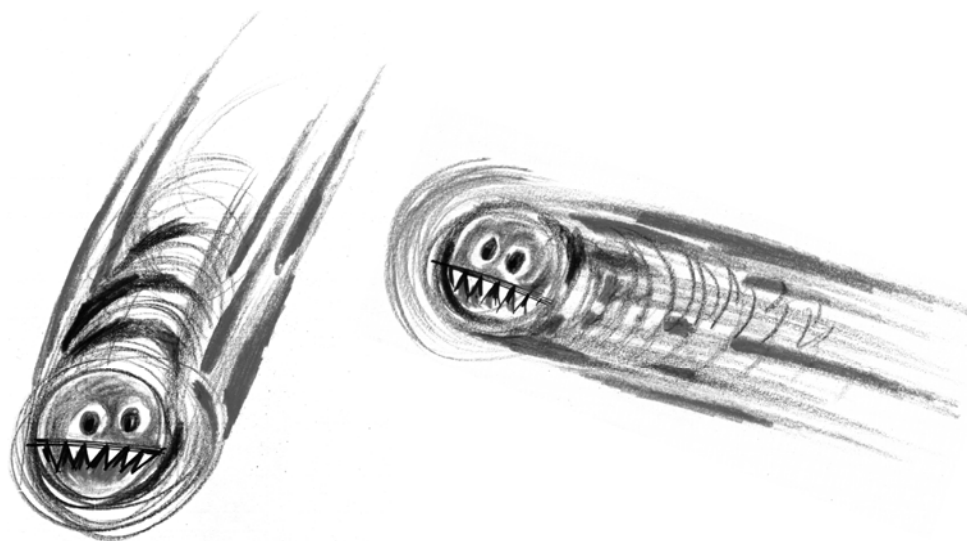


F3

NEWTONOVY ZÁKONY



Evropský sociální fond Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti



F3 NEWTONOVY ZÁKONY

V dosavadních příkladech jsme měli zadán pohyb tělesa a z něho počítali jeho rychlost a zrychlení. V praxi nás bude zajímat přesně opačný postup – ze znalosti sil působících na těleso zjistit, po jaké trajektorii se bude pohybovat v budoucnosti (predikce) nebo kde se nacházelo v minulosti (retrodikce).

Stav tělesa

Staven tělesa rozumíme veškeré údaje o tělese, za pomoci kterých můžeme předpovědět jeho budoucí pohyb. Pokud je na stole položená křída a budeme znát její polohu, k určení stavu to ještě nestačí. Křída může na stole nehybně ležet, nebo může daným místem právě prolétat s nějakou rychlostí. V teoretické mechanice jednoduchá tělesa nahrazujeme hmotnými body – malými tělísky, která nemají žádné vlastní rozměry. Stav takového tělesa je určen jeho polohou a rychlostí v nějakém čase:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}(t_0); \\ \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}(t_0).\end{aligned}\tag{3.1}$$

K určení stavu hmotného bodu tedy postačí šestice čísel: tři polohy a tři rychlosti. Těmto údajům také někdy říkáme *počáteční podmínky*. Pokud těleso nelze nahradit hmotným bodem, mohou být podstatné i další údaje. Například u naší Zeměkoule nás může zajímat nejenom kudy letí kolem Slunce, ale i jak se vyvíjí její rotace a tvar. Stav skutečných těles může být popsán větší skupinou parametrů a jejich časových derivací. V mikrosvětě, kde objekty podléhají kvantovým zákonům, je určení jejich stavu ještě komplikovanější. Není zde například možné určit současně polohu a rychlost takového objektu a kvantová mechanika musí postupovat jinými cestami. Pro účely Vašich prvních krůčků s předpovědí pohybu těles si vystačíme s určením stavu za pomoci polohy a rychlost v určitém čase.

Zapamatujte si:

Stavem tělesa rozumíme znalost jeho polohy a rychlosti v nějakém čase.

Hmotnost tělesa

Dalším klíčovým pojmem, se kterým se musíte seznámit, je hmotnost tělesa. Hmotnosti těles nejčastěji zjistíte vážením. Aniž byste si to uvědomovali, při vážení využíváte vzájemnou přitažlivost Zeměkoule a váženého tělesa. Zjištěnou hmotnost proto nazýváme gravitační hmotnost.

Gravitační hmotnost je mírou schopnosti tělesa se vzájemně přitahovat s jinými tělesy. Etalon (těleso, kterému přisuzujeme jednotkovou schopnost se přitahovat, tj. hmotnost 1 kg) je uložen v Mezinárodním úřadu měr a vah v Sevres u Paříže. Pomocí tohoto etalonu posuzujeme přitažlivé schopnosti všech ostatních těles. Jde o poslední etalon tohoto druhu, ostatní jednotky jsou dnes definovány bez použití etalonu. V blízké budoucnosti bude tento nepraktický etalon nahrazen nějakou abstraktnější definicí.

Naše Země má větší schopnost se přitahovat s jinými tělesy než kilogramový etalon, její gravitační hmotnost je 5×10^{24} kg. Slunce má tuto schopnost ještě větší, 2×10^{30} kg. Při pohybu těles nás ale zajímá ještě jiná hmotnost, říkáme jí setrvačná hmotnost.

Setrvačná hmotnost vyjadřuje schopnost těles setrvávat v daném pohybovém stavu. Fotbalový míč snadno uvedeme do pohybu a také ho snadno chytíme, tj. zastavíme v letu. Pohybový stav míče (let, klid) snadno změníme. Zkuste ale roztlačit stojící vlak. Nebo naopak zastavit jedoucí vlak. Schopnost vlaku setrvávat v daném pohybovém stavu je podstatně větší než u míče a našimi lidskými silami se nám pohybový stav vlaku těžko podaří změnit.

Jak lze měřit schopnost těles setrvávat v daném pohybovém stavu? Opět si musíme vybrat nějaké těleso, o kterém budeme předpokládat, že má tuto schopnost jednotkovou. A klidně to může být ten samý etalon, kterým měříme gravitační hmotnost. Zkrátka si zvolíme, že jeden kilogram gravitační hmotnosti bude roven jednomu kilogramu setrvačné hmotnosti. Ale bude totéž tvrzení platit i o dvou kilogramech? Na to musíme začít experimentovat. Zjistit, jakou sílu musíme vynaložit k zastavení dvou etalonů z určité rychlosti nebo naopak k jejich uvedení do pohybu. Taková měření vedla na poznatek, že obě hmotnosti jsou si úměrné a pokud pro jejich měření zvolíme stejný etalon, budou dokonce stejné. Tomuto tvrzení se říká princip ekvivalence a je na něm postavena současná teorie gravitace – obecná relativita.

Zapamatujte si:

- *Gravitační hmotnost* je schopnost těles se vzájemně přitahovat. Tuto schopnost měříme vážením.
- *Setrvačná hmotnost* je schopnost tělesa neměnit svůj pohybový stav. Tuto schopnost zjišťujeme za pomoci síly, kterou je nutné vynaložit ke změně pohybového stavu tělesa.
- *Princip ekvivalence*: Z experimentů plyne, že gravitační a setrvačné schopnosti těles jsou si vzájemně úměrné. Pokud pro obě hmotnosti zvolíme stejný etalon, budou vycházet číselně shodné.

Zákon setrvačnosti

Zákony, kterými se řídí pohyby těles zkoumali v 17. století Galileo Galilei a později je přesně specifikoval Isaac Newton ve svém slavném díle *Principia (Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica)*. Toto dílo vyšlo jedině díky soustavnému úsilí Edmonda Halleye, který Newtona k publikaci nakonec donutil a vydání financoval. Newton sám prý publikoval výsledky své práce velmi nerad a stačilo mu, že jevy pochopil a korektně popsal. Zákon setrvačnosti lze vyjádřit velmi jednoduše:

Zapamatujte si:

Těleso setrvává v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud na něho nepůsobí síla.

V této jednoduché větě je skryta velmi hluboká myšlenka. Pohybový stav těles mohou měnit jen silové účinky jiných těles. Samo od sebe těleso vzhledem k inerciální souřadnicové soustavě buď stojí, nebo se pohybuje po přímce s konstantní rychlostí. Ze zkušenosti víme, že se rozjetý automobil po určité době sám zastaví. To je ale způsobeno třením mezi automobilem a okolním vzduchem a valivým třením mezi automobilem a podložkou. Pokud půjde o raketu, bude se dále řídit prázdným prostorem rychlostí, kterou jsme jí udělili. I Měsíc obíhající kolem Země by se sám o sobě pohyboval po přímce s konstantní rychlostí. Působení Země ale jeho pohyb zakřivuje a nutí Měsíc obíhat kolem Země po elipse.

Pohyb je tělesům vlastní a tělesa zůstávají v pohybovém stavu, jaký získali předtím. Jejich pohybový stav můžeme změnit jen působením síly, tedy za pomoci jiných těles.

Newtonův pohybový zákon

Působí-li na těleso síla, může změnit jeho pohybový stav, tj. změnit jeho rychlost, tedy udělit mu zrychlení:

$$\mathbf{a} \propto \mathbf{F} . \quad (3.2)$$

Udělené zrychlení je přímo úměrné působící síle. Čím větší síla působí, tím větší změnu rychlosti (zrychlení) má za následek. Symbolem $\propto$ vyjadřujeme v matematice přímou úměrnost. Této změně pohybového stavu, jak už víme, brání setrvačná hmotnost tělesa, tj.

$$\mathbf{a} \propto \frac{1}{m_s} . \quad (3.3)$$

Setrvačná hmotnost není nic jiného než konstanta úměrnosti ve vztahu (3.2). Obě dvě úměrnosti můžeme zapsat do jediné rovnosti:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_s} \quad (3.4)$$

Zrychlení, které získá těleso je úměrné působící síle a nepřímo úměrné jeho hmotnosti. Tento zákon je současně nástrojem pro předpověď pohybu těles. Uvědomíme-li si, že zrychlení je druhou časovou derivací polohového vektoru, můžeme psát

$$m_s \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} . \quad (3.5)$$

Takovému zápisu říkáme *pohybové rovnice* (jsou tři, v každé ose jedna). Z matematického hlediska jde o soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, ze které je možné určit trajektorii tělesa $\mathbf{r}(t)$, pokud známe jeho pohybový stav v počátečním čase, tj. počáteční podmínky $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{v}_0$. a víme, jaké síly na těleso působí (tedy známe pravé strany pohybových rovnic).

● Příklad 3.1

Zadání: Nalezněte trajektorii vodorovně vrženého tělesa z jeho pohybové rovnice.

Řešení: Na těleso bude působit jediná síla, a to tíže v ose y , tedy $\mathbf{F} = (0, -m_g g, 0)$. Pohybová rovnice proto bude

$$\begin{aligned} m_s \ddot{x} &= 0 , \\ m_s \ddot{y} &= -m_g g , \\ m_s \ddot{z} &= 0 . \end{aligned}$$

Pokud platí princip ekvivalence a obě hmotnosti jsou si rovné, můžeme je na obou stranách rovnosti zkrátit a pohybové rovnice se zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 , \\ \ddot{y} &= -g , \\ \ddot{z} &= 0 . \end{aligned}$$

Po první integraci můžeme určit rychlosti tělesa

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c_1 , \\ \dot{y} &= -gt + c_2 , \\ \dot{z} &= c_3 . \end{aligned}$$

Integrační konstanty určíme tak, aby pro $t = 0$ byla rychlost rovna $\mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0)$, tedy:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_0, \\ \dot{y} &= -gt, \\ \dot{z} &= 0.\end{aligned}$$

Další integrací určíme trajektorii tělesa:

$$\begin{aligned}x &= v_0 t + c_4, \\ \dot{y} &= -\frac{gt^2}{2} + c_5, \\ \dot{z} &= c_6.\end{aligned}$$

Konstanty určíme tak, aby pohyb v čase $t = 0$ začínal v souřadnicích $\mathbf{r}_0 = (0, H, 0)$, tj.

$$\begin{aligned}x &= v_0 t, \\ \dot{y} &= H - \frac{gt^2}{2}, \\ \dot{z} &= 0.\end{aligned}$$

Řešením pohybových rovnic jsme získali vztah pro vodorovný vrh, který již delší dobu používáme.



Zapamatujte si:

- Pohybové rovnice $m_s d^2 \mathbf{r} / dt^2 = \mathbf{F}$ nám umožňují ze známých sil spočítat trajektorii tělesa a předpovědět tak jeho budoucí pohyb nebo dopočítat pohyb minulý.
- Integrační konstanty vzniklé při řešení pohybové rovnice určíme z počátečních podmínek, tj. z polohy a rychlosti tělesa v počátečním čase.
- Při pohybu v tíhovém nebo v gravitačním poli se setrvačná hmotnost zkrátí s gravitační hmotností. Výsledný pohyb tedy nezávisí na hmotnosti tělesa. Planeta se bude kolem Slunce pohybovat po stejné dráze jako matka upuštěná kosmonautem na Mezinárodní kosmické stanici. Cihla puštěná z okna domu dopadne na chodník za stejnou dobu jako malá kulička.
- V dalším textu budeme setrvačnou i gravitační hmotnost značit jen symbolem m .

● Příklad 3.2

Zadání: Kulička spadla do kádinky s vodou s rychlostí v_0 . Na kuličku bude působit tíže a odpor vody, který je úměrný rychlosti kuličky, ale má opačný směr. Nalezněte rychlost, se kterou bude kulička padat kapalinou.

Řešení: Na těleso budou působit dvě síly: tíže $\mathbf{F}_1 = (0, -mg, 0)$ a odpor vody $\mathbf{F}_2 = (0, -\alpha v, 0)$. Počáteční podmínky jsou: $\mathbf{r}_0 = (0, H, 0)$, $\mathbf{v}_0 = (0, -v_0, 0)$. Ve svislém směru y máme:

$$m\ddot{y} = -mg - \alpha \dot{y}.$$

Opět jde o obyčejnou diferenciální rovnici, kterou můžeme přepsat do tvaru

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m} \dot{y} = -g.$$

Nalevo jsme soustředili neznámou $y(t)$, koeficient u nejvyšší derivace upravili tak, aby byl roven jedné. Jde o lineární diferenciální rovnici s pravou stranou, kterou se naučíte v matematice řešit později. Snadno ale určíme rovnovážnou rychlost, se kterou se po dosti dlouhé době bude kulička snášet kapalinou. Tehdy už bude totiž mít nulové zrychlení a bude platit

$$\frac{\alpha}{m}v = -g \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{mg}{\alpha}.$$

Zákon akce a reakce

Zapamatujte si:

Zákon akce a reakce: V uzavřené soustavě dvou těles jsou vždy síly, kterými na sebe tělesa vzájemně působí stejně veliké, ale opačně orientované.

Pokud budete na loďce odstrkovat druhou loďku, budete sice na ni působit určitou silou, ale stejná (opačně orientovaná) síla bude působit i na vás. Pokud budete střílet z pistole, bude její mechanismus působit silou na střelu. Stejnou sílu pocítí vaše tělo jako zpětný ráz. Na principu akce a reakce jsou založené i raketové motory. Plyny unikající tryskou vytvářejí reakci, která pohání raketu.

Problém síly

Velice zajímavá je síla vystupující na pravé straně pohybových rovnic. Může jít o tíži, odpor prostředí, sílu pružiny, sílu, kterou působí elektrické nebo magnetické pole na nabitou částici, sílu způsobenou třením atd. Tuto sílu chápeme jako matematický předpis, který nám po vyřešení pohybových rovnic umožní nalézt trajektorii tělesa. Sílu měříme v newtonech, to je jednotka, jejíž rozměr snadno určíme z levé strany pohybové rovnice:

$$N = \text{kg ms}^{-2}. \quad (3.6)$$

Pokud se ale pokusíme sílu nějak logicky definovat, narazíme na nepřekonatelné problémy. Většina pokusů o definici síly končí v kruhu. Sílu můžeme například chápat jako součin hmotnosti a zrychlení. Zrychlení je změna rychlosti s časem, rychlost je změna dráhy s časem. Dráhu budeme měřit ve vhodné souřadnicové soustavě, například inerciální. Ta je definována tak, že volný hmotný bod se pohybuje rovnoměrně přímočaře. A co je to volný? Takový, na který nepůsobí síla.

Klasická definice kruhem, kdy definujeme sílu za pomoci síly. Fyzika popisující děje na základní úrovni se bez síly obejde. Současnou teorií gravitace je obecná relativita, která místo síly používá zakřivený prostor a čas. Každé těleso zakřivuje čas a prostor kolem sebe a v tomto pokřiveném světě se tělesa pohybují po nejrovnějších možných drahách, tzv. geodetikách. Země obíhá kolem Slunce po elipse nikoli proto, že by na ni Slunce působilo gravitační silou, ale proto, že Slunce takto pokřivilo svět kolem sebe. Ostatní přírodní interakce (elektromagnetickou, slabou a silnou) popisujeme pomocí kvantové teorie pole. Ani ta pojem síly nepoužívá, ale vzájemnou interakci těles chápe jako vyměňování polních (mezipůsobících) částic. Interakce elektronu s elektronem je například způsobena výměnou fotonů.

V běžných výpočtech je ale pojem síly velmi užitečný. Pokud budete počítat pohyb automobilu, rakety nebo nabitě částice mezi nabitými deskami, bude popis za pomoci sil velmi jednoduchý, každý jiný by byl zbytečně složitý.

Diferenční schéma, ukázka

Po sestavení pohybové rovnice je třeba nalézt její řešení. Jen v jednoduchých situacích se vám podaří najít řešení analyticky. Ve většině případů se hledá řešení numericky na počítači. Pro pochopení principu sestavíme jednoduché diferenční schéma pro volný pád. Numerické řešení provedeme ve čtyřech krocích:

1. Sestavíme pohybovou rovnici,
2. pohybovou rovnici převedeme na soustavu rovnic prvního řádu,
3. derivace nahradíme diferencemi,
4. vypočteme nové hodnoty za pomoci starých.

Pohybová rovnice pro volný pád vyplývá z 2. Newtonova pohybového zákona

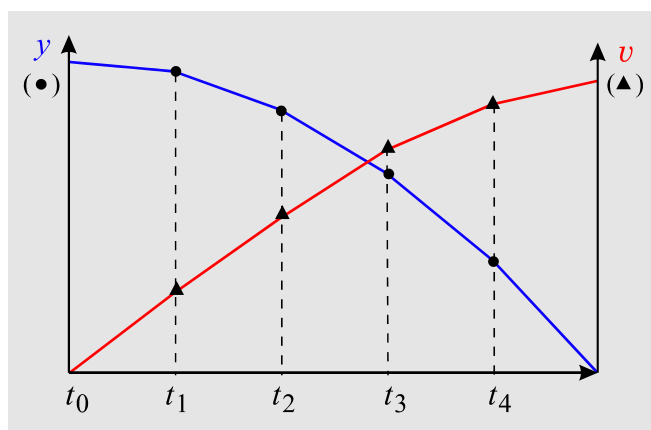
$$m\ddot{y} = -mg. \quad (3.7)$$

Výsledná diferenciální rovnice $\ddot{y} = -g$ je mimořádně jednoduchá a její řešení bychom snadno mohli najít analyticky. Tvorbu diferenčního schématu si proto ukážeme právě na takto jednoduché rovnici. Stejný postup můžete aplikovat i na složitější rovnice, které již nemají analytické řešení. Nejprve převedeme diferenciální rovnici druhého řádu na soustavu rovnic prvního řádu (ve fyzice k tomu využijeme definice rychlosti jako první derivace hledané proměnné podle času):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -g. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nebudeme nyní hledat řešení v každém čase (diferenciální rovnice), ale jen v některých časech (diferenční rovnice). V praxi to znamená nahrazení skutečného řešení lomenou čarou. Budou nás tedy zajímat jen hodnoty

$$\begin{aligned} y_n &= y(t_n), \\ v_n &= v(t_n). \end{aligned} \quad (3.9)$$



Skutečné derivace nahradíme konečnými rozdíly:

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} &\cong v_n, \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} &\cong -g. \end{aligned}$$

Nyní vypočteme hodnoty $n + 1$ pomocí hodnot n :

$$\begin{aligned}y_{n+1} &\cong y_n + v_n \Delta t, \\v_{n+1} &\cong v_n - g \Delta t.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Získali jsme tak diferenční schéma, podle kterého počítáme jednotlivé hodnoty

$$y_0, v_0 \Rightarrow y_1, v_1 \Rightarrow y_2, v_2 \Rightarrow \dots \tag{3.11}$$

Je zřejmé, že k numerické konstrukci řešení postačí znát počáteční výšku a rychlost (počáteční podmínky), například $y_0 = H$, $v_0 = 0$.

● Příklad 3.3

Zadání: Navrhněte diferenční schéma pro kuličku padající v kapalině z příkladu 3.2.

Řešení: Pohybovou rovnici $\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} = -g$ převedeme na soustavu rovnic prvního řádu:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\alpha}{m}v - g.\end{aligned}$$

Nyní nahradíme derivace diferencemi

$$\begin{aligned}\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} &\cong v_n, \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} &\cong -\frac{\alpha}{m}v_n - g,\end{aligned}$$

a vypočteme nové hodnoty za pomoci starých:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &\cong y_n + v_n \Delta t, \\ v_{n+1} &\cong v_n - \frac{\alpha}{m}v_n \Delta t - g \Delta t.\end{aligned}$$

Zapamatujte si:

- Pohybovou rovnici můžeme řešit numericky za pomoci diferenčního schématu.
- Numerické řešení je jen přibližné řešení a uvedené Newtonovo schéma je velmi jednoduché a výsledek bude zatížen numerickou chybou, kterou můžete zmenšit volbou menšího časového kroku.
- Pro skutečné řešení pohybových rovnic se používají složitější a účinnější schémata, základní princip je ale stejný.