovým zákonem:

$$\tilde{\phi} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}}. \quad (221)$$

Provedeme inverzní Lorentzovu transformaci do soustavy S pozorovatele

$$\begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q/(4\pi\epsilon_0 c\tilde{r}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (222)$$

Po vynásobení matic dostáváme pro potenciály v soustavě pozorovatele

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}}; \\ A_x &= \frac{\gamma\beta Q}{4\pi\epsilon_0 c\tilde{r}}; \\ A_y &= 0; \\ A_z &= 0. \end{aligned} \quad (223)$$

Ve výsledku jsme označili

$$\tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} = \sqrt{\gamma^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2}. \quad (224)$$

Je zřejmé, že magnetické pole je již nenulové a elektrické pole je také modifikováno. Nový tvar polí je

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\gamma Q(x-vt)}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \\
 E_y &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{\gamma Q y}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \\
 E_z &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\gamma Q z}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{225}$$

Magnetické pole určíme jako rotaci vektorového potenciálu:

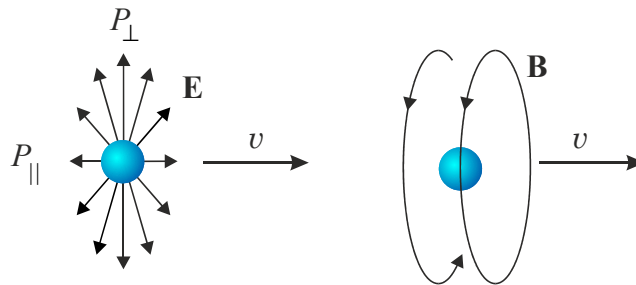
$$\begin{aligned}
 B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\
 B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\gamma\beta Q z}{4\pi\epsilon_0 c[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \\
 B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = +\frac{\gamma\beta Q y}{4\pi\epsilon_0 c[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{226}$$

Důležitá je kolmá a rovnoběžná složka elektrického pole, určíme ji v místech daných na obrázku polohou pozorovatele P_{\parallel} a P_{\perp} :

$$E_{\perp} = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}\Big|_{x=vt} = \gamma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(y^2 + z^2)}, \tag{227}$$

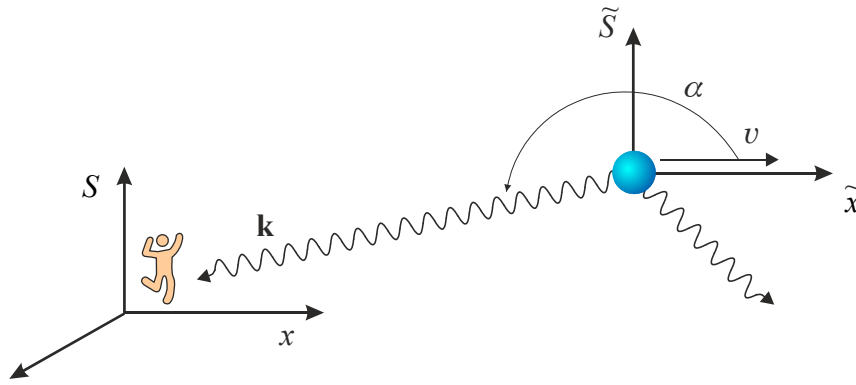
$$E_{\parallel} = E_x\Big|_{\substack{y=0 \\ z=0}} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x-vt)^2}. \tag{228}$$

Vidíme, že elektrické pole je napříč pohybu nataženo faktorem γ a ve směru pohybu je stlačeno faktorem $1/\gamma^2$. Pole se pohybuje spolu s nábojem. Magnetické pole tvoří kružnice kolem osy pohybu náboje a slábne se vzdáleností od náboje. Pro nekonečnou řadu nábojů bychom získali pole kolem vodiče. Pole je pojmenováno podle anglického fyzika a matematika Olivera Heavisidea (1850–1925).



Dopplerův jev

Odvodíme nyní relativistický Dopplerův jev pomocí transformace vlnového čtyřvektoru $(\omega/c, \mathbf{k})$. Pozorovatel je v soustavě S , zdroj periodického signálu je v soustavě označené vlnkou. Vlnění se šíří do všech směrů, nás zajímá jen vlnový vektor \mathbf{k} , který míří právě k pozorovateli. Úhel mezi směrem pohybu zdroje vlnění a směrem k pozorovateli je označen α (musíme rozlišovat α_0 v soustavě zdroje a α v soustavě pozorovatele).



V soustavě \tilde{S} spojené se zdrojem záření je řešení velmi jednoduché:

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ k \cos \alpha_0 \\ k \sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ \omega_0/c \cdot \cos \alpha_0 \\ \omega_0/c \cdot \sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{S}}. \quad (229)$$

Nyní provedeme Lorentzovu transformaci do soustavy pozorovatele S (jde o inverzní Lorentzovu transformaci):

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ \omega_0/c \cdot \cos \alpha \\ \omega_0/c \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ \omega_0/c \cdot \cos \alpha_0 \\ \omega_0/c \cdot \sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{S}}. \quad (230)$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímá frekvence v místě pozorovatele, postačí nalézt jen nultý řádek maticového násobení:

$$\omega = \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha_0 \right) \omega_0. \quad (231)$$

Tento vztah je známý jako relativistický Dopplerův jev. V limitě nízkých rychlostí (zanedbáme členy kvadratické a vyšší v v/c) je $\gamma \rightarrow 1$ a $\omega = (1 + v/c \cos \alpha_0) \omega_0$. Při vzdalování zdroje je úhel $\alpha_0 = 180^\circ$ a frekvence $\omega = (1 - v/c) \omega_0$, při přibližování zdroje vlnění je $\alpha_0 = 0^\circ$ a $\omega = (1 + v/c) \omega_0$. Jde o známé nerelativistické Dopplerovy vztahy. Při vyšších rychlostech jsou tyto vztahy modifikovány Lorentzovým faktorem γ . Jestliže zdroj záření pozorovatele míjí ($\alpha_0 = \pm 90^\circ$) je $\omega = \gamma \omega_0$. Ke změně frekvence tedy dochází i v případě, že se zdroj nevzdaluje ani nepřibližuje. Tento jev se nazývá transverzální Dopplerův jev a jde o čistě relativistický jev, který nemá v nerelativistické fyzice obdoby. Je způsoben změnou chodu času v pohybuující se soustavě (dilatací času). Prostorové relace maticové transformace dávají vztahy

$$\omega \cos \alpha = \gamma \omega_0 (\beta + \cos \alpha_0), \quad (232)$$

$$\omega \sin \alpha = \omega_0 \sin \alpha_0. \quad (233)$$

Pokud obě rovnice vydělíme, získáme vztah mezi oběma úhly, který je nezávislý na frekvencích a závisí jen na vzájemné rychlosti soustav:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha_0}{\gamma \beta + \cos \alpha_0} \quad (234)$$

Ze vztahu je zřejmé, že vlnoplocha změnila směr a že tato změna závisí jen na vzájemné rychlosti soustav v . Relativistický Dopplerův jev jsme našim postupem odvodili jen pro světlo ($\omega = ck$) a nikoli pro obecné vlnění látky.

Relativistická dynamika

Pohybová rovnice

Pokud chceme zavést správně čtyřrychlost, nemůžeme derivovat událost podle souřadnicového času. Takto definovaná čtyřrychlost by se netransformovala za pomoci Lorentzovy matice. Čtyřrychlost je nutné zavést za pomoci vlastního času, který je invariantem, tedy

$$\blacktriangleright \quad U \equiv \frac{dx_\mu}{d\tau}. \quad (235)$$

Vlastní čas zde vystupuje jako parametr pohybu částice, tj. $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Vlastní čas nelze jako parametr použít pro světlo, neboť se nelze „odstěhovat“ do soustavy spojené se světlem (v této soustavě by se světlo nepohybovalo, což není možné). Dráhu fotonu je nutné parametrizovat jinak, například vlastní délkou λ prolétlé dráhy. Snadno nalezneme vztah čtyřrychlosti k běžně definované rychlosti částice:

$$\blacktriangleright \quad U \equiv \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx_\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx_\mu}{dt} \gamma = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (236)$$

Pro pomalé pohyby je časová složka čtyřrychlosti dominantní. Čtyřhybnost zavedeme za pomoci čtyřrychlosti tak, že ji vynásobíme klidovou hmotností částice, tj.

$$\blacktriangleright \quad P \equiv m_0 \frac{dx_\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (237)$$

Transformační vlastnosti budou opět zachovány, čtyřhybnost je čtyřvektorem. Pokud zavedeme „pohybovou“ hmotnost vztahem

$$\blacktriangleright \quad m \equiv \gamma m_0, \quad (238)$$

budeme pro čtyřhybnost mít jednoduchý vztah

$$\blacktriangleright \quad P = \begin{pmatrix} mc \\ m\mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (239)$$

Musíme mít ale na paměti, že označení m není skutečná hmotnost, ale jen zkratka pro součin γm_0 . Sám Einstein pohybovou hmotnost nezaváděl. Porovnáme-li vyjádření čtyřhybnosti (214) s vyjádřením (239), máme okamžitě známé vztahy

$$\blacktriangleright \quad E = mc^2; \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}; \quad m \equiv \gamma m_0. \quad (240)$$

Vztah pro energii je známým Einsteinovým vztahem, který vyjadřuje ekvivalenci mezi hmotností a energií. K jeho významu se ještě vrátíme. Druhý vztah kopíruje klasickou definici hybnosti. V obou vztazích je třeba mít na paměti, že nejde o skutečnou hmotnost, ale symbolem m je označen součin Lorentzova kontrakčního faktoru a klidové hmotnosti částice či objektu.

Čtyřzrychlením budeme rozumět čtyřvektor, který získáme derivováním čtyřrychlosti podle vlastního času, tj.

$$\blacktriangleright \quad A \equiv \frac{dU_\mu}{d\tau}. \quad (241)$$

Pohybovou rovnicí ve speciální relativitě píšeme v jednom z tvarů, které kopírují klasickou mechaniku:

$$\blacktriangleright \quad \frac{dP}{d\tau} = F, \quad (242)$$

$$\blacktriangleright \quad m_0 \frac{dU}{d\tau} = F. \quad (243)$$

Na levé straně musí vystupovat vlastní čas a klidová hmotnost, jedině tak zůstane levá strana čtyřvektorem transformujícím se pomocí Lorentzovy matice. Díky tomu je i čtyřsíla na pravé straně opět čtyřvektorem. Správně volený vztah pro čtyřsílu dá pohyb objektu ve shodě s pozorováním. To je jediné kritérium volby čtyřsíly.

Všechny čtyřvektory, které jsme dosud zavedli, mají také svou velikost, obdobně, jako je tomu u běžných třírozměrných vektorů, kde je velikost definována jako odmocnina ze skalárního součinu vektoru se sebou samým. Vzhledem k tomu, že u čtyřvektorů může vyjít skalární součin vektoru se sebou samým

$$V \cdot V = V_\mu V_\mu = -(V_0)^2 + (V_1)^2 + (V_2)^2 + (V_3)^2 \quad (244)$$

záporný (dominuje časová část), mohly by být problémy při odmocňování. Proto chápeme jako velikost čtyřvektoru přímo výsledek skalárního součinu (244). Ve skutečnosti tedy jde o kvadrát velikosti vektoru v běžném slova smyslu. Tato velikost může být záporná (čtyřvektor dominantně míří ve směru časové osy, je *časupodobný*), kladná (čtyřvektor dominantně míří ve směru prostorových os, je *prostorupodobný*), nebo *nulová* (čtyřvektor míří ve směru světelného kužele). Nalezneme nyní velikost čtyřrychlosti

$$\blacktriangleright \quad U^2 = U_\mu U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{-c^2 d\tau^2}{d\tau^2} = -c^2. \quad (245)$$

Čtyřrychlost je tedy časupodobným vektorem. Obdobně nalezneme velikost čtyřhybnosti pohybujícího se či stojícího objektu:

$$\blacktriangleright \quad P^2 = P_\mu P_\mu = m_0^2 U_\mu U_\mu = -m_0^2 c^2. \quad (246)$$

Klidová hmotnost fotonů musí být nulová, jinak by se nemohly pohybovat rychlostí světla. Proto je velikost jejich čtyřhybnosti nulová. Čtyřhybnost světla je nulový čtyřvektor mířící ve směru světelného kužele (povrchu kužele budoucnosti).

Energie ve speciální relativitě

Jak jsme už viděli, čtyřhybnost lze vyjádřit dvojným způsobem. První vychází z teorému Emmy Noetherové. Časoprostorové translace definují zákony zachování veličin, kterým říkáme energie a hybnost a které tvoří čtyřvektor, jemuž říkáme čtyřhybnost. Druhé vyjádření vychází z vynásobení čtyřrychlosti klidovou hmotností, viz (237). Porovnáme-li oba vztahy, máme

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (247)$$

Prostorové části dávají vztah pro relativistickou hybnost, časová část dává již nalezené vyjádření pro energii

$$\blacktriangleright \quad E = mc^2; \quad m \equiv \gamma m_0. \quad (248)$$

Tento vztah má zajímavé důsledky. Především říká, že energie a hmota jsou jen dva projevy téže entity. Změna energie s sebou vždy přináší změnu hmotnosti objektu:

$$\blacktriangleright \quad \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (249)$$

Tento vztah je základem veškeré jaderné energetiky. Nejlépe jsou vázána jádra podobná železu, to má nejnižší vazebnou energii na jeden nukleon. energii lze proto získávat buď štěpením hmotnějších jader na menší (jaderné elektrárny), nebo slučováním jader lehčích než železo na těžší (fúze). Druhá reakce probíhá přirozeným způsobem například ve Slunci, kde se protony slučují na jádra hélia. Při jaderných reakcích vzniká energie, což podle vztahu (249) znamená, že součet hmotností částic po reakci je nižší než jejich součet před reakcí. Často se hovoří o tzv. hmotnostním schodku. Část hmoty se přeměnila na energii. Pokud ohřejeme litr vody například o 20 °C, dodali jsme mu energii a hmotnost litru vody vzroste o $\Delta E/c^2$. Taková změna hmotnosti není ale běžnými přístroji měřitelná.

Vztah (248) pro energii má ještě jeden zajímavý důsledek. Dejme do poměru „pohybovou“ a klidovou energii objektu:

$$\frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{\gamma m_0c^2}{m_0c^2} = \gamma. \quad (250)$$

Lorentzův kontrakční faktor je roven poměru skutečné energie částice ku klidové energii. Hraje tak roli energie částice vztažené k její klidové energii. Pokud je například $\gamma = 10$, má částice energii rovnou desetinásobku klidové energie.

Speciální relativita nám poskytuje ještě jeden velmi důležitý vztah pro energii. Plyne okamžitě z velikosti čtyřhybnosti:

$$P^2 = -m_0^2c^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{E^2}{c^2} + \mathbf{p}^2 = -m_0^2c^2 \quad \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4. \quad (251)$$

Uvedenému vztahu někdy říkáme Pythagorova věta o energii. Energie se skládá ze dvou částí: klidové (dané klidovou hmotností) a pohybové (dané hybností). Pro částice s nulovou klidovou hmotností (například foton) dostaneme mezi energií a hybností jednoduchý vztah:

$$\blacktriangleright \quad E = pc. \quad (252)$$

Energie fotonů je dána jejich hybností, nikoli jejich hmotností. Ve speciální relativitě je možné zavést i kinetickou energii jakožto rozdíl celkové energie a klidové energie:

$$\blacktriangleright \quad E_k = mc^2 - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2. \quad (253)$$

Uděláme-li Taylorův rozvoj v rychlosti, dá první nenulový člen klasickou (nerelativistickou) hodnotu kinetické energie:

$$\begin{aligned} E_k &= (\gamma - 1)m_0c^2 = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) m_0c^2 = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots - 1 \right) m_0c^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_0v^2 + \dots \end{aligned}$$

Relativistické paradoxy

Prodlužující se časové intervaly a zkracující se vzdálenosti jsou dodnes zdrojem nedůvěry části populace ke speciální relativitě. Tito lidé uznávají jen jevy, které vidí v každodenním životě. Dilatace času a kontrakce délek jsou spojené s natolik vysokými rychlostmi, že se s nimi běžně nesetkáváme. To ale neznamená, že neexistují. Bez jejich započtení by nefungoval žádný urychlovač, laser nebo GPS navigace. Speciální relativita s sebou přináší i zdánlivě podivné situace, kterým říkáme paradoxy. Většinou jde o údiv nad tím, že jedním výpočtem získáme výsledek, který je odlišný od výsledku získaného jiným výpočtem. Řešením je většinou pouhý fakt, že každý z výpočtů platí pro jinou inerciální souřadnicovou soustavu a člověk, jakožto pozorovatel, nemůže být v obou soustavách naráz, aby došlo ke skutečné nesrovnalosti. Jiný druh paradoxů souvisí s předpoklady, které jsou v rozporu se speciální relativitou. Buď děje zjevně neprobíhají v inerciální souřadnicové soustavě, nebo využíváme například model ideálně tuhých tyčí, které ve skutečnosti neexistují. Cílem této učebnice rozhodně není řešení jednotlivých paradoxů. To by vydalo na celou, poněkud monotematickou knihu. Proto se na ukázkou omezíme jen na několik z nich.

Paradox vlaku a nádraží

Představme si vlak stojící ve stanici, který je přesně stejně dlouhý jako nádražní budova. Druhý den jede po kolejích stejný vlak, ale tentokrát na tomto nádraží nestaví. Pozorovatel v nádražní budově uvidí díky kontrakci délek, že projíždějící vlak je kratší než budova. Pozorovateli ve vlaku se ale bude zdát, že se nádražní budova pohybuje kolem něho, a protože dochází ke kontrakci délek, bude nádražní budova kratší než vlak.

Jak je tohle možné? Vlak přece nemůže být současně kratší, delší i stejně dlouhý jako nádražní budova! Řešení paradoxu je velmi jednoduché. První chyba v úvaze se týká pocitu, že jsme to stále my, kteří měříme délku vlaku ve všech situacích. To ale není pravda. Pokud vlak jede, pozorovatel nemůže být současně ve vlaku a současně na nádraží, takže jde o dva různé pozorovatele, kteří naměří dva různé výsledky. Pojem délky je relativní a měření z různých soustav dopadnou různě. Důvodem je požadavek současného měření polohy přední i zadní části vlaku. Pozorovatel na nádraží bude zaznamenávat a vyhodnocovat přílet světla (jinak by vlak neviděl) z přední a zadní části vlaku. Světlo se samozřejmě šířilo konečnou rychlostí, takže je do měření třeba zahrnout dobu šíření signálu. Pečlivým rozbořem zjistíme, že události, které jsou současné z hlediska nádraží (změření polohy počátku a konce vlaku) nejsou současné z hlediska pozorovatele ve vlaku. Měření na nádraží probíhá pro pozorovatele ve vlaku v různých okamžicích a mezitím se vlak posune, proto vyjde délka vlaku jiná. Výsledek: paradox se nekoná. Porovnáváme neporovnatelné: měření prováděná různými pozorovateli a navíc měření, která jsou z hlediska jedné souřadnicové soustavy současná a z hlediska druhé nikoli.

Existuje mnoho variant právě popsaného paradoxu, které jsou poněkud sofistikovaněji formulované, nicméně jejich řešení je obdobné.

Paradox tyče a kanálu

Představme si, že nad pouličním kanálem (bez mříže, tu ukradli nepřizpůsobiví občané) letí vysokou rychlostí vodorovně dokonale tuhá tyč, jejíž vlastní délka je stejná jako rozměr kanálu. Z hlediska tyče se otvor kanálu ve směru letu zkrátí a tyč do kanálu nepropadne. Z hlediska kanálu se zkrátí rozměr tyče, a ta do kanálu spadne. Paradox je tentokrát o něco vážnější. Propadnutí tyče do kanálu je objektivní skutečností, která by neměla záviset na volbě souřadnicové soustavy. Jaké je tedy řešení tentokrát?

Řešení je třeba rozdělit do několika částí. Aby se tyč pohybovala směrem dolů a mohla vůbec propadnout, je zapotřebí vyvinout nějakou, byť malou sílu, která způsobí pohyb tyče směrem dolů. Můžeme použít přirozenou gravitaci, ale to povede k okamžité námitce, že k řešení gra-

vitačních problémů musíme použít obecnou relativitu. Tomu se snadno vyhneme tak, že ťukneme současně do obou konců tyče tak, aby se pohybovala dolů. Jak je tato úloha ošidná, už víme z předchozího paradoxu. Co je současné z jedné soustavy, to není současné z hlediska druhé soustavy, takže ťuknout současně do obou konců tyče v obou soustavách nelze. A pokud není ťuknutí do obou konců současné, tyč se nakloní a její pád do kanálu přestane být paradoxní. Pojďme na to tedy jinak a ťukneme do tyče jen jednou, a to přesně uprostřed. I to je nereálné. Střed tyče musíme měřit vzhledem k jejím koncům, ze kterých k pozorovateli signál poletí určitou dobu. Výsledek? Střed měřený v jedné soustavě není středem v druhé soustavě. Ťuknutí do tyče bude z hlediska jedné soustavy asymetrické a tyč se opět nakloní.



Největší problém je s předpokladem dokonale tuhé tyče. Pokud bychom do jednoho jejího konce ťukli kladívkem, musel by se druhý konec ihned posunout, což znamená nekonečnou rychlost šíření informace z jednoho konce tyče na druhý. A nekonečná rychlost šíření interakce není slučitelná se speciální relativitou, tedy dokonale tuhá tyč neexistuje. Každá tyč je ve skutečnosti „měkká“, ťukneme-li do kterékoli její části kladívkem, nepohne se v důsledku úderu celá tyč, ale nejprve jen místo, do kterého jsme ťukli, a vznikne elastická vlna, kterou se informace začne šířit do dalších částí tyče. Výsledkem je, že při dostatečně velké rychlosti tyč do kanálu vždy spadne, buď se nakloní, nebo se vlivem působících sil zdeformuje natolik, že do kanálu propadne.

Paradox dvojčat

K těm nejznámějším a nejčastěji diskutovaným paradoxům patří paradox dvojčat. Představme si, že se na Zemi narodila dvojčata. Jedno z nich prožije celý svůj život na Zemi. Druhý z bratrů se stane kosmonautem a v raketě odletí na dlouhou pouť. Poletí v raketě, která je vybavena špičkovou technologií a dosáhne téměř rychlosti světla. Cestovatel doletí k cíli, provede výzkum na vzdálené planetě a poté odletí zpět k Zemi. Po přistání se setká se svým bratrem. Kdo z nich bude starší? Z hlediska pozorovatele na Zemi letěl bratr v raketě vysokou rychlostí a docházelo k dilataci času a při setkání bude mladší cestovatel v raketě. Ten bude ale uvažovat stejně: bratr na Zemi se od něho z počátku vzdaloval vysokou rychlostí a v druhé části cesty se k němu naopak přibližoval. Tudiž docházelo k dilataci času pro bratra na Zemi a při setkání bude mladší ten, který neopustil rodnou hroudu. Jaké je řešení nyní? Situace obou bratrů je symetrická jen zdánlivě. Ten z bratrů, který žije na Zemi, bude mít na polici nad postelí připravený kufr s věcmi. Co kdyby se někdy vydal také do vesmíru? Jeho kufr zůstane po celou dobu experimentu na polici. Bratr na raketě bude mít nad postelí podobný kufr. Poprvé mu spadne na hlavu při startu, kdy bude v raketě citelné extrémní zrychlení, podruhé při brzdění u cílové planety, potřetí při startu z ní a počtvrté při přistání na Zemi. Otlučená hlava cestovatele nepochybně dojde k závěru, že soustava, v níž se nachází, má do inerciální soustavy velmi daleko. Problém tedy není možné řešit z hlediska speciální relativity. V rámci speciální relativity by se dvojčata už nikdy znovu nesetkala. Dvě inerciální soustavy se mohou ve speciální relativitě setkat jen jednou. Paradox dvojčat se týká neinerciální soustavy, v níž skutečně dochází ke změně chodu času a všech biologických procesů (je to dáno přítomností zrychlení). Cestující dvojčete ve skutečnosti zestárne méně než to na Zemi.



5. KVANTOVÁ TEORIE

Teoretická mechanika vychází ze zobecněných zkušeností člověka, z toho, jak vnímáme svět kolem sebe v našich měřítkách – v tzv. *makrosvětě*. Snažíme-li se zákony teoretické mechaniky aplikovat na tělesa malých rozměrů (atomy, částice) – tzv. *mikrosvět*, nebudou již předpovědi ve shodě s experimentem. V mikrosvětě platí jiné zákony. Například samotný akt měření může ovlivnit objekty mikrosvěta. Chceme-li určit polohu fotbalového míče, zachytíme okem fotony odražené od míče a informaci zpracujeme. Chceme-li určit polohu elektronu, odražený foton, z kterého na polohu usuzujeme, udělí elektronu nezanedbatelný impuls a změní jeho stav. Asi největší rozdíl mezi jevy v makrosvětě a mikrosvětě souvisí s komutativností. V makrosvětě jsme si zvykli na to, že jevy, které pozorujeme, jsou komutativní – nezáleží na pořadí. Je jedno, zda nejprve provedeme měření A a poté měření B nebo naopak. Zkrátka $AB = BA$. V mikrosvětě tomu tak ale není. Akt měření ovlivňuje stav objektů a záleží na tom, které měření provedeme jako první. To je také hlavním důvodem selhání teoretické mechaniky při popisu mikrosvěta. Teoretická mechanika je založena na komutujících matematických objektech.

První jevy v mikrosvětě, které byly v příkrém rozporu s teoretickou mechanikou, byly objeveny na počátku 20. století. Jejich analýza vedla ke zrodu kvantové teorie – jedné ze dvou nejúspěšnějších teorií v dějinách lidstva (kvantová teorie, obecná teorie relativity). Základní rovnice a vztahy zůstávají shodné s teoretickou mechanikou, platí však pro zcela jiné objekty. Předpovědi dnešní kvantové teorie se shodují s experimentem na mnoho platných cifer.

Uvedme nyní základní rozdíly světa malých rozměrů – *mikrosvěta* – oproti situacím, na které jsme zvyklí z našeho okolí – *makrosvěta*:

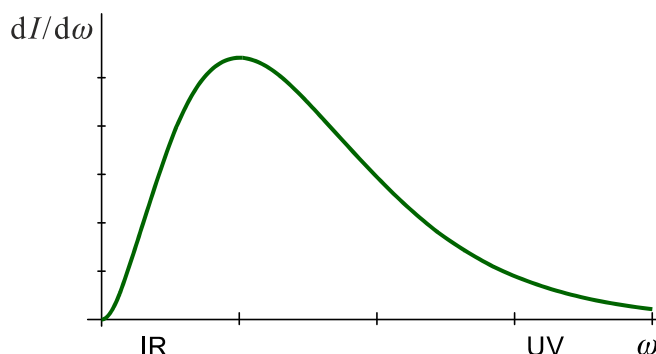
- 1) **diskrétní hladiny některých dynamických proměnných** (například energie, moment hybnosti...) – v dané situaci můžeme naměřit jen určité hodnoty u sledované veličiny a žádné jiné. V makrosvětě jsou měřené hodnoty spojité.
- 2) **dualismus vln a částic** – objekty mikrosvěta se mohou chovat jako vlny i jako částice.
- 3) **nekomutativnost aktu měření** – při měření hodnot dvou dynamických proměnných (například polohy a rychlosti) může výsledek záležet na pořadí provedení měření. Akt měření totiž ovlivňuje stav systému, po měření se systém obecně nachází v jiném stavu než před měřením.
- 4) **relace neurčitosti** – zvýšení přesnosti měření jedné dynamické proměnné v některých případech snižuje přesnost měření jiné dynamické proměnné. Tato měření se navzájem ovlivňují a jsou nekomutativní.
- 5) **nedeterminismus kvantové teorie** – dva experimenty připravené za stejných podmínek mohou dopadnout různě. Při provedení mnoha pokusů zjistíme, že výsledky mají pravděpodobnostní charakter. Jsme tedy schopni předpovědět jen to, s jakou pravděpodobností naměříme ten či onen možný jev, nikoli který jev konkrétně nastane.
- 6) **akt měření výrazně ovlivní samotný systém** – při provádění měření na objektech mikrosvěta většinou dojde k tomu, že tyto objekty měřením zničíme. Pokud je nezničíme, výrazně ovlivníme jejich stav.
- 7) **superpozice** – objekty mikrosvěta mohou být v několika stavech naráz, vyhozený míček může mít například dvě energie a doletět do dvou výšek současně.

Fyzika se tak dostala před úlohu vytvořit takovou teorii, která by souhlasila s experimenty v mikrosvětě a v makrosvětě přecházela v klasickou teoretickou mechaniku. V této kapitole se budeme zabývat základy konstrukce kvantové teorie.

Vznik a vývoj kvantové teorie

Shrňme nyní základní experimentální fakta, která vedla ke zrodu kvantové teorie:

Záření absolutně černého tělesa

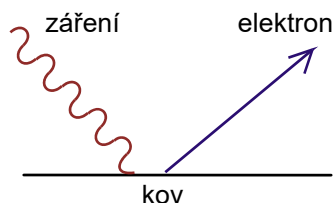


V absolutně černém tělese (lze za ně považovat například každou hvězdu) je v rovnováze látka a záření při nějaké konkrétní teplotě T . Sledujeme-li vyzařování absolutně černého tělesa, zjistíme, že na různých frekvencích vyzařuje s různou intenzitou. Experimentálně pozorovaný průběh energie vyzařené na jednotkovou frekvenci je na obrázku. Teoretické výpočty křivky záření absolutně černého tělesa, které prováděli Rayleigh, Jeans a Wien, vedly k odlišným závislostem. Buď divergovaly v infračervené (IR) nebo v ultrafialové (UV) oblasti spektra. Správnou formuli uhodl až Max Planck v srpnu 1900 tím, že zkoušel porovnávat různé funkce s naměřenými údaji. Jeho výsledek zněl: $dI/d\omega \sim \omega^3 \exp[-\text{const } \omega / T]$. Za další dva měsíce odvodil Planck tuto závislost i teoreticky za předpokladu, že energie světla o určité frekvenci ω se nemění spojitě, ale je celistvým násobkem základního energetického kvanta

$$E = \hbar \omega; \quad \hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad . \quad (254)$$

Veličina \hbar se nazývá redukovaná Planckova konstanta. Planck původně použil předpoklad o kvantování energie pro zjednodušení matematických výpočtů. Později se ukázalo, že energie elektromagnetického záření určité frekvence je skutečně kvantována, tj. její pozorované hodnoty nejsou spojitě, ale mění se skokem o základní energetické kvantum $\hbar \omega$.

Fotoelektrický jev (fotoefekt)



Při dopadu světla (elektromagnetického záření) na povrch kovu může být z kovu vytržen elektron, který opustí povrch kovu. K uvolňování elektronů z kovu dochází při frekvencích světla vyšších než prahová frekvence ω_0 , která je pro daný kov charakteristická. Máme-li k dispozici světlo s frekvencí nižší než prahovou, emise elektronů nenastane, byť bychom použili světlo se sebevětší intenzitou. Tento experiment je v rozporu s představou o světle jako elektromagnetickém vlnění. K fotoefektu by mělo docházet při každé frekvenci a dostatečnou energii k emisi by mělo jít získat zvýšením intenzity dopadajícího světla.

Řešení podal Albert Einstein v roce 1905. Elektromagnetické vlnění se chová při fotoefektu jako částice. Tyto částice nazval *fotony*. Energie jednoho fotonu záření o frekvenci ω je právě energie jednoho energetického kvanta (254). Vysvětlení fotoelektrického jevu je nyní velice jednoduché. Na povrchu kovu dochází ke srážce fotonu s elektronem. Aby foton vyrazil

elektron, musí mít vyšší energii než je vazbová energie elektronu v kovu: $\hbar\omega \geq E_i$. Prahová frekvence zřejmě je $\omega_0 = E_i/\hbar$. Celková energetická bilance

$$\hbar\omega = E_i + \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (255)$$

se nazývá Einsteinova rovnice pro fotoefekt. Energie dopadlého fotonu se spotřebuje na vytržení elektronu z kovu a na kinetickou energii vylétávajícího elektronu.

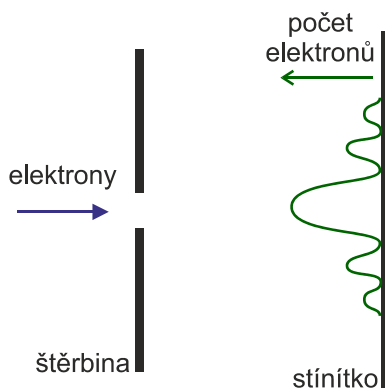
Elektromagnetické vlnění tedy můžeme považovat za soubor fotonů. Proto i při záření absolutně černého tělesa se mění energie záření o dané frekvenci skokem – tento skok představuje přírůstek nebo úbytek jednoho fotonu.

Comptonův jev

Arthur Compton v roce 1923 zjistil, že rentgenové paprsky odražené od povrchu grafitu mění svoji vlnovou délku. Podle klasických představ by vlny měly rozkmitat povrchové elektrony a ty generovat vlnu se stejnou frekvencí. Vysvětlení: Fotony se opět chovají jako částice, srážejí se s elektrony a při srážce ztrácí část energie, a proto mění svou vlnovou délku.

Ohyb elektronů

Fotoelektrický jev ukázal, že vlnění se může chovat v určitých situacích jako částice. Naopak, někdy se částice chovají jako vlny. Například svazek elektronů procházející štěrbinou nebo dvoušěrbinou po dopadu na stínítko vytvoří typický ohybový obrazec. Nemůžeme předem říci, kam který elektron dopadne, ale při velkém množství elektronů můžeme určit pravděpodobnosti dopadu do konkrétního místa na stínítku. Vzniklý ohybový obrazec je tedy typickým statistickým jevem.



Dnes jsou vlnové vlastnosti elektronů využívány například v elektronových mikroskopech. Elektrony mají výrazně kratší vlnovou délku než viditelné světlo, a proto je rozlišovací schopnost elektronového mikroskopu podstatně vyšší než optického. Poprvé byly vlnové vlastnosti elektronu pozorovány Clintonem Davissonem a Lesterem Germerem v roce 1927. Zkoumali odraz elektronů od povrchu niklu. Po vyžhání niklu došlo k rekrystalizaci a odražené elektrony začaly vykazovat na přesných velkých krystalech ohybový obrazec.

Poznámka: Částice popisujeme čtveřicí veličin (E, \mathbf{p}) . Definice energie E a hybnosti \mathbf{p} souvisí se symetriemi při posunutí v čase a v prostoru (teorém Noetherové). Vlnění popisujeme čtveřicí veličin (ω, \mathbf{k}) . Úhlová frekvence ω je definována jako změna fáze vlnění s časem $\omega = \partial \varphi / \partial t$ a vlnový vektor \mathbf{k} je změna fáze vlnění s prostorovými souřadnicemi $\mathbf{k} = \partial \varphi / \partial \mathbf{x}$. Při periodickém ději s konstantní periodou T v čase a λ v prostoru (vlnová délka) lze psát $\omega = 2\pi / T$, $k = 2\pi / \lambda$. Louis de Broglie vyslovil hypotézu, že objekty mikrosvěta se chovají jako vlny i jako částice (dualismus vln a částic). Převodní vztah má tvar:

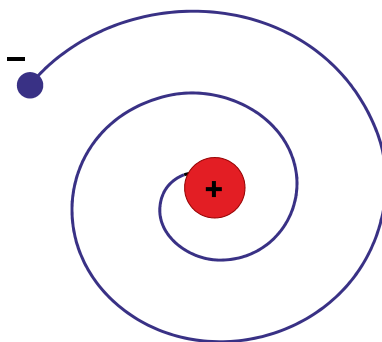
$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (256)$$

Často nás zajímá vlnová délka vlnění odpovídajícího konkrétní částici, například elektronu v elektronovém mikroskopu. Ze vztahu (256) máme $mv = 2\pi\hbar/\lambda$ a tedy

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv} . \quad (257)$$

Existence atomu

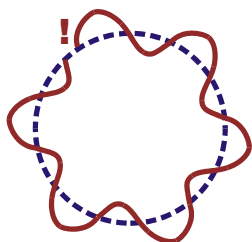
Podle klasického planetárního modelu atomu obíhají záporně nabitě elektrony kolem kladně nabitého jádra tak, jako ve Sluneční soustavě obíhají planety kolem Slunce. Odstředivá síla je vyrovnána přitažlivou Coulombovou silou.



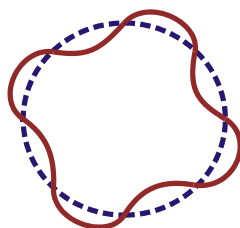
Mezi gravitačními a elektromagnetickými jevy je ale podstatný rozdíl. Z Maxwellovy teorie elektromagnetického pole plyne, že každá nabitá částice, která se pohybuje se zrychlením, vyzařuje elektromagnetické vlnění a ztrácí tak energii. Při kruhovém pohybu elektronu kolem jádra se mění směr rychlosti, zrychlení $d\mathbf{v}/dt$ je nenulové (míří do centra atomu, jde o dostředivé zrychlení) a elektron ztrácí energii zářením. Pohybuje se po spirále, až dopadne na jádro atomu. Tento proces trvá například pro vodík 10^{-11} s. Podle klasické teorie by tedy za velice krátkou dobu neměly žádné atomy existovat!! Na tento paradox upozornil poprvé dánský fyzik Niels Bohr.

Niels Bohr vytvořil tzv. *Bohrův model atomu* na základě tří umělých postulátů, které přidal ke klasické teorii:

- 1) elektrony se pohybují jen po tzv. *stacionárních drahách* – tj. po takových drahách, ve kterých je odpovídající de Broglieho vlnová délka ze vztahu (257) „namotána“ na oběžnou dráhu tj. obvod dráhy je n -násobkem vlnové délky.



Tato dráha není možná



Tato dráha je možná

$$2\pi r_n = n\lambda \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv_n} .$$

Index n čísluje možné stavy elektronu v atomu (r_n možný poloměr dráhy, v_n rychlost na n -té dráze, E_n odpovídající energie) podle počtu vlnových délek elektronu na jeho oběžné dráze.

- 2) na stacionární dráze elektron nezáří.
- 3) při přeskoku elektronu mezi dvěma stacionárními hladinami dojde k vyzáření fotonu o energii odpovídající rozdílu energií těchto hladin.

Tento jednoduchý Bohrův model atomu není řešením výše uvedeného paradoxu, jde spíše o postulování nebo konstatování experimentálně známých skutečností. Navíc je tento model

aplikovatelný jen na nejjednodušší atomy s jediným elektronem v obalu (H, He⁺). Tento model ale poprvé správně určil hladiny energie elektronu v atomu vodíku a vysvětlil spektrum atomu vodíku.

Heisenbergovy relace neurčitosti

Při měření polohy a hybnosti objektu mikrosvěta budou nepřesnosti měření Δx , Δp splňovat relaci (přes k se nesčítá)

$$\blacktriangleright \quad \Delta x_k \Delta p_k \geq \frac{\hbar}{2}; \quad k = 1, 2, 3. \quad (258)$$

Čím přesněji určíme polohu objektu, tím méně přesně určíme jeho hybnost a naopak. Samotný akt měření ovlivňuje náš objekt, ale relace (258) je splněna i tehdy, neprovedeme-li měření vůbec. Jde o principiální hranici danou přírodou, za kterou nelze nahlédnout.

Například obyčejný ohyb světla na štěrbíně lze chápat jako důsledek relací neurčitosti pro fotony. Průchod fotonů štěrbínou není nic jiného než pokus o určení jejich polohy y s přesností Δy (velikost štěrbiny). Fotony, které prošly štěrbínou, určitě měly v okamžiku průchodu souřadnici y rovnou souřadnici y štěrbiny. Zmenšíme-li šířku štěrbiny Δy , zvýšíme přesnost měření y ; podle relací (258) se ale zvýší nepřesnost Δp_y určení odpovídající komponenty hybnosti. Výsledkem je známý ohybový jev – fotony za štěrbínou vyletují s danou pravděpodobností do různých směrů se střední kvadratickou fluktuací hybnosti Δp_y danou Heisenbergovými relacemi neurčitosti.



Výčet experimentálních faktů, které jsme uvedli výše, není zdaleka úplný. Všechny ale přispěly ke zrodu kvantové teorie, popisující pro nás nezvyklý svět atomů a elementárních částic. Podejme nyní stručný přehled jejího vývoje. V roce 1925 formuloval Werner Heisenberg ve svých 25 letech *maticovou mechaniku* – každé dynamické proměnné přiřadil čtvercovou matici (zpravidla nekonečnou), jejíž vlastní čísla byly měřitelné hodnoty příslušné veličiny. Šlo o teorii pramenící z vynikající intuice, na základě které bylo možné určit například energetická spektra různých atomů (nejen vodíku).

V roce 1926 Erwin Schrödinger formuloval *vlnovou kvantovou mechaniku*. Řešením rovnice

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \psi = E \psi \quad (259)$$

pro vlnovou funkci ψ bylo opět možné určit hodnoty energie E pro objekt v potenciálním poli $V(x, y, z)$. Obě konstrukce – Heisenbergova i Schrödingerova – poskytovaly shodné výsledky. Spíše než o ucelenou teorii šlo v té době o návod, jak určit energetické spektrum.

Obecnou konstrukci kvantové teorie na Hilbertových prostorech provedl P. A. M. Dirac. Ukázalo se, že Heisenbergova a Schrödingerova mechanika se liší jen jinou volbou příslušného Hilbertova prostoru.

Až doposud byla budována nerelativistická kvantová teorie. Zobecnění na relativistický případ provedli Klein a Gordon pro spin částice $s=0$ a Dirac pro spin částice $s=1/2$ (Kleinova-Gordonova rovnice, Diracova rovnice). S *relativistickou kvantovou teorií* byla objasněna podstata spinu, Dirac předpověděl existenci pozitronu, ale především byl postaven základ pro vybudování *kvantové elektrodynamiky* (Dirac – 1949). Odsud byl již jen krůček ke

vzniku *kvantové teorie elektromagnetického pole* (Dirac, Feynman), ve které dochází i ke kvantování samotného elektromagnetického pole (tzv. druhé kvantování). Výsledky kvantové teorie pole lze přehledně zapisovat pomocí tzv. Feynmanových diagramů.

Na základě různých symetrií v přírodě se od 60. let bouřlivě vyvíjí *kalibrační teorie*, například *Weinbergova-Salamova teorie elektroslabé interakce*, která sjednocuje teoretický pohled na interakci elektromagnetickou a slabou, rozvíjí se *kvantová chromodynamika* – teorie silné interakce, teorie *GUT* sjednocující elektroslabou a silnou interakci a probíhají intenzivní pokusy o formulaci Einsteinových-Diracových rovnic supersymetrických teorií *SUSY* pokoušejících se o jednotný popis všech čtyř interakcí. Lidstvo stále více poznává svět elementárních částic a jeho zákonitosti.

V této kapitole se budeme zabývat nejdůležitější matematikou potřebnou v kvantové teorii. Veškeré úvahy jsou z důvodu jednoduchosti provedeny pro případ, kdy vlastní čísla operátorů jsou navzájem různá a tvoří spočetnou množinu.

Operátory v kvantové teorii

Prostory se skalárním součinem

Již dříve jsme se seznámili s lineárními vektorovými prostory jakožto zobecněním N -tic s definovaným natahováním a skládáním. Nyní analogicky rozšíříme pojem skalárního součinu pro různé lineární vektorové prostory. Budeme důsledně používat Diracovu symboliku, ve které jsou prvky lineárních vektorových prostorů značeny symboly $|\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{a}\rangle$ a skalární součiny $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle, \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle, \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ atd.

\mathcal{R}^3 prostor reálných trojic

$$|\mathbf{f}\rangle = (f_1, f_2, f_3), \quad |\mathbf{g}\rangle = (g_1, g_2, g_3),$$

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle \equiv f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 = f_k g_k \quad \text{skalární součin.}$$

Norma vektoru (velikost) se definuje vztahem

$$\|\mathbf{f}\| \equiv \sqrt{\langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle} \stackrel{\text{pro } \mathcal{R}^3}{=} \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \quad (260)$$

Pro reálné trojice znázorněné jako úsečky opatřené šipkami je norma vektoru rovna délce úsečky a platí $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\| \cos \alpha$, kde α je úhel sevřený oběma vektory. Z tohoto vztahu plyne okamžitě *Schwartzovo lemma*:

$$|\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle| \leq \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\|. \quad (261)$$

Výsledkem operace skalárního součinu je číslo, v případě lineárního vektorového prostoru \mathcal{R}^3 reálné číslo, v obecném případě bude výhodné uvažovat i o čísle komplexním. Norma vektoru (velikost) musí ale vždy být nezáporné reálné číslo.

\mathcal{R}^N prostor reálných N -tic

$$|\mathbf{f}\rangle = (f_1, \dots, f_N), \quad |\mathbf{g}\rangle = (g_1, \dots, g_N); \quad f_l, g_l \in \mathcal{R},$$

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle \equiv f_1 g_1 + \dots + f_N g_N = \sum_{k=1}^N f_k g_k = f_k g_k.$$

V platnosti zůstávají definice normy i Schwartzovo lemma.

\mathcal{C}^N prostor komplexních N -tic

$$|\mathbf{f}\rangle = (f_1, \dots, f_N), \quad |\mathbf{g}\rangle = (g_1, \dots, g_N); \quad f_l, g_l \in \mathcal{C},$$

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle \equiv f_1^* g_1 + \dots + f_N^* g_N = \sum_{k=1}^N f_k^* g_k = f_k^* g_k.$$

Skalární součin definujeme v jednom z argumentů komplexně sdružený (dohodou v levém). Pro komplexní číslo $z = a + i b$ je velikost (norma) čísla dána vztahem

$$\|z\| = \sqrt{z^* z}$$

Právě proto, aby pro komplexní čísla zůstalo v platnosti, že norma vektoru je odmocnina skalárního součinu vektoru se sebou samým, je v definici skalárního součinu komplexní sdružení v jednom z argumentů. Při výše uvedené definici skalárního součinu bude výsledkem sice komplexní číslo, ale norma vektoru zůstane reálná nezáporná:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{f_1^* f_1 + \dots + f_N^* f_N} = \sqrt{|f_1|^2 + \dots + |f_N|^2} \geq 0.$$

Opět platí Schwartzovo lemma.

l^2 prostor komplexních posloupností (N -tice s $N \rightarrow \infty$)

$$|\mathbf{f}\rangle = \{f_1, \dots, f_n, \dots\} = \{f_l\}_{l=1}^{\infty}, |\mathbf{g}\rangle = \{g_l\}_{l=1}^{\infty}; f_l, g_l \in \mathbb{C},$$

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle \equiv f_1^* g_1 + \dots + f_n^* g_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^* g_k = f_k^* g_k.$$

Takto definovaný skalární součin má smysl jen pro konvergentní posloupnosti. Do prostoru l^2 můžeme zahrnout jen takové prvky $|\mathbf{f}\rangle$, pro které je $\|\mathbf{f}\| < \infty$, tj. požadujeme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^* f_k < \infty \quad \text{pro } \forall |\mathbf{f}\rangle \in l^2.$$

Potom je

$$|\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^* g_k \right| \leq \|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\| < \infty \quad \text{pro } \forall |\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle \in l^2,$$

neboť Schwartzovo lemma platí i v případě nekonečných posloupností.

$\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ prostor komplexních funkcí reálné proměnné

Při dalším zobecnění prostoru l^2 si můžeme index k představit spojitý. Místo k budeme psát $x : f_x$. Výraz f_x není ale nic jiného než komplexní funkce reálné proměnné (spojitého indexu), kterou je zvykem zapisovat ve tvaru $f(x)$, tj.

$$|\mathbf{f}\rangle \equiv f_x \equiv f(x), \quad |\mathbf{g}\rangle \equiv g_x \equiv g(x), \quad ; \quad x \in \mathbb{R}, \quad f, g \in \mathbb{C},$$

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx.$$

Analogicky jako v l^2 je třeba do prostoru \mathcal{L}^2 zahrnout jen prvky s $\|\mathbf{f}\| < \infty$, tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) f(x) dx < \infty \quad \text{pro } \forall f(x) \in \mathcal{L}^2.$$

Potom je

$$|\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx \right| \leq \|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\| < \infty \quad \text{pro } \forall |\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle \in \mathcal{L}^2$$

a skalární součin má smysl. Schwartzovo lemma platí i pro integrály. \mathcal{L}^2 se někdy nazývá *prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem*. Lze ho definovat i pro jiný definiční obor než $(-\infty, \infty)$, potom píšeme $\mathcal{L}^2(\mathcal{M})$, kde \mathcal{M} je definiční obor funkcí $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M})$.

Nyní můžeme přistoupit k obecné definici prostorů se skalárním součinem.

Unitární prostor

Unitárním prostorem neboli prostorem se skalárním součinem nazveme lineární vektorový prostor \mathcal{V} (s operací skládání dvou vektorů $+: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ a operací natahování vektorů $\cdot: C \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$), na kterém je definována další operace

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow C$$

(tzv. skalární součin) s vlastnostmi

- 1) $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} + \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{f} | \mathbf{h} \rangle$,
- 2) $\langle \mathbf{f} | \alpha \mathbf{g} \rangle = \alpha \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle$,
- 3) $\langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle^*$ ($\Rightarrow \langle \alpha \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle$),
- 4) $\langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle \geq 0$; $\langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{f}\rangle = 0$.

Poznámky:

- 1) Přidáním operace $\langle \cdot | \cdot \rangle$ k lineárnímu vektorovému prostoru získáme unitární prostor.
- 2) První dvě operace v definici znamenají linearitu v pravém argumentu. Z třetí operace plyne antilinearita v levém argumentu (aditivnost + vytknutí komplexně sdružené konstanty).
- 3) Symbolika zápisu pochází od Paula Adriena Maurice Diraca. Nazývá se také braketová symbolika nebo brakety (z anglického bracket = závorka).

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ „*bracket*“

$\langle \cdot |$ „*bra*“ (lze matematicky definovat, tzv. duál, naznačená operace skalárního součinu)

$|\cdot\rangle$ „*ket*“ (vektor z \mathcal{V})

- 4) Pro komplexní N -tice lze interpretovat $|\mathbf{f}\rangle$ jako sloupcovou matici, $\langle \mathbf{f}|$ jako transponovanou komplexně sdruženou matici:

$$|\mathbf{f}\rangle = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}; \quad \langle \mathbf{f}| = (f_1^* \quad \dots \quad f_N^*).$$

Potom je skalární součin

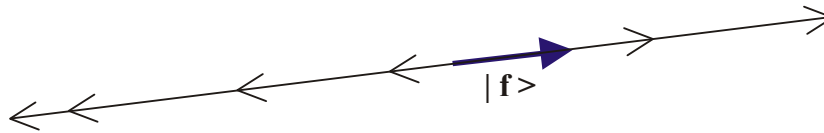
$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = (f_1^* \quad \dots \quad f_N^*) \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} = f_k^* g_k$$

definován za pomoci maticového násobení. Pro jiné prostory než n -tice není pro naše účely nutné jednotlivé části skalárního součinu $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle$ nějak interpretovat.

- 5) Pro L^2 lze chápat $\langle \mathbf{f}| = \int f^*(x) \cdots dx$ jako naznačenou operaci skalárního součinu. Je jen třeba doplnit příslušnou funkci, na kterou operace působí. Podobná situace je u derivování, napíšeme-li jen d/dx .

Paprsek

Nechť \mathcal{V} je unitární prostor, $|\mathbf{f}\rangle$ jeho nenulový prvek. Paprskem nataženým na $|\mathbf{f}\rangle$ nazveme množinu prvků $\{|\mathbf{g}\rangle; |\mathbf{g}\rangle = \alpha |\mathbf{f}\rangle; \alpha \in C \setminus \{0\}, |\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle \in \mathcal{V}\}$.



Hilbertův prostor

Úplný unitární prostor (hranice prostoru je jeho součástí).

Operátory

Operátorem rozumíme zobrazení

$$\hat{\mathbf{A}}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V},$$

které prvku $|\mathbf{f}\rangle$ prostoru \mathcal{V} přiřazuje prvek $|\mathbf{g}\rangle$ tohoto prostoru:

$$\hat{\mathbf{A}}|\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{g}\rangle.$$

V platnosti zůstává běžné názvosloví používané pro zobrazení (*vzor, obraz, definiční obor, obor hodnot, ...*).

Příklad: \mathcal{R}^3 Operátorem na \mathcal{R}^3 může být libovolná matice 3×3 , například

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{f}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{A}}|\mathbf{f}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = |\mathbf{g}\rangle, \quad \text{obecně}$$

$$\hat{\mathbf{A}}|\mathbf{f}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_2 + f_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad: $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$

$$\hat{\mathbf{D}} \equiv \frac{d}{dx}; \quad |\mathbf{f}\rangle = x e^{-x} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{D}}|\mathbf{f}\rangle = \frac{d}{dx}(x e^{-x}) = (1-x)e^{-x} = |\mathbf{g}\rangle.$$

Jednotkový operátor: $\hat{\mathbf{1}}|\mathbf{f}\rangle \equiv |\mathbf{f}\rangle$. Pro n -tice je jednotkovým operátorem diagonální matice s jednotkami na diagonále (jednotková matice) – ověřte!

Kvadrát operátoru: Druhou mocninu operátoru můžeme definovat, je-li obor funkčních hodnot operátoru podmnožinou jeho definičního oboru, potom

$$\hat{\mathbf{A}}^2|\mathbf{f}\rangle \equiv \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{A}}|\mathbf{f}\rangle).$$

Příklad: Operátor derivace

$$\hat{\mathbf{D}} \equiv \frac{d}{dx}; \quad |\mathbf{f}\rangle = e^{-x^2} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{D}}^2|\mathbf{f}\rangle \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right) = \frac{d}{dx}(-2xe^{-x^2}) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}.$$

Mocnina operátoru: Analogicky definujeme indukci obecnou mocninou operátoru

$$\hat{\mathbf{A}}^n |\mathbf{f}\rangle \equiv \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{A}}^{n-1} |\mathbf{f}\rangle).$$

Inverzní operátor: Inversním operátorem k $\hat{\mathbf{A}}$ nazveme takový operátor $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$, že

$$\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{A}}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{1}}.$$

K danému operátoru $\hat{\mathbf{A}}$ může být nalezení inverzního operátoru značně obtížné, někdy inverzní operátor neexistuje vůbec.

Sdružený operátor: Sdruženým operátorem k $\hat{\mathbf{A}}$ nazveme takový operátor $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$, že

$$\langle \mathbf{f} | \hat{\mathbf{A}} \mathbf{g} \rangle = \langle \hat{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle.$$

Působení operátoru $\hat{\mathbf{A}}$ v pravé straně skalárního součinu dopadne stejně jako působení k němu sdruženého operátoru v levé části skalárního součinu. Sdružený operátor k $\hat{\mathbf{A}}$ nemusí vždy existovat.

Komutátor operátorů: Pro operátory je obecně $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \neq \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$. Říkáme, že operátory nekomutují. Míru nekomutativnosti můžeme posoudit za pomoci tzv. komutátoru

$$[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] \equiv \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}. \quad (262)$$

Je-li komutátor operátorů $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ nulový, operátory komutují, je-li různý od nuly nekomutují. Výsledkem komutátoru je opět operátor.

Příklad: Mějme na \mathcal{L}^2 dva operátory: $\hat{\mathbf{D}} = d/dx$ a $\hat{\mathbf{X}} = x$, například na prvek $|x^5\rangle$ působí takto

$$\hat{\mathbf{D}}|x^5\rangle = \frac{d}{dx}x^5 = 5x^4, \quad \hat{\mathbf{X}}|x^5\rangle = x \cdot x^5 = x^6.$$

Určeme jejich komutátor

$$[\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{X}}]|\mathbf{f}\rangle = (\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{D}})|\mathbf{f}\rangle = \left(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} \right) f(x) = \frac{d}{dx}(x f(x)) - x\frac{d}{dx}f(x) =$$

$$= f(x) + x f'(x) - x f'(x) = f(x) = |\mathbf{f}\rangle \Rightarrow$$

$$[\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{X}}]|\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{f}\rangle = \text{pro } \forall |\mathbf{f}\rangle \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow$$

$$[\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{X}}] = \hat{\mathbf{1}}.$$

Podobně můžeme určovat i další komutační relace.

Budeme se zabývat jen *lineárními operátory*, tj. operátory s lineární odezvou:

$$\hat{\mathbf{A}}(\alpha|\mathbf{f}\rangle + \beta|\mathbf{g}\rangle) = \alpha\hat{\mathbf{A}}|\mathbf{f}\rangle + \beta\hat{\mathbf{A}}|\mathbf{g}\rangle.$$

Všechny dosud uvedené operátory byly lineární.

V kvantové teorii se setkáme především *Hermitovými operátory*, jejichž vlastní čísla jsou reálná a můžeme je interpretovat jako možné výsledky prováděných měření.

Hermitovy operátory

Definice: Hermitův operátor působí v obou částech skalárního součinu stejně, tj.

$$\langle \hat{\mathbf{A}} \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f} | \hat{\mathbf{A}} \mathbf{g} \rangle. \quad (263)$$

Věta: Pro Hermitův operátor je sdružený operátor roven původnímu, je samosdružený:

$$\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \hat{\mathbf{A}}. \quad (264)$$

Důkaz: Plyne okamžitě z definice sdruženého operátoru.

Poznámka: V přesné matematice se definice samosdruženého a Hermitova operátoru nepatrně liší požadavky na definiční obor, pro naše účely nebudeme samosdružený a Hermitovy operátory rozlišovat. Vzhledem k tomu, že Hermitův operátor působí v obou částech skalárního součinu stejně, často se píše

$$\langle \hat{\mathbf{A}} \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f} | \hat{\mathbf{A}} \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f} | \hat{\mathbf{A}} | \mathbf{g} \rangle.$$

Centrální pozice $\hat{\mathbf{A}}$ naznačuje, že podle vlastního uvážení můžeme operátorem zapůsobit vlevo či vpravo. Tato struktura se někdy nazývá sendvič.

Příklad: operátor $\hat{\mathbf{B}} = i \frac{d}{dx}$ na prostoru $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ je hermitovský

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{B}} \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(i \frac{d}{dx} f(x) \right)^* g(x) dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d f^*(x)}{dx} g(x) dx \stackrel{p. \text{ partes}}{=} \\ &= -i \left[f^*(x) g(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + i \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \frac{d g(x)}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \left(i \frac{d g(x)}{dx} \right) dx = \langle \mathbf{f} | \hat{\mathbf{B}} \mathbf{g} \rangle. \end{aligned}$$

Výraz v hranaté závorce je nulový, neboť funkce z $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ jsou integrovatelné s kvadrátem na $(-\infty, \infty)$ a proto musí být

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0 \quad \text{pro } \forall f, g \in \mathcal{L}^2.$$

Samotný operátor derivace $\hat{\mathbf{D}} = d/dx$ hermitovský není, při provedení integrace per partes by se zaměnilo znaménko a $\langle \hat{\mathbf{D}} \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = -\langle \mathbf{f} | \hat{\mathbf{D}} \mathbf{g} \rangle$.

* * *

V teorii operátorů patří k základním úlohám nalézt směry, ve kterých se působení daného operátoru projevuje jako komplexní natahování:

$$\hat{\mathbf{A}} | \mathbf{f} \rangle = \lambda | \mathbf{f} \rangle ; \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (265)$$

Vektor $| \mathbf{f} \rangle$ se nazývá *vlastním vektorem* (charakteristickým vektorem) operátoru $\hat{\mathbf{A}}$ a koeficient natahování λ *vlastním číslem* (charakteristickým číslem). Například u tenzoru setrvačnosti leží vlastní vektory ve směru os, ve kterých těleso při rotaci nehází. U lineárních operátorů je i každý násobek vlastního vektoru vlastním vektorem se stejným vlastním číslem. Jde tedy o celý paprsek v Hilbertově prostoru, neboli *vlastní směr*. Takových vlastních směrů a čísel může existovat u lineárních operátorů celá řada, jejich maximální počet je roven *dimenzi prostoru* (počtu prvků báze). U separabilních prostorů (se spočetnou bází) můžeme tedy úlohu nalezení vlastních čísel a vektorů formulovat rovnicemi:

$$\hat{\mathbf{A}} | \mathbf{f}_k \rangle = \lambda_k | \mathbf{f}_k \rangle ; \quad k = 1, 2, \dots ; \quad \lambda_k \in \mathbb{C}. \quad (266)$$

Množina všech vlastních čísel $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$ se nazývá *spektrum operátoru* $\hat{\mathbf{A}}$. Nalezneme-li spektrum operátoru a jeho vlastní vektory, můžeme relativně snadno řešit rovnice obsahující tento operátor. Pomocí vlastních čísel a vektorů lze například řešit soustavy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic.

Věta: Hermitovský operátor má reálná vlastní čísla.

Důkaz: Při výpočtu skalárního součinu využijeme hermitovosti a ponecháme operátor nejprve působit v pravé části skalárního součinu a poté v levé. Výsledek musí být stejný:

$$\langle \mathbf{f}_k | \hat{\mathbf{A}} \mathbf{f}_k \rangle = \begin{cases} \langle \mathbf{f}_k | \lambda_k \mathbf{f}_k \rangle = \lambda_k \langle \mathbf{f}_k | \mathbf{f}_k \rangle \\ \langle \hat{\mathbf{A}} \mathbf{f}_k | \mathbf{f}_k \rangle = \lambda_k^* \langle \mathbf{f}_k | \mathbf{f}_k \rangle \end{cases} \Rightarrow \lambda_k = \lambda_k^* \Rightarrow \lambda_k \in \mathcal{R}.$$

Vlastní čísla jsou tedy reálná.

Příklad: Určeme vlastní čísla a vektory matice:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}} |\mathbf{f}\rangle = \lambda |\mathbf{f}\rangle \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rovnice má netriviální řešení jen pokud je determinant roven nule. Z této podmínky plynou dvě možné hodnoty vlastního čísla λ . Pro každou z nich potom již snadno učíme příslušný vlastní vektor. Pozor! Podmínka pro determinant činí rovnice pro složky vlastního vektoru závislé. To je ale v pořádku, řešení rovnic musí mít jeden volný parametr, tak aby představovalo celý paprsek v prostoru. K vlastním vektorům můžeme najít normované vlastní vektory a příslušné projekční operátory. Výsledek je:

$$\lambda_1 = -1, \quad |\mathbf{f}_1\rangle = c \begin{pmatrix} +i \\ +1 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +i \\ +1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = +1, \quad |\mathbf{f}_2\rangle = c \begin{pmatrix} -i \\ +1 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ +1 \end{pmatrix}.$$

Vektory označené pouhými čísly jsou normovány k jedné. Matice \mathbf{A} byla hermitovská (postačí, aby matice překlopená kolem diagonály a komplexně sdružená byla shodná s původní maticí). Proto má reálná vlastní čísla.

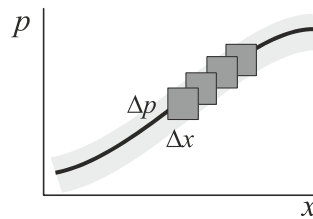
Základní principy a postuláty

Jak už víme, klasická mechanika selhala při popisu dějů mikrosvěta zejména proto, že je postavena na komutujících objektech. V mikrosvětě děje ale nekomutují. Základním cílem bude tedy místo dynamických proměnných používat nekomutující objekty (operátory) a nalézt vztah mezi operátory a reálnými měřitelnými veličinami.

Redefinice stavu

V klasické mechanice je stav částice určen polohou a hybností. Vzhledem k tomu, že v mikrosvětě nelze současně tyto veličiny měřit a měření jedné ovlivní měření druhé, je nutné

pojmem stavu definovat novým způsobem. Fázové trajektorie již nelze v mikrosvětě popsat křivkami. Vnímáme je s přesností danou relacemi neurčitosti $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Můžeme si představit, že fázovou trajektorii vidíme jako rozmazanou čáru s rozlišením daným čtverečkem o ploše $\hbar/2$ (sledujeme-li jednu souřadnici a jí odpovídající zobecněnou hybnost).



Kompatibilita: Řekneme, že dvě dynamické proměnné jsou kompatibilní, jestliže měření jedné veličiny neovlivní měření veličiny druhé. Příkladem kompatibilních proměnných jsou (x, y) , příkladem nekompatibilních proměnných jsou (x, p_x) .

Úplná množina pozorovatelných: Maximální nezávislá množina vzájemně kompatibilních dynamických proměnných. Jakákoli další dynamická proměnná už s nimi není kompatibilní. Například v nerelativistické teorii jsou nejznámější úplné množiny pozorovatelných (x, y, z) , (p_x, p_y, p_z) a pro centrální pole ještě energie, kvadrát momentu hybnosti a jeho jedna komponenta (E, L^2, L_3) . Současně lze tedy změřit všechny tři souřadnice nebo všechny tři složky hybností. Nelze již ale současně změřit všechny tři složky momentu hybnosti.

Stav systému: Řekneme, že známe stav systému, známe-li výsledek měření některé úplné množiny pozorovatelných. Stavem tedy nazveme jen to, co lze současně změřit.

* * *

Základním rysem nové teorie musí být nekomutující objekty – operátory. Místo dynamických proměnných z klasické mechaniky (souřadnice, hybnost, energie, moment hybnosti,...) budeme používat operátory (operátor souřadnice, hybnosti...). Nekomutativnost těchto operátorů bude vyjadřovat nekomutativnost aktu měření dynamických proměnných v mikrosvětě. Veličiny naměřené přístrojem v mikrosvětě jsou reálná čísla, někdy spojitá (poloha částice), někdy diskrétní (například jednotlivé hladiny energie elektronu vázaného v atomu). Jak získat z operátoru dynamické proměnné sadu reálných čísel spojitého nebo diskrétního charakteru? Takovou sadou je právě spektrum hermitovských operátorů. *Dynamickým proměnným budeme tedy přiřazovat hermitovské operátory.*

Každý operátor působí na prvky nějakého Hilbertova prostoru \mathcal{H} . Musíme se tedy ptát, jaký význam bude v naší teorii mít sám Hilbertův prostor a také prvky, na které operátory působí. Ve skutečnosti příliš nezáleží na volbě Hilbertova prostoru. Podstatné jsou spíše vztahy mezi dynamickými proměnnými, nyní operátory. Kvantová mechanika založená na prostoru \mathcal{L}^2 funkcí integrovatelných s kvadrátem je známá Schrödingerova vlnová mechanika vedoucí na Schrödingerovu rovnici a vlnové funkce. Kvantová teorie založená na prostoru l^2 posloupností sčítatelných s kvadrátem je Heisenbergova maticová mechanika. Obě teorie se na první pohled zdají naprosto odlišné. Přesto vlastní čísla operátorů v obou teoriích jsou stejná a obě teorie tak dávají stejné předpovědi. Hilbertův prostor se všemi svými prvky a s operátory, které na prvky působí, koresponduje s vlastnostmi celého systému z klasické mechaniky. *Místo systému budeme proto v kvantové teorii hovořit o Hilbertově prostoru daného systému* (například Hilbertův prostor elektronu).

Zbývá rozluštit poslední hádanku – k čemu jsou prvky Hilbertova prostoru? Již v úvodu jsme si řekli, že v mikrosvětě sám akt měření ovlivní stav systému. Před měřením je systém v jiném stavu než po měření. Akt měření dynamické proměnné zastupuje v kvantové teorii hermitovský operátor této proměnné. Působením tohoto operátoru na prvek prostoru dostáváme jiný prvek tohoto prostoru. A to je přesně to, co hledáme. *Prvky (vektory) prostoru*

4) Výraz pro střední hodnotu rozepsaný v prostoru $L^2(R^3)$ dá:

$$\langle A \rangle = \frac{\int \psi^*(\mathbf{x}) \hat{A} \psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}}{\int \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}}.$$

5) Jsou-li všechny systémy připraveny ve vlastním stavu $|j\rangle$ operátoru \hat{A} , dá střední hodnota daná postulátem C samozřejmě příslušnou vlastní hodnotu podle postulátu B a všechna měření dají v tomto výjimečném případě stejný výsledek (přes j se nesčítá):

$$\langle A \rangle = \frac{\langle j | \hat{A} | j \rangle}{\langle j | j \rangle} = \frac{a_j \langle j | j \rangle}{\langle j | j \rangle} = a_j.$$

Princip korespondence

Posledním ze základních principů kvantové teorie je princip korespondence. Vymezuje, které části z teoretické mechaniky je možné převzít v kvantové teorii. Základní relace mezi dynamickými proměnnými v teoretické mechanice a příslušnými operátory v kvantové mechanice se mohou lišit jen pořadím operátorů. Platí-li vztah $AB = C$, bude v kvantové teorii platit stejný vztah mezi operátory, jen nebudeme vědět, jaké pořadí mají operátory na levé straně rovnosti. To můžeme zjistit jedině experimentem. Například vztah pro Hamiltonovu funkci bude mít v kvantové teorii tvar

$$H \equiv \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(x, y, z) \quad \rightarrow \quad \hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_x^2 + \hat{\mathbf{p}}_y^2 + \hat{\mathbf{p}}_z^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}}). \quad (267)$$

Princip korespondence pro vztahy s derivacemi je důležitý k určení toho, jak mají operátory v kvantové teorii vypadat. Tato část principu korespondence ale přesahuje možnosti tohoto skriptu. Správný tvar operátorů na prostoru funkcí L^2 zde určíme jiným postupem. Z odvozování disperzní relace víme, že parciální diferenciální rovnice přejdou v algebraické vztahy podle schématu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\leftrightarrow -i\omega, \\ \frac{\partial}{\partial x} &\leftrightarrow k_x, \\ \frac{\partial}{\partial y} &\leftrightarrow k_y, \\ \frac{\partial}{\partial z} &\leftrightarrow k_z. \end{aligned} \quad (268)$$

Jde o přirozený vztah mezi operátory (nalevo) a algebraickými veličinami. Navíc víme, že částicové a vlnové charakteristiky jsou spojeny relacemi $E = \hbar\omega$, $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$. Přenásobíme-li poslední relace redukovanou Planckovou konstantou, máme

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial}{\partial t} &\leftrightarrow -iE, \\ \hbar \frac{\partial}{\partial x} &\leftrightarrow i p_x, \\ \hbar \frac{\partial}{\partial y} &\leftrightarrow i p_y, \\ \hbar \frac{\partial}{\partial z} &\leftrightarrow i p_z. \end{aligned} \quad (269)$$

Z pravých stran pak snadno dopočteme přirozený tvar operátorů v kvantové teorii:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}; \quad (270)$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}; \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}; \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}. \quad (271)$$

První operátor, který ztotožňuje energii s časovou derivací, se využívá při řešení časového vývoje v kvantové teorii a při odvození tzv. časové Schrödingerovy rovnice, která je ale za hranicemi možností tohoto úvodního kurzu. Pro nás budou důležitější vztahy (271) pro operátory hybnosti. Ty lze napsat i jako jeden jediný vztah

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}. \quad (272)$$

Vlastní stavy energie, Schrödingerova rovnice

Věnujme se nyní nalezení spektra operátoru energie – hodnot energie, které je možné na systému naměřit. Úlohu můžeme zformulovat například takto:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (273)$$

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{X}}) = \frac{\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2}{2m} + V(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}), \quad (274)$$

Budeme hledat vlastní hodnoty operátoru energie (Hamiltonova operátoru) ze vztahu (273). Tato rovnice pro vlastní hodnoty Hamiltonova operátoru se nazývá *Schrödingerova rovnice*. Operátor energie (Hamiltonův operátor) je dán vztahem (274). Základní operátory, ze kterých je složen Hamiltonův operátor, jsme pro prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem odvodili ve vztahu (270).

Ukažme si nyní přepis Schrödingerovy rovnice v prostoru $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^3)$ funkcí integrovatelných s kvadrátem na celém prostoru \mathcal{R}^3 . Nejjednodušším operátorem na tomto prostoru je operátor násobení souřadnicí. Tento operátor ztotožníme s operátorem souřadnice:

$$\hat{X} = x; \quad \hat{Y} = y; \quad \hat{Z} = z. \quad (275)$$

Schrödingerova rovnice (273) s operátorem energie (274), volbou prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathcal{R}^3)$ a operátory (271) a (275) vede potom na slavnou Schrödingerovu rovnici v x reprezentaci:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}) \right] \psi_n(\mathbf{x}) = E_n \psi_n(\mathbf{x}). \quad (276)$$

Řešení této rovnice pro konkrétní potenciál V poskytne spektrum operátoru energie $\{E_n\}$ jakožto množinu možných měřitelných hodnot energie. Řešení rovnice (276) lze nalézt pro každou hodnotu energie. Ne vždy je však toto řešení z prostoru $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^3)$. Je proto vždy třeba vybrat z možných řešení jen ta, která jsou integrovatelná s kvadrátem, tj. donekonečna ubývají dostatečně rychle, aby zajistila integrovatelnost. Jen tato řešení dají kvantování energie a její správné hodnoty. Existuje jednoduchý způsob, jak odhadnout typ spektra pro daný potenciál. Může-li se v klasické mechanice částice vzdálit do nekonečna, je spektrum operátoru energie spojité. Nemůže-li se ani v jednom směru vzdálit do nekonečna je spektrum operátoru energie diskrétní. V dalším textu si ukážeme řešení Schrödingerovy rovnice pro několik velmi jednoduchých jednorozměrných příkladů – harmonický oscilátor, nekonečnou jámu a konečnou bariéru.

Harmonický oscilátor

Hamiltonova funkce jednodimenzionálního harmonického oscilátoru je dána součtem kinetické a potenciální energie

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (277)$$

Hamiltonův operátor je v prostoru $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$ potom dán jednoduchou relací

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (278)$$

Odpovídající Schrödingerova rovnice pro vlastní funkci $\psi(x)$ z prostoru $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$ má tvar

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \psi(x) = E \psi(x). \quad (279)$$

Jde o obyčejnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu s nelineárním koeficientem u nulté derivace. Standardní tvar této rovnice (s jednotkovým koeficientem u nejvyšší derivace) je:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2 \right) \psi = 0. \quad (280)$$

Rovnici budeme řešit ve čtyřech krocích:

1. substituce ve vnitřní (nezávislé) proměnné

V nezávislé proměnné budeme volit takovou substituci, která „zbezrozměrní“ rovnici. Přesuneme koeficienty tak, aby byly symetrické u proměnné x

$$\frac{d^2\psi}{\frac{m\omega}{\hbar} dx^2} - \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \psi + \frac{2E}{\hbar\omega} \psi = 0 \quad (281)$$

a provedme substituci

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \quad (282)$$

po které Schrödingerova rovnice získá bezrozměrný tvar

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2 \psi + \lambda \psi = 0, \quad \lambda(E) \equiv \frac{2E}{\hbar\omega}. \quad (283)$$

2. substituce ve vnější (závislé) proměnné

V závislé proměnné budeme volit takovou substituci, které zohlední chování vlnové funkce pro $\xi \rightarrow \pm\infty$. Pro velká ξ můžeme zanedbat poslední člen v rovnici (283) a přibližně platí

$$\xi \rightarrow \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2 \psi \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \approx e^{\pm\xi^2/2}.$$

(řešení stačí dosadit do původní rovnice a zanedbat členy s nižšími mocninami ξ). Kladné z nalezených řešení evidentně není z prostoru \mathcal{L}^2 , integrál z kvadrátu přes celý prostor by byl nekonečný. Vlnová funkce se tedy pro velká ξ musí chovat jako $\exp[-\xi^2/2]$. To nás přivádí k substituci pro závislou proměnnou

$$\psi(\xi) = e^{-\xi^2/2} u(\xi), \quad (284)$$

po jejímž provedení dostaneme rovnici

$$u'' - 2\xi u' + (\lambda - 1)u = 0. \quad (285)$$

Derivace se automaticky rozumí podle nové proměnné ξ . V principu by z matematického hlediska bylo v pořádku říci „v rovnici (280) provedeme substituce (282) a (284), výsledná rovnice je (285)“. V bodech 1 a 2 jsme si jen ukázali, jaké pohybnky nás k těmto substitucím vedou, protože postup je obdobný i u jiných průběhů potenciálu.

3. rozvoj řešení do mocninné řady

Řešení rovnice (285) budeme hledat ve tvaru mocninné řady

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k.$$

Snadno nalezneme první a druhou derivaci

$$u'(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k \xi^{k-1}; \quad u''(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k \xi^{k-2}.$$

Výrazy pro u a její derivace dosadíme do rovnice (285):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k \xi^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} 2k c_k \xi^k + (\lambda - 1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k = 0.$$

Jednotlivé členy upravíme tak, aby mocniny ξ byly stejné (v prvním členu položíme $k-2 = l$):

$$\sum_{l=-2}^{\infty} (l+1)(l+2) c_{l+2} \xi^l - \sum_{l=0}^{\infty} 2l c_l \xi^l + (\lambda - 1) \sum_{l=0}^{\infty} c_l \xi^l = 0.$$

První dva členy prvního součtu jsou nulové, a proto můžeme spodní hranici posunout na $l = 0$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(l+2) c_{l+2} - (2l+1-\lambda) c_l] \xi^l = 0.$$

Má-li být polynomiální výraz identicky nulový pro každou hodnotu ξ , musí být nulové všechny koeficienty, tj. výrazy v hranaté závorce. Získáváme tak rekurentní relaci pro koeficienty c_l naší řady:

$$c_{l+2} = \frac{(2l+1-\lambda)}{(l+1)(l+2)} c_l. \quad (286)$$

Budeme-li znát koeficienty c_0 a c_1 , budeme znát celé řešení, protože z rekurentní relace můžeme spočítat

$$\begin{aligned} c_0 &\Rightarrow c_2, c_4, c_6, \dots \\ c_1 &\Rightarrow c_3, c_5, c_7, \dots \end{aligned}$$

Koeficienty c_0 a c_1 tak hrají roli dvou integračních konstant řešení diferenciální rovnice (285) druhého řádu. Sudá část řady se počítá z c_0 a lichá z c_1 .

4. oříznutí řady

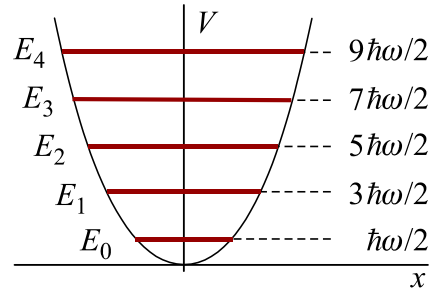
Nalezené řešení je ve tvaru nekonečné mocninné řady. Řeší sice původní rovnici, ale není z prostoru \mathcal{L}^2 . Aby bylo řešení z \mathcal{L}^2 (integrovatelné s kvadrátem), musí být řada konečná, tedy polynomiální. Prakticky to znamená, že koeficienty řady musí být od určitého $l = n$ nulové. V rekurentní relaci (286) bude čitatel pro toto $l = n$ nulový a veškeré odvozené koeficienty c_l s $l \geq n$ nulové. Vidíme, že nebude možné takto „oříznout“ současně sudé i liché členy řady.

Proto jsou možná jen sudá ($c_0 \neq 0, c_1 = 0$) nebo jen lichá řešení ($c_0 = 0, c_1 \neq 0$) představující sudý nebo lichý polynom stupně n . Podmínka oříznutí (nulovost čitatele) v (286) je $2n + 1 - \lambda = 0$ a plyne z ní po vyjádření λ spektrum energie harmonického oscilátoru:

$$\blacktriangleright \quad E_n = (n + 1/2) \hbar \omega. \quad (287)$$

Poznámky:

- 1) Nezapomínejte, že energie E (vlastní hodnota operátoru \hat{H}) je po celou dobu výpočtu schována v bezrozměrné konstantě (vlastním číslu) λ .



- 2) Sama Schrödingerova rovnice má řešení pro každou hodnotu energie. Tato řešení ale nejsou integrovatelná s kvadrátem, až výběr integrovatelných funkcí (oříznutí řady) vede k diskrétnímu spektru operátoru energie (jen pro některé vybrané hodnoty energie ubývá řešení v $\pm\infty$ dostatečně rychle, aby bylo integrovatelné s kvadrátem). Tato situace je typická pro spojitě průběhy potenciální energie s minimem.
- 3) Základní hladina energie $E_0 = \hbar\omega/2$ je nenulová! Ani při nulové absolutní teplotě není harmonický oscilátor v klidu a vykonává tzv. nulové kmity (například oscilace krystalové mříže). Při absolutní nule se hmota nachází ve stavu s nejnižší možnou energií, nikoli však v klidu.
- 4) Spektrum operátoru energie je ekvidistantní, rozdíl dvou libovolných sousedních energetických hladin je $\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$: To je právě známý Planckův vztah z počátku století. Energie jakýchkoli kmitů se nemůže měnit spojitě, ale po skocích (energetických kvantech)

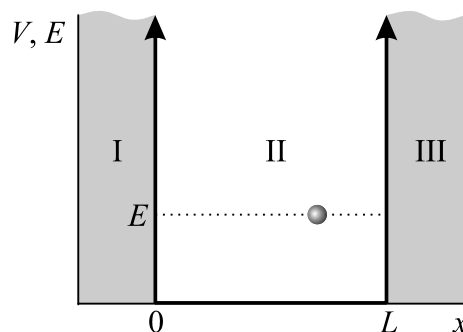
$$\Delta E = \hbar\omega. \quad (288)$$

Nekonečná jáma

Předpokládejme pohyb částice v potenciálu nekonečné pravoúhlé jámy

$$\blacktriangleright \quad V(x) = \begin{cases} 0; & x \in (0, L), \\ \infty; & x \notin (0, L). \end{cases} \quad (289)$$

Jde samozřejmě o fyzikální idealizaci, kterou ve skutečné přírodě nenajdeme. Potenciál rozdělíme na tři oblasti podle obrázku:



V oblastech I a III je potenciál nekonečný a jediným možným řešením bezčasové Schrödingerovy rovnice je $\psi = 0$. Z fyzikálního hlediska to znamená, že pravděpodobnost výskytu částice mimo jámu je nulová. Kdyby byla jáma konečná (tj. konečný potenciál vně jámy), byla by vlnová funkce ψ v těsné blízkosti hranice jámy nenulová. Částice by měla sice malou, ale nenulovou pravděpodobnost existence i za hranicí jámy. V oblasti II má Schrödingerova rovnice (276) tvar

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi, \quad (290)$$

který lze upravit na standardní rovnici kmitů v proměnné x

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0; \quad k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (291)$$

jejíž řešení je

$$\psi = A \cos kx + B \sin kx. \quad (292)$$

Vlnová funkce musí být spojitá na obou hranicích jámy, jinak by první derivace vlnové funkce byla derivací skoku, tj. distribucí, a druhá derivace by se dokonce chovala jako derivace distribuce, což odporuje původní rovnici (290). Proto musí platit okrajové podmínky $\psi(0) = 0$, $\psi(L) = 0$, ze kterých plyne

$$A = 0; \quad k = n \frac{\pi}{L}; \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (293)$$

Kvantování je právě důsledkem aplikace okrajové podmínky. Hodnota k , ve které je podle vztahu (291) „zakuklena“ energie, nemůže nabývat libovolných hodnot. Podmínka (293) tedy není nic jiného než kvantovací podmínka pro energii:

$$\blacktriangleright \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2; \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (294)$$

Základní hladina energie je, podobně jako u harmonického oscilátoru, nenulová. Důvodem jsou opět Heisenbergovy relace neurčitosti – částice pohybující se v jámě je lokalizována v konečné oblasti a nemůže proto mít nulovou hybnost nebo energii. Pro $n = 0$ by bylo řešení nulové, tedy ve sporu s tím, že v jámě je přítomna částice. Na rozdíl od harmonického oscilátoru není spektrum energie ekvidistantní a s rostoucím číslem n rozdíl dvou sousedních hladin energie roste.

Příklad: Elektron v polovodiči se nachází v elektrickém poli, jehož potenciál má tvar vysoké jámy o šířce 1 nm. Určete první tři hladiny energie. Poté řešte pro jámu s šířkou 1 mm. Naleznete energetický rozdíl mezi třetí a druhou energetickou hladinou.

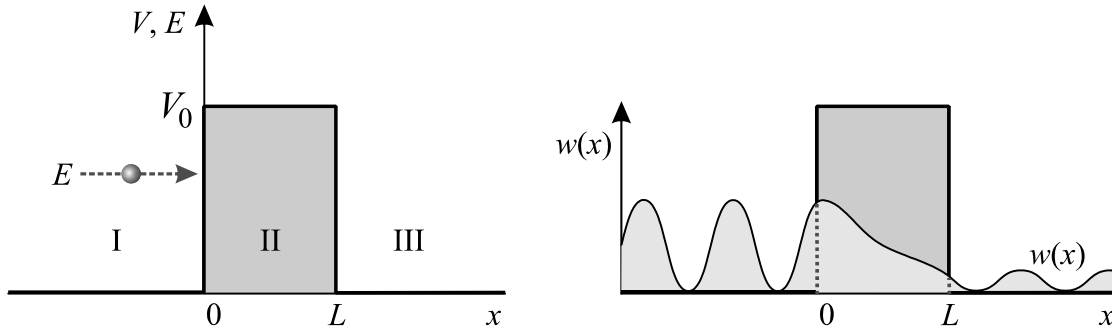
Řešení: Hodnoty určíme ze vztahu (294):

šířka	E_1	E_2	E_3	ΔE_{23}
1 nm	$6 \times 10^{-20} \text{ J} = 0,38 \text{ eV}$	1,5 eV	3,4 eV	1,9 eV
1 mm	$6 \times 10^{-32} \text{ J} = 0,38 \text{ peV}$	1,5 peV	3,4 peV	1,9 peV

Pro jámu o šířce 1 nm je kvantování podstatné a hodnoty energetických hladin jsou srovnatelné s energií elektronu v atomárním obalu. Pro jámu širokou 1 mm jsou energie o mnoho řádů nižší a rozdíly mezi energetickými hladinami běžnými prostředky nepozorovatelné.

Bariéra, tunelový jev

Předpokládejme, že částice o hmotnosti m a energii E dopadá zleva na potenciálovou bariéru o výšce V_0 . Energie částice je menší než výška potenciálové bariéry, takže by částice v klasickém případě bariérou nemohla prolétnout, protože nemá dosti velkou energii na to, aby se „přehoupla“ přes bariéru. V kvantové mechanice to možné je.



Průběh potenciálu má jednoduchý tvar

$$\blacktriangleright \quad V(x) = \begin{cases} V_0; & x \in (0, L), \\ 0; & x \notin (0, L). \end{cases} \quad (295)$$

Řešení Schrödingerovy rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi \quad (296)$$

rozdělíme do tří oblastí, ve kterých má potenciál jednu konkrétní konstantní hodnotu. Na bariéře se pro letící částici již řešení nerozdělí na sadu sudých a lichých řešení (tak jak tomu bylo v symetrické jámě), a tak ztrácí smysl psát řešení jako superpozici lichého sinu a sudého kosinu a udržovat počátek souřadnic uprostřed bariéry. Namísto toho využijeme superpozici kmitavých exponenciálních funkcí, se kterými se v obecném případě lépe zachází (například je jednodušší jejich derivace). Řešení Schrödingerovy rovnice v jednotlivých oblastech bude mít tvar:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{I}}(x) &= A_{\text{I}} e^{ikx} + B_{\text{I}} e^{-ikx}; & x \in \text{I}, & \quad \hbar^2 \equiv \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}; \\ \psi_{\text{II}}(x) &= A_{\text{II}} e^{hx} + B_{\text{II}} e^{-hx}; & x \in \text{II}, & \\ \psi_{\text{III}}(x) &= A_{\text{III}} e^{ikx} + B_{\text{III}} e^{-ikx}; & x \in \text{III}, & \quad k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}. \end{aligned} \quad (297)$$

Vzhledem k pravděpodobnostnímu charakteru kvantové mechaniky musíme pokus mnohokrát opakovat, což znamená, že máme připraveno velké množství částic ve stejném stavu (se stejnou energií a hybností), které opakovaně posíláme zleva na bariéru. Vlnová funkce $\psi(x)$ má význam amplitudy pravděpodobnosti výskytu částic a její kvadrát $w(x) = \psi^* \psi$ má význam hustoty pravděpodobnosti výskytu částic. V klasické teorii vlnění (mají rovinné vlny šířící se ve směru (+) a proti směru (-) osy x tvar

$$\begin{aligned} \varphi_+(t, x) &= A e^{i[kx - \omega t]}; \\ \varphi_-(t, x) &= A e^{i[-kx - \omega t]}. \end{aligned} \quad (298)$$

Odsud snadno nahlédneme, že řešení v oblastech I a III je superpozicí vln šířících se doprava a doleva. Vzhledem k tomu, že zprava na bariéru žádné částice nepřicházejí, musí platit

$$B_{\text{III}} = 0. \quad (299)$$

V levé části (před bariérou) superpozice zůstane. Vlna šířící se doprava koresponduje s částicemi, které posíláme na bariéru, vlna šířící se doleva je způsobena částicemi odraženými od bariéry. Podmínky spojitosti vlnové funkce a její první derivace na levé a pravé straně bariéry vedou na rovnice

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}}(0) &= \psi_{\text{II}}(0); & \psi'_{\text{I}}(0) &= \psi'_{\text{II}}(0); \\ \psi_{\text{II}}(L) &= \psi_{\text{III}}(L); & \psi'_{\text{II}}(L) &= \psi'_{\text{III}}(L).\end{aligned}\quad (300)$$

Po dosažení dostaneme vztahy mezi konstantami A , B :

$$\begin{aligned}A_{\text{I}} + B_{\text{I}} &= A_{\text{II}} + B_{\text{II}}; \\ A_{\text{II}} e^{hL} + B_{\text{II}} e^{-hL} &= A_{\text{III}} e^{ikL}; \\ ikA_{\text{I}} - ikB_{\text{I}} &= hA_{\text{II}} - hB_{\text{II}}; \\ A_{\text{II}} h e^{hL} - B_{\text{II}} h e^{-hL} &= ikA_{\text{III}} e^{ikL}.\end{aligned}\quad (301)$$

Vzhledem k tomu, že máme 4 podmínky pro pět konstant, je vše v pořádku a jedna konstanta zůstává volná pro normování nalezené vlnové funkce. Jinou možností je vzít nenormovanou vlnovou funkci a amplitudu dopadajících vln volit rovnou

$$A_{\text{I}} = 1. \quad (302)$$

V tomto případě budeme mít mimořádně jednoduchý výpočet koeficientu propustnosti bariéry. Ten je definován jako podíl počtu prošlých částic ku podílu počtu dopadlých částic a vypočteme ho jako podíl hustot pravděpodobností prošlé a dopadající vlny:

$$\blacktriangleright \quad T = \frac{A_{\text{III}}^* A_{\text{III}}}{A_{\text{I}}^* A_{\text{I}}} = A_{\text{III}}^* A_{\text{III}}. \quad (303)$$

Obdobně můžeme zavést koeficient odrazu

$$\blacktriangleright \quad R = \frac{B_{\text{I}}^* B_{\text{I}}}{A_{\text{I}}^* A_{\text{I}}} = B_{\text{I}}^* B_{\text{I}}. \quad (304)$$

Soustavu (301) přepíšeme do maticové podoby, volba $A_{\text{I}} = 1$ dá vzniknout pravé straně soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ e^{hL} & 0 & e^{-hL} & -e^{ikL} \\ h & ik & -h & 0 \\ h e^{hL} & 0 & -h e^{-hL} & -ik e^{ikL} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{\text{II}} \\ B_{\text{I}} \\ B_{\text{II}} \\ A_{\text{III}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ik \\ 0 \end{pmatrix} \quad (305)$$

Vzhledem k tomu, že chceme určit koeficienty propustnosti bariéry, stačí určit jen konstantu A_{III} a ostatní eliminovat. Matici můžeme převést na trojúhelníkovou matici nebo použít metodu subdeterminantů, metodu inverzní matice atd. Výpočet je již přímočarý. Výsledek je:

$$\blacktriangleright \quad T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2 \operatorname{sh}^2(hL)}{4E(V_0 - E)}}. \quad (306)$$

Koeficient odrazivosti R můžeme snadno určit ze zákona zachování počtu částic:

$$\blacktriangleright \quad R + T = 1. \quad (307)$$

Kvantová teorie připouští průchod částice bariérou i v případě, že částice má nižší energii, než je hodnota potenciálu na vrcholu bariéry. Je to dáno nekomutativností potenciální a kinetické energie. Z Heisenbergových relací neurčitosti potom plyne, že obě hodnoty nemůžeme současně přesně měřit. Neurčitost kinetické a potenciální energie umožní tu a tam průchod částice bariérou. Tomuto jevu říkáme tunelový jev. Pravděpodobnost jevu exponenciálně klesá s tloušťkou bariéry. Typickým příkladem mohou být dvě oblasti kovu oddělené tenkým izolantem, přes který mohou tunelovat elektrony. Dalším příkladem jsou alfa částice tunelující z atomového jádra přes Coulombovu bariéru při radioaktivním alfa rozpadu. Na tunelovém jevu jsou založeny tunelová dioda, rastrovací tunelový mikroskop a další zařízení.

Kvantová čísla

V mikrosvětě některé veličiny nejsou spojité a nabývají jen určitých hodnot. Tomuto jevu říkáme kvantování. Jednotlivé hodnoty kvantovaných dynamických proměnných označujeme čísly, kterým říkáme *kvantová čísla*. V této poslední kapitole se budeme okrajově zabývat situací, v níž je potenciální energie sféricky symetrická, tj. $V = V(r)$. Výpočty vedou na složité parciální diferenciální rovnice, jejichž řešení je za hranicemi možností tohoto kurzu. Proto v této poslední kapitole budeme některá tvrzení uvádět bez odvození – berte ji jen jako lehký úvod do problematiky. Pokud někoho kvantová teorie zajímá více, může si pustit přednášky a stáhnout studijní materiály k tomuto tématu na serveru aldebaran.cz. Sféricky symetrický je například vodíkový atom s potenciálem $V(r) = a/r$, sférický oscilátor s potenciálem $V(r) = ar^2$ nebo sférická potenciálová jáma.

Ve sféricky symetrické situaci lze současně měřit jednu z komponent momentu hybnosti, velikost momentu hybnosti a energii. Základem popisu jsou tedy tři kvantová čísla popisující kvantování těchto tří veličin. K orbitálnímu momentu hybnosti se v mikrosvětě přidává spin, takže se základní trojice veličin rozroste o projekci a velikost spinu popisovaného objektu.

Projekce momentu hybnosti

Nenulový moment hybnosti u objektu mikrosvěta nemusí znamenat, že objekt kolem něčeho obíhá, například elektron kolem jádra atomu. Stále platí pravděpodobnostní charakter výskytu částice, který lze opakovanými měřeními ověřit experimentálně. Nenulový moment hybnosti samozřejmě přispívá k celkové energii objektu. Při měření vždy určujeme jen jednu z komponent momentu hybnosti, tedy projekci momentu hybnosti do určitého směru. Tato projekce je kvantovaná a čísluje ji tzv. *magnetické kvantové číslo*. Název je historický a vzniklo proto, že kvantování momentu hybnosti vede také ke kvantování magnetického momentu objektu. Jedno číslo tedy čísluje kvantování dvou fyzikálních veličin. Označme moment hybnosti objektu \mathbf{L} . Tak to bývá zvykem v kvantové teorii, na rozdíl od mechaniky, kde jsme používali symbol \mathbf{b} . Složky momentu hybnosti L_1 , L_2 a L_3 nejsou současně měřitelné, takže můžeme změřit jen jednu z nich. Většinou volíme ve směru měření třetí osu, takže měříme hodnotu L_3 . Jde po zobecněnou hybnost k polárnímu úhlu φ měřenému v rovině (xy) . Už víme, že operátor hybnosti má tvar

$$\hat{\mathbf{p}}_k = -i\hbar\partial/\partial x_k. \quad (308)$$

U momentu hybnosti nahradí kartézskou souřadnici úhlová proměnná, takže operátor projekce momentu hybnosti do třetí osy bude mít tvar

$$\hat{L}_3 = -i\hbar\partial/\partial\varphi. \quad (309)$$

Naším úkolem bude tedy řešit rovnici pro vlastní čísla tohoto operátoru

$$\hat{L}_3|\psi\rangle = L_3|\psi\rangle. \quad (310)$$

Vlastní číslo L_3 bude měřitelnou hodnotou projekce momentu hybnosti. Úlohu budeme řešit na prostoru funkcí integrovatelných s kvadrátem:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = L_3 \psi. \quad (311)$$

Sféricky symetrický problém je vhodné řešit ve sférických souřadnicích r, φ, θ . Po separaci proměnných nám v poslední rovnici zůstane jen závislost na polárním úhlu a parciální derivace přejde v obyčejnou derivaci:

$$-i\hbar \frac{d\psi(\varphi)}{d\varphi} = L_3 \psi(\varphi). \quad (312)$$

Jde o obyčejnou lineární rovnici prvního řádu, která vede na exponenciální řešení

$$\psi(\varphi) = \psi_0 \exp\left[i \frac{L_3}{\hbar} \varphi\right] \quad (313)$$

Úhel φ je azimut měřený v rovině (xy) , který se vždy po 2π bude opakovat, tedy musí platit

$$\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi) \quad (314)$$

Po dosazení podmínky do řešení (313) máme

$$\begin{aligned} \exp\left[i \frac{L_3}{\hbar} (\varphi + 2\pi)\right] &= \exp\left[i \frac{L_3}{\hbar} \varphi\right] \Rightarrow \\ \exp\left[i \frac{L_3}{\hbar} 2\pi\right] &= 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{L_3}{\hbar} 2\pi = m 2\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Získanou kvantovací podmínku snadno upravíme do finálního tvaru

$$\blacktriangleright \quad L_3 = m\hbar; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (315)$$

Projekce momentu hybnosti tedy může nabývat jen násobky redukované Planckovy konstanty. To je skutečný význam Planckovy konstanty, nejde o nic jiného než o hodnotu základního kvanta momentu hybnosti. Toto kvantum je velmi malé, takže v makrosvětě nám přechody mezi jednotlivými rotačními stavy připadají spojité. Číslo m čísluje projekci momentu hybnosti do libovolné osy. Vzhledem k tomu, že nabitá rotující částice má nenulový magnetický moment, a toto číslo bylo poprvé zavedeno pro elektron v atomárním obalu vodíku, nazývá se *magnetické kvantové číslo*.

Kvantování momentu hybnosti vlastně objevil už Niels Bohr se svou představou vodíkového atomu, v němž je elektron rozprostřený po obvodu klasické dráhy částice a na obvod této dráhy se musí „namotat“ celistvý počet vlnových délek (viz strana 71)

$$2\pi r_n = m \lambda \quad (316)$$

Tato Bohrova kvantovací podmínka spolu s Broglieho vztahem pro dualitu (257) dává (hmotnost částice jsme označili M , aby symbol nekolidoval s kvantovým číslem m)

$$2\pi r_n = n \frac{2\pi \hbar}{M v_n}$$

dává

$$M v_n r_n = m \hbar \quad (317)$$

Nalevo je moment hybnosti klasické částice a napravo celistvý násobek redukované Planckovy konstanty. Bohrova kvantovací podmínka tedy není ničím jiným, než kvantováním projekce momentu hybnosti dle vztahu (315).

Zajímavá je souvislost s kvantováním magnetického momentu. Uvažujme pro určitost elektron, jehož magnetický moment je dán vztahem (viz Fyzika 1)

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} e \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (318)$$

Výraz připomíná moment hybnosti a lze ho skutečně za pomoci této veličiny přepsat:

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} e \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{e}{2m_e} m_e \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{L}. \quad (319)$$

Stejně jako u momentu hybnosti, měříme u magnetického momentu jen určitou projekci, například třetí:

$$p_{m,3} = \frac{e}{2m_e} L_3 = \frac{e}{2m_e} m \hbar = m \frac{e\hbar}{2m_e}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (320)$$

Vztah lze jednodušeji zapsat za pomoci tzv. Bohrova magnetonu (základního kvanta magnetického momentu) μ_B :

$$\blacktriangleright \quad p_{m,3} = m \mu_B; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (321)$$

$$\blacktriangleright \quad \mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m_e}. \quad (322)$$

Vidíme tedy, že kvantování momentu hybnosti a kvantování magnetického momentu je pro elektron jeden a ten samý jev.

Velikost momentu hybnosti

Projekce momentu hybnosti tedy může být celočíselným násobkem redukované Planckovy konstanty. Pokud chceme znát velikost momentu hybnosti, musíme z mnoha opakovaných měření projekcí momentu hybnosti do jednotlivých os sestavit nejprve druhou mocninu velikosti momentu hybnosti:

$$\langle L^2 \rangle = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle \quad (323)$$

Samotná velikost momentu hybnosti je potom odmocninou z tohoto výrazu a je také kvantovaná. Uveďme tuto kvantovací podmínku bez odvození:

$$\blacktriangleright \quad |\mathbf{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar; \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (324)$$

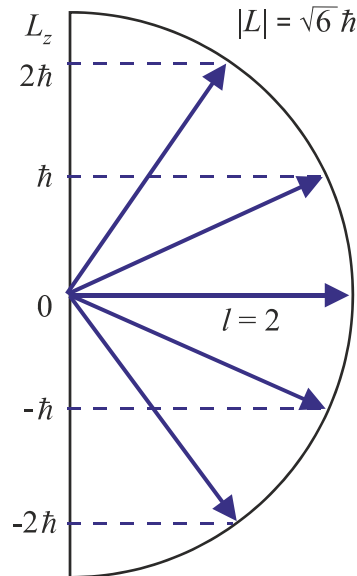
Nepřekvapí nás, že rozměr velikosti momentu hybnosti je opět roven rozměru Planckovy konstanty (základního kvanta momentu hybnosti) a že i velikost momentu hybnosti je určitým násobkem redukované Planckovy konstanty. Číslo l popisující kvantování velikosti momentu hybnosti se nazývá vedlejší kvantové číslo. Historicky byly označovány kvantové stavy velikosti momentu hybnosti elektronu v obalu atomu vodíku písmeny s, p, d, f podle následující tabulky:

$l = 0$	s stav	$m = 0$
$l = 1$	p stav	$m = -1, 0, +1$
$l = 2$	d stav	$m = -2, -1, 0, +1, +2$
$l = 3$	f stav	$m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$

Představme si, že máme objekt mikrosvěta s určitou velikostí momentu hybnosti. Je jasné, že projekce momentu hybnosti už nemůže být libovolná, například nemůže být větší než je velikost momentu hybnosti. Při fixním vedlejší kvantovém čísle l mohou magnetická kvantová čísla nabývat pouze hodnot uvedených v tabulce. Obecně platí

$$\blacktriangleright \quad m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l. \quad (325)$$

Ke každému číslu l tedy existuje $2l + 1$ různých projekcí momentu hybnosti číslovaných číslem m . Na následujícím obrázku je znázorněna situace pro velikost momentu s vedlejším kvantovým číslem $l = 2$:



Pojďme si nyní pro vedlejší kvantové číslo $l = 2$ ověřit platnost na první pohled „podivného“ vztahu (324) pro velikost momentu hybnosti. Výpočet provedeme prostým středováním všech možností:

$$\begin{aligned} |\mathbf{L}| &= \sqrt{\langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle} = \sqrt{3 \langle L_z^2 \rangle} = \\ &= \sqrt{3 \frac{(-2\hbar)^2 + (-\hbar)^2 + (0)^2 + (\hbar)^2 + (2\hbar)^2}{5}} = \sqrt{6} \hbar. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že vztah (324) pro $l = 2$ platí. Podobně bychom ho mohli ověřit pro jakékoli l .

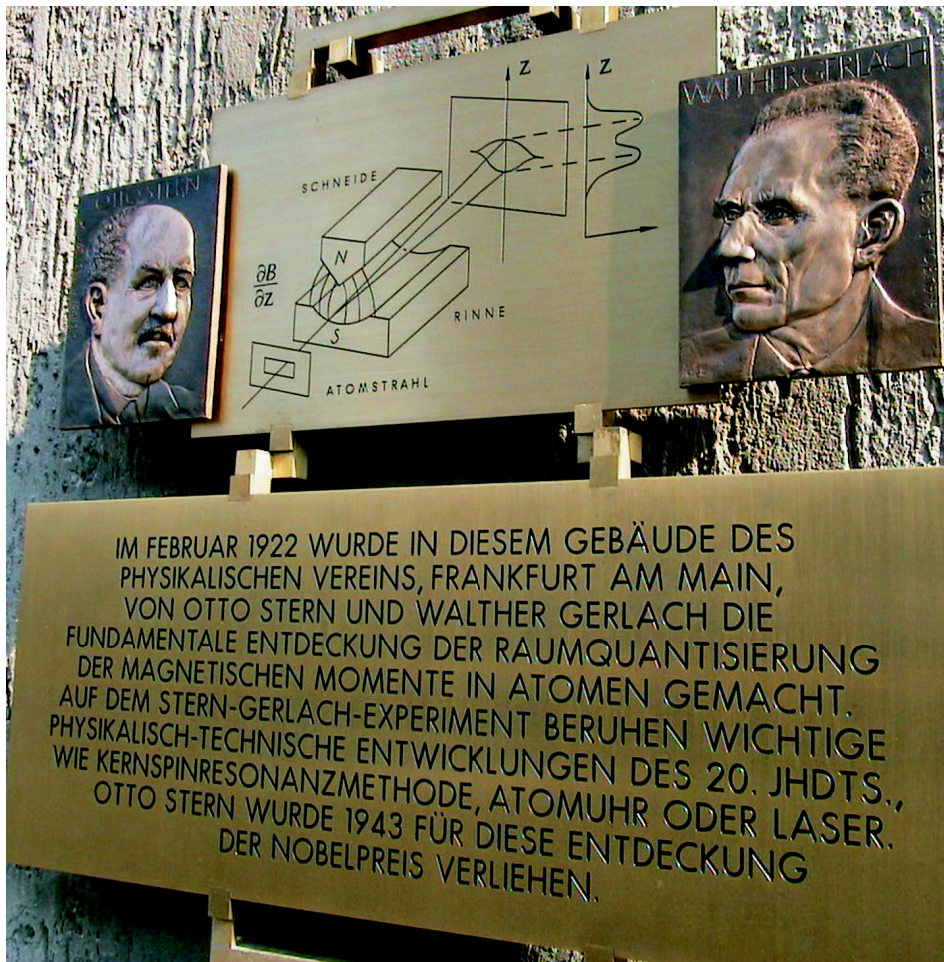
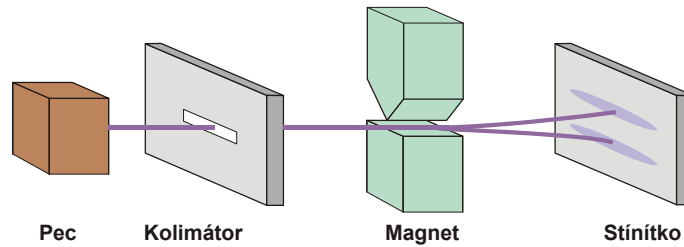
Spin

Spin má velmi podobné vlastnosti jako moment hybnosti, lze si ho však jen velmi těžko představit. Značně nepřesné, ale přesto ilustrativní, je představit si částici obíhající kolem centra a současně rotující kolem vlastní osy. V této klasické představě odpovídá momentu hybnosti orbitální rotace a spinu vlastní rotace. Skutečné částice ani neobíhají kolem centra, ani nerotují kolem vlastní osy. Jejich celkový rotační stav je dán dvěma veličinami – momentem hybnosti (orbitálním momentem) a spinem (vnitřním momentem). Orbitální moment hybnosti souvisí se symetrií vzhledem k otočení přístroje v nějaké rovině, například (xy) . Spin souvisí s Lorentzovou symetrií, tedy odstěhováním přístroje z jedné inerciální soustavy do jiné, pohybující se například ve směru osy x . Už víme, že taková transformace je matematicky ekvivalentní rotaci v rovině (tx) o úhel, který nazýváme rapiditou. Obě veličiny se mohou skládat, potom hovoříme o spinorbitální interakci, neboli LS interakci či LS vazbě.

Stejně tak jako u momentu hybnosti zavádíme dvě kvantová čísla popisující spin: spinové číslo neboli spin s určující velikost a magnetické spinové číslo m_s určující projekci spinu do třetí osy. I vztahy pro tato čísla jsou obdobné jako u momentu hybnosti s tím rozdílem, že spin může nabývat i poločíselných hodnot:

$$\begin{aligned} |S| &= \sqrt{s(s+1)} \hbar, & s &= 0, 1/2, 1, 3/2, \dots; \\ S_3 &= m_s \hbar, & m_s &= -s, -s+1, \dots, s. \end{aligned} \quad (326)$$

Částice s nenulovým spinem vykazují magnetický moment, aniž by měly orbitální moment hybnosti. Magnetické vlastnosti částic proto nemusí souviset jen se skutečným rotačním pohybem částic, ale i s „vlastním momentem“ – spinem. V přítomnosti nehomogenního magnetického pole reagují částice na toto pole. Stavů, které původně odpovídaly jediné energii, se štěpí na multiplety blízkých energetických podhladin.



Pamětní plaketa u vstupu do Fyzikálního ústavu Frankfurtské univerzity, kde byl v roce 1922 uskutečněn Sternův-Gerlachův experiment. Po rekonstrukci budovy dokončené v roce 2020 tato plaketa zmizela.

Třeba ji někdy vrátí zpět. Foto: Horst Schmidt-Böcking.

Spin byl poprvé pozorován v experimentu, který v roce 1922 uskutečnili Otto Stern a Walter Gerlach ve Frankfurtu nad Mohanem. Atomy stříbra odpařující se z píčky byly kolimovány do svazku procházejícího nehomogenním magnetickým polem. Na tyto elementární magnetické momenty v nehomogenním poli působí nenulová síla. Magnetický moment jednotlivých stavů je různý a proto je různá i výsledná působící síla a energie daného stavu. Kdyby neexistoval spin, nebude se stav $l=0$ štěpit vůbec ($m=0$), stav $l=1$ se bude štěpit na tři různé podstavy ($m=0, \pm 1$) a na stínítku se vytvoří jedna nebo tři stříbrné skvrny (i ve vyšších stavech l půjde vždy o lichý počet skvrn). Na stínítku však byly pozorovány dvě stříbrné skvrny, což svědčí o elektronu s orbitálním stavem $l=0$ a spinovým stavem $s=1/2$ (magne-

tické vlastnosti jsou určeny *dvěma* projekcemi $m_s = \pm 1/2$). Hypotézu o existenci vlastního momentu elektronu, který má podobné vlastnosti jako orbitální moment, podali ještě před teoretickým objasněním spinu Uhlenbeck a Goudsmit v roce 1925. Elektrony, neutrina a kvarky mají spin $1/2$. Polní částice, jako jsou fotony a další mají spin rovný 1.

Energie

Kvantování energie popisujeme tzv. hlavním kvantovým číslem n . Energetický předpis je závislý na konkrétním průběhu potenciální energie a je jiný pro vodíkový atom, jiný pro sférický oscilátor a jiný pro sférickou potenciálovou jámu. Uvedme bez odvození vztah pro vodíkový atom, který plyne z řešené Schrödingerovy rovnice pro Coulombův potenciál elektronu v poli protonu tvořícího jádro vodíku:

$$V(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = -\frac{\alpha}{r} \quad \Rightarrow \quad E_n = -\frac{\alpha^2 m_e}{2\hbar^2 n^2}. \quad (327)$$

Stejný vztah vyplynul z Bohrova modelu atomu. Bohrov postup ale není použitelný pro jakýkoli jiný atom, zatímco Schrödingerova rovnice řeší problematiku zcela obecně. Energie v sobě zahrnuje jak energii Coulombovy vazby, tak energii spojenou s nenulovým momentem hybnosti, proto při daném hlavním kvantovém čísle n nemůže být už vedlejší kvantové číslo l jakékoli. Napišme na závěr všechny tři kvantovací vztahy pro vodík i s vazbami jednotlivých kvantových čísel mezi sebou:

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{\alpha^2 m_e}{2\hbar^2 n^2}; & n &= 0, 1, 2, \dots \\ |\mathbf{L}| &= \sqrt{l(l+1)} \hbar; & l &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ L_3 &= m\hbar; & m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \end{aligned} \quad (328)$$

Magická čísla

Při dané energetické hladině n může existovat $n - 1$ vedlejších kvantových čísel l . Ke každému z nich je ještě $2l + 1$ magnetických kvantových čísel. Částice s polocíselným spinem, jako jsou elektrony, mohou obsazovat kvantové stavy maximálně po jednom jedinci. Tomuto faktu se říká *Pauliho vylučovací princip*: Dva elektrony se nemohou nacházet ve stejném kvantovém stavu. Kolik elektronů se tedy může nacházet v jedné energetické hladině, tj. na jedné energetické slupce? Je to jednoduché – počet magnetických čísel $2l + 1$ sečteme pro všechna vedlejší kvantová čísla:

$$N_e = \sum_{l=0}^{n-1} 2l + 1. \quad (329)$$

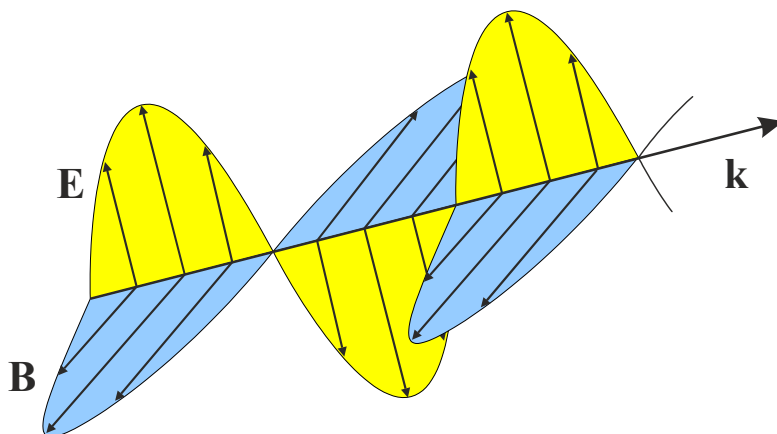
Jde o aritmetickou řadu, jejíž součet je roven aritmetickému průměru prvního a posledního členu vynásobenému počtem členů:

$$N_e = \frac{a_0 + a_{n-1}}{2} n = \frac{1 + 2(n-1) + 1}{2} n = n^2.$$

Náš výsledek ale není správně. Každý elektron může mít dvě projekce spinu $\pm 1/2$, skutečných stavů je tedy dvojnásobek, v každém ze stavů mohou být dva elektrony lišící se projekcí spinu. Správný výsledek je tedy dvojnásobný

$$\blacktriangleright \quad N_e = 2n^2. \quad (330)$$

Počty elektronů obsazujících jednotlivé hladiny ve vodíku tedy jsou: 2, 8, 18, 32... Těmto číslům se v době, kdy nebyl znám důvod, proč v daném energetickém stavu je tolik a tolik elektronů, říkalo *magická čísla*.



Petr Kulhánek
Fyzika II



Každá část této publikace může být šířena jakýmkoli způsobem.
Cílem není restrikce, ale vzdělávání co nejširšího okruhu čtenářů.

Autor: prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.

Odborná recenze: průběžná, studenti kurzu

Formát: elektronické skriptum, pdf, A4, 96 stran

Nakladatelství: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)

Sazba: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)

Ikona videa: freepik.com CC BY 3.0

Vydání: první, 2021

