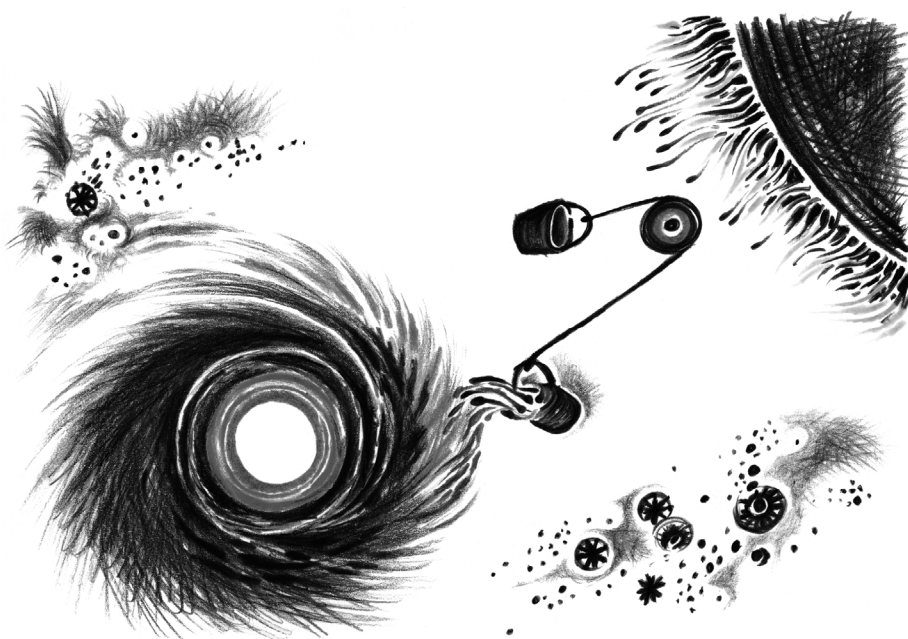


F4

SÍLA, PRÁCE, ENERGIE A HYBNOST



Evropský sociální fond Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti



F4 SÍLA, PRÁCE, ENERGIE A HYBNOST

Prvními velmi důležitými pojmy jsou mechanická práce a potenciální energie. Pojďme si nyní tyto pojmy zavést, nejde o nic složitého.

Mechanická práce

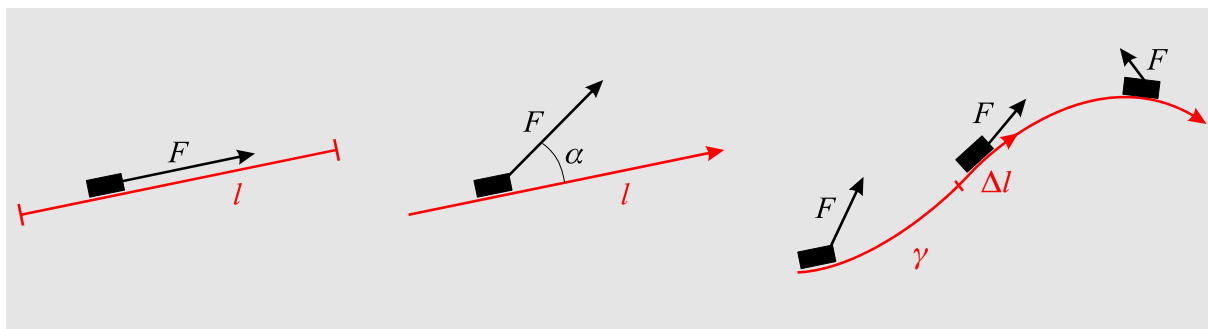
Na základní škole jste mechanickou práci chápali jako součin síly působící na těleso a uražené dráhy:

$$A = Fl; \quad [A] = \text{J} = \text{Nm} \quad (4.1)$$

Takto jednoduchý vztah platí, pokud je síla konstantní a míří ve směru pohybu tělesa. Mechanickou práci měříme v joulech, jde o součin newtonu a metru. Na střední škole jste již připustili, že síla nemusí mířit ve směru pohybu tělesa, výsledný vztah vypadal takto:

$$A = Fl \cos \alpha. \quad (4.2)$$

Síla je opět konstantní, ale směr jejího působení svírá se směrem pohybu úhel α . Pokud je úhel nulový, získáme předchozí vztah, pokud je 90° , tedy síla působí kolmo na dráhu, práce se nekoná.



Pokud budeme sílu a dráhu chápat jako vektory, je výraz (4.2) součinem velikosti jednoho vektoru, velikosti druhého vektoru a kosinem sevřeného úhlu, tedy nejde o nic jiného než o skalární součin:

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l} = F_x l_x + F_y l_y + F_z l_z. \quad (4.3)$$

Uvažujme nyní nejobecnější příklad, kdy se těleso pohybuje po obecné křivce a síla mění jak svůj směr, tak svou velikost. Na malém úseku dráhy, který je možný považovat za rovný, se vykoná mechanická práce

$$\Delta A \doteq F \Delta l \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z. \quad (4.4)$$

Takový vztah je samozřejmě jen přibližný. Přesný bude, pokud element zvolené dráhy bude infinitezimálně malý, tedy

$$dA \doteq F dl \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4.5)$$

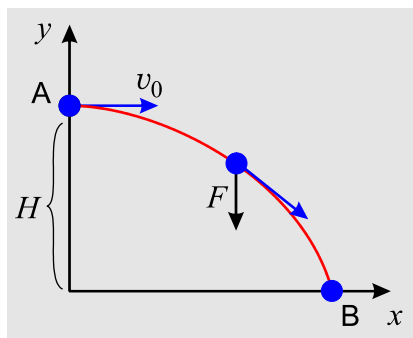
Celkovou vykonanou mechanickou práci získáme integrací podél celé křivky γ :

$$A = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4.6)$$

Takový integrál se v matematice nazývá křivkový integrál druhého druhu. Nelekejte se, že obsahuje tři diferenciály. Výpočet není nijak složitý, pokud máte křivku zadánu parametricky. V mechanice může být parametrem například čas. Ukažme si výpočet na jednoduchém, příkladu vodorovného vrhu (postupně se na tomto příkladu učíme všechny nové věci, takže si pravděpodobně rovnice pro vodorovný vrh už pamatujete:

$$\begin{aligned}x &= v_0 t, \\ y &= H - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Tyto rovnice jsou parametrickým zadáním paraboly, po které se těleso pohybuje. Jde o naši křivku γ , na které budeme počítat mechanickou práci.



Povšimněte si, že úhel mezi působící silou (tíží) a směrem pohybu se místo od místa mění. Diferenciály křivky potřebné do integrace (4.6) snadno získáme ze vztahu (4.7):

$$d\mathbf{l} = (dx, dy) = (v_0 dt, -gt dt) \quad (4.8)$$

Působící silou je tíže

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y) = (0, -mg) \quad (4.9)$$

Nyní již snadno sestavíme potřebný integrál pro výpočet mechanické práce vykonané mezi body A a B:

$$A = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy = \int_{t_A}^{t_B} 0 \cdot v_0 dt + (-mg)(-gt) dt = \int_{t_A}^{t_B} mg^2 t dt \quad (4.10)$$

V obecnějším případě by byl nenulový i první sčítanec a integrál by mohl obsahovat i příspěvek v ose z . Povšimněte si, že z původních tří diferenciálů zůstane po dosazení křivky jeden jediný, a to diferenciál času. Integrál se tak stane běžným určitým integrálem. Integrace je nyní snadná ($t_A = 0$)

$$A = \left[mg^2 t^2 / 2 \right]_0^{t_B} = mg^2 t_B^2 / 2 \quad (4.11)$$

Čas dopadu snadno zjistíme z rovnice (4.7), dosadíme-li $y = 0$:

$$t_B = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (4.12)$$

Pro vykonanou práci máme

$$A = mg^2 t_B^2 / 2 = mgH. \quad (4.13)$$

Zapamatujte si:

- Mechanická práce je integrálem $A = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz$.
- Integrál se počítá po křivce, po níž se pohybuje těleso. Křivku zadáme parametricky, vypočteme diferenciály dx , dy , dz , a tím převedeme integraci na standardní integrál s určitými mezemi.

Potenciální energie a síla

Mechanická práce se zpravidla koná na úkor potenciální energie tělesa, kterou proto můžeme definovat takto

$$dW_p \equiv -dA = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \quad (4.14)$$

Sama potenciální energie je funkcí polohy, a tak její diferenciál můžeme vyjádřit jako

$$dW_p \equiv \frac{\partial W_p}{\partial x} dx + \frac{\partial W_p}{\partial y} dy + \frac{\partial W_p}{\partial z} dz \quad (4.15)$$

Porovnáním obou posledních výrazů získáme důležitý vztah mezi silou a potenciální energií:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial W_p}{\partial x}, \\ F_y &= -\frac{\partial W_p}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial W_p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sílu získáme jako záporně vzaté parciální derivace potenciální energie. Tento zápis se často zkracuje, možností zápisu je několik:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial W_p}{\partial \mathbf{r}} = -\text{grad } W_p = -\nabla W_p. \quad (4.17)$$

Všechny zápisy jsou jen zkratkou původních tří rovnic (4.16). Operace ∇ se nazývá gradient, symbolu obráceného písmene delta říkáme „nabla“. Název zavedl skotský matematický fyzik Peter Guthrie Tait (1831–1901) podle trojúhelníkového tvaru asyrské harfy ze 7. století př. n. l. Asýrie byla v severní Mezopotámii. Slovo nabla (Nbl) je z aramejštiny, která ho upravila z hebrejského Nev(b)el. Stejný nástroj už ale znali Sumerové v období 3 100 př. n. l. James Clerk Maxwell razil pro tento operátor název „slope“ z anglického slova znamenajícího spád či sklon. Návrh Taita ale zvítězil.

Operace působí na skalární funkci a jejím výsledkem je vektor

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (4.18)$$

Takový vektor míří k maximu funkce f . Vztah (4.17) je tedy jen matematickým vyjádřením faktu, že síla vždy míří k minimu potenciální energie.

Poznámky:

- To, že síla míří do minima potenciální energie, nám umožní určit správné znaménko potenciální energie, pokud váháme. Například, je-li osa y orientována svisle vzhůru, z možných znamének potenciální energie $\pm mgy$ musíme vybrat znaménko $+$, jinak by síla působila směrem vzhůru.
- V okolí minima potenciální energie můžeme očekávat kmitavý pohyb, neboť síla vždy míří do minima, těleso setrvačností minimum prolétne a začne na něho působit vratná síla. Pokud má minimum parabolický průběh, hovoříme o harmonických oscilacích.
- Potenciální energie nemusí k danému silovému poli vždy existovat. Jinými slovy nemusí se nám podařit nalézt takovou funkci, aby síla byla jejím záporně vzatým gradientem. Silové pole, pro které existuje potenciální energie, nazýváme konzervativní silové pole (patří sem například tíže, gravitace, elektrostatické pole). Naopak tření není konzervativní silou.
- Pro konzervativní pole je integrál ze síly po určité křivce roven

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\gamma} -\nabla W_p \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\gamma} \left(\frac{\partial W_p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial W_p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial W_p}{\partial z} \cdot dz \right) = \\ &= -\int_A^B dW_p = W_p(A) - W_p(B).\end{aligned}\tag{4.19}$$

a je tedy závislý jen na jejím koncovém a počátečním bodě. Integrál po uzavřené křivce je nulový.

- Vždy je výhodnější si pamatovat jednu veličinu (potenciální energii) než všechny tři složky síly. Z potenciální energie je snadno můžeme zrekonstruovat jako záporně vzatý gradient potenciální energie.

Zapamatujte si:

- Konzervativním silovým polem nazýváme takové pole, pro které existuje potenciální energie a sílu lze vyjádřit jako záporně vzatý gradient potenciální energie.
- Síla míří vždy do minima potenciální energie, tj. $\mathbf{F} = -\nabla W_p$.
- V okolí minima potenciální energie vykonává soustava kmitavý pohyb.
- Mechanická práce v konzervativním poli závisí jen na koncovém a počátečním bodě, nikoli na tvaru křivky.

● Příklad 4.1

Zadání: Nalezněte sílu k potenciální tíhové potenciální energii dané předpisem $W_p = mgy$.

Řešení: Síla je minus gradientem, tedy

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p = \left(-\frac{\partial W_p}{\partial x}, -\frac{\partial W_p}{\partial y}, -\frac{\partial W_p}{\partial z} \right) = (0, -mg, 0).\tag{4.20}$$

Křivkové integrály

Představme si, že máme parametricky zadánu nějakou křivku γ :

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases}\tag{4.21}$$

Parametrem může být čas nebo nějaká jiná proměnná. Vektorovým elementem křivky nazveme její diferenciály

$$d\mathbf{l} = (dx, dy, dz) = \left(\frac{dx}{dt} dt, \frac{dy}{dt} dt, \frac{dz}{dt} dt \right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) dt. \quad (4.22)$$

Skalárním elementem nazveme výraz

$$dl = \sqrt{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (4.23)$$

Křivkovým integrálem prvního druhu potom nazveme integraci skalární funkce přes skalární element:

$$I_1 = \int_{\gamma} f dl. \quad (4.24)$$

Tento typ integrálu můžeme využít k výpočtu hmotnosti drátu (f je pak délkovou hustotou) nebo k výpočtu délky křivky ($f = 1$). Křivkovým integrálem druhého druhu nazveme integrál z vektorové funkce přes vektorový element:

$$I_2 = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.25)$$

Příkladem může být výpočet mechanické práce, který jsme se před chvílí naučili.

● Příklad 4.2

Zadání: Nalezněte obvod kružnice.

Řešení: Kružnici zadáme parametricky

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi; \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

Nyní nalezneme vektorový a skalární element:

$$d\mathbf{l} = (dx, dy) = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi) d\varphi;$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = R d\varphi.$$

Obvod kružnice spočteme jako křivkový integrál prvního druhu:

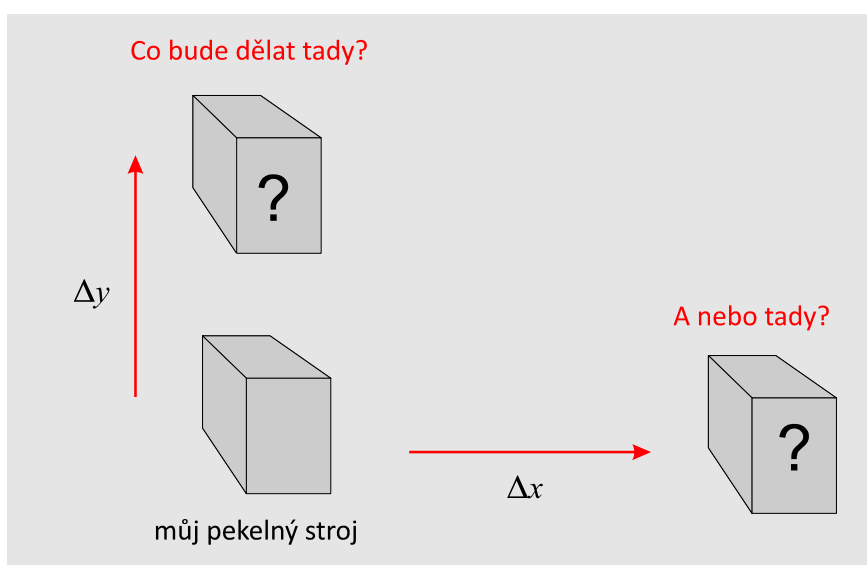
$$o = \int_0^{2\pi} dl = \int_0^{2\pi} R d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R.$$

Zapamatujte si:

- Pokud chceme počítat křivkové integrály, musíme mít křivku zadanou parametricky.
- Pro křivku najdeme vektorový element $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ a skalární element $dl = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$.
- Integrál prvního druhu je integrál ze skalární funkce a skalárního elementu.
- Integrál druhého druhu je integrál ze skalárního součinu vektorové funkce a vektorového elementu.

Zákon zachování hybnosti

V roce 1916 přišla německo-americká matematická Emmy Noether (1882–1935) na zcela novou myšlenku. Matematicky dokázala, že každá zachovávaná se veličina souvisí se symetriemi v přírodě. Zákon zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti jsou jen důsledky určitých symetrií. Jak si představit symetrii v přírodě? V matematice je to snadné. Pokud otočíme čtverec kolem kolmé osy o 90° , přejde sám v sebe. V přírodě nám jde o symetrie při konání experimentů. Představme si, že máme v nějaké skříňce sadu fyzikálních experimentů, které budou testovat různé situace. Budou tam kyvadélka zastupující gravitační interakci, lasery a zrcadla testující elektromagnetickou interakci, beta zářič testující slabou interakci a třeba miniaturní atomový reaktor testující jaderné síly. A s tímto přístrojem budeme konat naše experimenty. Symetrií nazveme takovou operaci, po které bude celá aparatura i nadále fungovat stejně. Například můžeme přístroj odsunout vodorovně o jeden metr a na jeho funkčnost by to nemělo mít vliv. Stejná symetrie ale neplatí vůči svislému posunutí. Přístroj se dostane výše, tedy do jiné gravitace a bude fungovat jinak.



Zkusme nejprve předpokládat, že při posunutí ve vodorovném směru x bude přístroj nadále fungovat stejně jako předtím. Potenciální energie může být obecně funkcí času a polohy:

$$W_p = W_p(t, x, y, z). \quad (4.26)$$

Pokud se přístroj po posunutí v ose x má chovat stejně, nesmí se ve směru x měnit potenciální energie, tedy W_p nebude záviset na proměnné x . Matematickým vyjádřením je

$$W_p = W_p(t, y, z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = 0. \quad (4.27)$$

Pohybová rovnice pro x -ovou složku bude mít nulovou pravou stranu:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial W_p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{x} = \text{const}$$

Na počátku byla symetrie vzhledem k posunutí, na konci výpočtu je zachovávaná se veličina. Nazýváme ji hybnost. Obdobnou úvahou můžeme zavést hybnost ve všech třech osách:

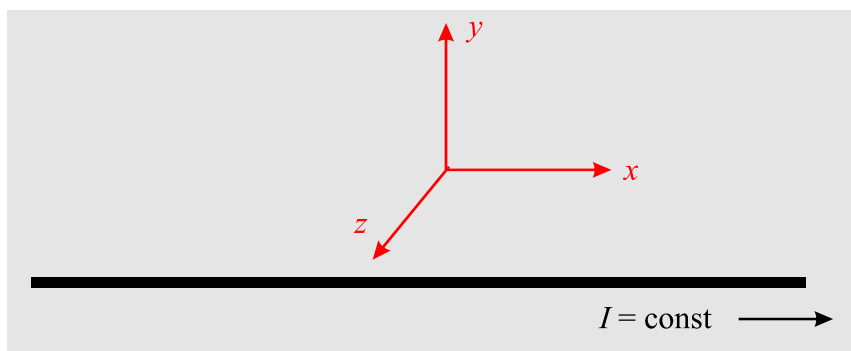
$$\begin{aligned} p_x &\equiv mv_x, \\ p_y &\equiv mv_y, \\ p_z &\equiv mv_z. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Jednotlivé složky se zachovávají jen, platí-li symetrie vzhledem k posunutí v daném směru. Už jsme se zmínili, že ve svislém směru symetrie vzhledem k posunutí neplatí. Neplatí proto ani zákon zachování svislé složky hybnosti. Pokud budete držet v ruce kámen, bude mít nulovou hybnost. Pak ho pusťte. Při dopadu na zem má zjevně hybnost nenulovou. Svislá složka hybnosti se nezachovává. Relaci (4.28) můžeme zapsat také vektorově:

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}. \quad (4.29)$$

● Příklad 4.3

Zadání: Elektrickým vodičem protéká konstantní elektrický proud a souřadnicová soustava je definována dle obrázku. V okolí vodiče se nachází elektron. Rozhodněte, které složky jeho hybnosti se zachovávají a které nikoli.



Řešení: Naším „přístrojem“ je elektron, který se nachází v magnetickém poli vodiče. Pokud elektron přesuneme ve směru osy x , nezmění se jeho vzdálenost od vodiče a nezmění se ani magnetické pole (pokud je vodič nekonečný). Pro elektron bude situace stejná, ať se pohne ve směru osy x jakkoli. Proto se zachovává složka hybnosti p_x . Složky p_y a p_z se nezachovávají, neboť se elektron při pohybu ve směru osy y nebo z dostává do různé vzdálenosti od vodiče a tedy do různě silného magnetického pole.

Pokud není hmotnost konstantní, je otázkou, kde se v pohybové rovnici má nacházet:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}; \quad \text{nebo} \quad \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}. \quad (4.30)$$

Pro konstantní hmotnost jsou obě vyjádření ekvivalentní. Pokud se hmotnost mění (například jde o křepelici vůz nebo raketu, která spotřebovává palivo), je správně (v souladu s přírodou) vyjádření druhé. Pro proměnnou hmotnost má pohybová rovnice tvar

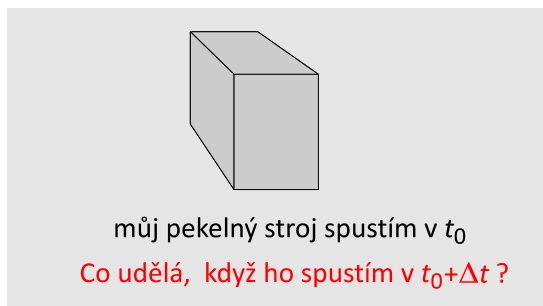
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (4.31)$$

Zapamatujte si:

- Hybnost souvisí se symetrií vzhledem k prostorovému posunutí. Hybnost je za pomoci této symetrie definována jako $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Daná složka hybnosti se zachovává jen tehdy, pokud platí symetrie vzhledem k posunutí v tomto směru.
- Jednoduchým vztahem $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ je hybnost definována v klasické mechanice konzervativních polí. Ve složitějších situacích není hybnost definována tak jednoduše.
- Pokud není hmotnost tělesa konstantní, je na levé straně pohybové rovnice časová změna hybnosti tělesa, tj. platí $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$.

Zákon zachování energie

Předpokládejme nyní, že náš „pekelný stroj“ nebudeme nikam posouvat, necháme ho na místě, ale zapneme ho nejprve v čase t_0 a poté o něco později, například v čase $t_0 + \Delta t$. Otázka je stejná. Bude přístroj fungovat stejně nebo nikoli? Omezme se v našem odvození pro jednoduchost na jednu jedinou prostorovou dimenzi, tj. $W_p = W_p(t, x)$.



Pohybová rovnice pro sledované mechanické děje bude

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial W_p}{\partial x}. \quad (4.32)$$

Pokud platí výchozí symetrie, tj. experiment spuštěný o něco později dopadne stejně, nemůže potenciální energie záviset na čase explicitně, tj. v našem případě bude funkcí jediné proměnné x a parciální derivace se změni v úplnou:

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dW_p}{dx}. \quad (4.33)$$

Přesuňme nyní diferenciál dx z pravé strany rovnosti na levou (zacházíme s ním jako s malým přírůstkem):

$$m \frac{dv}{dt} dx = - dW_p. \quad (4.34)$$

Na levé straně si povšimněme diferenciálu dx v čitateli a dt ve jmenovateli. Spolu dají rychlost, tj. budeme mít

$$m v dv = - dW_p. \quad (4.35)$$

Obě strany snadno integrujeme:

$$\frac{mv^2}{2} = -W_p + \text{const.} \quad (4.36)$$

Po převedení potenciální energie na levou stranu dostáváme zákon zachování energie

$$\frac{mv^2}{2} + W_p = \text{const.} \quad (4.37)$$

Situace se opakuje, předpokládali jsme existenci nějaké symetrie (v tomto případě symetrie vzhledem k časovému posunutí) a získali jsem zákon zachování, tentokrát energie. Energie je touto symetrií definována. Má kinetickou ($\frac{1}{2}mv^2$) a potenciální (W_p) část. Zákon zachování energie platí, pokud platí symetrie vzhledem k posunutí v čase.

❖ **Příklad 4.4:** Zachovává se energie kyvadla zavěšeného na závěsu?

Řešení: Spustíme-li kyvadlo nyní, bude se nějak pohybovat. Pokud experiment zopakujeme po pěti minutách, dopadne stejně. Situace je symetrická vzhledem k posunutí v čase, a proto se energie kyvadla zachovává.

❖ **Příklad 4.5:** Zachovává se energie balíku zavěšeného na jeřábu, který pomalu navíjí lano?

Řešení: Rozkýveme-li balík nyní, bude se nějak pohybovat. Pokud experiment zopakujeme po pěti minutách, bude mít lano jinou délku a balík se bude kývat jinak. Situace není symetrická vzhledem k posunutí v čase, a proto se energie balíku nezachovává. Příčina je zjevná, je zde přítomen motor, který způsobuje narušení zákona zachování energie balíku.

❖ **Příklad 4.6:** Zachovává se energie elektronu v okolí vodiče protékaného konstantním elektrickým proudem?

Řešení: Nastřelíme-li elektron do magnetického pole vodiče nyní, bude se pohybovat určitým způsobem. Učiníme-li experiment o něco později, dopadne stejně, neboť se magnetické pole nezmění. Energie elektronu se bude zachovávat.

❖ **Příklad 4.7:** Zachovává se energie elektronu v okolí vodiče protékaného proměnným elektrickým proudem?

Řešení: Nastřelíme-li elektron do magnetického pole vodiče nyní, bude se pohybovat určitým způsobem. Učiníme-li experiment o něco později, dopadne jinak, neboť se magnetické pole změnilo. Situace není symetrická vzhledem k posunutí v čase a energie elektronu se nebude zachovávat.

❖ **Příklad 4.8:** Zachovává se celková energie ve vesmíru?

Řešení: Vesmír expanduje zrychlenou expanzí a situace zjevně není symetrická vůči posunutí v čase. Celková energie ve vesmíru se proto nezachovává.

Zapamatujte si:

- Energie je v jednoduchých mechanických systémech součtem kinetické a potenciální energie.
- Ve třech dimenzích je kinetická energie dána vztahem $W_k = \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$.
- Energie se zachovává jen tehdy, platí-li symetrie vzhledem k posunutí v čase.