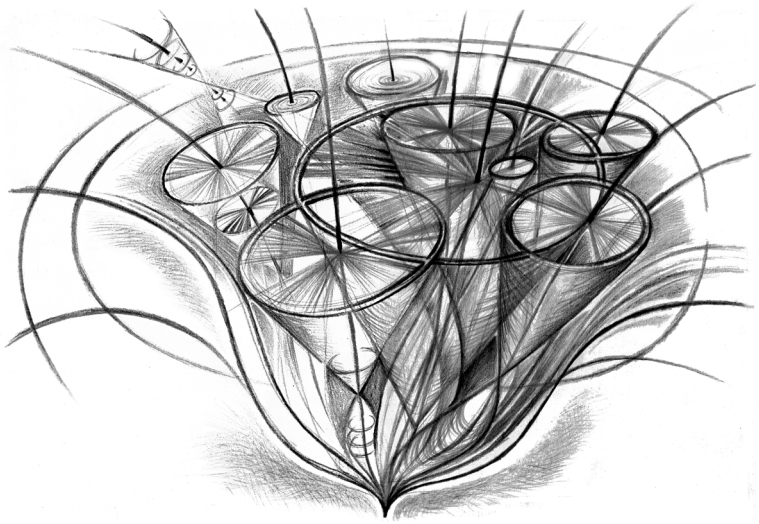
VYBRANÉ KAPITOLY Z TEORETICKÉ FYZIKY III



Petr Kulhánek

Teorie plazmatu
Numerické simulace

AGA 2020

Text © Petr Kulhánek
ISBN: 978-80-906638-4-8

Obsah

PŘEDMLUVA **8**

1. TEORIE PLAZMATU **11**

1.1 CO JE TO PLAZMA? **12**

1.2 POHYBY NABITÝCH ČÁSTIC **16**
1.2.1 Nerelativistické pohyby 16
Lagrangeova a Hamiltonova funkce 16
Pohyb v elektrickém poli, optická analogie 18
Pohyb v homogenním magnetickém poli 19
Pohyb ve zkřížených polích 22
1.2.2 Relativistické pohyby 25
Lagrangeova a Hamiltonova funkce 25
Relativistická pohybová rovnice 26
Pohyb v homogenním elektrickém poli 28
Kolineární magnetické a elektrické pole 30
1.2.3 Adiabatické přiblížení 34
První adiabatický invariant 34
Pohyb gyračního středu 36
Síla –μ grad B 38
Driftová rovnice 39
Drifty 40
1.2.4 Pohyby ve speciálních konfiguracích 43
Magnetické zrcadlo 43
Druhý adiabatický invariant, Fermiho mechanizmus 44
Magnetický dipól, třetí adiabatický invariant 45
Elektrický a magnetický monopól 48
Tokamak 49
Plazmové vlákno a souvislost driftů s proudy 54

1. 3 MAGNETOHYDRODYNAMIKA **57**
1.3.1 Minimální varianta 57
Základní pojmy 57
Předpoklady minimální varianty 60
Rovnice pro magnetické pole 62
Rovnice pro hustotu 68
Rovnice pro rychlost 69
Uzavření soustavy 73
1.3.2 Vybrané jevy 75
Hartmannovo řešení 75
Vlny konečné amplitudy 78
Helicita 80
Tekutinové dynamo 85
Přepojení magnetických indukčních čar 92

1.3.3 Některé rovnovážné konfigurace v plazmatu ... 100
Rovnováha v plazmatu ... 100
Proudové vlákno (pinč) ... 102
Proudová stěna ... 107
Dvojvrstva ... 108
Rázové vlny ... 113

1.4 LINEÁRNÍ VLNY V PLAZMATU ... 116
1.4.1 Základní pojmy ... 116
Superpozice rovinných vln ... 116
Nelineární soustava rovnic ... 118
1.4.2 Zvukové vlny v plynech ... 119
Klidné prostředí ... 119
Pohybující se prostředí ... 121
Jeansovo kritérium ... 122
1.4.3 Plazmové oscilace a vlny ... 125
Odvození disperzní relace ... 125
Plazmové oscilace ... 127
Plazmové vlny ... 128
Iontové vlny ... 129
Další vlivy ... 131
1.4.4 Magnetoakustické vlny ... 132
Odvození disperzní relace ... 132
Vlnoplochy magnetoakustických vln ... 134
Směry vektorů v magnetoakustických vlnách ... 135
1.4.5 Elektromagnetické vlny ... 137
Disperzní relace elektromagnetického komplexu ... 137
R a L vlny – vlny šířící se podél pole B_0 ... 140
O a X vlny – vlny šířící se kolmo na pole B_0 ... 141
Stixovy koeficienty, CMA diagram ... 145
Faradayova rotace ... 148
Hvizdy (whistlers) ... 150
Tenzor permitivity pro elektromagnetické vlny v plazmatu ... 153
Šlírová fotografie ... 154

1.5 NESTABILITY V PLAZMATU ... 156
1.5.1 Neomezené chladné plazma ... 156
Základní pojmy ... 156
Vícesvazková nestabilita ... 159
Dva symetrické svazky ... 160
Nestabilita typu svazek-plazma ... 162
Další nestability (driftová, Weibelova) ... 163
1.5.2 Plazma s hranicí a výměnné nestability ... 164
Základní vztahy, vektor posunutí ... 164
Vektor posunutí ... 166
Základní rovnice pro vektor posunutí ... 167
Navazování polí na hranici ... 169
Nestability plazmového vlákna ... 170
Rayleighova-Taylorova nestabilita ... 177
Kelvinova-Helmholtzova nestabilita ... 181

Další nestability (Richtmyerova–Meškovova, diocotronová) ... 184
Výměnné (tlakem řízené) nestability ... 186
Schwarzschildovo kritérium konvekce ... 190
1.5.3 Rezistivní nestability ... 193
Základní vztahy ... 193
Ostrůvková (tearing) nestabilita ... 196
Řízené rezistivní nestability ... 197
Tokamakové nestability ... 198

1.6 STATISTICKÝ POPIS PLAZMATU ... 200
1.6.1 Boltzmannova rovnice ... 200
Různé varianty Boltzmannovy rovnice ... 201
Relativistická Boltzmannova rovnice ... 204
Boltzmannův srážkový člen ... 206
Rovnice přenosu (momentová rovnice) ... 209
1.6.2 Přechod od statistiky ke kontinuu ... 212
Nultý moment (zachování náboje) – částice ... 212
Nultý moment (zachování náboje) – pole ... 213
První moment (zachování hybnosti) – částice ... 214
První moment (zachování hybnosti) – pole ... 216
Druhý moment (zachování energie) – částice ... 218
Druhý moment (zachování energie) – pole ... 219
1.6.3 Jednoduché transportní jevy ... 220
Transport náboje (Ohmův zákon) ... 221
Transport částic (Fickův zákon) ... 222
Ambipolární difúze ... 223
Difúze v magnetickém poli ... 225
Transport tepla (Fourierův zákon) ... 228
Produkce entropie, Onsagerovy relace ... 229
1.6.4 Coulombova interakce ... 231
Debyeova stínicí vzdálenost ... 231
Coulombův rozptyl (Rutherfordova formule) ... 232
Fokkerova-Planckova rovnice ... 235
Rosenbluthovy potenciály ... 237
Chybová funkce a Chandrasekharova funkce ... 244
Rosenbluthovy potenciály pro maxwellovský terč ... 245
Brzděná a ubíhající testovací částice ... 247
Relaxační časy a srážkové frekvence ... 250
1.6.5 Mikronestability ... 251
Základní vztahy ... 251
Landauův útlum na elektronech ... 252
Fyzikální interpretace Landauova útlumu ... 256
Urychlovače LWFA (Laser Wake Field Accelerator) ... 257
Landauův útlum na iontech ... 258
Bernsteinovy módy ... 260

1.7 NĚKTERÉ NELINEÁRNÍ JEVY ... 261
1.7.1 Pohybová rovnice zářící částice ... 261
Potenciály generované částicí v její blízkosti ... 261
Abrahamova-Lorentzova pohybová rovnice ... 263

Lorentzova-Diracova pohybová rovnice ... 265
Pauliho zápis radiační reakce ... 266
Iterační řešení problémů – Landauova-Lifšitzova rovnice ... 268
Snahy o řešení problémů ... 268
1.7.2 Ubíhající elektrony ... 270
Historické pozadí ... 271
Třecí (srážková) síla ... 272
Radiační reakce ... 274
Klíčové parametry ubíhajícího režimu ... 275
1.7.3 Solitonová řešení ... 277
Od kanálu Union k solitonům ... 277
Soliton a solitonová vlna ... 279
Sin-Gordonova solitonová vlna ... 281
Solitony KdV a NLS ... 285
Solitony v plazmatu ... 290
1.7.4 Turbulence ... 293
Turbuletní struktury ... 293
Kolmogorova turbulence ... 294
Turbulence v magnetohydrodynamice ... 295
Elsässerova pole ... 296
Silná anizotropní turbulence ... 299

2. NUMERICKÉ SIMULACE ... 301

2.1 NUMERICKÉ SIMULACE POHYBU ČÁSTIC ... 302
2.1.1 Newtonovo-Eulerovo schéma (NE) ... 302
Řád schématu ... 304
Stabilita schématu ... 304
2.1.2 Skákající žába aneb Leap-Frog schéma (LF) ... 305
2.1.3 Přesnější schémata (RK, BB) ... 306
Rungeovo-Kuttovo (RK) schéma ... 306
Borisovo-Bunemanovo schéma (BB) ... 307
2.1.4 Relativistická schémata ... 308

2.2 DIFERENČNÍ SCHÉMATA V MAGNETOHYDRODYNAMICE ... 310
2.2.1 Parciální diferenciální rovnice ... 310
Dělení rovnic ... 310
Počáteční a okrajové podmínky ... 312
2.2.2 Tvorba diferenčních schémat ... 313
Jednoduché explicitní schéma pro rovnici difúze ... 314
Du Fortovo-Frankelovo schéma pro rovnici difúze ... 315
Laxovo-Wendrofovo schéma ... 315
Crankovo-Nicolsonové schéma ... 316
Richtmyerovo-Mortonovo schéma ... 316
Tridiagonální matice ... 317
2.2.3 Posuzování stability schématu ... 318

2.3 NUMERICKÉ HLEDÁNÍ KOŘENŮ POLYNOMIÁLNÍ ROVNICE ... 321
2.3.1 Weylův algoritmus ... 321
2.3.2 Newtonův algoritmus ... 323
2.3.3 Zobecněný Newtonův algoritmus ... 324

2.4 PIC SIMULACE 326
2.4.1 Váhování 328
2.4.2 Řešení polí 329
2.4.3 Řešení pohybu částic 330

2.5 MONTE CARLO SIMULACE 331
2.5.1 Generátory náhodných čísel 332
Lineární multiplikativní kongruenční generátor (LCG) 333
Fibonacciho generátory 333
2.5.2 Realizace pravděpodobnostního rozdělení 334
Metoda střelby (distribuční posloupnosti nebo funkce) 334
Metoda von Neumanna 337
Metoda superpozice 338
Užitečné realizace některých rozdělení 339
2.5.3 Metropolisova metoda 340
2.5.4 MC simulace srážky dvou nabitých částic 342

SEZNAM SYMBOLŮ 345

REJSTŘÍK OSOBNOSTÍ 351
Teorie plazmatu 352
Numerické simulace 365

REJSTŘÍK POJMŮ 369

LITERATURA 374

CO NAJDETE V DALŠÍCH DÍLECH? 379
Vybrané kapitoly z teoretické fyziky I 381
Vybrané kapitoly z teoretické fyziky II 383



Předmluva

Milí čtenářové,

držíte v rukou třetí a poslední díl „Vybraných kapitol“. Jeho struktura je stejná jako u dílu prvního a druhého. Jediným rozdílem je, že veškerá potřebná matematika ke studiu je záměrně soustředěna v prvním dílu. Matematické minimum tak nemusíte hledat roztroušené v různých dodatcích, jak tomu bylo v předchozím vydání, ale najdete ho na jednom jediném místě. Doufám, že toto řešení je výrazně praktičtější.

Třetí díl „Vybraných kapitol“ je věnován zejména teorii plazmatu. Numerické simulace v druhé části knihy rozhodně nejsou souvislým učebním textem. Mají posloužit jedinému účelu: aby si zdatný student byl schopen některé popisované jevy přímo „odsimulovat“ na počítači. Proto je většinou uvedena jen jedna možnost řešení, některý ze základních algoritmů. V učebnicích numerických simulací čtenář nalezne celou řadu dalších algoritmů, které mohou být pro danou úlohu stejně dobré, ne-li lepší. K tomu, aby si student mohl s jevem pohrát, měnit vstupní parametry a sledovat změny řešení, tento přístup postačí.

Text věnovaný fyzice plazmatu vznikal v průběhu mnoha let z přednášek, které jsem měl zpočátku na Fakultě elektrotechnické a později na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské Českého vysokého učení technického v Praze. Mé první setkání s plazmatem nastalo ale mnohem dříve, v době mých studií na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, kde jsem ve čtvrtém ročníku navštěvoval vynikající přednášku Úvod do fyziky plazmatu profesora Jozefa Kvasnici. Po studiích jsem nastoupil na katedru fyziky Fakulty elektrotechnické ČVUT, kterou tehdy vedl profesor Jiří Kracík, člověk, který fyzice plazmatu zasvětil většinu svého života. Rád bych při této příležitosti také vzpomenul vedoucího mé kandidátské práce, docenta Josefa Malocha, který byl skvělým školitelem i manažerem v jedné osobě, a to v době mimořádně nelehké. Bohužel, již ani jeden z těch, kteří můj vztah k fyzice plazmatu kdysi ovlivnili a formovali, není mezi námi. Bez jejich úsilí by třetí díl „Vybraných kapitol“ nikdy nevznikl. V ruce držíte už druhé, přepracované vydání (původní mělo název „*Úvod do teorie plazmatu*“), do něhož přibyla partie o některých nelineárních jevech ve fyzice plazmatu. Záření nabitých částic, které s plazmatem úzce souvisí, je probíráno v druhém díle „*Vybraných kapitol*“ v části *Elektromagnetické pole*.

Před tím, než se pustíte do studia, byste měli mít osvojeny základní znalosti z teoretické mechaniky, zejména umět používat Lagrangeovy a Hamiltonovy rovnice [1]. Předpokládá se znalost Einsteinovy sumační konvence. Na škodu nebude ani znalost základů rovnovážné statistické fyziky, nicméně pro pochopení textu to není nezbytné. Co se matematiky týče, měli byste ovládat základy diferenciálního a integrálního počtu v rozsahu běžného kurzu matematiky v bakalářském studiu na vysoké škole. Vhodná je také alespoň zběžná znalost parciálních diferenciálních rovnic a komplexní analýzy. Veškerá potřebná matematika je uvedena v prvním díle „*Vybraných kapitol*“ v části *Matematika pro fyziku*. Čtenář nemusí matematiku studovat předem, postačí se do této kapitoly vracet jen tehdy, je-li to zapotřebí.

V krátkém úvodu se seznámíte s plazmatem jakožto čtvrtým skupenstvím látky, jeho různými druhy a formami. V první části knihy jsou řešeny pohyby nabitých částic v předem daných elektrických a magnetických polích. Druhá část knihy je věnována základům magnetohydrodynamiky, která na plazma pohlíží jako na vodivou tekutinu. Následující kapitoly jsou věnované základním typům vln a nestabilit v plazmatu. Pátá část bude pro čtenáře pravděpodobně nejnáročnější, jde o statistický popis plazmatu, při kterém sledujeme zejména kolektivní chování velkého množství nabitých částic ve fázovém prostoru (zajímáme se o informace obsažené ve statistickém rozdělení poloh a rychlostí částic). Takový postup je výhodný například k pochopení transportních jevů, srážek a některých typů nestabilit v plazmatu. V tomto druhém vydání přibyla ještě kapitola věnovaná vybraným nelineárním jevům v plazmatu.

Proměnné jsou reprezentovány zásadně šikmým řezem písma, vektory tučným řezem písma. Ve výjimečných případech, kdy by mohlo dojít k nejednoznačnosti či záměně, jsou nad vektory a tenzory šipky. Základním řezem jsou zobrazeny funkce, zkratky, číslice a různé matematické operace. Latinské indexy znamenají pořadí veličiny, souřadnicové osy atd. Řeckými písmeny jsou indexovány druhy částic (elektrony a ionty různých násobností) nebo složky čtyřvektorů (0 – časová složka, 1, 2, 3 – prostorové složky). Indexy jsou uváděny zpravidla napravo dole od základního symbolu. Z důvodu přehlednosti je v některých případech index přesunut do pravé horní části. Pokud by mohlo dojít k záměně s mocninou, je takový index v závorce:

$$F_n,\ F_{\mathrm{EM}}^{(n)}.$$

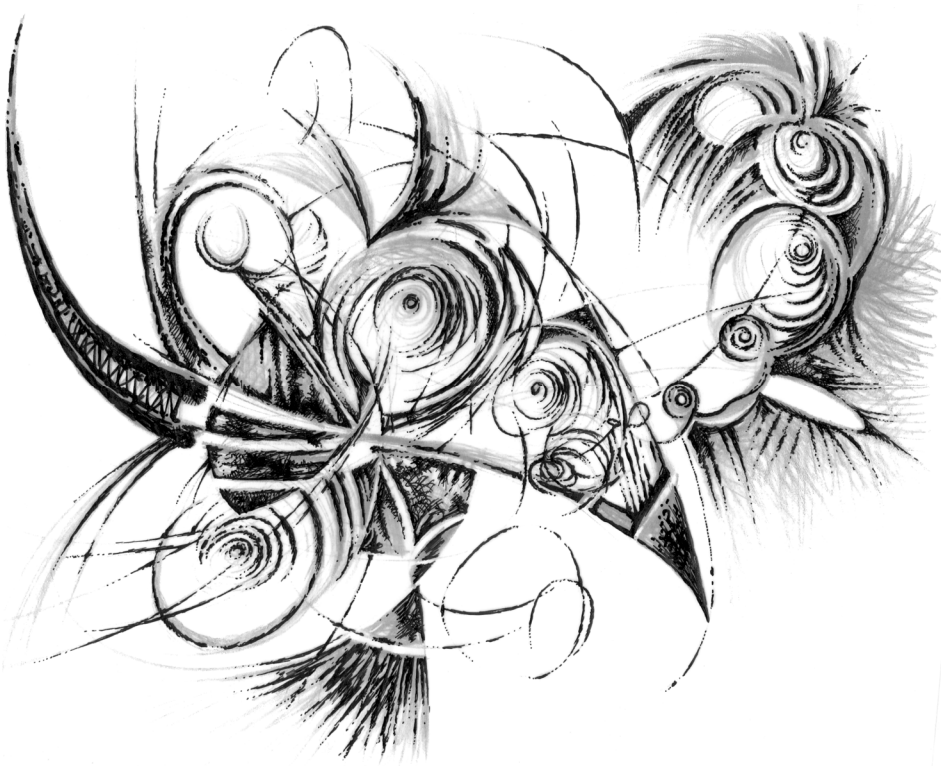
Vzhledem k tomu, že počet písmen abecedy je omezený, jsou některé veličiny označeny stejným symbolem. Jejich význam lze ale snadno odhadnout z kontextu. Pomoci při tom může i seznam symbolů zařazený v závěru knihy. Při čtení nepřeskakujte poznámky, často jde o důležité postřehy potřebné k pochopení probíraného jevu. V knize je naleznete na šedém podkladu. Ilustrativní příklady jsou odděleny od ostatního textu na začátku a na konci značkou půlměsíce. Důležité vztahy jsou na levé straně označeny černým trojúhelníkem. Snad toto značení přispěje k lepší orientaci čtenáře v náročném studijním textu.

Co říci na závěr? Mé poděkování patří řadě mých studentů, kteří se z textů, na jejichž základě vznikala tato kniha, učili a pečlivě objevovali překlepy a nejasnosti. Mé poděkování patří také Ing. arch. Ivanu Havlíčkovi, který se postaral o grafiku ke všem třem dílům „Vybraných kapitol“. Budoucím studentům bych chtěl popřát, aby zažili neopakovatelnou a nesdělitelnou závrať z pochopení a porozumění zákonům popisujícím děje probíhající v přírodě kolem nás.

Petr Kulhánek, 2020, Praha

Odkazy na kompletní nahrávky přednášek k této učebnici naleznou čtenáři na serveru aldebaran.cz v sekci *Studium*. Zde si také můžete stáhnout elektronickou podobu většiny částí této učebnice a další doplňující materiály k přednáškám.

1. Teorie plazmatu



1.1 Co je to plazma?

Plazma je často označováno jako čtvrté skupenství hmoty. Přirozeným způsobem doplňuje řadu pevná látka – kapalina – plyn. Dodáme-li další tepelnou energii plynu, dojde k jeho částečné a později úplné ionizaci. Látka se stane plazmatem, jsou v ní volné nosiče náboje, čímž má toto skupenství zcela nové vlastnosti a jako jediné kolektivně reaguje na elektrická a magnetická pole a samo je vytváří. Vlastnosti plazmatu jsou velmi odlišné od vlastností plynů a kapalin.

Název plazma pro ionizovaný plyn poprvé použil Irving Langmuir (1881–1957) v roce 1928, pravděpodobně proto, že mu chováním tento stav látky připomínal krevní plazmu. Jako plazma chápal Langmuir oblast výboje v plynu, která není ovlivněna stěnami nebo elektrodami a má následující tři vlastnosti:

1. V plazmatu jsou volné nosiče elektrického náboje.
2. Plazma vykazuje kolektivní chování, tj. jako celek reaguje na elektrická a magnetická pole a také je vytváří.
3. Plazma je kvazineutrální, tj. v makroskopickém objemu je stejné množství kladných i záporných nábojů.

V českém jazyce se ustálilo používání ženského rodu pro krevní plazmu, zatímco pro plazma, jakožto čtvrté skupenství hmoty, používáme střední rod (tato knížka je tedy věnována plazmatu, nikoli plazmě).

Ve vesmíru je většina atomární látky ionizována a nachází se ve formě plazmatu. Plazmatem jsou tvořeny nitra i obálky hvězd, mlhoviny, výtrysky, naše Slunce i jeho rozsáhlá koróna. Celá naše Sluneční soustava je zaplavena plazmatem slunečního větru a Země v ní tvoří jakousi malou neplazmatickou oázu. Na Zemi se s plazmatem setkáváme minimálně, přírodní plazma nalezneme v kanálech blesků, v ionosféře a v polárních zářích. Plazma v kanálech blesků má vysoký tlak a je lokalizováno v úzkém a ostře ohraničeném svítícím kanále. Naopak plazma polární záře má nízký tlak a jde o rozsáhlé plošné útvary s difúzním svitem. Plazma nalezneme v laboratořích výzkumných ústavů a v mnoha zařízeních využívajících nejrůznější plazmové technologie (řezání, obrábění, nanášení vrstev atd.).

Plazma je charakteristické lineárními a plošnými útvary (vlákny a stěnami) drženými vlastním magnetickým polem, které vzniká protékajícím proudem. Nabité částice mohou jednak rotovat kolem magnetických indukčních čar a jednak driftovat napříč magnetickému a nějakému dalšímu poli. V oblastech intenzivnějšího magnetického pole se mohou odrážet, takový jev nazýváme *magnetické zrcadlo*. V plazmatu existuje neuvěřitelné množství módů různých nízkofrekvenčních i vysokofrekvenčních vln. Přítomnost plazmatu velmi výrazně ovlivní šíření zvukových i elektromagnetických vln. Pro plazma je charakteristická řada nestabilit, se kterými se dlouhá léta potýkají konstruktéři termojaderných reaktorů. Neméně zajímavé jsou nelineární jevy v plazmatu nebo záření plazmatu. S některými z těchto jevů se seznámíme v učebnici, kterou jste právě otevřeli.

U plazmových fyziků je velmi oblíbenou jednotkou elektronvolt. V elektronvoltech se dá vyjádřit nejen energie (1 eV $\approx 1{,}6\times10^{-19}$ J), ale i teplota ($E = k_B T$, 1 eV $\approx$ 11 600 K) nebo hmotnost částic (přes vztah $E = mc^2$). V této učebnici jsou dominantně používány jednotky SI.

Plazma dělíme z mnoha úhlů pohledu. Jeho vlastnosti závisí především na teplotě, koncentraci a magnetickém poli. Na následujícím diagramu jsou některé typické druhy plazmatu v závislosti na koncentraci a teplotě elektronů:

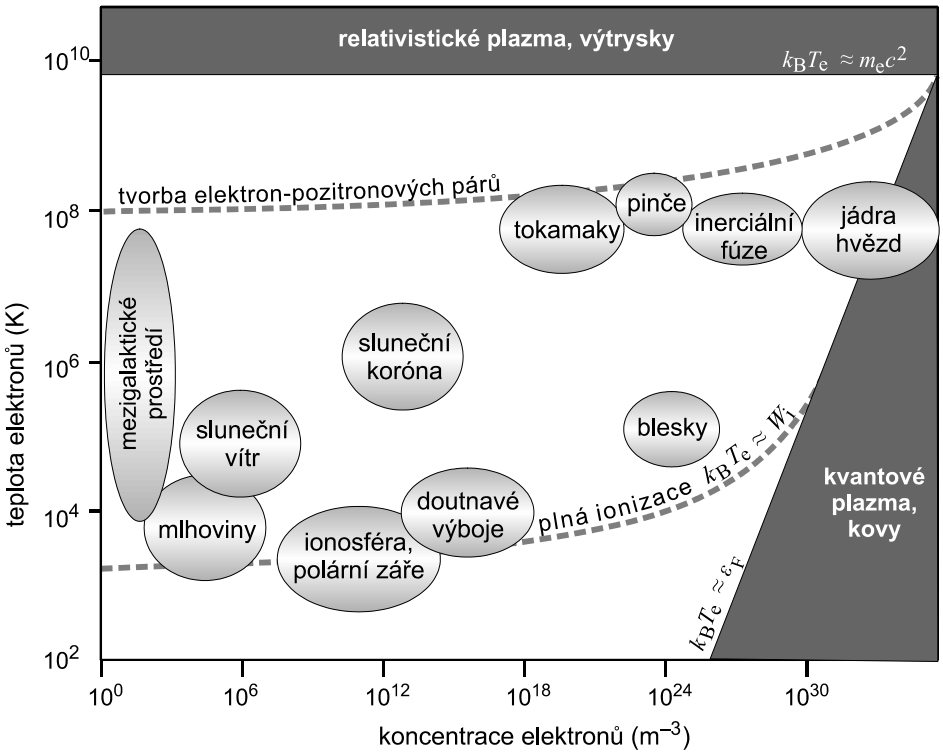


Diagram je nakreslen pro vodíkové plazma, ale podobný diagram platí i pro jakékoli jiné plazma. Půjdeme-li ve směru teplotní osy (svisle), narazíme celkem na čtyři oblasti plazmatu. Pro nejnižší teploty je plazma jen částečně ionizované. Od křivky označené „plná ionizace" je plazma zcela (u vodíku jedenkrát) ionizováno. Hranici této oblasti můžeme zapsat jako $k_B T_e \approx W_i$, kde W_i je ionizační energie. Při ještě vyšší teplotě (přibližně nad 10^8 kelvinu) dochází k samovolné tvorbě elektronových-pozitronových párů. Od teploty 6×10^9 K je tepelná energie elektronů vyšší než jejich klidová energie, tj. platí vztah $k_B T_e > m_e c^2$ a plazma považujeme za relativistické. Můžeme si tak povšimnout prvních způsobů dělení plazmatu:

- plazma částečně ionizované – plazma úplně ionizované;
- plazma bez tvorby elektron pozitronových párů – plazma s tvorbou párů;
- plazma nerelativistické – plazma relativistické.

V pravé dolní části diagramu (husté a chladné plazma) nalezneme oblast kvantového plazmatu. Elektronový plyn je degenerován, tj. jeho obsazovací čísla ve fázovém prostoru nejsou malá. Ve fázovém objemu $\Delta\phi = \Delta^3 x \Delta^3 p$ je počet dostupných kvantových stavů roven $\Delta\phi/(2\pi\hbar)^3$, viz [2]. Pokud je počet elektronů na jeden stav zanedbatelný, má elektronový plyn klasické chování a je popsán Boltzmannovým rozdělením. Pokud tomu tak není, musíme použít Fermiho-Diracovo rozdělení a elektronový plyn se chová

kvantově. Tak je tomu v jádrech hvězd, v celém objemu bílého trpaslíka nebo v neutronové hvězdě (zde nejde o elektrony, ale o neutrony). Rovnici hranice této oblasti můžeme zapsat pomoci Fermiho energie elektronů ε_F jako $k_B T_e \approx \varepsilon_F$. Dalším možným rozdělením plazmatu tedy je

- plazma klasické – plazma kvantové.

Plazma je schopné vést elektrický proud. Mnohdy je lepším vodičem než zlato nebo měď. Jeho vodivost je úměrná $T_e^{3/2}$ a závisí jen málo na koncentraci plazmatu. Často ve výpočtech nahrazujeme plazma nekonečně vodivou tekutinou. V takové limitě v plazmatu neprobíhají žádné difúzní procesy a magnetické pole je dokonale „*vmrznuté*“ do plazmatu, tj. sleduje všechny jeho pohyby. Pokud je vodivost konečná, magnetické pole je částečně zamrzlé a částečně difunduje do okolí. Můžeme tak dojít k dalšímu dělení plazmatu:

- plazma se zamrzlým magnetickým polem – plazma s difundujícím polem.

Teplota plazmatu je dána chaotickým pohybem jeho jednotlivých složek. Na vnější podněty nejprve reagují málo hmotné elektrony, elektronová tekutina se zahřeje a při srážkách pak svou tepelnou energii předává iontům. Může se tedy stát, že elektrony mají jinou teplotu než ionty. Pokud jsou obě teploty vyrovnány a ustanou veškeré makroskopické toky, řekneme, že plazma je v *termodynamické rovnováze*. V opačném případě hovoříme o *nerovnovážném plazmatu*. A máme zde další dělení:

- plazma rovnovážné – plazma nerovnovážné.

V přítomnosti magnetického pole je zavedení teploty ještě složitější. Pohyby nabitých částic podél magnetických indukčních čar jsou jiné než napříč indukčním čarám, a můžeme proto zavést teploty dvě – podélnou a příčnou. Kromě dělení plazmatu na rovnovážné a nerovnovážné můžeme plazma z hlediska dosažené teploty iontů také rozdělit na *vysokoteplotní* (fúzní, $T_i > 10^6$ K) a *nízkoteplotní* ($T_i < 10^5$ K):

- plazma nízkoteplotní – plazma vysokoteplotní.

Někdy se ale nízkoteplotní plazma definuje jako částečně ionizované plazma a vysokoteplotní jako plně ionizované plazma.

V neutrálním plynu jsou srážky charakterizované prudkou změnou směru pohybu, dráha atomů či molekul připomíná lomenou „cikcak“ čáru. V plně ionizovaném plazmatu jsou srážky dány Coulombovou interakcí (elektrickým přitahováním či odpuzováním) a částice jen zvolna mění směr. Střední volnou dráhu chápeme jako průměrnou vzdálenost, na které se směr pohybu částice změní o 90°. V částečně ionizovaném plazmatu dochází k oběma druhům srážek – coulombickým mezi nabitými částicemi a „cikcak“ mezi nabitou a neutrální částicí nebo mezi dvěma neutrálními částicemi. Plazma považujeme za *bezesrážkové*, je-li střední volná dráha mezi srážkami větší než rozměry plazmatu ($\lambda_{e,i} > L$). V takovém případě částice buď neinteragují, nebo vzájemně interagují prostřednictvím kolektivních polí, která samy vytvářejí. V bezesrážkovém plazmatu se mohou snadno vytvořit oblasti, které nejsou kvazineutrální. Plazma tedy můžeme také rozdělit na

- plazma bezesrážkové – plazma srážkové.

Velmi důležitým parametrem pro posuzování vlastností plazmatu je Debyeova vzdálenost λ_D. Pokud je nabitá částice ve vakuu, ubývá její potenciál se vzdáleností jako $1/r$.

V plazmatu je částice stíněná a její elektrický potenciál ubývá jako $\exp(-r/\lambda_D)/r$. Do vzdálenosti λ_D od nabité částice ji ostatní částice „vnímají“ jako částici, ve větších vzdálenostech je její potenciál odstíněn. Hovoříme o tzv. Debyeově sféře a klíčovým parametrem je počet částic v této sféře $N_D = (4/3)\pi n\lambda_D^3$. Je-li $N_D \gg 1$, vyruší se celková průměrná síla od jednotlivých částic a převládají kolektivní procesy nad srážkami – hovoříme o tzv. *ideálním plazmatu*, pro jehož všechny složky platí stavová rovnice ideálního plynu. Typicky jde o horké (s vysokou vodivostí) a/nebo řídké plazma. Dalším možným dělením tedy je:

- plazma ideální – plazma neideální.

V astrofyzikálních aplikacích, ale i v laboratorním plazmatu se často setkáváme s plazmatem obsahujícím prach. Takové plazma má specifické vlastnosti, je třeba uvažovat nabíjení prachových zrn, ultranízkofrekvenční módy vln souvisící s pohyby prachových zrn, u rozsáhlých oblaků se neobejdeme bez zahrnutí gravitační interakce prachových zrn atd. Často proto také plazma dělíme na

- plazma prachové – plazma bez prachu.

Existují samozřejmě i další různá dělení plazmatu, v každém oboru je důležité jiné hledisko. Pro základní orientaci v druzích plazmatu nám výše uvedený přehled postačí.

1.2 Pohyby nabitých částic

V celé první kapitole budeme počítat pohyby částic ve vnějších, předem známých (zadaných) polích. Předpokládáme, že

1. částice vzájemně neinteragují,
2. vlastní pole částic jsou zanedbatelná.

Pro popis elektrického pole využijeme intenzitu elektrického pole **E**, pro popis magnetického pole magnetickou indukci **B**. Alternativně můžeme elektrické a magnetické pole popsat za pomoci skalárního a vektorového potenciálu (ϕ, **A**). Převodní vztahy jsou

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{1.2}$$

Odvození těchto vztahů nalezne čtenář v jakékoli učebnici elektromagnetického pole, například v [7]. Při výpočtu pohybu nabitých částic budeme předpokládat, že potenciály $\phi(t, \mathbf{x})$ a $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ jsou předem dané funkce. Poznamenejme, že tvoří relativistický čtyřvektor a lze je z jedné souřadnicové soustavy do druhé transformovat za pomoci Lorentzovy transformace.

1.2.1 Nerelativistické pohyby

Za nerelativistické považujeme pohyby nabitých částic, jejichž rychlost je zanedbatelná vzhledem k rychlosti světla, tj. $v \ll c$. Takové částice nalezneme například ve slunečním větru nebo v plazmatu obloukového výboje.

Lagrangeova a Hamiltonova funkce

Problematika pohybu nabitých částic v elektromagnetických polích je dána Lagrangeovou funkcí

$$L = L_{\text{part}} + L_{\text{int}}, \tag{1.3}$$

kde L_{part} je Lagrangeova funkce částice, L_{int} popisuje interakci mezi částicí a polem. V případě, že by sama částice generovala elektromagnetické pole, přibyla by ještě polní část Lagrangeovy funkce. V takovém případě bychom ale museli použít hustotu Lagrangeovy funkce (šlo by o spojité prostředí). V našem přiblížení jsou pole pevně dána a nebudeme je počítat, proto je polní část Lagrangeovy funkce nulová. Pokud budeme uvažovat jen elektrické pole, které je potenciální, bude Lagrangeova funkce dána vztahem

$$L = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 - Q\phi. \tag{1.4}$$

Tvar je shodný s klasickou mechanikou [1], kde je Lagrangeova funkce dána rozdílem kinetické a potenciální energie $L = T - V$. Kinetická energie představuje Lagrangeovu

funkci volné částice L_{part} a potenciální energie Lagrangeovu funkci interakce s elektrickým polem L_{int}. V přítomnosti magnetického pole, které není potenciální, musí mít interakční část Lagrangeovy funkce další člen. Ten bude nějakou funkcí čtyřvektoru toku náboje pro částici (charakterizuje částici) a čtyřvektoru potenciálů pole (charakterizuje pole):

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} c\rho_Q \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cQ\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ Q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{x}'$ je poloha částice a $\mathbf{x}$ poloha pozorovatele. Lagrangeova funkce by měla být skalárem, jedinou rozumnou kombinací připadající v úvahu je tedy veličina úměrná skalárnímu součinu obou čtyřvektorů integrovanému přes objem (bez integrace přes objem bychom dostali veličinu úměrnou hustotě Lagrangeovy funkce):

$$\int (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}' = \int (-Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})\, \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\ \mathrm{d}^3\mathbf{x}' = -Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\,.$$

Z uvedeného vztahu je již jasná chybějící část ve vztahu (1.4), správná Lagrangeova funkce pro nerelativistický pohyb částic v elektrickém a magnetickém poli bude

$$L = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\,. \tag{1.5}$$

Standardními postupy určíme zobecněnou hybnost, zobecněnou energii a po vyloučení rychlosti z obou vztahů Hamiltonovu funkci:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}\,, \tag{1.6}$$

$$\mathscr{E} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + Q\phi\,, \tag{1.7}$$

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi\,. \tag{1.8}$$

Poznámka 1: Energii budeme v této kapitole značit symbolem $\mathscr{E}$, abychom ji odlišili od intenzity elektrického pole **E**.

Poznámka 2: Zobecněná hybnost není součinem hmotnosti a rychlosti jako v klasické mechanice, ale figuruje v ní vektorový potenciál!

Poznámka 3: Energie nezávisí na magnetickém poli (vektorovém potenciálu **A**), protože magnetické pole nemění energii částice, ale jen směr její rychlosti.

Ukažme, že příslušné Lagrangeovy rovnice jsou totožné s Lorentzovou pohybovou rovnicí pro nabitou částici. Ve složkách máme

$$L = \frac{1}{2} m v_l v_l - Q\phi(t, \mathbf{x}) + QA_l(t, \mathbf{x}) v_l\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial v_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_k + QA_k) + Q\frac{\partial\phi}{\partial x_k} - Q\frac{\partial A_l}{\partial x_k}v_l = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_k) + Q\frac{\partial A_k}{\partial t} + Q\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}t} + Q\frac{\partial\phi}{\partial x_k} - Q\frac{\partial A_l}{\partial x_k}v_l = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_k) = Q\left[-\frac{\partial A_k}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial x_k} + v_l\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)\right].$$

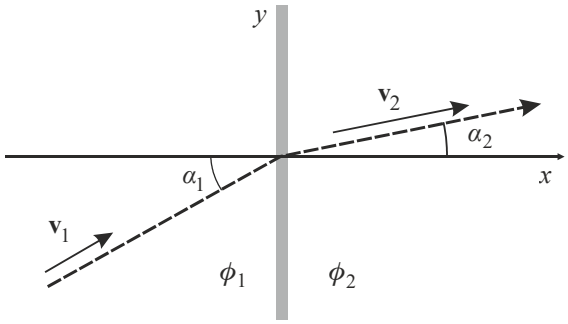
Poslední výraz v hranaté závorce snadno upravíme pomocí Levi-Civitova tenzoru do tvaru (postup naleznete v prvním díle „Vybraných kapitol“, v kapitole I.3.3.4 „Vektorové identity“):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = Q\left[-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}} + \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = Q\left[\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right], \tag{1.9}$$

což je známá Lorentzova pohybová rovnice.

Pohyb v elektrickém poli, optická analogie

Pokud se nabitá částice pohybuje dostatečně dlouho jen v homogenním elektrickém poli, nelze situaci řešit nerelativisticky. Elektrické pole by částici urychlovalo nade všechny meze, což je v rozporu se speciální relativitou. Můžeme ale řešit úlohu, ve které je elektrické pole nenulové jen v malé oblasti prostoru, například v nějaké vrstvě plazmatu. Idealizovaným případem je rázová vlna se skokem elektrického potenciálu (tzv. dvojvrstva, se kterou se podrobněji seznámíme v kapitole 1.3.3).



Obr. 1.1: Skok elektrického potenciálu

Předpokládejme, že v obou poloprostorech na obrázku je potenciál konstantní a elektrické pole tedy nulové. Nabitá částice se proto pohybuje rovnoměrně přímočaře. V tenké vrstvě (je označena šedě) na rozhraní obou oblastí se potenciál mění, elektrické pole je zde nenulové a míří ve směru osy *x*. Pokud je přechodová vrstva infinitezimálně malá, je změna potenciálu skoková. Ve směru osy *y* nepůsobí žádné pole, proto se složka rychlosti částice ve směru osy *y* nemění. Tečná složka rychlosti vzhledem k rozhraní je proto spojitá:

$$v_1 \sin\alpha_1 = v_2 \sin\alpha_2 \,. \tag{1.10}$$

Při pohybu nabité částice se bude zachovávat energie (1.7):

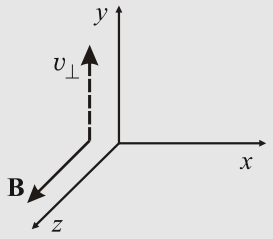
$$\frac{1}{2} m v_1^2 + Q\phi_1 \;=\; \frac{1}{2} m v_2^2 + Q\phi_2 = \mathscr{E}\,. \tag{1.11}$$

Pokud z posledního vztahu vypočteme rychlosti a dosadíme do (1.10), dostaneme

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\mathscr{E}-Q\phi_2}{\mathscr{E}-Q\phi_1}} = \sqrt{\frac{C-\phi_2}{C-\phi_1}} = \sqrt{\frac{U_2}{U_1}}\,. \tag{1.12}$$

Uvedenému vztahu se říká *optická analogie pohybu částice v elektrickém poli*. Svým tvarem připomíná zákon lomu, ale poměr rychlostí je v tomto vztahu obrácený. Obdobně uvažoval při odvození indexu lomu francouzský učenec René Descartes (1596–1650). Světlo považoval za částice, které na rozhraní dvou prostředí ztratí energii, jakoby prolétly nějakou bariérou. Opačný poměr rychlostí mu nevadil, neboť ho chápal jako vlastnost prostředí (index lomu). Zákon lomu správně odvodil nizozemský matematik a astronom Willebrord Snellius (1580–1626), proto hovoříme o Snellově zákonu (čti *snelův*, nikoli *šnelův*).

Pohyb v homogenním magnetickém poli



elektromagnetické pole:
$\mathbf{E} = (0,0,0)$,
$\mathbf{B} = (0,0,B)$;

počáteční podmínky:
$\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$,
$\mathbf{p}(0) = (0, m v_\perp, 0)$.

Předpokládejme homogenní magnetické pole; souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby osa *z* mířila ve směru pole. Nabitou částici vypustíme kolmo na magnetické indukční čáry ve směru osy *y*. Pohyb budeme řešit za pomoci Hamiltonových pohybových rovnic. Pro sestavení Hamiltonovy funkce proto nejdříve potřebujeme nalézt potenciály pole. Potenciály nejsou vztahy (1.1) a (1.2) určeny jednoznačně (různé potenciály vedou na stejná pole). Například pro magnetický potenciál můžeme v našem případě využít výrazy $\mathbf{A} = (-yB, 0, 0)$ nebo $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$ nebo $\mathbf{A} = ½\,(-yB, xB, 0)$. Vyzkoušejte si, že rot **A** vede vždy na pole $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Pro další výpočet zvolíme potenciály ve tvaru

$$\phi = 0\,,$$

$$\mathbf{A} = (0, xB, 0)\,.$$

Potenciály elektrických a magnetických polí pro typické konfigurace naleznete v druhém díle „Vybraných kapitol“ na str. 172. Zobecněná hybnost je v našem případě dána vztahem $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}$. Pro Hamiltonovu funkci platí

$$H = \frac{(\mathbf{p}-Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi \;=\; \frac{p_x^2 + (p_y - QBx)^2 + p_z^2}{2m}$$

a Hamiltonovy rovnice jsou

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \tag{1.13}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - QBx}{m}, \tag{1.14}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \tag{1.15}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{QB(p_y - QBx)}{m}, \tag{1.16}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \tag{1.17}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \tag{1.18}$$

Z rovnic(1.17), (1.18) máme ihned

$$p_y(t) = p_y(0) = m v_\perp ,$$
$$p_z(t) = p_z(0) = 0 .$$

Tyto výrazy spolu s p_x vyjádřeným z (1.13) dosadíme do (1.16) a získáme tak rovnici

$$\ddot{x} + \left(\frac{QB}{m}\right)^2 x = \frac{QB v_\perp}{m}$$

pro proměnnou x. Po jejím vyřešení (je součtem homogenního a partikulárního) známe závislost $x(t)$ a můžeme již přímo integrovat rovnice (1.14), (1.15). Výsledné řešení má tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= R_\mathrm{L} - R_\mathrm{L} \cos \omega_\mathrm{c} t , \\ y(t) &= R_\mathrm{L} \sin \omega_\mathrm{c} t , \\ z(t) &= 0 , \end{aligned} \tag{1.19}$$

kde jsme označili

$$R_\mathrm{L} \equiv \frac{m v_\perp}{QB}; \qquad \omega_\mathrm{c} \equiv \frac{QB}{m} \tag{1.20}$$

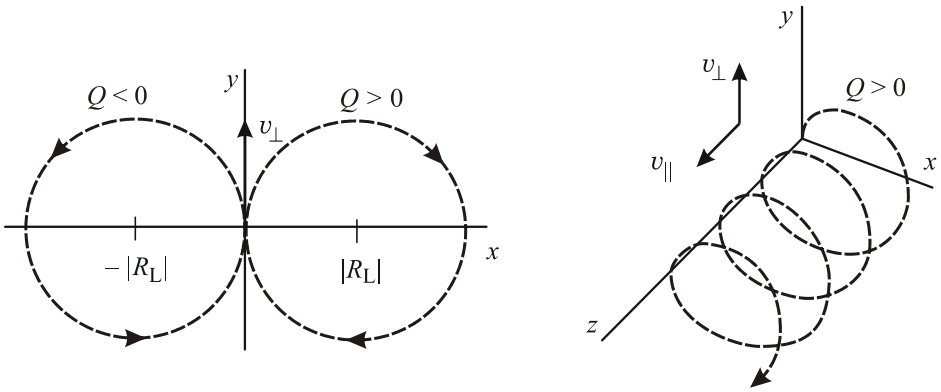
tzv. Larmorův poloměr R_L a cyklotronní frekvenci ω_c. Trajektorii získáme vyloučením času z (1.19):

$$\left(x - R_\mathrm{L}\right)^2 + y^2 = R_\mathrm{L}^2 . \tag{1.21}$$

Vidíme, že pohyb se děje po kružnici s poloměrem R_L a se středem $S = [\, R_\mathrm{L}, 0\,]$. Poloha středu závisí na znaménku náboje částice.

Magnetické pole nepůsobí na pohyb částice ve směru podél pole. Kolmo na směr pole působí Lorentzova síla, která zakřivuje trajektorii částice na kružnici. Při nenulové počáteční rychlosti $v_z(0)$ je pohyb částice složen z rovnoměrného přímočarého pohybu podél pole a Larmorovy rotace (tzv. *gyrace*) v rovině kolmé na pole – tím vzniká pohyb po šroubovici.

Samotné elektrické pole naopak nepůsobí na pohyb částice napříč pole (v nerelativistickém případě) nebo jen velmi málo (v relativistickém případě). Ve směru pole dochází k urychlování.



Obr. 1.3: Pohyby nabité částice v homogenním magnetickém poli

Poznámka: Výpočet Larmorova pohybu lze také provést přímo z Lorentzovy pohybové rovnice $m\ddot{\mathbf{r}} = Q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$. Složka z opět vede na volný pohyb. Ve složce x a y dostáváme

$$\ddot{x} = \frac{QB}{m}\dot{y}\,, \tag{1.22}$$

$$\ddot{y} = -\frac{QB}{m}\dot{x}\,. \tag{1.23}$$

Obě rovnice je možné řešit různými způsoby. Asi nejrychleji k cíli vede Landaův postup: druhou rovnici vynásobíme komplexní jednotkou a sečteme s první. Kombinaci QB/m označíme jako cyklotronní frekvenci:

$$\ddot{x} + \mathrm{i}\,\ddot{y} = -\mathrm{i}\,\omega_\mathrm{c}(\dot{x} + \mathrm{i}\,\dot{y}) \tag{1.24}$$

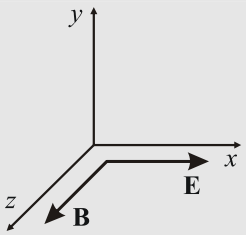
Nyní stačí zavést komplexní proměnnou $\xi \equiv x + \mathrm{i}\,y$ a řešit jednoduchou rovnici

$$\ddot{\xi} = -\mathrm{i}\,\omega_\mathrm{c}\,\dot{\xi} \tag{1.25}$$

v komplexním oboru. Po nalezení integračních konstant získáme hledanou polohu částice x a y tak, že oddělíme reálnou a imaginární část řešení. Detailně je tento postup řešen v prvním díle „Vybraných kapitol“, viz příklad 3.1 na straně 255, kde je toto řešení ukázáno jako příklad využití komplexních čísel.

Pohyb ve zkřížených polích

Řešme nyní pohyb v homogenním magnetickém poli a na něj kolmém homogenním poli elektrickém:



elektromagnetické pole

$\mathbf{E} = (E, 0, 0)$,

$\mathbf{B} = (0, 0, B)$;

počáteční podmínky:

$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$,

$\mathbf{p}(0) = (0, 0, 0)$.

Volba souřadnicové soustavy je patrná z obrázku. Nabitou částici vložíme s nulovou rychlostí do počátku souřadnicové soustavy. Potenciály polí zvolíme ve tvaru

$$\phi = -Ex\,,$$

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0)\,.$$

Zobecněná hybnost je opět $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}$. Pro Hamiltonovu funkci platí

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi \;=\; \frac{p_x^2 + (p_y - QBx)^2 + p_z^2}{2m} - QEx$$

a Hamiltonovy rovnice naší úlohy jsou

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}\,, \tag{1.26}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - QBx}{m}\,, \tag{1.27}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}\,, \tag{1.28}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{QB(p_y - QBx)}{m} + QE\,, \tag{1.29}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0\,, \tag{1.30}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0\,. \tag{1.31}$$

Postupem zcela analogickým předešlému příkladu získáme řešení

$$x(t) = R_D - R_D \cos \omega_c t \,,$$
$$y(t) = R_D \sin \omega_c t \; - \; v_D t \,, \tag{1.32}$$
$$z(t) = 0 \,,$$

kde jsme označili

$$\omega_c \equiv \frac{QB}{m} \quad ; \quad v_D \equiv \frac{E}{B} \quad ; \quad R_D \equiv \frac{m v_D}{QB} \tag{1.33}$$

tzv. cyklotronní frekvenci ω_c, driftovou rychlost v_D a driftový poloměr R_D. Rovnice trajektorie má po částečném vyloučení času z rovnic (1.32) tvar

$$\left(x - R_D\right)^2 \; + \; (y + v_D t)^2 \; = \; R_D^2 \,. \tag{1.34}$$

Jde tedy o pohyb po kružnici s poloměrem R_D, jejíž střed $S = [R_D\,,\, -v_D t]$ se pohybuje konstantní driftovou rychlostí v_D kolmo na elektrické i magnetické pole. Pro nulovou počáteční rychlost platí vztah plynoucí okamžitě z definic (1.33)

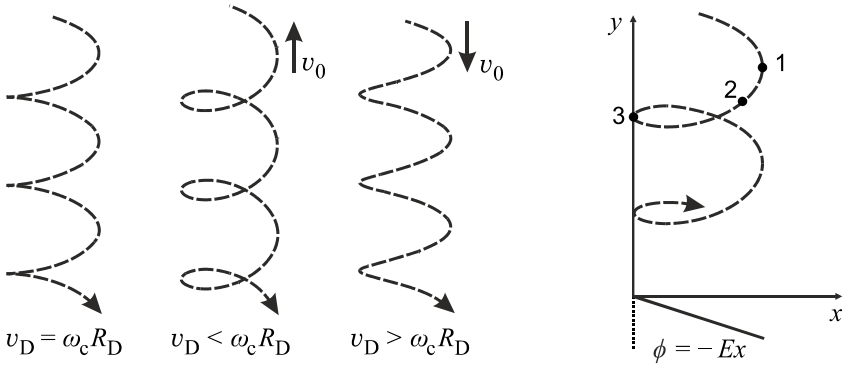
$$v_D = \omega_c R_D \tag{1.35}$$

a výsledná křivka (1.34) se nazývá *cykloida*. Stejnou křivku opisuje nalepená nečistota na kole jedoucího automobilu. Pro nenulovou počáteční rychlost již neplatí vztah (1.35) a pohyb probíhá po obecnější křivce, tzv. *trochoidě* (řešení je analogické):

$$x(t) = R_D - R_D \cos \omega_c t \,,$$
$$y(t) = R_D \sin \omega_c t \; - \; v_D t \,, \tag{1.36}$$
$$z(t) = v_{0z}\, t \,,$$

kde se driftový poloměr změnil na

$$R_D = \frac{m}{QB} \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} + v_D)^2} \,. \tag{1.37}$$



Obr. 1.5: Pohyby nabité částice ve zkřížených polích

Pro $v_{0z} = 0$ výsledná trochoida vzniká složením pohybu po kružnici s pohybujícím se středem $S = [R_D\,,\, -v_D t]$. Trochoidu si opět můžete představit za pomoci analogie s jedoucím automobilem. Automobil ale jede na ledu, a buď se rozjíždí, nebo brzdí. Kola se částečně protáčejí (obvodová rychlost kol není totožná s rychlostí vozidla). V takovém případě nečistota na kole opisuje trochoidu. Pro $Q > 0$ mají trochoidy tvar znázorněný na obrázku 1.5 (cykloida je speciálním případem trochoidy a na obrázku je nalevo). V bodech trajektorie 1, 2, 3 je různý elektrický potenciál

$$\phi = -Ex \qquad \Rightarrow \qquad \phi_1 < \phi_2 < \phi_3\,.$$

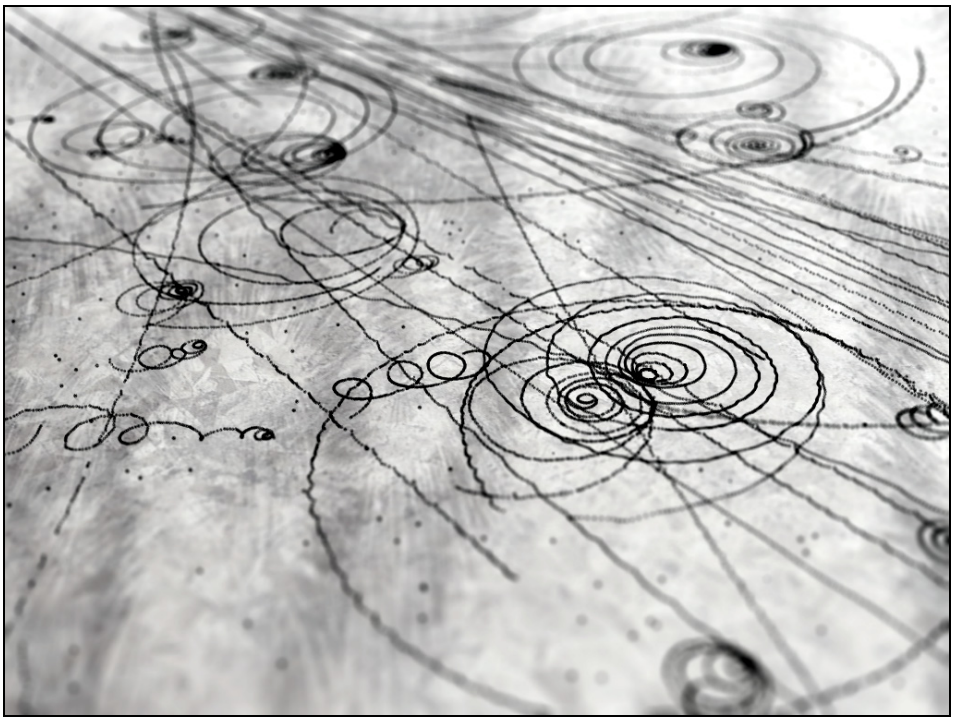
a vzhledem k zákonu zachování energie má částice různou rychlost

$$\frac{1}{2}mv^2 + Q\phi = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 > v_2 > v_3$$

a tím i různý Larmorův poloměr:

$$R_L = \frac{m\,v}{QB} \qquad \Rightarrow \qquad R_{L_1} > R_{L_2} > R_{L_3}\,.$$

Trochoidální trajektorii částice lze tedy interpretovat jako pohyb po kružnici s proměnným poloměrem. Na následujícím obrázku jsou typické stopy nabitých částic v mlžné komoře. Vliv magnetického pole na trajektorie částic je velmi dobře patrný.



Obr. 1.6: Stopy částic v mlžné komoře. Zdroj: Christian Parsons, Argentina.

1.2.2 Relativistické pohyby

Lagrangeova a Hamiltonova funkce

V Lagrangeově funkci (1.5) je správně relativisticky zapsána jen interakční část, protože vznikla jako skalární součin dvou čtyřvektorů. Akce pro volnou částici $\mathrm{d}S = L\mathrm{d}t$ by měla být invariantem teorie. V nerelativistické fyzice, kde je čas absolutní, postačí invariance Lagrangeovy funkce L. V relativitě požadujeme invarianci celého $L\mathrm{d}t$. Jediným invariantem je interval $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}l^2$. Ve vlastní soustavě částice je $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2$, kde τ je vlastní čas částice. Z poslední relace je patrné, že vlastní čas je také invariantem. Z porovnání obou vyjádření plyne vztah mezi vlastním a laboratorním časem

$$\mathrm{d}\tau \equiv \mathrm{d}t\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}\,, \tag{1.38}$$

Výraz $L\mathrm{d}t$ by tedy měl být funkcí tohoto invariantu, nejjednodušší volba je $L\mathrm{d}t = \alpha\mathrm{d}\tau$, tj.

$$L_{\mathrm{part}} = \alpha\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}\,.$$

Koeficient úměrnosti α určíme tak, aby v limitě malých rychlostí výraz přešel v Lagrangeovu funkci $m_0\mathbf{v}^2/2$ pro nerelativistickou částici (m_0 je klidová hmotnost částice):

$$L_{\mathrm{part}} = \alpha\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2} \approx \alpha\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{2c^2}\right) = \alpha - \alpha\frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = -m_0c^2.$$

Odmocninu jsme rozvinuli do prvního řádu za pomoci vztahu $(1+x)^n \approx 1+nx$, který platí pro $x \ll 1$. Posunutí o konstantu není podstatné. Výsledná Lagrangeova funkce pro relativistické pohyby nabitých částic v elektrických a magnetických polích tedy je

► $$L = -m_0c^2\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2} \;-\; Q\phi \;+\; Q\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\,. \tag{1.39}$$

Standardním způsobem určíme hybnost a energii:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0\,\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}} + Q\,\mathbf{A}\,, \tag{1.40}$$

$$\mathscr{E} = \frac{\partial L}{\partial\,\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} - L \;=\; \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}} + Q\phi\,, \tag{1.41}$$

Zavedeme-li standardním způsobem Lorentzův kontrakční faktor ze speciální relativity

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\,,$$

získají vztahy pro energii a hybnost jednoduchý tvar

► $$\mathbf{p} \equiv \gamma m_0\mathbf{v} + Q\mathbf{A}\,, \tag{1.42}$$

► $$\mathscr{E} = \gamma m_0c^2 + Q\phi\,. \tag{1.43}$$

Zavedeme-li tzv. „pohybovou“ hmotnost (není to příliš vhodné označení)

$$m \equiv \gamma m_0 \,, \tag{1.44}$$

získají vztahy pro hybnost a energii jednoduchý a srozumitelný tvar

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\,\mathbf{A}\,; \qquad \mathscr{E} = mc^2 + Q\phi\,. \tag{1.45}$$

Posledním krokem bude odvození Hamiltonovy funkce. Z klasické mechaniky víme, že je vždy možné nalézt Legendreovu duální transformaci, tj. z výrazů (1.40) a (1.41) vyloučit rychlost. Nejjednodušším postupem je ponechat na pravé straně výrazů jen odmocniny a rovnice umocnit na druhou:

$$\left(\mathbf{p} - Q\mathbf{A}\right)^2 = \frac{m_0^2\mathbf{v}^2}{1-\mathbf{v}^2/c^2}\,;$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\mathscr{E} - Q\phi\right)^2 = \frac{m_0^2c^2}{1-\mathbf{v}^2/c^2}\,.$$

Odečteme-li nyní obě rovnice od sebe, vykrátí se na pravé straně čitatel se jmenovatelem a zmizí závislost na rychlosti:

$$\frac{1}{c^2}\left(\mathscr{E} - Q\phi\right)^2 - \left(\mathbf{p} - Q\mathbf{A}\right)^2 = m_0^2c^2\,.$$

V tuto chvíli již stačí jen dopočítat energii a označit ji jako Hamiltonovu funkci:

$$H = c\sqrt{m_0^2c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2} + Q\phi\,. \tag{1.46}$$

Relativistická pohybová rovnice

Při odvozování relativistické pohybové rovnice budeme postupovat obdobně jako při odvození její nerelativistické varianty (1.9). Veškeré úpravy jsou zcela identické, jen za výraz $\partial L/\partial v_k$ dosadíme hybnost $\gamma m_0 v_k + Q\mathbf{A}$ ze vztahu (1.40) a dostaneme

► $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_0\gamma\mathbf{v}\right) = Q\,\mathbf{E} + Q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,, \tag{1.47}$$

což je známá Lorentzova pohybová rovnice obsahující na levé straně navíc Lorentzův faktor γ, který v sobě obsahuje rychlost, a to dokonce pod odmocninou. To je samozřejmě nepříjemné pro numerické simulace. Pro simulace je výhodnější použít Hamiltonovy rovnice, které jsou řešené vzhledem k nejvyšší (první) derivaci. Pokud chceme využít Lorentzovu pohybovou rovnici, je vhodná substituce

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\,, \tag{1.48}$$

která převede rovnici do tvaru výhodnějšího pro numerickou integraci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_0\mathbf{u}\right) = Q\,\mathbf{E} + \frac{Q\,\mathbf{u}\times\mathbf{B}}{\sqrt{1+\mathbf{u}^2/c^2}}\,. \tag{1.49}$$

Nyní přepíšeme pohybovou rovnici do lorentzovsky kovariantního tvaru. Pro tyto úpravy by měl být čtenář seznámený se základy speciální relativity, zejména s čtyřvektory a tenzorem elektromagnetického pole. Oboje lze najít v druhém díle „Vybraných kapitol“ [2], který má jak online, tak tištěnou verzi. Bez problémů může čtenář také zbytek této kapitoly vynechat. Samotné pole budeme popisovat čtyřpotenciálem a tenzorem elektromagnetického pole:

► $$A^{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \tag{1.50}$$

► $$F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E^x/c & E^y/c & E^z/c \\ -E^x/c & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y/c & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z/c & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.51}$$

Pro popis částice zavedeme čtyřrychlost jako

► $$U^{\alpha} \equiv \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}. \tag{1.52}$$

Časová derivace musí být podle vlastního času, jinak by byly změněny transformační vlastnosti čtyřvektoru. Pokud využijeme vztah (1.38), můžeme čtyřrychlost vyjádřit za pomoci běžné rychlosti $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ jako

$$U^{\alpha} \equiv \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix}. \tag{1.53}$$

Pro druhou mocninu velikosti čtyřrychlosti platí

$$U^{\alpha}U_{\alpha} \equiv \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{-c^2\mathrm{d}\tau^2}{\mathrm{d}\tau^2} = -c^2. \tag{1.54}$$

Skalární součin čtyřrychlosti se sebou samou je skutečně invariant nezávisící na volbě souřadnicové soustavy. Obdobně můžeme zavést čtyřzrychlení částice vztahem

$$a^{\alpha} = \frac{\mathrm{d}U^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} \tag{1.55}$$

Čtyřzrychlení je vždy kolmé na čtyřrychlost, což snadno odvodíme derivováním (1.54):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(U^{\alpha}U_{\alpha}\right) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}U^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}U_{\alpha} + U^{\alpha}\frac{\mathrm{d}U_{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = 0,$$

$$2\frac{\mathrm{d}U^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}U_{\alpha} = 0,$$

Odsud již okamžitě plyne

$$a^{\alpha}U_{\alpha} = 0\,. \tag{1.56}$$

Poslední veličinou, kterou budeme potřebovat, je čtyřhybnost definovaná vztahem

$$p^{\alpha} \equiv m_0 U^{\alpha} + QA^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c + Q\phi/c \\ \gamma m_0 \mathbf{v} + Q\mathbf{A} \end{pmatrix}. \tag{1.57}$$

Časová část čtyřhybnosti musí mít význam energie a prostorová význam vektoru hybnosti, tedy musí platit

$$\begin{pmatrix} \mathscr{E}/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c + Q\phi/c \\ \gamma m_0 \mathbf{v} + Q\mathbf{A} \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

Odsud snadno získáme již známé vztahy

$$\mathscr{E} = \gamma m_0 c^2 + Q\phi = mc^2 + Q\phi\,, \tag{1.59}$$

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} + Q\mathbf{A} = m\,\mathbf{v} + Q\mathbf{A}\,. \tag{1.60}$$

Snadno ověříme, že za pomoci čtyřrychlosti (1.53) a tenzoru pole (1.51) lze pohybovou rovnici (1.47) zapsat v elegantním tvaru

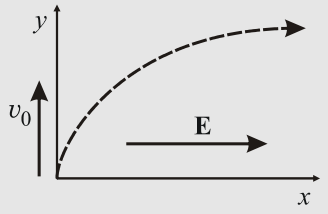
$$m_0 \frac{\mathrm{d}U^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = QF^{\alpha\beta}U_{\beta}\,. \tag{1.61}$$

Při přepisu využijeme rovnosti $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau = \gamma\,\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ a definice čtyřrychlosti (1.53). Prostorová složka dá Lorentzovu pohybovou rovnici, časová složka poskytne navíc energetickou bilanci

$$\frac{\mathrm{d}\,mc^2}{\mathrm{d}t} = Q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\,, \tag{1.62}$$

což není nic jiného než výkon dodávaný elektrickým polem (síla násobená rychlostí).

Pohyb v homogenním elektrickém poli



elektromagnetické pole

$\mathbf{E} = (E,0,0)$,

$\mathbf{B} = (0,0,0)$;

počáteční podmínky:

$\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$,

$\mathbf{p}(0) = (0,p_0,0)$, kde $p_0 \equiv \dfrac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$.

Úlohu budeme řešit jako rovinný (2D) problém. Volba souřadnicové soustavy je patrná z obrázku. Počáteční rychlost částice předpokládáme kolmou na elektrické pole. Potenciály polí zvolíme ve tvaru

$$\phi = -Ex\,,$$

$$\mathbf{A} = 0\,.$$

Hodnota potenciálu ϕ plyne ze vztahu (1.1) pro $\mathbf{A} = 0$. Hamiltonova funkce problému je

$$H = c\sqrt{m_0^2c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2} + Q\phi \;=\; c\sqrt{m_0^2c^2 + p_x^2 + p_y^2} - QEx$$

a příslušné Hamiltonovy rovnice mají tvar

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{cp_x}{\sqrt{m_0^2c^2 + p_x^2 + p_y^2}}\,, \tag{1.63}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{cp_y}{\sqrt{m_0^2c^2 + p_x^2 + p_y^2}}\,, \tag{1.64}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = QE\,, \tag{1.65}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0\,. \tag{1.66}$$

Integrací rovnic (1.65), (1.66) dostaneme

$$p_x(t) = QEt\,,$$
$$p_y(t) = p_y(0) = \text{const} = p_0\,.$$

Toto řešení dosadíme do rovnic (1.63), (1.64) a integrujeme (tabulku potřebných integrálů naleznete v prvním díle „Vybraných kapitol“, kapitola I.3.10.4, str. 369):

$$x(t) = \int_0^t \frac{cp_x}{\sqrt{m_0^2c^2 + p_x^2 + p_y^2}}\,\mathrm{d}t' = c\int_0^t \frac{QEt'}{\sqrt{\pi_0^2 + (QEt')^2}}\,\mathrm{d}t' = \frac{c}{QE}\left(\sqrt{\pi_0^2 + (QEt)^2} - \pi_0\right),$$

$$y(t) \;=\; \int_0^t \frac{cp_y}{\sqrt{m_0^2c^2 + p_x^2 + p_y^2}}\;\mathrm{d}t' \;=\; c\int_0^t \frac{p_0}{\sqrt{\pi_0^2 + (QEt')^2}}\,\mathrm{d}t' \;=\; \frac{p_0 c}{QE}\;\operatorname{argsh}\left(\frac{QEt}{\pi_0}\right).$$

Výsledné řešení je tedy dáno vztahy

► $$\begin{aligned} x(t) \;&=\; \frac{\pi_0 c}{QE}\left(\sqrt{1 \;+\; \left(QEt/\pi_0\right)^2} \;-\; 1\right), \\ y(t) \;&=\; \frac{p_0 c}{QE}\operatorname{argsh}\left(QEt/\pi_0\right), \end{aligned} \tag{1.67}$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned} p_0 \;&\equiv\; m_0\,v_0 \Big/ \sqrt{1 - v_0^2/c^2}\;, \\ \pi_0 \;&\equiv\; \sqrt{m_0^2c^2 \;+\; p_0^2}\;. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Ukažme nyní, že pro krátký čas výrazy přecházejí v nerelativistické. Tehdy platí

$$v \ll c \;\;(\text{tj. } p_0 \ll m_0 c) \;\;\Rightarrow\;\; \pi_0 \approx m_0 c\,; \;\; p_0 = m_0 v_0\,, \text{ tj.}$$

$$x(t) = \frac{m_0c^2}{QE}\left(\sqrt{1+\left(\frac{QEt}{m_0c}\right)^2} - 1\right) \approx \frac{m_0c^2}{QE}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{QEt}{m_0c}\right)^2 - 1\right) = \frac{QE}{2m_0}t^2 ,$$

$$y(t) = \frac{cm_0v_0}{QE}\,\mathrm{argsh}\left(\frac{QEt}{m_0c}\right) \approx \frac{cm_0v_0}{QE}\cdot\frac{QEt}{m_0c} = v_0 t .$$

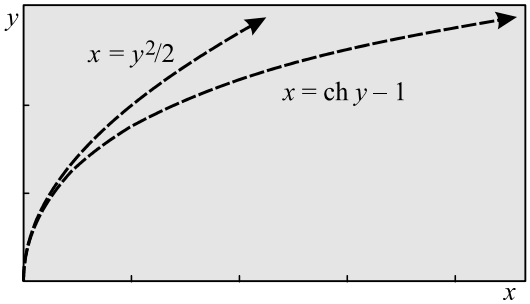
Vidíme, že výrazy přecházejí ve známé klasické vztahy – pohyb rovnoměrně zrychlený ve směru pole a pohyb rovnoměrný napříč polem. Na rozdíl od klasického případu nyní rychlost ve směru pole v_x při urychlování v homogenním elektrickém poli neroste nade všechny meze:

$$\lim_{t\to\infty} v_x(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lim_{t\to\infty}\frac{c}{QE}\cdot(QE)^2\cdot\frac{t}{\sqrt{\pi_0^2+(QEt)^2}} = c .$$

V libovolném konečném čase t je vždy $v_x < c$. Vyloučíme-li z (1.67) čas (z druhé rovnice dosadíme čas do první), dostaneme trajektorii částice

$$x = \frac{\pi_0 c}{QE}\left[\mathrm{ch}\left(\frac{QE}{p_0c}y\right) - 1\right] . \qquad (1.69)$$

Rozdíl mezi funkcemi $x = y^2/2$ (klasická trajektorie) a $x = \mathrm{ch}(y) - 1$ je na obrázku:



Obr. 1.8: Rozdíl mezi relativistickou (skutečnou) a nerelativistickou trajektorií

Kolineární magnetické a elektrické pole

Magnetické pole mění směr rychlosti částice, nikoli její velikost. Velmi zajímavá je ale situace, kdy magnetické a elektrické pole mají stejný směr. V takovém případě nedochází k **E**×**B** driftu, částice krouží kolem magnetických indukčních čar a podél nich je elektrickým polem urychlována limitně až k rychlosti světla, tedy její energie narůstá. Ukážeme, že i v této situaci se Larmorův poloměr nemění, nicméně dochází ke změně gyrofrekvence oběhu magnetických indukčních čar.

Neměnnost gyračního poloměru

Pokud čtenář nepotřebuje podrobnosti, může akceptovat neproměnnost gyračního poloměru a celou tuto kapitolu „Kolineární magnetické a elektrické pole“ vynechat. V kartézských souřadnicích budeme obě pole orientovat ve směru osy z, tj.

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= (0,0,B)\,,\\ \mathbf{E} &= (0,0,E)\,.\end{aligned} \tag{1.70}$$

Lorenzova pohybová rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma m_0 \mathbf{v}\right) = Q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \tag{1.71}$$

vede na soustavu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma v_x\right) &= \omega_{\mathrm{c}0} v_y\ ;\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma v_y\right) &= -\omega_{\mathrm{c}0} v_x\ ;\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma v_z\right) &= \frac{QE}{m_0}\,,\end{aligned} \tag{1.72}$$

kde jsme označili nerelativistickou cyklotronní frekvenci

$$\omega_{c0} \equiv QB/m_0\,. \tag{1.73}$$

První dvě rovnice jsou svázány se třetí Lorenzovým faktorem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/c^2}} \tag{1.74}$$

Zabývejme se pro tuto chvíli jen prvními dvěma rovnicemi, tedy projekcí pohybu do roviny (x, y) kolmé ($\perp$) na obě pole. Zaveďme vektor

$$\mathbf{K}_\perp \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma \mathbf{v}_\perp\right) = \left(\omega_{\mathrm{c}0} v_y, -\omega_{\mathrm{c}0} v_x\right). \tag{1.75}$$

Derivováním získáme

$$\mathbf{K}_\perp \equiv \dot{\gamma}\mathbf{v}_\perp + \gamma \mathbf{a}_\perp\,, \tag{1.76}$$

odkud dopočteme zrychlení v kolmé rovině

$$\mathbf{a}_\perp = \frac{\mathbf{K}_\perp}{\gamma} - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\mathbf{v}_\perp\,, \tag{1.77}$$

které je superpozicí dvou vektorů

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\mathbf{v}_\perp\,; \qquad \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{K}_\perp}{\gamma}\,. \tag{1.78}$$

První vektor míří ve směru projekce trajektorie do kolmé roviny (je úměrný $\mathbf{v}_\perp$) a druhý vektor je kolmý na první, protože

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \propto \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{K}_\perp = v_x \cdot \omega_{\mathrm{c}0} v_y - v_y \cdot \omega_{\mathrm{c}0} v_x = 0\,. \tag{1.79}$$

Druhý vektor je proto normálou k projekci trajektorie do kolmé roviny a má význam normálového zrychlení. S jeho pomocí můžeme spočítat poloměr oskulační kružnice

$$R = \frac{v_\perp^2}{|\,\mathbf{a}_2\,|} = \frac{v_\perp^2}{\dfrac{|\,\omega_{c0}\,|}{\gamma}\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = \frac{\gamma v_\perp}{|\,\omega_{c0}\,|}\,. \tag{1.80}$$

Nyní ukážeme, že poloměr oskulační kružnice k projekci trajektorie do kolmé roviny je konstantní, a proto se v rovině kolmé na pole jedná o pohyb po kružnici. Postačí dokázat, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma v_\perp) = 0\,. \tag{1.81}$$

Zaveďme vektor

$$\mathbf{u}_\perp \equiv \gamma \mathbf{v}_\perp. \tag{1.82}$$

Důkaz výše uvedeného tvrzení je nyní relativně přímočarý:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma v_\perp) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_\perp = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{u_x^2+u_y^2} \;=\; \frac{\mathbf{u}_\perp\cdot\dot{\mathbf{u}}_\perp}{u_\perp}.$$

Ze vztahu (1.75) je nyní zřejmé, že

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_\perp}{\mathrm{d}t} = \mathbf{K}_\perp\,, \tag{1.83}$$

a proto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma v_\perp) \;\propto\; \mathbf{u}_\perp\cdot\mathbf{K}_\perp = (\gamma v_x, \gamma v_y)\cdot(\omega_{c0}v_y, -\omega_{c0}v_x) = 0\,. \tag{1.84}$$

Tím jsme dokázali, že jde o pohyb po kružnici s Larmorovým poloměrem daným výrazem (1.80)

► $$R_L = \frac{\gamma v_\perp}{|\,\omega_{c0}\,|} = \text{const}\,, \tag{1.85}$$

který se v průběhu pohybu nemění. Nárůst podélné složky rychlosti vede na nárůst γ, který je kompenzpován poklesem kolmé složky rychlosti. Výraz můžeme přepsat pomocí jednotlivých složek rychlostí ve válcových souřadnicích, v nichž je $v_r = 0$, $v_\perp = v_\varphi$:

$$R_L = \frac{v_\varphi}{|\,\omega_{c0}\,|\sqrt{1-(v_\varphi^2+v_z^2)/c^2}}\,. \tag{1.86}$$

Nárůst podélné složky rychlosti způsobený urychlením elektrickým polem je kompenzován poklesem azimutální složky rychlosti, proto zůstává Larmorův poloměr neměnný. Zapišme pro další použití Larmorův gyrační poloměr ještě (1.85) za pomoci počátečních hodnot:

$$R_L = \frac{u_0}{|\,\omega_{c0}\,|}\,; \qquad u_0 \equiv \frac{v_{\varphi 0}}{\sqrt{1-(v_{\varphi 0}^2+v_{z0}^2)/c^2}}\,. \tag{1.87}$$

Závislost obou složek rychlosti na čase

Z poslední komponenty pohybové rovnice (1.72), kterou jsme zatím nepoužili, plyne

$$\gamma v_z = \frac{QE}{m_0}\left(t - t_0\right), \tag{1.88}$$

kde t_0 je čas v minulosti, v němž byla podélná složka rychlosti nulová. Pro trajektorii s fixním Larmorovým poloměrem je ($v_r = 0$)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v_\varphi^2+v_z^2)/c^2}}. \tag{1.89}$$

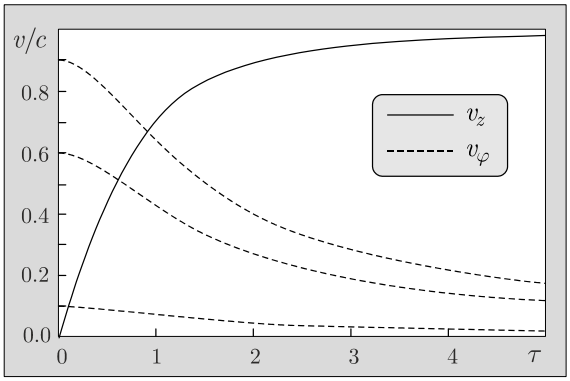
Ze soustavy rovnic (1.86), (1.88) a (1.89) snadno určíme závislosti na čase

$$v_\varphi(\tau) = \frac{u_0}{\sqrt{\left(1+u_0^2/c^2\right)\left(1+\tau^2\right)}}; \qquad v_z(\tau) = \frac{c\,\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}; \tag{1.90}$$

$$\gamma(\tau) = \sqrt{\left(1+u_0^2/c^2\right)\left(1+\tau^2\right)}, \tag{1.91}$$

kde jsme Larmorův poloměr vyjádřili z (1.87) a symbolem τ jsme označili bezrozměrný časový interval počítaný od okamžiku, kdy je podélná (z) složka rychlosti nulová:

$$\tau \equiv \frac{QE}{m_0 c}\frac{t-t_0}{\sqrt{1+u_0^2/c^2}}, \tag{1.92}$$



Obr. 1.9: Podélná složka rychlosti s časem narůstá a limitně se blíží rychlosti světla. Příčná (azimutální) složka rychlosti naopak klesá (křivky odpovídají různým počátečním hodnotám). Radiální složka je nulová. Bezrozměrný čas τ je definován vztahem (1.92).

S klesající azimutální složkou rychlosti dochází k poklesu gyrační frekvence

► $$\omega_c(\tau) = \dot{\varphi} = \frac{v_\varphi}{R_L} = \frac{\omega_{c0}}{\gamma} = \frac{\omega_{c0}}{\sqrt{\left(1+u_0^2/c^2\right)\left(1+\tau^2\right)}}. \tag{1.93}$$

1.2.3 Adiabatické přiblížení

V teoretické mechanice nemáme jen základní zákony zachování související se symetriemi v přírodě (zachování energie, hybnosti, momentu hybnosti a dalších veličin), ale i tzv. *adiabatické invarianty*. Představme si, že popisujeme libovolný periodický pohyb v nějaké proměnné q (úhel, vzdálenost atd.). Pokud existují další pole, která se za jednu periodu pohybu změní jen málo (hovoříme o tzv. adiabatickém ději), potom lze ukázat, že se bude zachovávat veličina

► $$I \equiv \oint p_q \, \mathrm{d}q = \mathrm{const}\,, \tag{1.94}$$

kde p_q je zobecněná hybnost vzhledem k proměnné q. Takovou veličinu nazýváme adiabatickým invariantem. Detailní odvození čtenář nalezne v prvním díle „Vybraných kapitol“ [1].

Ve fyzice plazmatu budeme předpokládat, že magnetické pole ovlivňuje pohyb nabitých částic dominantně a základním periodickým pohybem je tedy Larmorova rotace neboli gyrace kolem magnetických indukčních čar. V plazmatu mohou být samozřejmě přítomna i další pole, například elektrické a gravitační. Předpokládejme, že všechna pole se za jednu Larmorovu otočku změní jen málo. V čase to znamená, že dojde k malé změně polí za dobu jedné otočky částice; v prostoru tato podmínka říká, že se pole změní málo na Larmorově poloměru. Matematicky lze oba předpoklady vyjádřit takto:

$$\left|\frac{\partial F_k}{\partial t}\right| \ll \frac{F}{T}\,; \qquad \left|\frac{\partial F_k}{\partial x_l}\right| \ll \frac{F}{R_\mathrm{L}} \qquad \text{pro } \forall k,l\,, \tag{1.95}$$

kde **F** je jakékoli pole ovlivňující pohyb částic. Pole se mohou měnit v čase i v prostoru, ale jen v malé míře. Za tohoto předpokladu se zachovává veličina, kterou nazýváme *první adiabatický invariant*. V dalších výpočtech budeme často potřebovat znát projekci rychlosti částice do směru magnetického pole (ve směru pole je pohyb volný a částice se pohybuje podél indukčních čar) a projekci do směru kolmého na indukční čáry (odpovídá Larmorově rotaci):

► $$\mathbf{v}_{\parallel} = \text{ velikost} \times \text{směr} = \left(\mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{B}}{B}\right)\frac{\mathbf{B}}{B} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_B)\mathbf{e}_B\,, \tag{1.96}$$

► $$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_B)\mathbf{e}_B = \mathbf{v}(\mathbf{e}_B\cdot\mathbf{e}_B) - \mathbf{e}_B(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_B) = \mathbf{e}_B\times(\mathbf{v}\times\mathbf{e}_B)\,. \tag{1.97}$$

První adiabatický invariant

Při gyračním pohybu bude patřičnou zobecněnou souřadnicí, v níž se periodický pohyb koná, úhel popisující rotaci. Zobecněnou hybností polom bude moment hybnosti vzhledem k ose gyrace. Pokud se ostatní pole mění jen málo, bude se zachovávat veličina

$$I \equiv \oint p_q \, \mathrm{d}q = mR_\mathrm{L}v_\perp \cdot 2\pi \tag{1.98}$$

Po dosazení za Larmorův poloměr ze vztahu (1.20) dostaneme

$$\frac{v_\perp^2}{B} = \mathrm{const} \tag{1.99}$$

To znamená, že s rostoucím polem se zvětšuje kolmá složka rychlosti, tj. úhel mezi trajektorií částice a magnetickým polem se zvětšuje. Tento invariant se nazývá první adiabatický invariant a většinou se k němu přidávají konstanty tak, aby měl význam podílu kolmé složky kinetické energie a magnetického pole:

► $$\mu \equiv \frac{m v_\perp^2}{2B} = \text{const} \tag{1.100}$$

Ukažme nyní na jednoduchém modelovém příkladu, že se tato veličina zachovává. Uvažujme homogenní magnetické pole, jehož velikost v čase narůstá (magnetické indukční čáry houstnou). Nenulová změna magnetického pole $\partial\mathbf{B}/\partial t$ míří ve směru pole (pole roste) a podle Maxwellovy rovnice $\text{rot}\,\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ musí vzniknout vír elektrického pole, které bude urychlovat kroužící částici. Nárůst kinetické energie tohoto pohybu (jde o kolmou složku celkové kinetické energie) bude

$$\Delta W_\perp = \oint\limits_{\gamma=\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint\limits_{\gamma=\partial S} Q\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} =$$

$$= Q\int\limits_S (\text{rot}\,\mathbf{E})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -Q\int\limits_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \cong Q\frac{\partial B}{\partial t}\pi R_\mathrm{L}^2 .$$

Při odvození jsme využili Stokesovu větu, Faradayův indukční zákon a v poslední rovnosti adiabatické přiblížení – pole se změní málo za jednu periodu, proto lze časovou změnu pole v průběhu integrace považovat za konstantní a vytknout z integrace. Navíc můžeme derivaci pole nahradit jeho změnou za jednu otočku, tedy za periodu:

$$\Delta W_\perp \cong Q\frac{\Delta B}{T}\pi R_\mathrm{L}^2 = Q\frac{\Delta B}{2\pi/\omega_\mathrm{c}}\pi R_\mathrm{L}^2 .$$

Nyní dosadíme dříve odvozené vztahy pro Larmorův poloměr $R_\mathrm{L} = mv_\perp/QB$ a cyklotronní frekvenci $\omega_\mathrm{c} = QB/m$ a dostaneme relaci

$$\Delta W_\perp = \frac{m v_\perp^2}{2}\frac{\Delta B}{B} = W_\perp\frac{\Delta B}{B} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta W_\perp}{W_\perp} = \frac{\Delta B}{B} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{\mathrm{d}W_\perp}{W_\perp} = \int\frac{\mathrm{d}B}{B} \quad \Rightarrow$$

$$\ln\frac{W_\perp}{W_{\perp 0}} = \ln\frac{B}{B_0} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{W_\perp}{W_{\perp 0}} = \frac{B}{B_0} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{W_\perp}{B} = \frac{W_{\perp 0}}{B_0} = \text{const} \quad \Rightarrow$$

$$\mu \equiv \frac{W_\perp}{B} = \frac{m v_\perp^2}{2B} = \text{const} . \tag{1.101}$$

Na konkrétním příkladě jsme tedy ukázali, že obecná formule (1.100) platí.

Poznámka: První adiabatický invariant má několik významů:

$$\begin{aligned} &1) \quad \mu = \frac{m v_\perp^2}{2B} = \frac{W_\perp}{B}; \\ &2) \quad \mu = IS; \\ &3) \quad \mu = \left| \frac{1}{2} Q \mathbf{r} \times \mathbf{v} \right|. \end{aligned} \tag{1.102}$$

Z druhého nebo třetího vyjádření vidíme, že jde o velikost *magnetického momentu* gyrující částice. Ekvivalence všech vyjádření je zřejmá z přímého dosazení (I je elektrický proud generovaný gyrující částicí):

$$IS = \frac{Q}{T} \pi R_\mathrm{L}^2 = \cdots = \frac{m v_\perp^2}{2B};$$

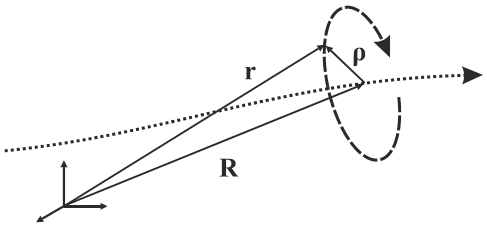
$$\left| \frac{1}{2} Q \mathbf{r} \times \mathbf{v} \right| = \frac{1}{2} Q R_\mathrm{L} v_\perp = \cdots = \frac{m v_\perp^2}{2B}.$$

Pohyb gyračního středu

V mnoha případech nepotřebujeme znát detailní pohyb částice v magnetickém poli. Vystředujeme-li přes známý gyrační pohyb, můžeme se zabývat jen pohybem samotného gyračního středu. Při odvození budeme používat malý parametr ε, který bude určovat, které členy jsou podstatné a které nikoli. Po vystředování provedeme limitu $\varepsilon \to 1$. Až do vystředování budeme používat dva časy:

- t pomalu se měnící čas ve shodě s adiabatickým přiblížením (čas, který popisuje změny polí),
- τ rychle se měnící čas popisující jednotlivé fáze gyrace. Přes tento čas budeme středovat a budeme předpokládat, že $\tau \sim t/\varepsilon$.

Označme (viz obrázek) $\mathbf{R}(t)$ polohu gyračního středu, $\mathbf{r}(t, \tau)$ skutečnou polohu gyrující částice a $\boldsymbol{\rho}(t, \tau)$ vektor gyrace, přes který budeme středovat:



Obr. 1.10: Pohyb gyračního středu (tečkovaně) a pohyb částice (čárkovaně)

Souřadnicový systém zavedeme tak, aby třetí osa lokálně mířila ve směru magnetického pole, tedy bude platit

$$\mathbf{e}_3(t) = \mathbf{B}/B. \tag{1.103}$$

Polohový vektor částice podle obrázku bude:

$$\mathbf{r}(t,\tau) = \mathbf{R}(t) + \varepsilon\,\boldsymbol{\rho}(t,\tau)\,. \tag{1.104}$$

Parametrem ε označujeme, že gyrace je pro nás méně podstatný jev než pohyb gyračního středu. Podle (1.19) budeme pro gyraci v našem souřadnicovém systému mít

$$\boldsymbol{\rho}(t,\tau) = -\mathbf{e}_1(t)R_{\mathrm{L}}(t)\cos\left(\omega_{\mathrm{c}}(t)\,\tau\right) + \mathbf{e}_2(t)R_{\mathrm{L}}(t)\sin\left(\omega_{\mathrm{c}}(t)\,\tau\right). \tag{1.105}$$

Povšimněte si, že rychlé změny související s gyrací jsou označeny časem τ, přes který budeme středovat. Pohybovou rovnici částice zapíšeme ve tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} + Q\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{B}\,. \tag{1.106}$$

V principu bychom mohli i v pohybové rovnici parametrem ε odlišit důležité a méně důležité členy, ale není to pro další výpočet podstatné. Pole jsou v této rovnici počítána v místě pohybu nabité částice, tedy v argumentech (t, $\mathbf{r}$):

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t,\mathbf{r}) + Q\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{B}(t,\mathbf{r})\,, \tag{1.107}$$

Nyní ve shodě s (1.104) vypočteme jednotlivé členy. Derivaci podle času t budeme označovat tečkou, derivaci podle rychlého času $\tau \sim t/\varepsilon$ čárkou, tj. $\partial/\partial t \to \cdot$, $\partial/\partial\tau \to '$. Dále platí $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t \sim 1/\varepsilon$. Obě pole ($\mathbf{F}$, $\mathbf{B}$) vyjádříme v argumentu (1.104) a provedeme Taylorův rozvoj do prvního řádu:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \varepsilon\,\boldsymbol{\rho}(t,\tau)\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{R}} + \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}'\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\mathbf{R}} + \varepsilon\,\ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\dot{\boldsymbol{\rho}}' + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{\rho}''\,;$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t,\mathbf{r}) \approx \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t,\mathbf{R}) + \varepsilon(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\,;$$

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{r}) \approx \mathbf{B}(t,\mathbf{R}) + \varepsilon(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\,.$$

Po dosazení získáme pohybovou rovnici ve tvaru

$$m\left[\ddot{\mathbf{R}} + \varepsilon\,\ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\dot{\boldsymbol{\rho}}' + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{\rho}''\right] =$$

$$= \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{R}) + \varepsilon(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} + Q\left[\dot{\mathbf{R}} + \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}'\right]\times\left[\mathbf{B}(\mathbf{R}) + \varepsilon(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\right].$$

Nyní provedeme středování přes rychle se měnící čas τ. Z (1.105) je vidět, že

$$\langle\boldsymbol{\rho}\rangle_\tau = \langle\dot{\boldsymbol{\rho}}\rangle_\tau = \langle\boldsymbol{\rho}'\rangle_\tau = \langle\dot{\boldsymbol{\rho}}'\rangle_\tau = \langle\ddot{\boldsymbol{\rho}}\rangle_\tau = \langle\boldsymbol{\rho}''\rangle_\tau = 0\,. \tag{1.108}$$

Nenulové zůstanou jen střední hodnoty z druhé mocniny vektoru gyrace $\boldsymbol{\rho}$. V pohybové rovnici ponecháme jen členy do prvního řádu v ε:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{R}) + Q\dot{\mathbf{R}}\times\mathbf{B}(\mathbf{R}) + \varepsilon Q\left\langle\boldsymbol{\rho}'\times(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\right\rangle_\tau.$$

Zbývá tedy provést středování posledního členu. Za vektor gyrace dosadíme z (1.105), za gradient $\mathbf{e}_1\partial_x + \mathbf{e}_2\partial_y + \mathbf{e}_3\partial_z$ a využijeme relací

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\,; \qquad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\,; \qquad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\,; \qquad \mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_3\,;$$

$$\left\langle \cos\omega_c\tau \right\rangle_\tau = \left\langle \sin\omega_c\tau \right\rangle_\tau = \left\langle \sin\omega_c\tau\cos\omega_c\tau \right\rangle_\tau = 0\,; \qquad \left\langle \cos^2\omega_c\tau \right\rangle_\tau = \left\langle \sin^2\omega_c\tau \right\rangle_\tau = \frac{1}{2}\,.$$

Středování se netýká vektorů $\mathbf{e}_k$, které se mění s pomalým časem t. Při středování zmizí třetí složka gradientu. Na vině je předpoklad, že se částice pohybuje jen v rovině (xy). Výsledek provedeného středování je

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{R}) + Q\dot{\mathbf{R}}\times\mathbf{B}(\mathbf{R}) - \varepsilon\frac{m v_\perp^2}{2B}\nabla B\,.$$

Po provedení limity $\varepsilon \to 1$ získáme hledanou pohybovou rovnici pro gyrační střed

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + Q\dot{\mathbf{R}}\times\mathbf{B} - \mu\nabla B\,;$$

$$\mu \equiv \frac{m v_\perp^2}{2B}\,. \qquad (1.109)$$

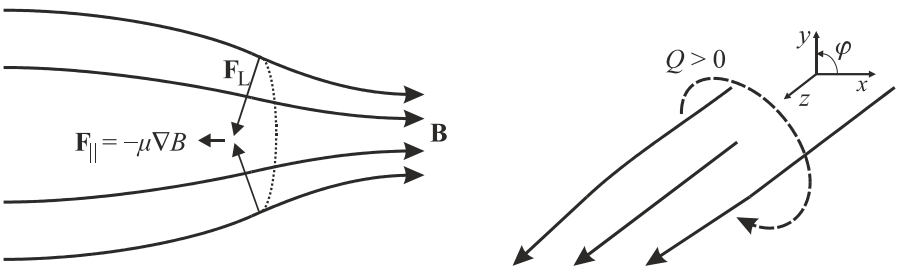
►

Poznámka: Všechny síly v rovnici jsou fiktivní, působí v gyračním středu, kde ve skutečnosti žádná částice není.

Síla –μ grad B

Nová síla $-\mu\nabla B$ vytlačuje částice z oblastí silnějších magnetických polí. Závisí jen na velikosti pole B, nikoli na jeho směru. Míří z oblasti silnějšího magnetického pole do oblasti slabšího pole. Koeficientem je první adiabatický invariant. Síla opět působí v místě gyračního středu a jde tedy o fiktivní sílu. Původ této síly je pro případ zhušťujících se siločar patrný z obrázku 1.11. Lorentzova síla je kolmá k indukčním čarám a vzhledem ke konečné velikosti trajektorie musí při středování vzniknout nenulová složka rovnoběžná s osou systému, která gyrující částici vytlačuje z hustého pole. Předpokládejme, že původní neporušené pole mířilo v ose z:

$$\mathbf{B} = (0, 0, B)\,.$$



Obr. 1.11: Grad *B* síla při „přibližování“ indukčních čar

Zaveďme nyní malou poruchu pole $\partial B/\partial z > 0$ podle pravého obrázku. V tu chvíli ale nutně vzniká nenulová radiální složka pole B_r (ve válcových souřadnicích) a síla F_z vytlačující částici z oblasti zhuštění. Nejlépe je to vidět z rovnice div **B** = 0 přepsané do válcových souřadnic ($B_\varphi = 0$):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right)+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right)=-r\frac{\partial B_z}{\partial z}\,, \qquad /\int$$

$$rB_r=-\frac{r^2}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}\,,$$

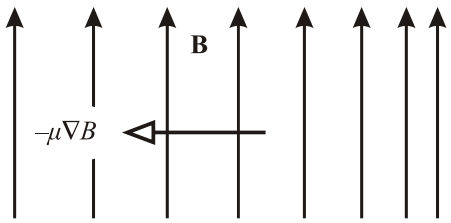
$$B_r=-\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}\cong-\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial z}.$$

Tato radiální složka pole ($B_r \ll B_z \cong B$) způsobuje vznik síly v ose z:

$$F_z=-Qv_\varphi B_r=-Q\left(-\omega_\mathrm{c}R_\mathrm{L}\right)\left(-\frac{R_\mathrm{L}}{2}\frac{\partial B}{\partial z}\right)=-\frac{Q\omega_\mathrm{c}R_\mathrm{L}^2}{2}\frac{\partial B}{\partial z}\,.$$

Podle obrázku 1.11 je úhlová složka rychlosti pro kladný náboj záporná. Po dosazení za úhlovou frekvenci a Larmorův poloměr z (1.20) dostaneme

$$F_z=-\frac{mv_\perp^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial z}=-\mu\frac{\partial B}{\partial z}.$$



Obr. 1.12: Grad *B* síla při zhušťování indukčních čar

Sílu $-\mu\nabla B$ lze tedy získat i jinak než středováním přes gyraci. Postup přes středování je ovšem obecnější, protože tuto sílu získáme i v případě, kdy působí kolmo na indukční čáry a pole se zhušťuje ve směru kolmém na indukční čáry, tj. například $\partial B_z/\partial x \neq 0$:

Driftová rovnice

Násobme rovnici pro pohyb gyračního středu (1.109) vektorově magnetickým polem. Po standardní úpravě dvojného vektorového součinu a vydělení celé rovnice výrazem QB^2 dostaneme

$$\dot{\mathbf{R}}-\left(\dot{\mathbf{R}}\cdot\frac{\mathbf{B}}{B}\right)\frac{\mathbf{B}}{B}=\frac{\mathbf{F}_\mathrm{ext}\times\mathbf{B}-\mu\nabla B\times\mathbf{B}-m\ddot{\mathbf{R}}\times\mathbf{B}}{QB^2}\,.$$

Druhý výraz na levé straně je projekcí rychlosti gyračního středu do směru magnetického pole, tj. levá strana má tvar $\dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{R}}_{||}$, což je kolmá projekce rychlosti gyračního středu:

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B \times \mathbf{B} - m\ddot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}}{QB^2} \,. \tag{1.110}$$

Odvozená rovnice se nazývá *driftová rovnice*. Gyrační střed se může pohybovat nenulovou rychlostí $\dot{\mathbf{R}}_{\perp}$ kolmo na indukční čáry magnetického pole. Takový pohyb nazýváme drift a může vzniknout třemi způsoby odpovídajícími třem členům rovnice na pravé straně. První příčinou mohou být vnější pole, například elektrické nebo gravitační. Druhou příčinou může být nehomogenita magnetického pole, která vede na grad *B* drift. Poslední příčinou může být nerovnoměrný pohyb gyračního středu. Buď je způsobený změnou směru rychlosti gyračního středu pod vlivem zakřivení indukčních čar (*drifty zakřivení*) nebo změnou velikosti rychlosti gyračního středu (*inerciální drifty*).

Driftování nabitých částic kolmo na magnetické pole je velice častým jevem v plazmatu. Většinou jde o kombinaci několika driftů naráz, neboť některé drifty způsobí separaci náboje a vznik elektrického pole, které následně vede na drift v elektrickém poli. Pokud se situace pomalu mění, driftová rychlost gyračního středu tyto změny sleduje a poslední člen v driftové rovnici je nenulový. Vznikne například inerciální drift způsobený změnou velikosti rychlosti gyračního středu.

Drifty

E×B drift
Jde o drift nabité částice v elektrickém a magnetickém poli. V jednoduché podobě jsme se s ním již seznámili v kapitole 1.2.1. Z driftové rovnice (1.110) plyne pro $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mathbf{B}^2} \,. \tag{1.111}$$

Driftová rychlost je kolmá k oběma polím a její velikost je

$$v_E = \frac{E}{B} \sin \alpha \,, \tag{1.112}$$

kde α je úhel mezi oběma poli. Dříve odvozený vztah (1.33) pro driftovou rychlost je speciálním případem vztahu (1.111). Driftová rychlost nezávisí na hmotnosti a náboji částice, elektrony i ionty v elektrickém poli driftují stejným směrem. Tento drift nebude původcem elektrického proudu.

Gravitační drift
V tíhovém poli $\mathbf{F} = m\,\mathbf{g}$ a magnetickém poli dochází k driftu rychlostí

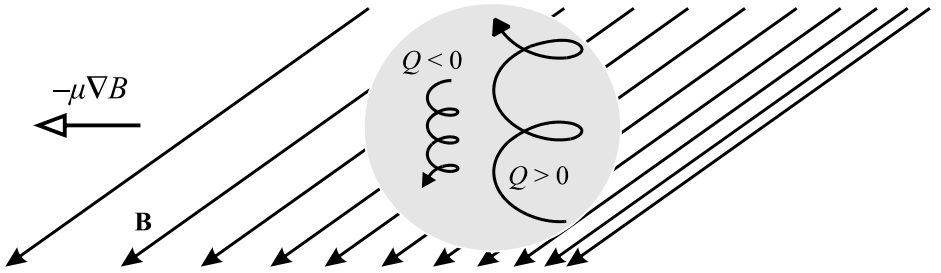
$$\mathbf{v}_g = \frac{m\,\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{Q\,\mathbf{B}^2} \,, \tag{1.113}$$

která je kolmá ke gravitačnímu i magnetickému poli. Její směr závisí na náboji částice a pro elektrony a ionty je opačný. Velikost síly závisí na hmotnosti částic. Drift může být zdrojem elektrických proudů, vede k separaci náboje, která následně způsobí sekundární **E×B** drift.

Grad |B| drift

Tento drift je způsoben změnou velikosti magnetického pole. Příslušná driftová rychlost má velikost

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{-\mu \nabla B \times \mathbf{B}}{QB^2} = \frac{m v_\perp^2}{2Q} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3} \ . \tag{1.114}$$



Obr. 1.13: Grad *B* drift

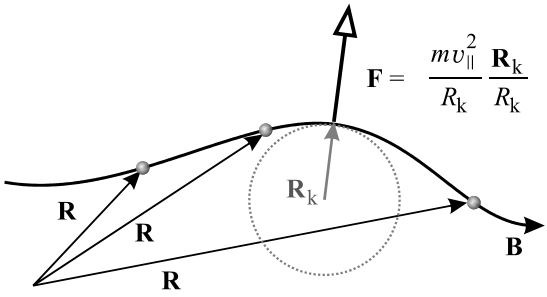
Grad *B* drift závisí na *kolmé složce* rychlosti, hmotnosti a náboji částic. Vede k různému driftování elektronů a iontů a ke vzniku elektrického proudu v plazmatu. Drift následně vede k separaci náboje, která způsobí sekundární **E**×**B** drift.

Drift zakřivení

Při pohybu kolem zakřivené indukční čáry bude na částici působit odstředivá síla

$$\mathbf{F} = -m\ddot{\mathbf{R}} = \frac{m v_\parallel^2}{R_\mathrm{k}} \frac{\mathbf{R}_\mathrm{k}}{R_\mathrm{k}} , \tag{1.115}$$

kde $\mathbf{R}_\mathrm{k}$ je poloměr křivosti indukční čáry.



Obr. 1.14: Drift zakřivení

Rychlost driftu zakřivení je

$$\mathbf{v}_R = \frac{m v_\parallel^2}{Q B^2} \frac{\mathbf{R}_\mathrm{k} \times \mathbf{B}}{R_\mathrm{k}^2} \ . \tag{1.116}$$

Drift zakřivení závisí (na rozdíl od grad B driftu) na *podélné složce* rychlosti. Opět povede ke vzniku proudu v plazmatu a separaci náboje. Poloměr křivosti parametricky zadané křivky $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ můžeme určit ze vztahu:

$$\frac{1}{R_\mathrm{k}} = \left\| \mathrm{d}^2\mathbf{r} \big/ \mathrm{d}s^2 \right\|; \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ \mathrm{d}t\ . \quad (1.117)$$

Někdy může být užitečné jiné vyjádření poloměru křivosti, které se hodí k přímému dosazení do vztahu (1.116).

$$\frac{1}{R_\mathrm{k}} \frac{\mathbf{R}_\mathrm{k}}{R_\mathrm{k}} = \frac{\mathbf{R}_\mathrm{k}}{R_\mathrm{k}^2} \cong \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \frac{\mathbf{B}}{B}\,. \quad (1.118)$$

Polarizační drift

Bude-li se velikost elektrického pole pomalu měnit v čase, bude se také měnit driftová rychlost gyračního středu $\mathbf{v}_E(t)$. To povede ke vzniku inerciálního driftu odpovídajícímu inerciální síle

$$-m\ddot{\mathbf{R}} = -m\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}_\mathrm{E}\,(t)}{\mathrm{d}t} = -m\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}/\mathrm{d}t \times \mathbf{B}}{B^2}$$

a polarizačnímu driftu

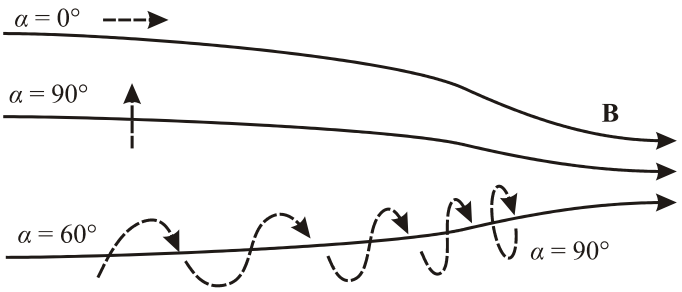
► $$\mathbf{v}_\mathrm{P} = \frac{m}{QB^4}\left[\mathbf{B} \times \left(\mathrm{d}\mathbf{E}/\mathrm{d}t \times \mathbf{B}\right)\right], \quad (1.119)$$

který je opět původcem vzniku proudu v plazmatu. Drift vede k separaci náboje, která následně způsobí sekundární $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ drift. Běžnou situací tak je, že jeden drift je příčinou dalších následných driftů.

1.2.4 Pohyby ve speciálních konfiguracích

Magnetické zrcadlo

Pokud se částice pohybuje pomalu proměnným magnetickým polem, bude se měnit sklon gyrační kružnice vzhledem k magnetickým indukčním čarám. Označme úhel mezi rychlostí částice a indukčními čarami α:



Obr. 1.15: Magnetické zrcadlo

Složky rychlosti ve směru pole a kolmo na pole budou dány vztahy

$$v_{||} = v\cos\alpha \qquad ; \qquad v_{\perp} = v\sin\alpha\,. \tag{1.120}$$

Ze zákona zachování energie $\mathscr{E}$ a adiabatického invariantu μ

$$\begin{gathered}\mathscr{E} = \frac{1}{2}mv^2 + Q\phi = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{||}^2 = \text{const}\,; \\ \mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{const}\end{gathered} \tag{1.121}$$

plyne tzv. zrcadlová rovnice

► $$\frac{\sin^2\alpha}{B} = \text{const} \qquad ; \qquad \text{tj.} \quad \frac{\sin^2\alpha}{B} = \frac{\sin^2\alpha_0}{B_0}\,. \tag{1.122}$$

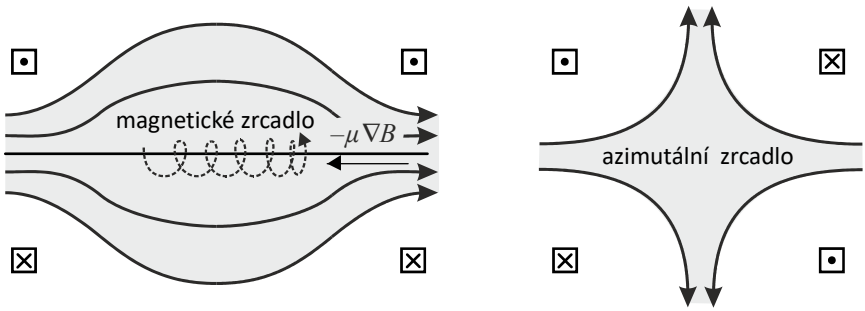
Index 0 označuje hodnoty pole a úhlu v místě nástřelu částice. Do čím silnějšího pole se dostane částice, tím kolměji je postavena její Larmorova šroubovice. Pokud bude rovina gyrace kolmá k poli (α = 90°), částice se odrazí. Z (1.122) plyne, že částice nastřelená pod úhlem α_0 v místě s polem B_0 bude obrácena zpět, vzroste-li velikost pole na kritickou hodnotu

$$B_c = \frac{B_0}{\sin^2\alpha_0}\,. \tag{1.123}$$

Nedosáhne-li magnetické pole této hodnoty, částice oblastí hustých indukčních čar prolétne. Máme-li naopak zadáno maximální pole $B_{\max}$, potom částice, které nalétly

v místě s polem B_0, prolétnou oblastí zvýšeného pole, pokud bude pro jejich impaktní úhel platit (budou v tzv. únikovém kuželu)

$$\alpha < \alpha_c \; ; \qquad \sin^2 \alpha_c = \frac{B_0}{B_{\max}} \; . \tag{1.124}$$

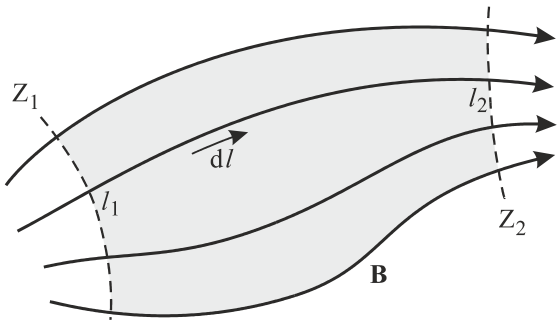


Obr. 1.16: Magnetická zrcadla tvořená cívkami

Nejjednodušší magnetické zrcadlo získáme pomocí dvou shodně orientovaných cívek na obrázku vlevo. Záměnou směru proudu v cívkách vznikne tzv. azimutální zrcadlo (obrázek napravo). V azimutálním zrcadle je v centru $B = |\mathbf{B}| = 0$, Larmorův poloměr je nekonečný, cyklotronní frekvence nulová a změny polí nejsou malé ve srovnání s Larmorovou rotací. Adiabatický invariant μ se nezachovává a částice, které prošly centrální oblastí, se snadno dostanou do únikového kužele. Pohyb částic v azimutálním zrcadle není možné řešit v adiabatickém přiblížení, je třeba použít kompletní Lorentzovu pohybovou rovnici.

Druhý adiabatický invariant, Fermiho mechanizmus

Uvažujme nyní pohyb částice mezi dvěma zrcadly. K takové situaci může dojít v poli dipólu (Van Allenovy pásy u Země), tokamaku (banánový orbit) nebo mezi dvěma cívkami.



Obr. 1.17: Druhý adiabatický invariant. V šedé oblasti se pohybují částice.

Částice koná dva periodické pohyby:

1) Larmorovu rotaci, se kterou je spojen první adiabatický invariant μ;
2) pohyb od jednoho zrcadla k druhému a zpět (zakmitávání, bouncing).

Předpokládejme, že magnetické pole se mění s časem pomalu v porovnání s periodickým pohybem mezi zrcadly. Při takové změně se samozřejmě bude poloha zrcadel Z_1 a Z_2 přesouvat. Z teoretické mechaniky víme, že by se měl zachovávat tzv. druhý adiabatický invariant

$$I_2 \equiv \oint v_{\parallel} \, \mathrm{d}l \, . \tag{1.125}$$

pro který platí

Fermiho urychlování prvního druhu
Představme si, že pole sílí a obě zrcadla se k sobě pomalu přibližují. Dále předpokládejme, že oblast změny pole je malá v porovnání se vzdáleností mezi zrcadly. Pak můžeme pro druhý adiabatický invariant přibližně psát:

► $$2L \, v_{\parallel} \approx \text{const} \, , \tag{1.126}$$

kde L je vzdálenost mezi zrcadly. Je zřejmé, že při zmenšování vzdálenosti L mezi zrcadly musí docházet k zvětšení podélné složky rychlosti a tím i k zvětšení celkové energie částice. Částice přebírá při odrazu energii od vstřícně se pohybujícího zrcadla a dochází k jejímu urychlování. Tento mechanizmus nazýváme *Fermiho urychlování prvního druhu*. Pokud se zrcadlo proti částici pohybuje rychlostí v_Z, bude po odrazu rychlost částice $v_{\parallel} + 2v_Z$.

Fermiho urychlování druhého druhu
Představme si, že ve vesmíru se pohybují náhodně nabité částice v prostředí různě se měnících magnetických polí. Nabitá částice bude tu a tam odrážena od magnetických zrcadel pohybujících se náhodným směrem. Díky Fermiho mechanizmu bude statisticky někdy urychlena a někdy zpomalena. Rychlostní rozdělení se proto bude rozšiřovat a mezi částicemi se objeví určité procento velmi rychlých částic, které náhodně získaly energii z „příznivých“ odrazů od magnetických zrcadel. Tento mechanizmus nazýváme *Fermiho urychlování druhého druhu* a italský fyzik Enrico Fermi se jím pokusil vysvětlit vysoké energie částic kosmického záření.

Magnetický dipól, třetí adiabatický invariant

Magnetický dipól je nejnižším přiblížením multipólového rozvoje magnetického pole. Zdrojem dipólového pole může například být elektrický proud tekoucí po malé kružnici. Velikost magnetického dipólu je dána magnetickým dipólovým momentem $\mathbf{p}_\mathrm{M}$. Pro soustavu nabitých částic je magnetický moment dán vztahem (viz [2])

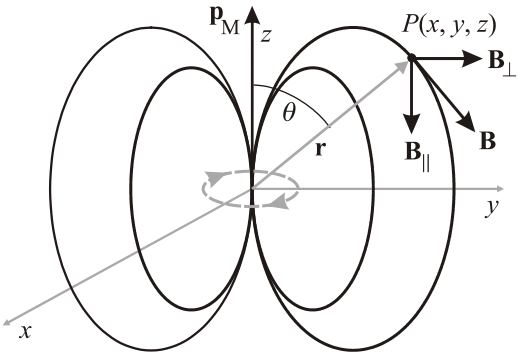
$$\mathbf{p}_\mathrm{M} = \sum_a \frac{1}{2} Q_a \left(\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a \right) . \tag{1.127}$$

Sumace probíhá přes všechny částice. Pro jednu částici pohybující se po kružnici je magnetický moment prvním adiabatickým invariantem částice a podle (1.102) platí

$$\mathbf{p}_\mathrm{M} = \left| \frac{1}{2} Q \left(\mathbf{r} \times \mathbf{v} \right) \right| = \frac{m v_\perp^2}{2B} = IS \, , \tag{1.128}$$

kde I je elektrický proud tekoucí po obvodu kružnice s plochou S způsobený pohybem nabité částice. Objemová hustota magnetického momentu se nazývá magnetizace a je rovna

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_a \frac{1}{2} Q_a \left(\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a \right). \tag{1.129}$$



Obr. 1.18: Magnetický dipól. Čárkovaně je znázorněna proudová smyčka generující dipólové pole.

Ze znalosti magnetického momentu můžeme určit vektorový potenciál (viz [2], kapitola *Elektromagnetické pole*) a magnetické pole:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_\mathrm{M} \times \mathbf{r}}{r^3}, \tag{1.130}$$

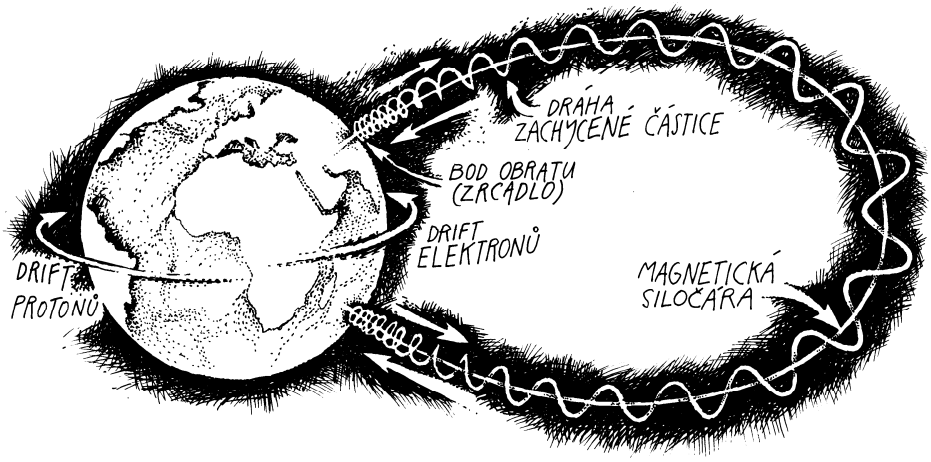
$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\, \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{p}_\mathrm{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_\mathrm{M}}{r^5}. \tag{1.131}$$

Pro magnetický dipólový moment orientovaný ve směru osy z máme:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} p_\mathrm{M} \left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \tag{1.132}$$

$$\mathbf{B} = (B_\perp, B_\parallel) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} p_\mathrm{M} \left(3\cos\theta \sin\theta,\ 3\cos^2\theta - 1 \right). \tag{1.133}$$

Díky těmto explicitním formulím můžeme snadno řešit pohyby nabitých částic, například numericky. Pokud víme, pod jakým úhlem a kde do pole částice vnikla, ze zrcadlové rovnice snadno zjistíme kritické pole nutné k otočení částice na dané indukční čáře. Pokud se pole dipólu nemění mezi odrazy, zachovává se první i druhý adiabatický invariant. Díky driftu zakřivení se částice ještě pohybuje v azimutálním směru kolem dipólu a koná tak tři kvaziperiodické pohyby: 1) Larmorovu rotaci, 2) odrazy mezi zrcadly v polárních oblastech, 3) drift zakřivení. S driftem zakřivení jakožto dalším kvaziperiodickým pohybem je spojen *třetí adiabatický invariant*, který je úměrný magnetickému indukčnímu toku plochou, jejíž hranici tvoří trajektorie gyračního středu při driftu zakřivení.



Obr. 1.19: Periodické pohyby nabitých částic v magnetickém dipólu

V zemském dipólovém poli je perioda jednotlivých dějů (energie částice 1 keV, silokřivka ve vzdálenosti čtyřnásobku poloměru na rovníku, částice s nulovou podélnou rychlostí) [22]:

částice	1 – gyrace	2 – pohyb mezi zrcadly	3 – drift
elektron 1 keV	10^{-4} s	4 s	180 h
proton 1 keV	0,14 s	170 s	180 h

Driftová rychlost elektronů a iontů vychází stejná, jde o drift zakřivení, jehož hodnota závisí na podélné složce kinetické energie částice.

Poznámka: Dipólové pole ubývá se třetí mocninou vzdálenosti, proto astronomové vyjadřují dipólový moment planet a ostatních těles jako součin pole na rovníku a třetí mocniny poloměru. Jednotkou je Tm^3. Tato veličina je úměrná skutečnému dipólovému momentu (1.127).

Planety Sluneční soustavy mají většinou nenulový magnetický moment. Výjimkou jsou Mars a Venuše, které nemají žádné globální magnetické pole. U Marsu objevila americká sonda *Mars Global Surveyor* magnetické pole v povrchových horninách. Z charakteru tohoto pole je zřejmé, že Mars v minulosti magnetické pole měl, a z nějakých důvodů o něho přišel. Na Venuši je povrchová teplota kolem 460 °C, což je nad Curieovou teplotou, při níž se magnetický záznam v horninách maže, takže u Venuše nelze tímto způsobem zjistit, zda někdy v minulosti pole měla.

Magnetosféry planet jsou charakteristicky deformovány slunečním větrem: na denní straně vzniká *čelní rázová vlna*, na noční straně dlouhý *magnetický ohon*. V blízkosti planety má pole přibližně dipólový charakter. V polárních oblastech jsou *polární kaspy* (z anglického „*cusp*“ – roh, cíp) – trychtýřovité oblasti, kterými do polárních oblastí vnikají nabité částice slunečního větru. Zachycené nabité částice vytvářejí tzv. radiační

pásy, v nichž kroužící nabité částice emitující elektromagnetické záření (u Země jim říkáme Van Allenovy pásy). Pro *poznávání* interakce slunečního větru s magnetosférami je nejcennější magnetosféra Merkuru. Jednak je u ní sluneční vítr nejsilnější, a jednak je interakce slunečního větru s magnetosférou minimálně ovlivněna atmosférou, která je velmi řídká.

Nejrozsáhlejší *magnetosféry* mají plynní obři (Jupiter, Saturn Uran a Neptun). Nemají pevný povrch, jejich kapalné nitro je částečně vodivé, což přispívá ke vzniku silného magnetického pole. Naprosto výjimečnou je magnetosféra Jupiteru, která má ohon dlouhý 5 astronomických jednotek, tj. sahá až ke dráze Saturnu. Objem magnetosféry Jupiteru je mnohonásobně větší než objem, který zaujímá Slunce i s celou korónou. Jupiter má také mimořádně intenzívní radiační pásy. Rádiové vlny generované těmito pásy jsou referenčním zdrojem, pomocí něhož se kalibrují přístroje na sondách.

planeta	dipólový moment (T m^3)	pole na rovníku (μT)	vyosení dipólu (% průměru)	úhel mezi dipólem a rotační osou (°)
Merkur	5×10^{12}	0.33	17	169
Venuše	–	–	–	–
Země	8×10^{15}	31	7.25	11.4
Mars	–	remanentní	–	–
Jupiter	160×10^{18}	430	13	9.6
Saturn	5×10^{18}	21	5	<1
Uran	0.4×10^{18}	23	30	59
Neptun	0.2×10^{18}	14	55	47

Elektrický a magnetický monopól

Magnetické monopóly sice neexistují, ale čistě teoreticky můžeme zkoumat pohyb v poli elektrického a magnetického monopólu, u kterých jsou pole dána vztahy:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_\mathrm{E}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}; \qquad \mathbf{B} = Q_\mathrm{M}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{1.134}$$

Celkem snadno lze ukázat, že se při pohybu testovací částice s nábojem q nebude zachovávat moment hybnosti, ale vektor

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r}\times m\mathbf{v} - qQ_\mathrm{M}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{1.135}$$

Pojďme toto tvrzení dokázat:

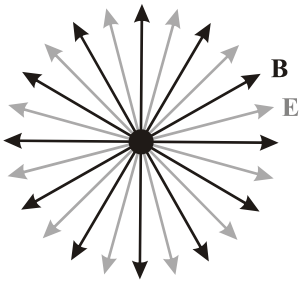
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}\times m\mathbf{v} - qQ_\mathrm{M}\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mathbf{v}\times m\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\mathbf{F} - qQ_\mathrm{M}\frac{r\mathbf{v} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\dfrac{\mathbf{r}}{r}}{r^2} =$$

$$= 0 + \mathbf{r}\times\left(q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) - qQ_\mathrm{M}\frac{\mathbf{v}}{r} + qQ_\mathrm{M}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} =$$

$$= q\mathbf{r}\times\left(\frac{Q_\mathrm{E}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}+\mathbf{v}\times Q_\mathrm{M}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)-qQ_\mathrm{M}\frac{\mathbf{v}}{r}+qQ_\mathrm{M}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3}=$$

$$= 0+\frac{qQ_\mathrm{M}}{r^3}\mathbf{r}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{r})-qQ_\mathrm{M}\frac{\mathbf{v}}{r}+qQ_\mathrm{M}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3}=0\,.$$

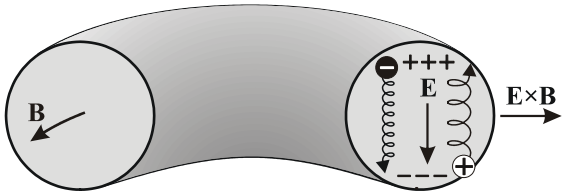
Vektor **N** se při pohybu zachovává. Pohyb se děje po kuželové ploše s osou totožnou s vektorem **N**. Rostoucí magnetické pole v počátku souřadnic způsobí, že každý náboj bude odražen silou $-\mu\nabla B$ v nějaké vzdálenosti r_min od monopólu. Má-li náboj pohybující se částice shodné znaménko s Q_E, bude se odpuzovat a pohyb bude neomezený, $r\in(r_\mathrm{min},\infty)$. Má-li opačné znaménko, bude se přitahovat a pohyb bude omezený, $r\in(r_\mathrm{min},r_\mathrm{max})$. Hodnotu r_max můžeme určit ze zákona zachování energie.



Obr. 1.20: Elektrický a magnetický monopól

Tokamak

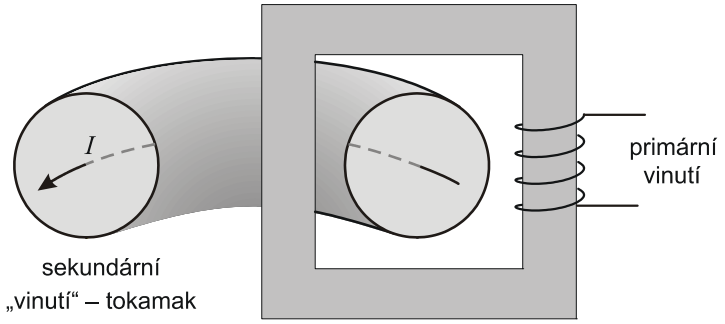
V tokamaku (z ruského TOroidnaja KAmera v MAgnitnych Katuškach) je plazmové vlákno stočené do toroidální geometrie, základním polem je *toroidální* pole sledující plazmové vlákno. Zpravidla je generováno cívkou navinutou na plášť toroidu. Tokamak navrhli v 50. letech 20. století v Sovětském svazu Igor Tamm a Andrej Sacharov. Pouhé toroidální pole vede na drifty, které způsobí únik nabitých částic z tokamaku.



Obr. 1.21: Drifty v toroidální geometrii

V toroidální geometrii dochází k driftu zakřivení, který způsobuje separaci náboje, tím vzniká elektrické pole a následný $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ drift, kterým částice unikají z prostoru toroidu. Tomu lze částečně čelit zkroucením indukčních čar pole dodatečným *poloidálním* polem. Pohybem částic po kroucených indukčních čarách bude vlastně spojena oblast kladného a záporného náboje, v jistém slova smyslu dojde ke zkratování separovaného náboje. Dodatečné poloidální pole můžeme získat různými způsoby. Jmenujme alespoň:

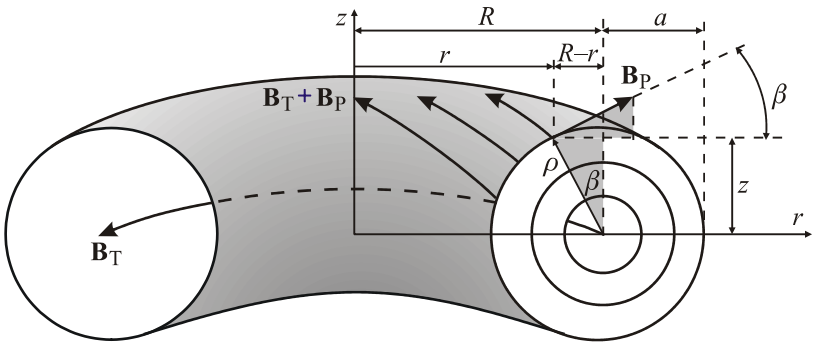
1) *stelarátor* – vinutí je šikmé.
2) *tokamak* – torus je sekundárním vinutím transformátoru. Tím v prostoru tokamaku vzniká elektrický proud, který generuje poloidální pole.



Obr. 1.22: Tokamak

3) *multipóly* – v pracovním prostoru jsou vodiče, které generují poloidální pole.

Naším cílem nyní bude určit alespoň přibližné analytické výrazy pro pole v toroidální geometrii. To umožní odhad pohybu nabitých částic v kombinaci toroidálního a poloidálního pole a numerický výpočet jejich trajektorie. Skutečná pole se v dané konfiguraci tokamaku počítají z robustních simulačních programů.



Obr. 1.23: Magnetické pole v tokamaku

Toroidální pole musí podle Ampérova zákona ubývat se vzdáleností od středu jako $1/r$:

$$B_{\mathrm{T}}(r) = B_{\mathrm{T}0}\,\frac{R}{r}\,; \qquad B_{\mathrm{T}0} \equiv B_{\mathrm{T}}(R)\,. \tag{1.136}$$

Velikost poloidálního pole může být na každém magnetickém povrchu s poloměrem ρ (viz obrázek) různá a bude ubývat se vzdáleností stejně jako toroidální pole:

$$B_{\mathrm{P}}(\rho, r) = B_{\mathrm{P}0}(\rho)\,\frac{R}{r}\,; \qquad B_{\mathrm{P}0}(\rho) \equiv B_{\mathrm{P}}(\rho, R)\,. \tag{1.137}$$

Určeme nyní projekce poloidálního pole do radiálního směru a do osy z. Využijeme k tomu podobnost trojúhelníků zvýrazněných v pravé části obrázku:

$$B_{\mathrm{P}\,r}(\rho,r) = B_{\mathrm{P}} \cos\beta = B_{\mathrm{P0}}(\rho)\,\frac{R}{r}\,\frac{z}{\rho}\,, \tag{1.138}$$

$$B_{\mathrm{P}\,z}(\rho,r) = B_{\mathrm{P}} \sin\beta = B_{\mathrm{P0}}(\rho)\,\frac{R}{r}\,\frac{R-r}{\rho}\,. \tag{1.139}$$

Zřejmě platí

$$B_{\mathrm{P}}^2 = B_{\mathrm{P}r}^2 + B_{\mathrm{P}z}^2\;; \qquad \rho^2 = (R-r)^2 + z^2\,. \tag{1.140}$$

Předpokládejme, že částice nalétne pod úhlem α_0 na vnějším okraji magnetického povrchu, kde je pole z celého povrchu minimální:

$$B_{\min} = \sqrt{B_{\mathrm{T0}}^2 + B_{\mathrm{P0}}^2(\rho)}\;\frac{R}{R+\rho}\,. \tag{1.141}$$

Částice bude sledovat indukční čáru směrem do oblasti menších hodnot r, kde pole roste. K případnému odrazu dojde podle zrcadlové rovnice v kritickém poli (1.123)

$$B_{\mathrm{c}} = \frac{B_{\min}}{\sin^2\alpha_0}\,. \tag{1.142}$$

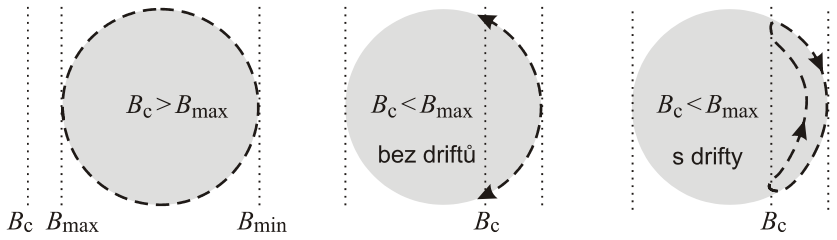
K odrazu dojde jen tehdy, pokud je kritické pole menší než maximální pole na vnitřním okraji, tj. částice se na své pouti setká s dostatečně silným polem, které ji otočí:

$$B_{\mathrm{c}} < B_{\max} = \sqrt{B_{\mathrm{T0}}^2 + B_{\mathrm{P0}}^2(\rho)}\;\frac{R}{R-\rho}\,. \tag{1.143}$$

Kombinací posledních tří rovnic získáme podmínku pro otočení pohybu částice:

$$\sin^2\alpha_0 > \frac{R-\rho}{R+\rho}\;. \tag{1.144}$$

Není-li podmínka splněna, částice se pohybuje po indukční čáře na magnetickém povrchu. Je-li podmínka splněna, odrazí se v určitém místě zpět. Díky driftům vzniká v řezu tzv. *banánová orbita* pojmenovaná podle tvaru trajektorie gyračního středu



Obr. 1.24: Vznik banánové orbity v tokamaku

V tokamacích je kromě toroidálního a poloidálního pole také cívkami generované vertikální pole. Toto pole vytváří radiální sílu mířící do osy tokamaku, která zabraňuje zvětšování rozměrů plazmového prstence.

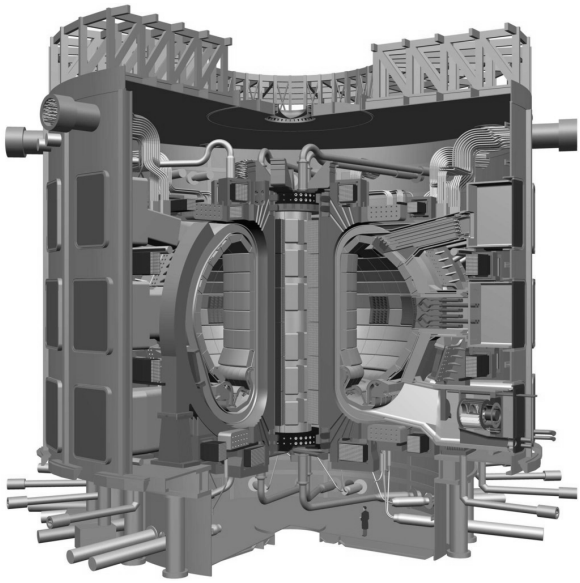
Plazma není v komoře tokamaku dokonale izolováno od stěny komory. Vnitřní povrch komory musí odolávat extrémnímu tepelnému toku. Tepelný tok je odkláněn do oblasti komory, kde je zařízení z mimořádně odolného materiálu (wolframu, grafitu), které aktivně chladí plazma unikající z reaktoru. Ve starších tokamacích šlo o *limiter* umístěný zpravidla v dolní části komory. Limiter byl prvním místem dotyku plazmatu s komorou. Limiter zásobil plazma nečistotami a neumožňoval odvod produktů termojaderné reakce. Od 80. let dvacátého století se namísto limiteru používá bezkontaktní divertor, který je zdrojem magnetického pole a vytvoří v dolní části vnějšího magnetického povrchu plazmatu linii siločar ve tvaru písmene X. Touto linií plazma bezkontaktně uniká z vnější oblasti plazmového prstence k chlazenému divertoru, který se nachází mimo aktivní oblast plazmatu.

Ohřev tokamakového plazmatu primárně zajišťuje protékající proud. Ve většině tokamaků je využíván i dodatečný ohřev plazmatu, ať neutrálními svazky či elektromagnetickým zářením na vhodné rezonanční frekvenci (cyklotronní ohřev, dolní hybridní ohřev). Experimentálně se ukázalo, že překročí-li dodatečný ohřev určitou hranici, v plazmatu se náhle výrazně sníží turbulence a plazma je mnohem snáze udržitelné (hovoříme o tzv. H módu – *High Confinement Mode*). Poprvé byl tento jev pozorován na tokamaku ASDEX v roce 1982. Dnes pracuje v H módu převážná většina velkých tokamaků.

V následující tabulce je porovnání současných velkých tokamaků Tore Supra/WEST a JET s obřím experimentálním tokamakem ITER a českým tokamakem Compass D. Tore Supra je tokamak postavený ve výzkumném středisku Cadarache ve Francii. Stavba započala v roce 1982 a první plazma bylo v tokamaku vytvořeno v roce 1988. V roce 1996 se zde dosáhlo rekordního udržení plazmatu 2 minuty a v roce 2003 dokonce 6,5 minuty. V letech 2010 až 2016 proběhl upgrade, po němž je tokamak provozován pod názvem WEST (*W Environment in Steady-state Tokamak*). Tokamak JET (*Joint European Torus*) je zařízení postavené v anglickém Culhamu. Stavba byla započata v roce 1978 a byla dokončena v roce 1983. První řízená termojaderná syntéza ve „větším množství“ byla uskutečněna v roce 1991 (1 MW), v roce 1997 byl dosažen fúzní výkon 16 MW. Společnost JET Joint Undertaking provozující tokamak ukončila činnost v roce 1999. Od té doby provozuje JET společnost UKAEA (*United Kingdom Atomic Energy Authority*). ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*) je mezinárodní termojaderný pokusný reaktor s předpokládaným výkonem reaktoru 500 MW, který bude zprovozněn ve francouzském středisku Cadarache někdy po roce 2025.

V České republice je provozován menší tokamak Compass D, který je umístěn v Ústavu fyziky plazmatu Akademie věd České republiky. Compass D byl do Prahy přestěhován v roce 2006 z anglického Culhamu, kde ho nahradil větší tokamak MAST. Tvarem plazmatu je Compass D blízký navrhovanému tokamaku ITER, obě komory mají průřez podobný písmenu D. Compass D není prvním českým tokamakem. Je následovníkem malého tokamaku CASTOR (Czech Academy of Sciences TORus), který byl postaven v Kurčatovově institutu v SSSR v roce 1958. Od roku 1977 byl umístěn v Praze a sloužil pro vědecké a výukové cíle Ústavu fyziky plazmatu AV ČR. V roce 1983 prošel rekonstrukcí a získal novou komoru. Jeho provoz byl ukončen v roce 2006. Poloměr tokamaku CASTOR byl 40 cm, maximální pole 1,5 T. Po demontáži byl převezen na Fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou ČVUT v Praze, kde byl v roce 2009 opětovně zprovozněn pro výukové účely pod novým názvem Golem.

tokamak	WEST	JET	ITER	Compass D
velký poloměr (m)	2,5	3	6,2	0,56
malý poloměr (m)	0,5	1,25	2,0	0,23
objem plazmatu (m^3)	25	155	837	0,5
proud v plazmatu (MA)	1,7	5÷7	15	0,4
teplota elektronů (eV)	5 000	3 000	8 800	500
koncentrace elektronů (m^{-3})	$3{,}5\times10^{19}$	4×10^{19}	10^{20}	10^{19}
magnetické pole (T)	3,7	3,4	5,3	1,15
doba udržení (s)	~ 400	10	> 300	2
termonukleární výkon	~ 1 kW	16 MW	500 MW	–



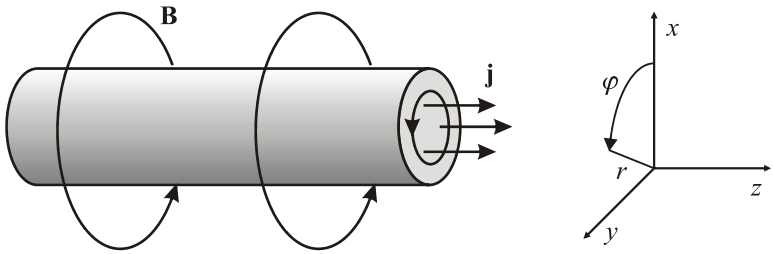
Obr. 1.25: Schéma tokamaku ITER. Patrná je komora ve tvaru písmene D.

Poznámka: Snaha o udržení termojaderné fúze není jen doménou tokamaků. Četné pokusy se konají v laserem iniciované fúzi i v dalších zařízeních. Cílem je dosáhnout tzv. *Lawsonova kritéria*, které zajišťuje, aby vzniklo větší množství energie, než je potřebné k ohřevu a náhradě ztrát zářením. Anglický fyzik John Lawson (1923–2008) spočetl, že postačí, aby byl součin koncentrace elektronů a doby udržení větší než jistá funkce teploty $n_e\tau > f(T)$, která má minimum. Na pravé straně se zpravidla bere hodnota v tomto minimu, jenž nastává pro teplotu T_0. Například pro D-T reakci má pravá strana minimum pro teplotu 25 keV (290×10^6 K) a minimální hodnota součinu $n_e\tau$ je $1{,}5\times10^{20}$ s/m^3.

Plazmové vlákno a souvislost driftů s proudy

V gravitační interakci je typickým rovnovážným útvarem koule. Tento tvar zaujímají hvězdy i větší planety. Elektromagnetická interakce má ale jiné vlastnosti a vytváří v plazmatu především lineární útvary – různá vlákna, často stočená do šroubovic nebo ještě složitějších útvarů. Vlákna jsou většinou udržována vlastním magnetickým polem a později uvidíme, že výraznější stability mohou dosáhnout jen tzv. helikální vlákna, v nichž má magnetické pole jak azimutální, tak osovou složku.

Představme si nyní nejjednodušší rovnovážné plazmové vlákno protékané elektrickým proudem podle obrázku. Magnetické pole má jen azimutální směr a jedinou nenulovou složkou je B_φ. Uvnitř vlákna musí být magnetické pole rostoucí se vzdáleností od středu vlákna – plyne to z Ampérova zákona, větší indukční čára uzavírá větší plochu a teče jí větší celkový proud. Vně vlákna pole ubývá jako $1/r$.



Obr. 1.26: Plazmové vlákno protékané pouze osovým proudem (tzv *z* pinč)

Pohyb částic vně vlákna je jednoduchý, budou podléhat driftu zakřivení (kladné částice driftují ve směru osy z) a grad B driftu stejného směru. Výsledkem je drift částic podél vlákna. Zaměřme se ale na pohyby částic uvnitř vlákna. Nalezněme rotaci magnetického pole **B**:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{rot}(\mathbf{H}+\mathbf{M}) = \mu_0\left(\mathbf{j}_\mathrm{C} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_\mathrm{M}\right). \tag{1.145}$$

V závorce je celkový proud tekoucí vláknem. První člen představuje vodivostní proud, ukážeme, že je tvořen driftem zakřivení a grad B driftem částic uvnitř vlákna. Druhý člen je v našem případě statické rovnováhy nulový (v případě časové proměnnosti by souvisel s polarizačním driftem). Poslední člen je magnetizační proud $\mathbf{j}_\mathrm{M} = \operatorname{rot}\mathbf{M}$ – ten vzniká díky Larmorově rotaci částic, která není sousedními částicemi kompenzována přesně na nulu. Odvoďme nyní vztahy pro jednotlivé proudové hustoty uvnitř vlákna.

Proud způsobený grad B driftem

Pro střední hodnotu proudové hustoty můžeme za pomoci koncentrace a rychlosti nosičů náboje psát

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = \left\langle \sum_\alpha Q_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \right\rangle .$$

kde sumace probíhá přes elektrony a ionty, středování přes všechny částice. Za rychlost dosadíme driftovou rychlost ze vztahu (1.114) a využijeme cylindrické symetrie proudového vlákna:

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = -\frac{1}{B^2}\left\langle n_\mathrm{e}\frac{m_\mathrm{e}\,v_{\mathrm{e}\perp}^2}{2} + n_\mathrm{i}\frac{m_\mathrm{i}\,v_{\mathrm{i}\perp}^2}{2}\right\rangle \frac{\partial B}{\partial r}\,\mathbf{e}_z\,.$$

Připomeňme, že pole uvnitř vlákna s rostoucím r roste a tedy derivace $\partial B/\partial r > 0$. Z geometrie problému je zřejmé, že grad B drift míří v záporném směru osy z. Středujme nyní kolmou složku kinetické energie. Kolmá složka má jen dva stupně volnosti, a proto platí

$$\left\langle \frac{m\,v_\perp^2}{2}\right\rangle = 2\cdot\frac{1}{2}k_\mathrm{B}T = k_\mathrm{B}T\,,$$

a tedy

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = -\frac{1}{B^2}\left(n_\mathrm{e}k_\mathrm{B}T_\mathrm{e} + n_\mathrm{i}k_\mathrm{B}T_\mathrm{i}\right)\frac{\partial B}{\partial r}\,\mathbf{e}_z \;=\; -\frac{p}{B^2}\frac{\partial B}{\partial r}\,\mathbf{e}_z\;. \tag{1.146}$$

Proud způsobený driftem zakřivení

Podobně jako při grad B driftu určíme z driftu zakřivení (1.116) proudovou hustotu

$$\mathbf{j}_\mathrm{R} = \frac{1}{rB}\left\langle n_\mathrm{e}m_\mathrm{e}\,v_{\mathrm{e}\|}^2 + n_\mathrm{i}m_\mathrm{i}\,v_{\mathrm{i}\|}^2\right\rangle \mathbf{e}_z\,.$$

Vypočteme střední hodnotu složky kinetické energie (částice má jeden stupeň volnosti podél magnetického pole)

$$\left\langle \frac{m\,v_\|^2}{2}\right\rangle = 1\cdot\frac{1}{2}k_\mathrm{B}T = \frac{1}{2}k_\mathrm{B}T$$

a pro proudovou hustotu způsobenou driftem zakřivení máme výsledný vztah

$$\mathbf{j}_\mathrm{R} = \frac{1}{rB}\left(n_\mathrm{e}k_\mathrm{B}T_\mathrm{e} + n_\mathrm{i}k_\mathrm{B}T_\mathrm{i}\right)\mathbf{e}_z \;=\; \frac{p}{rB}\,\mathbf{e}_z\;. \tag{1.147}$$

Magnetizační proud

V případě homogenního plazmatu a konstantního magnetického pole je proudový příspěvek od soustavy shodně Larmorovsky rotujících částic nulový. Je-li pole nehomogenní, jsou Larmorovy orbity v různých místech různé a průměrný příspěvek k tekoucímu proudu může být nenulový. Podobně v nehomogenním plazmatu v některém směru narůstá počet nosičů náboje a při průměrování příspěvku k celkovému proudu dostaneme nenulový výsledek. Magnetický moment jedné částice je

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{m\,v_\perp^2}{2B}\,\mathbf{e}_\varphi\,. \tag{1.148}$$

Poznámka: Gyrující nabitá částice generuje vlastní magnetické pole, které má opačný směr než pole původní. Hovoříme proto o *diamagnetizmu plazmatu*. V souřadnicové soustavě na obrázku má původní magnetické pole směr $-\mathbf{e}_\varphi$, magnetický moment částice má směr $+\mathbf{e}_\varphi$.

Nyní určíme celkovou magnetizaci a opět vystředujeme přes druhé mocniny rychlostí:

$$\mathbf{M} = \left\langle \sum_{\alpha} n_\alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha \right\rangle = \frac{\left\langle n_\mathrm{e} m_\mathrm{e} v_{\mathrm{e}\perp}^2 + n_\mathrm{i} m_\mathrm{i} v_{\mathrm{i}\perp}^2 \right\rangle}{2B} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\left(n_\mathrm{e} k_\mathrm{B} T_\mathrm{e} + n_\mathrm{i} k_\mathrm{B} T_\mathrm{i} \right)}{B} \mathbf{e}_\varphi = \frac{p}{B} \mathbf{e}_\varphi .$$

Magnetizační proud určíme v zadané geometrii již snadno:

$$\mathbf{j}_\mathrm{M} = \mathrm{rot}\, \mathbf{M} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p}{B} \right) \mathbf{e}_z . \tag{1.149}$$

Na závěr ukažme, že součet všech tří proudových hustot odvozených výše dá celkový proud tekoucí plazmatem:

$$j_{\nabla B} + j_\mathrm{R} + j_\mathrm{M} = -\frac{p}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{p}{rB} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p}{B} \right) = -\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r} .$$

Zřejmě tedy platí

$$\left(j_{\nabla B} + j_\mathrm{R} + j_\mathrm{M} \right) B = -\frac{\partial p}{\partial r} , \tag{1.150}$$

což je podmínka rovnováhy $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla p$, ve které vystupuje celkový proud. Mikroskopické procesy jsou tak přirozenou cestou provázány s makroskopickými proudy ve vodivém kontinuu.

1. 3 Magnetohydrodynamika

1.3.1 Minimální varianta

Popis plazmatu v rámci teorie kontinua poprvé použil švédský fyzik a astrofyzik Hannes Alfvén (1908–1995). Za práce v oblasti magnetohydrodynamiky získal v roce 1970 Nobelovu cenu za fyziku. Základní rovnice magnetohydrodynamiky zobecňují hydrodynamiku na vodivou tekutinu, případně na více prolínajících se tekutin, jejichž chování dominantně ovlivňuje magnetické pole. Veličiny popisující plazma jsou polní veličiny, tj. jsou funkcí času a prostoru, například hustota látky $\rho(t, \mathbf{x})$, magnetické pole $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ či teplota $T(t, \mathbf{x})$. Namísto rychlostí jednotlivých částic $\mathbf{v}$ budeme mít rychlostní pole $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Rychlostní pole značíme záměrně symbolem $\mathbf{u}$, aby nedošlo k záměně s rychlostmi jednotlivých částic $\mathbf{v}$. Existuje několik možných variant výchozích předpokladů teorie, v této části se zaměříme na tzv. minimální variantu s nejjednoduššími předpoklady. Nejprve se ale seznámíme s některými pojmy z teorie kontinua, které budeme pro pochopení magnetohydrodynamiky potřebovat.

Základní pojmy

Substancionální derivace

Nalezněme úplnou časovou derivaci nějakého vektorového pole $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_k(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}t} =$$

$$= \frac{\partial A_k}{\partial t} + u_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} = \frac{\partial A_k}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}) A_k \,.$$

Úplná derivace vektorového pole (tzv. substancionální derivace) se skládá ze dvou částí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{A} \,. \tag{1.151}$$

První část odpovídá explicitním změnám polí, druhá souvisí s prouděním. Pro substancionální derivaci můžeme operátorově psát

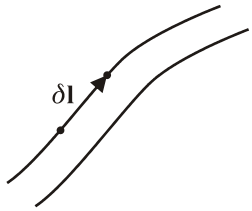
► $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \,. \tag{1.152}$$

Rovnice proudnice

Určeme nyní časovou změnu elementu proudnice $\delta\mathbf{l}$, která je způsobena změnou rychlostního pole:

$$\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\delta\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = (\delta\mathbf{l}\cdot\nabla)\mathbf{u}\,. \tag{1.153}$$



Obr. 1.27: Element proudnice

Tok a rovnice kontinuity

S rovnicí kontinuity jsme se seznámili již v druhém díle „Vybraných kapitol“, v části II.3.4.2. Vzhledem k tomu, že v magnetohydrodynamice jde o klíčový pojem, odvození zde zopakujeme. Uvažujme proudění extenzivní (často se říká aditivní) veličiny A. To je taková veličina, která roste s počtem částic, například hmotnost, náboj, energie, hybnost, teplo…). Opakem jsou intenzivní veličiny, které na počtu částic nezávisí (teplota, rychlostní pole, intenzita elektrického pole…). Proudění aditivní veličiny popisujeme čtveřicí veličin, první z nich nazýváme *hustotou aditivní veličiny* a definujeme ji vztahem

$$\rho_A \equiv \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta V}\,. \tag{1.154}$$

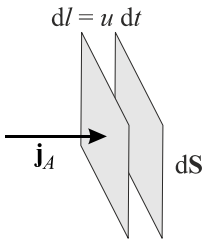
Příkladem může být hustota hmoty (kg/m^3), hustota náboje (C/m^3), hustota energie (J/m^3), hustota výkonu (W/m^3) nebo hustota hybnosti (kg·m·s^{-1}/m^3); obecně má hustota aditivní veličiny rozměr

$$[\rho_A] = \frac{[A]}{\mathrm{m}^3}\,. \tag{1.155}$$

Druhá veličina je vektorová, říkáme jí tok veličiny A a definujeme ho vztahem

$$\mathbf{j}_A \equiv \rho_A\mathbf{u}\,. \tag{1.156}$$

Jako každá vektorová veličina má i tok velikost a směr. Směr je jasný na první pohled, jde o směr rychlostního pole, popisujícího proudění. Velikost toku snadno zjistíme, pokud budeme sledovat tečení naší entity kolmou plochou. Za čas dt se jednotlivé atomy a molekuly dostanou o d$l = u\,$dt dále k jiné myšlené ploše:



Obr. 1.28: Tok extenzivní veličiny

Pro velikost toku platí:

$$j_A = \rho_A u = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}S\,\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t}. \tag{1.157}$$

Tok veličiny má tedy význam množství veličiny proteklé kolmou jednotkovou plochou za jednotku času a jeho rozměr je

$$[j_A] = \frac{[A]}{\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}}. \tag{1.158}$$

Příkladem může být tok energie ($\mathrm{J{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-1}}$), tok náboje ($\mathrm{C{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-1}}$), tok hmoty ($\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-1}}$) atd. Jestliže se veličina A při proudění neztrácí ani nepřibývá, musí být její časový úbytek z libovolného objemu roven toku veličiny přes plochu obklopující tento objem:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_A\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \mathbf{j}_A \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{1.159}$$

Hranice objemu V je označena ∂V. Na levé straně přesuneme časovou derivaci do integrace, ρ_A je ale funkcí času i prostoru, proto se derivace změní na parciální. Na pravou stranu budeme aplikovat Gaussovu větu a plošný integrál převedeme na objemový:

$$-\int_V \frac{\partial \rho_A}{\partial t}\,\mathrm{d}V = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{j}_A\,\mathrm{d}V. \tag{1.160}$$

Oba integrály nyní spojíme:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_A\right)\mathrm{d}V = 0. \tag{1.161}$$

Uvedený vztah musí při proudění platit v libovolném objemu, a to je možné jen tehdy, je-li argument integrálu roven nule (mohl by v principu být nenulový jen v některých bodech nebo plochách, obecně na množině menší dimenze, než přes kterou integrujeme):

► $$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_A = 0. \tag{1.162}$$

Odvozený vztah se nazývá *rovnice kontinuity* a na pravé straně je nula, pokud se veličina A při proudění zachovává. Nezachovává-li se, není na pravé straně nula, rovnici kontinuity můžeme pak psát ve tvaru

► $$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_A = \mathscr{S} + \mathscr{F}, \tag{1.163}$$

kde $\mathscr{S}$ popisuje srážkové procesy a $\mathscr{F}$ vliv silových polí působících na systém. Oddělení časových a prostorových proměnných je jen formální, rovnici kontinuity můžeme také zapsat ve tvaru čtyřrozměrné divergence

$$\frac{\partial j_0}{\partial x_0} + \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3} = 0. \tag{1.164}$$

kde jsme označili

$$j_0 = \rho_A c\,; \quad j_1 = j_x\,; \quad j_2 = j_y\,; \quad j_3 = j_z\,, \tag{1.165}$$

$$x_0 = ct\,; \quad x_1 = x\,; \quad x_2 = y\,; \quad x_3 = z\,. \tag{1.166}$$

Index *A* jsme pro jednoduchost vynechali. Rychlost světla v nultých komponentách čtyřvektporů zajišťuje, aby rozměr všech čtyř složek čtyřvektoru byl stejný. Obě poslední čtveřice se v relativitě transformují stejným způsobem (Lorentzovou transformací) a představují typické čtyřvektory.

Předpoklady minimální varianty

1) Plazma lze považovat za kontinuum

Plazma je srážkově dominantní a na prostorových i časových škálách jsou srážky podstatným jevem. Střední volné dráhy částic jsou mnohem kratší než rozměry *L* sledovaného plazmatu a střední kolizní čas pro jednotlivé částice je mnohem kratší než doba *T*, po kterou plazma sledujeme:

$$\lambda_\mathrm{e}, \lambda_\mathrm{i}, \lambda_\mathrm{n} \ll L\,; \qquad \tau_\mathrm{e}, \tau_\mathrm{i}, \tau_\mathrm{n} \ll T\,. \tag{1.167}$$

2) Plazma je kvazineutrální

V plazmatu jsou volné nosiče náboje, ovšem v každém makroskopickém objemu je stejný počet kladných a záporných nábojů. Prostorová hustota náboje je nulová:

$$\rho_Q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum Q_\alpha n_\alpha = 0\,, \tag{1.168}$$

kde *n* je koncentrace, tj. počet jedinců v objemové jednotce. V některých variantách magnetohydrodynamiky není tento předpoklad splněn.

3) Jednotekutinový model

Plazma lze v prvním přiblížení považovat za jedinou tekutinu. V modelu používáme namísto rychlostí různých komponent jen těžišťovou rychlost všech složek a proudovou hustotu neboli tok náboje $\mathbf{j} = \rho_Q \mathbf{u} = nQ\mathbf{u}$, kde *n* je koncentrace (počet jedinců v objemové jednotce)

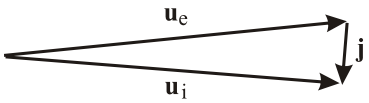
► $$\mathbf{u} = \frac{\sum m_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{\sum m_\alpha}\,, \tag{1.169}$$

► $$\mathbf{j} = \sum Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha\,. \tag{1.170}$$

Pokud je plazma složeno jen z elektronů a iontů, dochází k ambipolární difúzi a uniknou-li ze systému lehčí elektrony, táhnou za sebou pomocí Coulombova pole těžší ionty. Rychlosti elektronové i iontové složky jsou zhruba vyrovnané a rovny těžišťové rychlosti:

$$\mathbf{u}_\mathrm{e} \approx \mathbf{u}_\mathrm{i} \approx \mathbf{u}\,. \tag{1.171}$$

Nepatrný rozdíl rychlostí elektronů a iontů souvisí s proudovou hustotou tekoucí plazmatem. Například pro jedenkrát ionizované plazma je $n_\mathrm{e} = n_\mathrm{i} = n$, $\mathbf{j} = en(\mathbf{u}_\mathrm{i} - \mathbf{u}_\mathrm{e})$.



Obr. 1.29: Směr proudové hustoty

Existují samozřejmě i magnetohydrodynamické popisy založené na vícetekutinovém modelu. Odvoďme vztah pro hustotu Lorentzovy síly v jednotekutinovém modelu

$$\mathbf{F}_\alpha = Q_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}\,;$$

$$\mathbf{f}_\alpha = Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}\,;$$

$$\mathbf{f} = \sum (Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = \left(\sum Q_\alpha n_\alpha\right)\mathbf{E} + \left(\sum Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha\right)\times \mathbf{B} = \mathbf{j}\times\mathbf{B}\,.$$

První člen na pravé straně je nulový z důvodu požadavku kvazineutrality. Rychlost **v** jedné částice přejde v kontinuu na střední rychlost proudění **u**. V minimální variantě magnetohydrodynamiky tedy využíváme pro hustotu síly vztah

► $$\mathbf{f} = \mathbf{j}\times\mathbf{B}. \tag{1.172}$$

4) Nerelativistické plazma

V minimální variantě MHD požadujeme nerelativistické rychlosti všech druhů částic, tj.

$$\frac{u_\alpha}{c} \ll 1\,. \tag{1.173}$$

To s sebou nese relativně jednoduchou podobu Ohmova zákona (v pohybujícím se plazmatu je třeba transformovat elektrické pole **E** z laboratorní soustavy na pole $\tilde{\mathbf{E}}$ v soustavě pohybující se s plazmatem, kde platí Ohmův zákon $\mathbf{j} = \sigma\,\tilde{\mathbf{E}}$):

$$\mathbf{j} = \sigma\tilde{\mathbf{E}} = \sigma\frac{\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \doteq \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\,. \tag{1.174}$$

V relativistickém případě je transformace polí složitější a naleznete ji v druhém díle „Vybraných kapitol“ v části *Obecná transformace elektromagnetického pole* na str. 229.

5) Posuvný proud je zanedbatelný

V Maxwellově rovnici rot $\mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t$ zanedbáme Maxwellův posuvný člen oproti proudové hustotě. To je možné jen pro nízkofrekvenční děje, konkrétně pro periodickou závislost vlny na čase ve tvaru $\exp[\mathrm{i}\omega t]$ vychází omezení na frekvenci

$$\left|\partial\mathbf{D}/\partial t\right| \ll \left|\mathbf{j}\right| \qquad \Rightarrow$$

$$\left|\mathrm{i}\,\omega\varepsilon\mathbf{E}\right| \ll \sigma E \qquad \Rightarrow$$

► $$\omega \ll \sigma/\varepsilon\,. \tag{1.175}$$

Podmínka je splněna pro vysoce vodivé plazma nebo nízké frekvence dějů. Není-li tato podmínka splněna, musíme se zabývat i časově proměnnými elektrickými poli.

Rovnice pro magnetické pole

Časový vývoj magnetického pole určíme z Maxwellových rovnic doplněných Ohmovým zákonem v pohyblivém prostředí (1.174)

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; && \rho_Q = 0; \\ &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}; && \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}); \\ &\operatorname{div}\mathbf{B} = 0; && \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}; \\ &\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_Q; && \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu. \end{aligned} \tag{1.176}$$

Z první rovnice určíme časovou změnu magnetického pole, za elektrické pole dosadíme z Ohmova zákona a za proudovou hustotu z druhé z Maxwellových rovnic:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{u}\times\mathbf{B}\right) = -\frac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}).$$

Dvojnou rotaci přepíšeme pomocí vztahu I.3.218 (první díl „Vybraných kapitol“, část *Matematika pro fyziku*) a získáme výslednou rovnici

► $$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}). \tag{1.177}$$

Rovnici pro časový vývoj magnetického pole lze upravit do tvaru se substancionální derivací. Použijeme k tomu přepis druhého členu pomocí výrazu I.3.219

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{B},$$

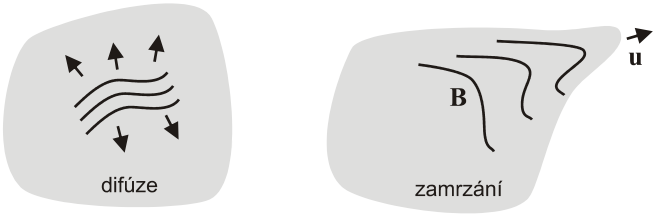
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{u}.$$

Alternativní tvar rovnice pro časový vývoj magnetického pole tedy je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{u}. \tag{1.178}$$

Magnetické pole se může podle (1.177) změnit dvěma způsoby. První člen na pravé straně je klasická *difúze* – pomalé pronikání magnetického pole do okolního plazmatu. Druhý člen souvisí s pohybem plazmatu, říká se mu *člen zamrzání*. Magnetické indukční čáry sledují pohyb plazmatu, jsou jakoby vmrznuty do plazmové tekutiny. Nyní zhruba odhadněme poměr příspěvků obou členů (tzv. Reynoldsovo magnetické číslo). Všechny vektory odhadneme jejich velikostmi a derivace převrácenou hodnotou rozměrů systému:

► $$\#_{\mathrm{Re,M}} = \frac{\text{člen zamrzání}}{\text{člen difúze}} \approx \frac{\frac{1}{L}uB}{\frac{1}{\sigma\mu}\frac{1}{L^2}B} = \sigma\mu\, u\, L. \tag{1.179}$$



Obr. 1.30: Difúze v plazmatu a zamrzlé pole v plazmatu

Pro ideálně vodivé plazma ($\sigma \to \infty$) dominuje člen zamrzání ($\#_{\mathrm{Re,M}} \gg 1$). Naopak pro pomalé pohyby plazmatu dominuje člen difúze ($\#_{\mathrm{Re,M}} \ll 1$). Limitní případy mají tvar

$$\begin{aligned} &\sigma \to \infty: && \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}); \\ &\mathbf{u} \to 0: && \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta_{\mathrm{M}}\,\nabla^2\mathbf{B}; \qquad \eta_{\mathrm{M}} \equiv \frac{1}{\sigma\mu}. \end{aligned} \tag{1.180}$$

Člen zamrzání

Zabývejme se nyní jen členem zamrzání

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}).$$

Rotaci na pravé straně upravíme pomocí dvojného vektorového součinu – viz I.3.219

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}.$$

Dosaďme za $\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho.$$

Po elementárních úpravách máme (zanedbáváme člen difúze)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho.$$

Celou rovnici vydělme hustotou a přeskupme jednotlivé členy

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\mathbf{B}}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\rho^2}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho.$$

První dva členy na levé straně lze spojit do jednoho výrazu a druhé dva členy na pravé straně také:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\frac{\mathbf{B}}{\rho} .$$

Substitucí $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/\rho$ rovnice přejde na

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} = (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} .$$

Po zavedení substancionální derivace získáme rovnici proudnice (1.153) pro veličinu **b**

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} . \tag{1.181}$$

Magnetické pole proto sleduje proudnice a je vmrzlé do plazmatu. Pojem zamrzání lze zformulovat i jinak: *Magnetický tok uzavřenou smyčkou, jež se pohybuje spolu s plazmatem, je konstantní*.

Člen difúze

Zabývejme se nyní druhou alternativou, difúzním členem. Koeficient η_M se nazývá koeficient magnetické difúze. Rovnici difúze můžeme přepsat do tvaru

$$\hat{\mathcal{L}}\mathbf{B} = 0 ; \qquad \hat{\mathcal{L}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \eta_\mathrm{M}\boldsymbol{\nabla}^2 . \tag{1.182}$$

Operátor $\hat{\mathcal{L}}$ je lineární, řešení můžeme hledat jako superpozici Fourierových módů

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \int \mathbf{B}_\mathbf{k}(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k} = \int \mathbf{c}_\mathbf{k}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\mathrm{d}^3\mathbf{k} . \tag{1.183}$$

Každý z Fourierových módů $\mathbf{B}_\mathbf{k}$ musí splňovat rovnici difúze:

$$\hat{\mathcal{L}}\mathbf{B}_\mathbf{k} = 0 ; \qquad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta_\mathrm{M}\boldsymbol{\nabla}^2\right)\mathbf{c}_\mathbf{k}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}_\mathbf{k}}{\mathrm{d}t} + \eta_\mathrm{M}k^2\mathbf{c}_\mathbf{k} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{c}_\mathbf{k}(t) = \mathbf{c}_\mathbf{k}(0)\,\mathrm{e}^{-\eta_\mathrm{M}k^2 t} .$$

Celkové řešení tedy napíšeme ve tvaru

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \int \mathbf{c}_\mathbf{k}(0)\,\mathrm{e}^{-\eta_\mathrm{M}k^2 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}^3\mathbf{k} . \tag{1.184}$$

Dosadíme-li $t = 0$ a provedeme inverzní transformaci, získáme vztah pro počáteční hodnoty

$$\mathbf{c}_\mathbf{k}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathbf{B}(0,\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} . \tag{1.185}$$

Povšimněte si vztahu (1.184). Každá Fourierova komponenta $\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$ se v čase tlumí faktorem $\exp(-\eta_\mathrm{M}k^2 t)$. Tedy fluktuace malých rozměrů (velkých k) jsou utlumeny mno-

hem rychleji než fluktuace velkých rozměrů. To je pro difúzi charakteristické, difúzí zanikají nejprve drobné nepravidelnosti.

Najděme nyní Greenovu funkci pro rovnici difúze v neomezeném prostředí, tj. za počáteční impulz budeme volit Diracovu distribuci lokalizovanou v bodě $\mathbf{x}'$:

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(0,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}_0\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,; \qquad \boldsymbol{\beta}_0 = (1,1,1).$$

Situace je stejná, jako bychom počítali Greenovu funkci pro každou složku magnetického pole zvlášť, všechny složky totiž splňují rovnici difúze. Diracův impuls postupně dosadíme do (1.185) a (1.184), výsledné řešení označíme $\mathbf{G}$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(0) = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3}\int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{G}(t,\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{-\eta_{\mathrm{M}}k^2 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}\,; \qquad \boldsymbol{\beta}_0 = (1,1,1)\ . \tag{1.186}$$

Jde o obecný zápis trojice Greenových funkcí pro rovnici difúze ve všech třech souřadnicových osách. Výsledek integrace závisí na okrajových podmínkách a volbě souřadnicové soustavy. Proveďme integraci v jednoduchém případě neomezeného prostředí popisovaného v kartézské souřadnicové soustavě:

$$\mathbf{G}(t,\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3}\int_{\mathrm{R}^3} \mathrm{e}^{-\eta_{\mathrm{M}}k^2 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\mathrm{d}^3\mathbf{k} = \qquad /\mathbf{x}-\mathbf{x}' \equiv \mathbf{a}$$

$$= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3}\int_{\mathrm{R}^3} \mathrm{e}^{-\eta_{\mathrm{M}}\mathbf{k}^2 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}\,\mathrm{d}^3\mathbf{k} = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3}\int_{\mathrm{R}^3} \mathrm{e}^{-\eta_{\mathrm{M}}\mathbf{k}^2 t+\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}\,\mathrm{d}^3\mathbf{k} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3}\int_{\mathrm{R}^3} \exp\left[-\eta_{\mathrm{M}}t\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{\eta_{\mathrm{M}}t}\right)\right]\mathrm{d}^3\mathbf{k} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3}\int_{\mathrm{R}^3} \exp\left[-\eta_{\mathrm{M}}t\left(\mathbf{k} - \frac{\mathrm{i}\,\mathbf{a}}{2\eta_{\mathrm{M}}t}\right)^2 - \frac{\mathbf{a}^2}{4\eta_{\mathrm{M}}t}\right]\mathrm{d}^3\mathbf{k} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4\eta_{\mathrm{M}}t}}\int_{\mathrm{R}^3} \exp\left[-\eta_{\mathrm{M}}t\left(\mathbf{k} - \frac{\mathrm{i}\,\mathbf{a}}{2\eta_{\mathrm{M}}t}\right)^2\right]\mathrm{d}^3\mathbf{k} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4\eta_{\mathrm{M}}t}}\left(\frac{\pi}{\eta_{\mathrm{M}}t}\right)^{3/2} = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(4\pi\eta_{\mathrm{M}}t)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4\eta_{\mathrm{M}}t}}\,,$$

kde jsme argument doplnili na čtverec ve vlnovém vektoru $\mathbf{k}$. V neomezeném prostředí máme tedy výsledek:

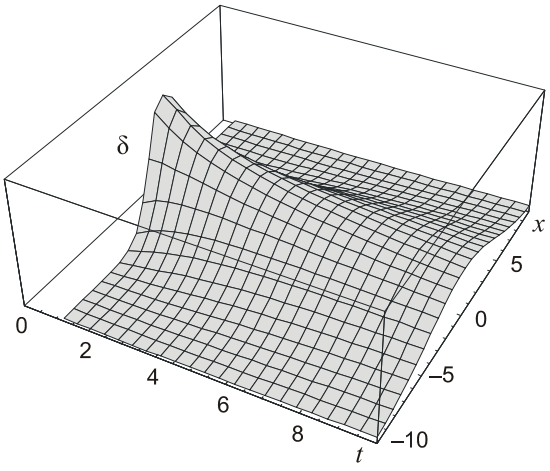
$$\mathbf{G}(t,\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(4\pi\eta_{\mathrm{M}}t)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\eta_{\mathrm{M}}t}}\,; \qquad G(t,\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{(4\pi\eta_{\mathrm{M}}t)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\eta_{\mathrm{M}}t}}\ . \tag{1.187}$$

Je zřejmé, že Diracův impuls lokalizovaný v $\mathbf{x}'$ je gaussovsky s časem „rozmýván“. V jednorozměrném problému je situace ukázána na obrázku 1.31. S časem jdoucím limitně k nule se Gaussův ballík mění v Diracův impulz.

Obecnou počáteční podmínku rozložíme na jednotlivé Diracovy impulzy a výsledná řešení sečteme (Greenova funkce je pro všechny tři složky pole stejná):

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = G \underset{(\mathbf{x})}{*} \mathbf{B}_0 = \frac{1}{(4\pi\eta_{\mathrm{M}}t)^{3/2}} \int \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\eta_{\mathrm{M}}t}}\, \mathbf{B}(0,\mathbf{x}')\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}' . \tag{1.188}$$

Pole je tedy prostorovou konvolucí počáteční podmínky a Greenovy funkce. Přímým dosazením do rovnice difúze lze snadno ukázat, že vztah (1.188) je jejím řešením. Obecné odvození nalezne čtenář v prvním díle „Vybraných kapitol“, v části I.3.8.4 *Greenova funkce*, kde je odvozeno obecné řešení rovnice difúze v N dimenzích.



Obr. 1.31: Časový vývoj Diracova impulzu

Poznámka 1: Alternativně lze při řešení využít shodného tvaru rovnice difúze se Schrödingerovou rovnicí a operátorově ihned napsat řešení

$$\left|\mathbf{B}(t)\right\rangle = \mathrm{e}^{\eta_{\mathrm{M}}\boldsymbol{\nabla}^2 (t-t_0)} \left|\mathbf{B}_0\right\rangle .$$

Dosazením do rovnice difúze okamžitě vidíme, že jde o řešení, které navíc splňuje počáteční podmínku. Standardními metodami popsanými v prvním díle „Vybraných kapitol“ v části I.3.4.5 *Spektrální teorie* je třeba najít spektrum Laplaceova operátoru $\boldsymbol{\nabla}^2$ a poté použít větu o spektrálním rozvoji:

$$\left|\mathbf{B}(t)\right\rangle = \sum_k \mathrm{e}^{\eta_{\mathrm{M}}\lambda_k (t-t_0)} \left|k\right\rangle\left\langle k\right|\left.\mathbf{B}_0\right\rangle ,$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \left|k\right\rangle = \lambda_k \left|k\right\rangle .$$

Poznámka 2: Stejné řešení má i rovnice pro difúzi částic:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n\,;$$

$$G(t,\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\ \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4Dt}}\ ; \tag{1.189}$$

$$n(t,\mathbf{x}) = \int G(t,\mathbf{x},\mathbf{x}')\,n(0,\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}'$$

Poznámka 3: Pro 1D zdroj částic, který je doplňuje tak, aby v počátku byla neustále koncentrace n_0, je řešením rovnice difúze (lze snadno dokázat dosazením)

$$n(t,x) = n_0\left[1-\phi\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right], \tag{1.190}$$

kde ϕ je chybová funkce definovaná vztahem

$$\phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{1.191}$$

◖ **Příklad 1.1:** Nalezněte střední polohu a střední kvadratickou fluktuaci polohy částic pro difúzi Diracova impulzu, tj. pro Greenovu funkci (1.189) pro zdroj umístěný v počátku souřadnic ($\mathbf{x}' = 0$)

Řešení: Určeme například $\langle\, x\,\rangle$ a $\langle\, x^2\,\rangle$:

$$\langle\, x\,\rangle = \int G(t,\mathbf{x},\mathbf{x}')\,x\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} = \int \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}\,x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

$$\langle\, x^2\,\rangle = \int G(t,\mathbf{x},\mathbf{x}')\,x^2\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} = \int \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}\,x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2Dt\,.$$

Integrály se rozdělí na jednotlivé integrace a ty určíme ze vztahů I.3.574 až I.3.576. Je zřejmé, že střední poloha je v počátku souřadnic (tam, kde byl lokalizován Diracův impulz) a platí:

$$\langle\, \mathbf{x}\,\rangle = (0,0,0)\,,$$

$$\langle\, \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\,\rangle = \left\langle x^2+y^2+z^2\right\rangle = 6Dt\,,$$

$$l_{\mathrm{kv}} \equiv \sqrt{\langle\, \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\,\rangle - \langle\, \mathbf{x}\,\rangle\cdot\langle\, \mathbf{x}\,\rangle} = \sqrt{6Dt}\,.$$

Pro difúzi je typické, že střední kvadratické fluktuace rostou s časem jako $t^{1/2}$. ◗

Rovnice pro vektorový potenciál

Někdy je výhodnější namísto magnetického pole používat vektorový potenciál splňující vlnovou rovnici a Lorentzovu kalibrační podmínku

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} &= -\mu_0\mathbf{j}\,, \\ \frac{\partial\phi}{c^2\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.192}$$

V magnetohydrodynamice zanedbáváme Maxwellův posuvný proud, což je ekvivalentní omezení se na nízké frekvence dějů, viz (1.175). Z rovnice pro vektorový potenciál potom zbude jen

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}\,.$$

Za proudovou hustotu dosadíme z Ohmova zákona (1.174)

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}\right).$$

V magnetohydrodynamice je elektrické a magnetické pole dáno jen potenciálem **A**:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\,; \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}\,,$$

což po dosazení do předchozí rovnice dá výslednou rovnici pro vektorový potenciál

► $$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\mathbf{A} + \mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\,. \tag{1.193}$$

Rovnice pro vektorový potenciál má opět člen zamrzání a člen difúze. Rozepíšeme-li dvojný vektorový součin napravo, získáme snadno tvar se substancionální derivací

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sigma\mu_0}\nabla^2 A_i + u_k\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\,. \tag{1.194}$$

Rovnice pro hustotu

Za rovnici pro časový vývoj hustoty plazmatu poslouží rovnice kontinuity (1.162), kterou zapíšeme ve tvaru

► $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} \;=\; 0\,. \tag{1.195}$$

Snadno ji upravíme do tvaru se substancionální derivací:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \;+\; \partial_k(\rho u_k) \;=\; 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \;+\; \frac{\partial\rho}{\partial x_k}u_k \;+\; \rho\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \;=\; 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{u} = 0\,.$$

Výsledný tvar s úplnou časovou derivací proto je

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\,. \tag{1.196}$$

Z posledního výrazu je zřejmé, že nestlačitelná tekutina (kapalina) splňuje vztahy

$$\rho = \mathrm{const} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\,. \tag{1.197}$$

Obdobná rovnice kontinuity platí i pro koncentraci nebo pro hustotu náboje. Jde o jednu a tu samou rovnici, neboť hustotu hmoty získáme vynásobením koncentrace hmotností jedné částice. Analogicky získáme hustotu náboje vynásobením koncentrace nábojem jedné částice.

Rovnice pro rychlost

Rovnici pro rychlost odvodíme ve třech fázích. Nejprve pro ideální hydrodynamiku (bez viskozity), poté pro viskózní proudění a nakonec pro proudění za přítomnosti magnetického a gravitačního pole. Ve všech případech nalezneme jak konzervativní tvar (ve tvaru rovnice kontinuity) tak tvar se substancionální derivací. Výsledky budou kompatibilní se středováním Boltzmannovy rovnice přes rychlost ve statistice.

1) Ideální hydrodynamika

Pro objekt o hmotnosti *m* platí Newtonova pohybová rovnice

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\,.$$

Pro proudící prostředí zavedeme hustotu síly

$$\mathbf{f} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V}\,. \tag{1.198}$$

V hustotách bude Newtonova pohybová rovnice mít tvar (rychlost **v** jedné částice se stane rychlostí proudění **u**)

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}\,. \tag{1.199}$$

Po rozepsání substancionální derivace získáme rovnici

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} = \mathbf{f}\,. \tag{1.200}$$

Zbývá určit hustotu síly. Ta se liší podle procesů, které popisujeme. Může jít o hustotu Lorentzovy síly $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$, u zvukových vln v plynech půjde o tlakovou sílu. Standardně síla míří k minimu potenciální energie:

$$\mathbf{F} = -\nabla W_{\mathrm{P}} \tag{1.201}$$

nebo v hustotách

$$\mathbf{f} = -\nabla w_{\mathrm{P}}\,. \tag{1.202}$$

Tlaková energie je $W_p = \int p\,\mathrm{d}V$, hustota tlakové energie proto je $w_p = p$ a hustota síly způsobená tlakem vychází

$$\mathbf{f} = -\nabla p\,. \tag{1.203}$$

Pohybová rovnice (1.200) s hustotou síly způsobenou tlakem má proto tvar

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} \;=\; -\nabla p\,. \tag{1.204}$$

Jde o hledanou rovnici pro časový vývoj rychlostního pole.

► $$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \;=\; -\nabla p\,, \qquad \text{neboli} \qquad \rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} \;=\; -\nabla p\,. \tag{1.205}$$

Nyní tuto rovnici přepíšeme do konzervativního tvaru, tj. budeme hledat zákon zachování hybnosti ve tvaru rovnice kontinuity. Nalezněme časový vývoj hustoty hybnosti

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = \frac{\partial \rho}{\partial t}u_k + \rho\frac{\partial u_k}{\partial t}\,.$$

Za časovou změnu hustoty dosadíme z rovnice kontinuity (1.195) a za časovou změnu rychlosti z pohybové rovnice (1.205):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = -\partial_l(\rho u_l)\,u_k - \rho\,(u_l\partial_l)\,u_k \;\; -\partial_k p\,.$$

Všechny členy převedeme na levou stranu a upravíme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) \;+\; \frac{\partial(\rho u_l)}{\partial x_l}u_k \;+\; (\rho u_l)\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \;+\frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) \;+\; \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\rho u_l u_k\right) \;+\; \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) \;+\; \frac{\partial}{\partial x_l}\left(p\delta_{kl} + \rho u_k u_l\right) = 0\,.$$

Získali jsme zákon zachování hybnosti. V závorce v prostorových derivacích je tok hybnosti neboli tenzor tlaku. Sama hybnost je vektorová veličina a proto její tok tvoří tenzor druhého řádu. Symetrie tenzoru tlaku zajišťuje zachování momentu hybnosti v proudící tekutině. Tenzor tlaku se skládá ze dvou částí – skalární části, kterou tvoří normální tlak působící ve všech směrech stejně. Druhou částí je tenzorová část související s prouděním tekutiny. Zákon zachování hybnosti můžeme napsat ve složkovém zápisu

► $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) \;+\; \frac{\partial}{\partial x_l}\left(T^{(\mathrm{P})}_{kl}\right) = 0\,; \qquad T^{(\mathrm{P})}_{kl} \equiv p\delta_{kl} + \rho u_k u_l \quad . \tag{1.206}$$

nebo v invariantním tvaru

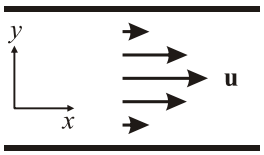
► $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) \;+\; \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{\mathbf{T}}}_{\mathrm{P}} = 0\,; \qquad \vec{\vec{\mathbf{T}}}_{\mathrm{P}} \equiv p\vec{\vec{\mathbf{1}}} + \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} \quad . \tag{1.207}$$

Index (*P*) označuje tlak, později přibude tenzor viskozity a Maxwellův tenzor pnutí.

2) Viskózní tekutina

Pro viskózní tekutiny jsou typické nenulové prostorové derivace rychlosti. Například tekutina proudící mezi dvěma deskami má u povrchu desek rychlost nulovou a mezi deskami maximální, tj. příčná změna rychlosti $\partial u_x/\partial y$ je nenulová. Ztráty hybnosti způsobené viskózními procesy proto popíšeme tenzorem viskozity

$$V_{kl} = f_{kl}(\partial u_i/\partial x_j)\,.$$



Obr. 1.32: Proudění viskózní tekutiny

V nejjednodušším přiblížení bude tenzor lineární v derivacích rychlostí, případně provedeme Taylorův rozvoj do prvního řádu v derivacích rychlostí. Tenzor musí být symetrický tenzor druhého řádu (z důvodu zachování momentu hybnosti). Nejobecnější tvar symetrického tenzoru za našich předpokladů bude

$$V_{kl} = a\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + b\,\delta_{kl}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = a\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + b\delta_{kl}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,.$$

Symetrický tenzor získáme pomocí součtu derivací v závorce nebo součtem všech diagonálních členů (divergence rychlosti). V matematice i ve fyzice se dobře pracuje s tenzory s nulovou stopou (součtem diagonálních členů). Stopa tenzoru se zachovává. Proto se část druhého (skalárního) výrazu přidá k prvnímu výrazu, tak aby měl nulovou stopu:

$$V_{kl} = \eta\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{kl}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right) + \zeta\delta_{kl}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,. \tag{1.208}$$

Stopa tenzorové části v kulaté závorce je nulová:

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{kk}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right) = \left(\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathrm{div}\,\mathbf{u} - \frac{2}{3}\cdot 3\cdot \mathrm{div}\,\mathbf{u}\right) = 0.$$

Koeficienty η a ζ se nazývají *první a druhá vazkost*. Konzervativní tvar zákona zachování hybnosti potom má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}T_{kl}^{(\mathrm{P})} = 0\,; \qquad T_{kl}^{(\mathrm{P})} \equiv p\delta_{kl} + \rho u_k u_l - V_{kl}\,. \tag{1.209}$$

nebo v invariantním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\mathbf{u}) + \vec{\nabla}\cdot\ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{P}} = 0\,; \qquad \ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{P}} \equiv p\vec{\mathbf{1}} + \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} - \ddot{\mathbf{V}}\,. \tag{1.210}$$

U viskózního tenzoru píšeme znaménko minus, protože jde o ztráty toku hybnosti. S touto konvencí jsou oba viskózní koeficienty za běžné situace kladné. Odvoďme nyní pohybovou rovnici. Ve vztahu (1.209) dosadíme za oba tenzory a provedeme všechny derivace:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) \; + \; \frac{\partial}{\partial x_l}\left[p\delta_{kl} + \rho u_k u_l - \eta\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{kl}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \right) \; - \; \zeta\delta_{kl}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \right] = 0 \;\; .$$

Po přímočarém výpočtu získáme pohybovou rovnici

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} \; = \; -\boldsymbol{\nabla} p \; + \; \eta\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} \; + \; (\zeta + \eta/3)\,\boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) \;\; . \qquad (1.211)$$

Jde o slavnou *Navierovu-Stokesovu rovnici* pro viskózní tekutinu. Je-li tekutina nestlačitelná (kapalina, $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$) získá pohybová rovnice jednoduchý tvar

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} \; = \; -\boldsymbol{\nabla} p \; + \; \eta\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} \qquad (1.212)$$

a kapalinu lze popsat jediným viskózním koeficientem η.

3) Vodivá tekutina

V případě magnetohydrodynamiky se v rovnici (1.211) objeví na pravé straně ještě hustota Lorentzovy síly:

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} \; = \; -\boldsymbol{\nabla} p \; + \; \eta\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} \; + \; (\zeta + \eta/3)\,\boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) + \mathbf{j}\times\mathbf{B} \;\; . \qquad (1.213)$$

Pro odvození konzervativního tvaru stačí upravit jen hustotu Lorentzovy síly, konzervativní podobu všech ostatních členů známe:

$$\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_k = \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{B}\right)_k = \varepsilon_{klm}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\right)_l B_m = \varepsilon_{klm}\varepsilon_{lno}\partial_n(H_o)B_m =$$

$$= -\varepsilon_{lkm}\varepsilon_{lno}\partial_n(H_o)B_m = (-\delta_{kn}\delta_{mo} + \delta_{ko}\delta_{mn})\frac{\partial H_o}{\partial x_n}B_m = -\frac{\partial H_m}{\partial x_k}B_m + \frac{\partial H_k}{\partial x_m}B_m =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_m}(H_k B_m) - H_k\frac{\partial B_m}{\partial x_m} \;\; .$$

Poslední člen je nulový a v prostředním členu zaměníme sčítací index:

$$\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_k = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}(H_k B_l) = -\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\delta_{kl} - H_k B_l\right] .$$

Výraz v hranaté závorce je Maxwellův tenzor pnutí pro magnetické pole. Má stejně jako tenzor tlaku skalární a vektorovou část. Po převedení na levou stranu pohybové rovnice dostaneme vztah

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) \; + \; \frac{\partial}{\partial x_l}\left(T_{kl}^{(\mathrm{P})} + T_{kl}^{(\mathrm{M})}\right) = 0 \;\; . \qquad (1.214)$$

Jednotlivé tenzory mají složky

$$T_{kl}^{(\mathrm{P})} \equiv p\delta_{kl} + \rho u_k u_l - V_{kl}\,, \qquad \ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{P}} \equiv p\,\ddot{\mathbf{1}} + \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} - \ddot{\mathbf{V}}\,;$$

$$\blacktriangleright \qquad T_{kl}^{(\mathrm{M})} \equiv \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\delta_{kl} - H_k B_l\,, \qquad \ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{M}} \equiv \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\,\ddot{\mathbf{1}} - \mathbf{H}\otimes\mathbf{B}\,; \tag{1.215}$$

$$V_{kl} \equiv \eta\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{kl}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right) + \zeta\delta_{kl}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,.$$

Skalární část Maxwellova tenzoru pnutí se někdy nazývá magnetický tlak a je rovna hustotě energie magnetického pole

$$\blacktriangleright \qquad p_{\mathrm{M}} = \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2} = \frac{B^2}{2\mu}\,. \tag{1.216}$$

Poznámka 1: Magnetické pole přítomné ve slunečních skvrnách je zodpovědné za jejich nižší teplotu (tlak ve skvrně je dán magnetickou i hydrodynamickou částí)

$$p_{\mathrm{out}} = p_{\mathrm{in}} \qquad \Rightarrow \qquad nkT_{\mathrm{out}} = B^2/2\mu + nkT_{\mathrm{in}}\,.$$

Poznámka 2: Lorentzova síla má dvě části:

$$\mathbf{j}\times\mathbf{B} = -\ddot{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{M}} = -\boldsymbol{\nabla}p_{\mathrm{M}} + \frac{1}{\mu}(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\,. \tag{1.217}$$

První část je gradientem magnetického tlaku, druhá část souvisí se zakřivením magnetických indukčních čar. Plazma se pod vlivem síly buď snaží indukční čáry napřímit a nebo pokud jde o čáry uzavřené, snaží se z nich udělat kružnice.

Uzavření soustavy

Ve statistice jsme si ukázali, jak středování Boltzmannovy rovnice přes rychlostní část fázového prostoru vede na rovnice kontinua. Jedná se o rovnici kontinuity, rovnici pro rychlost, energii (teplotu, tlak), tepelný tok, atd. Nekonečnou soustavu parciálních diferenciálních rovnic získanou středováním přes mocniny rychlosti je třeba v určité fázi ukončit algebraickým vztahem. My tak učiníme u rovnice pro tlak a budeme předpokládat, že tlak splňuje algebraický vztah $p = p(\rho)$ (může jít o polytropní či jinou závislost). Na závěr zapišme přehledně získanou sadu MHD rovnic v konzervativním tvaru

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu}\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B} + \mathrm{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\,,$$

$$\blacktriangleright \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\mathbf{u} = 0\,, \tag{1.218}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(T_{kl}^{(\mathrm{P})} + T_{kl}^{(\mathrm{M})}\right) = 0\,,$$

$$p = p(\rho)\,.$$

a ve tvaru s úplnými časovými derivacemi:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\,, \tag{1.219}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p - \nabla p_{\mathrm{M}} + \frac{1}{\mu}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \eta\nabla^2\mathbf{u} + (\zeta+\eta/3)\,\nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{u})\,,$$

$$p = p(\rho)\,.$$

Existují různé modifikace uvedené soustavy rovnic, rovnice kontinuity a pohybové rovnice mohou být například uvažovány pro elektronovou a iontovou složku odděleně, soustavu můžeme uzavřít až po rovnici pro energii algebraickým vztahem pro vedení tepla, rovnice lze zobecnit i pro dominantní vliv elektrického pole. K nejčastěji používaným uzavřením soustavy MHD rovnic patří:

Uzavření nestlačitelnou tekutinou

Předpokládáme, že hustota je konstantní, tj. ρ = const. Úplná časová derivace hustoty je proto nulová

$$\partial\rho/\partial t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho = 0 \tag{1.220}$$

a z rovnice kontinuity lze ukázat, že div **u** = 0.

Uzavření polytropou

Předpokládáme polytropní závislost mezi tlakem a hustotou

$$p = K\rho^{\gamma}\,. \tag{1.221}$$

Po úpravě máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\rho^{-\gamma}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(p\rho^{-\gamma}\right) + u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(p\rho^{-\gamma}\right) = 0\,.$$

Provedeme obě derivace jako derivace součinu funkcí a za parciální derivaci hustoty podle času dosadíme z rovnice kontinuity. Po jednoduchých úpravách získáme

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)p + \gamma p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\,. \tag{1.222}$$

Uzavření CGL

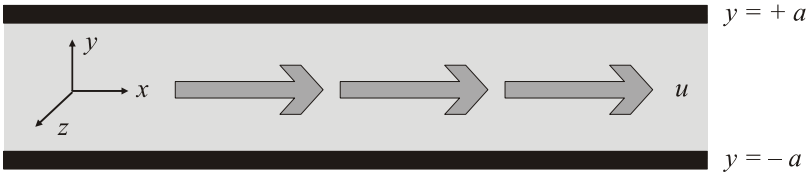
Toto uzavření magnetohydrodynamiky zohledňuje anizotropní chování plazmatu. Je nazváno podle počátečních písmen autorů této aproximace (F. Chew, M. Goldberg, F. Low), kteří již v roce 1956 uvažovali průběh tlaku ve tvaru

$$p\delta_{kl} \;\rightarrow\; p_{kl} = p_{\perp}\delta_{kl} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\frac{B_k B_l}{B^2}\,. \tag{1.223}$$

1.3.2 Vybrané jevy

Hartmannovo řešení

Z klasické hydrodynamiky je známo chování nestlačitelné viskózní kapaliny mezi dvěma vodorovnými deskami. Je-li na začátku a konci desek rozdílný tlak, může vzniknout jednoduché laminární proudění, které se řídí *Poiseuillovým zákonem*, který objevil francouzský fyzik a matematik Jean Louis Marie Poiseuille (1797–1869). Rychlost má parabolický průběh – v těsné blízkosti desek je rychlost nulová, uprostřed toku maximální. To je způsobeno viskózními procesy v kapaline. Okrajové efekty desek zanedbáváme.



Obr. 1.33: Tekutina mezi dvěma rovinnými deskami

Je-li kapalina vodivá, lze nalézt obdobné řešení z rovnic magnetohydrodynamiky, které poprvé odvodil dánský inženýr Julian Hartmann v roce 1937. Napišme nejprve výchozí soustavu rovnic magnetohydrodynamiky:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0\,, \\ \rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} &= -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u} + \left[\frac{\operatorname{rot}\mathbf{B}}{\mu}\times\mathbf{B}\right], \\ \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\mathbf{B} + \operatorname{rot}\left[\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right]. \end{aligned} \tag{1.224}$$

První rovnice je rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu, druhá rovnice je pohybová rovnice, napravo je postupně tlaková síla, viskózní síla a Lorentzova síla. Poslední rovnice je rovnice pro magnetické pole s difúzním členem a členem zamrzání.

Poznámka 1: Stavovou rovnici, kterou se běžně uzavírá MHD soustava, nemůžeme u nestlačitelné kapaliny použít, protože tlak není funkcí hustoty. Tlak klesá ve směru proudění lineárně, zatímco hustota kapaliny je konstantní. Soustavu lze uzavřít předpokladem konstantního gradientu tlaku ve směru proudění.

Souřadnicovou soustavu zvolíme podle obrázku (tak, abychom maximálně využili symetrii problému). Budeme předpokládat stacionární proudění, tj. časové derivace ve vztahu (1.224) budou nulové. Proudění předpokládáme jen podél desek, tj. rychlostní pole bude mít jen složku $u_x(y)$, závislost na y je dána symetrií problému, u desek (pro $y = \pm a$) je rychlost nulová, uprostřed oblasti maximální. Budeme předpokládat nenulové magnetické pole v řezu proudění podle obrázku, tj. nenulové $B_x(y)$ a $B_y(y)$. Z Maxwellovy rovnice div $\mathbf{B} = 0$ plyne, že B_y je konstantní. Tlak musí klesat podél proudění a může být stejně jako ostatní veličiny závislý na souřadnici y. Řešení má tedy tvar:

$$\mathbf{u} = \left[u(y), 0, 0\right]; \quad \mathbf{B} = \left[B(y), B_0\,, 0\right]; \quad p = p(x, y)\,. \tag{1.225}$$

Pole B_0 má význam příčného pole, které brání pohybu vodivé kapaliny. Pole $B(y)$ je při pohybu ve vodivé kapalině indukováno, tedy pohybem vzniká. Po dosazení do sedmi rovnic (1.224) zbudou netriviální vztahy

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} + \frac{B_0}{\mu}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}y}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{B}{\mu}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}y}, \\ 0 &= \frac{1}{\sigma\mu}\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}y^2} + B_0 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}. \end{aligned} \tag{1.226}$$

Řešení získané soustavy není složité. Předpokládejme (stejně jako v Poiseuillově zákoně) lineární úbytek tlaku ve směru proudění, tj. $\partial p/\partial x = \text{const}$. Lze ukázat, že jiný průběh ani není možný. Potom první a třetí rovnice dává soustavu pro rychlost a magnetické pole, z druhé rovnice je třeba dopočítat tlak. Pro u a B tedy máme:

$$\begin{aligned} \eta \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} + \frac{B_0}{\mu}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}y} &= \text{const}, \\ \frac{1}{\sigma\mu}\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}y^2} + B_0 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= 0. \end{aligned}$$

První rovnici derivujeme podle y a z rovnic vyloučíme druhé derivace magnetického pole:

$$\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}y^3} - \frac{1}{D^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0; \qquad \text{kde} \quad \frac{1}{D^2} \equiv \frac{\sigma B_0^2}{\eta}, \quad \text{tj.}$$

Po první integraci máme

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} - \frac{1}{D^2} u = C_1.$$

Jde o lineární diferenciální rovnici s pravou stranou. Řešení nalezneme jako součet homogenního a partikulárního řešení (lze ho hledat ve tvaru konstanty):

$$u(y) = u_{\mathrm{H}}(y) + u_{\mathrm{P}}(y) \; = C_2 \,\mathrm{ch}\left[\frac{y}{D}\right] + C_3 \,\mathrm{sh}\left[\frac{y}{D}\right] - C_1 D^2 .$$

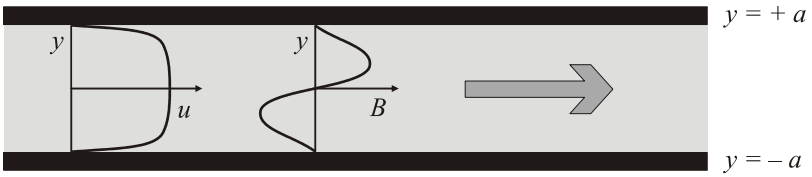
Namísto exponenciál jsme zvolili bázi homogenního řešení z funkcí ch a sh. Konstanty integrace určíme z podmínek $u(\pm a) = 0$; $u(0) = u_0$. Výsledné řešení je

► $$u(y) = u_0 \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - \mathrm{ch}\left(\frac{y}{D}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - 1}; \qquad D \equiv \sqrt{\frac{\eta}{\sigma B_0^2}}. \tag{1.227}$$

Nyní již snadno z první nebo třetí rovnice (1.226) dopočteme magnetické pole. Integrační konstanty určíme z podmínky spojitosti tečných složek vektoru magnetické intenzity **H** na rozhraní $B_{1t}/\mu_1 = B_{2t}/\mu_2$, odkud plyne $B(\pm a) = 0$. Výsledek je

► $$B(y) = \mu u_0 \sqrt{\sigma\eta}\, \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{y}{D}\right) - \frac{y}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{a}{D}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - 1}; \qquad D \equiv \sqrt{\frac{\eta}{\sigma B_0^2}}\,. \tag{1.228}$$

Nalezený profil rychlostního a magnetického pole je na obrázku 1.34. Přítomnost magnetického pole způsobuje zploštění rychlostního pole ve středu proudění a jeho rychlý pokles v blízkosti desek. Nenulová konstantní složka pole ve směru y (napříč proudění) způsobuje existenci složky pole ve směru proudění, jejíž profil je také na obrázku.



Obr. 1.34: Hartmannovo řešení

Polohu maxima a minima magnetického profilu je možné získat derivací vztahu (1.228)

$$y_{1,2} = \pm D\,\mathrm{argch}\left[\frac{D}{a}\,\mathrm{sh}\left(\frac{a}{D}\right)\right]. \tag{1.229}$$

Slabá pole

Pro slabé pole ($a/D \ll 1$) provedeme rozvoj exponenciál do prvního řádu a dostaneme známý Poiseuillův parabolický profil, magnetické pole má na proudění malý vliv:

$$u \approx u_0 \left[1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2\right]. \tag{1.230}$$

Silná pole

Pro silné pole ($a/D \gg 1$) musíme řešit případ $y > 0$ a $y < 0$ odděleně. Ve výsledku ponecháme vždy kladnou exponenciálu, vyjde

$$u \approx u_0 \left[1 - \exp\left(\frac{|y| - a}{D}\right)\right]. \tag{1.231}$$

Rychlostní pole v tomto případě exponenciálně ubývá u stěn. Veličina D charakterizuje tloušťku hraniční vrstvy. Někdy se zavádí bezrozměrné, tzv. Hartmannovo číslo $\#_{\mathrm{Ha}}$ vztahem

$$\#_{\mathrm{Ha}} \equiv \frac{a}{D} = B_0 a \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\,. \tag{1.232}$$

Poměr hustot magnetické a viskózní síly je roven druhé mocnině Hartmannova čísla:

$$\frac{jB_0}{\eta\Delta u} \approx \frac{\sigma E B_0}{\eta u / a^2} \approx \frac{\sigma u B_0^2}{\eta u / a^2} = \frac{\sigma B_0^2 a^2}{\eta} = \#_{\mathrm{Ha}}^2\,. \tag{1.233}$$

Vlny konečné amplitudy

Soustava MHD rovnic je nelineární a velmi složitá. Při provádění linearizace sice dostáváme řešení ve tvaru rovinných vln, ze kterých můžeme složit vlny komplikovanější, ale vždy s infinitezimální amplitudou. Podstatnou část řešení ale vůbec nenacházíme. V této části ukážeme, že existují speciální řešení, která splňují obyčejnou vlnovou rovnici. Řešením je pak postupující vlna libovolného tvaru a libovolné amplitudy. Uvažme soustavu pro nestlačitelnou, neviskózní, ideálně vodivou kapalinu ($\eta = \zeta = 1/\sigma = 0$)

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mu}(\operatorname{rot}\mathbf{B})\times\mathbf{B}\,;\\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left[\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right];\\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\,;\\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,.\end{gathered} \tag{1.234}$$

Jde o rovnici pro rychlostní pole (pohybovou rovnici s tlakovou a Lorentzovou silou) a rovnici pro pole magnetické se členem zamrzání. Doplňkové jsou rovnice pro nestlačitelnost a Gaussova věta pro magnetické pole.

Předpokládejme nyní, že veličiny se mění jen v jednom určitém směru. Volme osu z souřadnicové soustavy v tomto směru. Potom hledáme řešení ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,z)\,;\quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t,z)\,;\quad p = p(t,z)\,. \tag{1.235}$$

Z doplňkových rovnic (divergencí) v (1.234) okamžitě plyne

$$u_z = u_0(t)\,;\quad B_z = B_0(t)\,.$$

Předpokládejme, že chceme nalézt řešení v podobě přesouvajícího se vlnového balíku, který je lokalizovaný v prostoru, proto nemůže rychlost plazmatu být nenulová v nekonečnu a musíme položit $u_0 = 0$. V uvedené geometrii tedy máme

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0),\ \ \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_0),\ \ \nabla \to (0,0,\partial/\partial z).$$

Napišme nyní složitější členy v prvních dvou rovnicích (1.234):

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \left[0,\,0,\,0\right];$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B} = \left[B_0\frac{\partial B_x}{\partial z},\, B_0\frac{\partial B_y}{\partial z},\, -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B_x^2 + B_y^2}{2}\right)\right];$$

$$\nabla p = \left[0,0,\frac{\partial p}{\partial z}\right];$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) = \left[B_0\frac{\partial u_x}{\partial z},\, B_0\frac{\partial u_y}{\partial z},\, 0\right].$$

Vidíme, že rozpisy jednotlivých veličin se liší ve směru osy z a v rovině (x, y). Naše výchozí rovnice dají:

Podélný směr (v ose *z*)

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}\left[p + \frac{B_x^2 + B_y^2}{2\mu} \right]; \quad \frac{\partial B_0}{\partial t} = 0 .$$

Z první rovnice plyne nezávislost celkového tlaku na souřadnici *z*, složku $B_z = B_0$ můžeme do pravé strany první rovnice klidně přidat, protože B_0 nezávisí na *z*. Podle druhé rovnice B_0 nezávisí ani na *t* a jde o konstantu v čase i v prostoru. Pro celkový tlak platí

$$\Pi \equiv p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} = \Pi(t) .$$

Kolmý směr (v rovině xy)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}; \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} . \end{aligned} \tag{1.236}$$

V kolmém směru je soustava rovnic lineární, aniž bychom byli nuceni linearizaci provádět. Obě rovnice jsou navíc triviálně splněny i ve směru osy *z*, protože zde jsou veličiny konstantní. Lze je tedy chápat jako výchozí soustavu rovnic pro vlnění v obou směrech. Jednoduchým vyloučením proměnných získáváme pro rychlostní i magnetické pole vlnové rovnice (stačí první rovnici derivovat podle času a za $\partial\mathbf{B}/\partial t$ dosadit z druhé rovnice nebo naopak derivovat podle času druhou rovnici a dosadit za $\partial\mathbf{u}/\partial t$ z rovnice první). Výsledek je

► $$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_\mathrm{A}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{u} = 0 ; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_\mathrm{A}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0 ; \end{aligned} \tag{1.237}$$

► $$v_\mathrm{A} \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho}} . \tag{1.238}$$

Jde o vlnovou rovnici s charakteristickou rychlostí rovnou Alfvénově rychlosti. Nelineární MHD soustava rovnic pro případ ideálně vodivé nestlačitelné kapaliny bez tření poskytuje řešení ve tvaru obecné vlny libovolné amplitudy. Poznamenejme, že hodnotu Alfvénovy rychlosti snadno určíme z rovnosti hustoty kinetické a magnetické energie

$$\frac{\rho v_\mathrm{A}^2}{2} \approx \frac{B^2}{2\mu} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{A} = \frac{B}{\sqrt{\mu\rho}} .$$

Alfvénovu rychlost získá plazma, pokud se veškerá magnetická energie přemění v kinetickou energii. K tomu dochází například při přepojení magnetických indukčních čar. Alfvénovou rychlostí se pohybují také některé typické vlny v plazmatu.

Helicita

V plazmových vláknech se často pozorují typické šroubovicové útvary. Nacházejí se v laboratorním i vesmírném plazmatu, v pinčích i v kometárních ohonech. V matematice se pro podobně strukturovaná pole zavádí pojem helicity.

Helicita a Beltramova podmínka

Hustota helicity vektorového pole **V** se definuje jako

$$\mathcal{H}(t,\mathbf{x}) \equiv \mathbf{V}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{V}\ , \tag{1.239}$$

celkovou helicitou potom rozumíme integrál

$$K(t) = \int_V \mathcal{H}(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}\ . \tag{1.240}$$

Helicita je skalární veličina charakterizující helikálnost (šroubovitost) indukčních čar pole. Je nulová pro všechna pole splňující podmínku nevířivosti (rot **V** = 0) a také pro všechny víry s kruhovými proudnicemi. Pole s helikální strukturou mají helicitu úměrnou $\sin\beta$, kde β je úhel stoupání šroubovice. Pro plazmová vlákna popisovaná v rámci MHD teorie může být důležitá hustota helicity magnetického pole, která se definuje přes vektorový potenciál **A**, hustota helicity elektrického pole **E** a rychlostního pole **u**:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A &= \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}\ = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\ ,\\ \mathcal{H}_E &= \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\,\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\ ,\\ \mathcal{H}_u &= \mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\ .\end{aligned} \tag{1.241}$$

Veličinu $\boldsymbol{\omega} \equiv \operatorname{rot}\mathbf{u}$ nazýváme vířivost. Zabývejme se nyní poli, která splňují tzv. Beltramovu podmínku: *rotace pole je úměrná samotnému poli* (Beltramovo pole)

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \alpha\mathbf{V}\ , \qquad \text{neboli} \qquad \mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0\ . \tag{1.242}$$

Jde o pole pojmenovaná podle italského matematika Eugenia Beltramiho (1835–1899). Koeficient úměrnosti α se může měnit v čase i v prostoru, my ho budeme v dalším textu považovat za konstantní. Beltramovo pole je 1) nezdrojové, 2) helikální, 3) splňuje Helmholtzovu rovnici. Nezdrojovost (div **V** = 0) plyne aplikací divergence na podmínku (1.242). Helikálnost je pro nenulové pole patrná přímo z definice:

$$\mathcal{H} \equiv \mathbf{V}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{V}\ =\ \alpha\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\ =\ \alpha V^2\ . \tag{1.243}$$

Aplikací rotace na podmínku (1.242) zjistíme, že Beltramova pole splňují Helmholtzovu rovnici (šlo o neekvivalentní úpravu, opačně to platit nemusí)

$$\nabla^2\,\mathbf{V}\ +\ \alpha^2\,\mathbf{V}\ =\ 0\ . \tag{1.244}$$

Vektor **V** je v tomto případě vlastním vektorem Laplaceova operátoru v odpovídající geometrii. Typickým matematickým příkladem Beltramových polí jsou tzv. ABC toky:

$$\mathbf{V}\ =\ (A\cos y + B\sin z,\ B\cos z + C\sin x\ ,\ C\cos x + A\sin y)\ . \tag{1.245}$$

Pro ABC pole platí rot **V** =**V** a $\nabla^2\,\mathbf{V} = -\mathbf{V}$. Tyto toky jsou důležité v teorii chaosu.

Ve fyzice plazmatu se často uvažují bezsilové konfigurace, ve kterých míří proudová hustota ve směru magnetického pole $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$ (tzv. Birkelandovy proudy). V tomto případě je hustota Lorentzovy síly $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ nulová. Konfigurace má nejnižší možnou energii a disipativní plazma se k této konfiguraci vždy postupně blíží. Magnetické pole v bezsilové konfiguraci splňuje Beltramovu podmínku. Snadno to ukážeme z Ampérova zákona:

$$\mathbf{j} \parallel \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j} \sim \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} \sim \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0\,. \tag{1.246}$$

Magnetické pole v bezsilové konfiguraci je proto vždy helikální.

Zachování magnetické helicity

Nyní ukážeme, že integrální magnetická helicita se zachovává za těchto předpokladů:

1. *Plazma má nekonečnou vodivost* (tzv. ideální plazma). V rovnici pro časový vývoj magnetického pole tedy dominuje jen člen zamrzání

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{u}\times\mathbf{B}\,. \tag{1.247}$$

   Ohmův zákon (1.174) v limitě nekonečné vodivosti získá tvar

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u}\times\mathbf{B}\,. \tag{1.248}$$

2. *Nestlačitelnost plazmatu*. Magnetické indukční čáry splňují $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Požadujeme, aby (díky zamrzání pole) splňovalo stejnou rovnici i rychlostní pole, tj.

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0\,. \tag{1.249}$$

3. *Normálová složka magnetického pole na povrchu systému je nulová*. Tento předpoklad znamená uzavřené indukční čáry. Na povrchu systému platí vztah

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = 0\,, \tag{1.250}$$

   kde $\mathbf{n}$ je vektor normály k ploše povrchu. Aby tento předpoklad byl pravdivý, musíme vzít za systém celou magnetickou trubici nebo musí být systém velmi rozsáhlý.

Integrální helicita pro vektorový potenciál magnetického pole je definována jako

$$K = \int \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}\,\mathrm{d}V = \int \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,. \tag{1.251}$$

Úplná časová derivace vede na výraz

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\right]\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,,$$

První člen budeme derivovat jako součin, druhý upravíme do tvaru divergence (využijeme nestlačitelnost $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$)

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \int_V \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{x} \;+\; \int_V \operatorname{div}\left[\mathbf{u}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\right]\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,,$$

s využitím Gaussovy věty pro poslední člen dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot\mathbf{B}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{x} + \int_V \left(\mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{x} + \int_{S=\partial V} (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S\,. \qquad (1.252)$$

Nejprve upravíme prostřední člen rovnice. Za časový vývoj magnetického pole dosadíme člen zamrzání a upravíme ho pomocí identity $\mathbf{A}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \mathbf{B}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{A} - \mathrm{div}\ (\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, kterou naleznete v prvním díle „Vybraných kapitol“, viz vztah I3.120:

$$\int_V \mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathrm{d}^3\mathbf{x} = \int_V \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} =$$

$$= -\int_V \mathrm{div}\left[\mathbf{A}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\right]\mathrm{d}^3\mathbf{x} + \int_V (\mathbf{u}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\ \mathrm{d}^3\mathbf{x} =$$

$$= -\int_V \mathrm{div}\left[(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{u} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{u})\mathbf{B}\right]\mathrm{d}^3\mathbf{x} + \int_V (\mathbf{u}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{B}\ \mathrm{d}^3\mathbf{x} =$$

$$= -\int_V \mathrm{div}\left[(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{u} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{u})\mathbf{B}\right]\mathrm{d}^3\mathbf{x} =$$

$$= -\int_S \left[(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\right]\mathrm{d}S =$$

$$= -\int_S (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S\,.$$

Pravý člen na předposledním řádku je nulový, protože na hranici systému je nulová – dle předpokladu (2) – normálová složka magnetického pole $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}$. Zbylý nenulový člen se vyruší s posledním členem v rovnici (1.252), ze které proto zbude:

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot\mathbf{B}\ \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,. \qquad (1.253)$$

Časovou derivaci vektorového potenciálu určíme z rovnice pro elektrické pole

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (1.254)$$

a následně dosadíme do rovnice (1.253):

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = -\int_V (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} + \nabla\phi\cdot\mathbf{B})\ \mathrm{d}^3\mathbf{x} =$$

$$= -\int_V \left[(-\mathbf{u}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{B} + \mathrm{div}\,(\phi\mathbf{B})\right]\mathrm{d}^3\mathbf{x} = \qquad (1.255)$$

$$= -\int_S \phi(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S = 0\,.$$

Integrální helicita se tedy za výše zmíněných předpokladů zachovává.

Stav s minimální magnetickou energií

Uvažujme nyní magnetickou trubici vyplněnou dokonale vodivým plazmatem. Na povrchu plazmatu je normálová složka pole nulová. Difúzní procesy jsou zanedbatelné, zachovává se magnetická helicita K. Hledejme proto extrém magnetické energie s vazbou danou zachováním magnetické helicity. Použijeme standardní metodu Lagrangeových multiplikátorů pro extrém s vazbou. Nutná podmínka extremálnosti je:

$$\delta(W_{\mathrm{M}} + \lambda K) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\delta \int \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \lambda \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{B} + \lambda\, \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \lambda\, \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{B} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0 \,.$$

Variace pole $\delta\mathbf{B}$ je provázaná s variací magnetického potenciálu $\delta\mathbf{A}$. Vzhledem k tomu, že $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, platí $\delta\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A}$ (derivace a variace jsou záměnné)

$$\int \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A} + \lambda\, \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \lambda\, \mathbf{A} \cdot \mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0 \,.$$

Členy s rotací převedeme na divergence za pomoci vztahu $\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, který naleznete v prvním díle „Vybraných kapitol“, viz vztah I3.120:

$$\int \left(-\frac{1}{\mu_0} \mathrm{div}\left(\mathbf{B}\times\delta\mathbf{A}\right) + \frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\,\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{A} + \lambda \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \lambda\, \mathrm{div}\left(\mathbf{A}\times\delta\mathbf{A}\right) + \lambda\, \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{A} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0 \,.$$

Nyní za pomoci Gaussovy věty převedeme integrály přes divergence na integrály přes povrch magnetické trubice, zbylé integrály ponecháme a dosadíme $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$:

$$-\int_{\partial V} \left[\left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \lambda\, \mathbf{A} \right) \times \delta\mathbf{A} \right] \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \;+\; \int_V \left[\left(\frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\,\mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} \right) \cdot \delta\mathbf{A} \right] \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0 \,.$$

Variace vektorového potenciálu musí být na hranici oblasti nulová, a proto první integrál vymizí:

$$\int_V \left[\left(\frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\,\mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} \right) \cdot \delta\mathbf{A} \right] \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0 \,.$$

Vzhledem k tomu, že tento výsledek platí pro jakoukoli oblast a variace vektorového potenciálu δA_k jsou nezávislé, musí být nulový („skoro všude“) samotný integrand:

$$\frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\,\mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} = 0 \,.$$

Odtud ale okamžitě plyne nutná podmínka extremálnosti magnetické energie ve tvaru

► $$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \,. \qquad (1.256)$$

Ve stavu s minimální energií, za podmínky zachování magnetické helicity, je tedy magnetické pole Beltramovým polem. Proudová hustota míří ve směru pole, jde o bezsilo-

vou konfiguraci, ve které tečou proudy podél magnetických indukčních čar (tzv. Birkelandovy proudy). Stav s minimální magnetickou energií je nutně helikální. Magnetické pole splňuje Helmholtzovu rovnici, kterou získáme aplikováním operace rotace na rovnici (1.256):

► $$\left(\nabla^2 + \alpha^2\right)\mathbf{B} = 0\,. \tag{1.257}$$

Je třeba ovšem poznamenat, že ne všechna řešení rovnice (1.257) jsou řešeními rovnice (1.256), neboť derivováním jsme zvýšili řád rovnice. Helmholtzova rovnice (1.257) již tedy není nutnou podmínkou extremálnosti magnetické energie. Pokud má plazma konečnou vodivost, dochází k disipaci energie a přepojování magnetických indukčních čar. Plazma se snaží zaujmout stav s co možná nejnižší magnetickou energií a dospět do stavu bezsilové konfigurace. Při těchto procesech se ovšem helicita mění.

Disipace magnetické helicity

Tuto podkapitolu může čtenář, který nepotřebuje znát podrobnosti, vynechat. Má-li systém uzavřené magnetické indukční čáry (nulovou normálovou složku magnetického pole na povrchu), jsou jedinou cestou jak změnit helicitu pole disipativní procesy a přepojení indukčních čar. Odhadněme úlohu difúzního členu v rovnici (1.177). Pokud provedeme krok za krokem odvození uvedené výše s nezanedbaným difúzním členem, dostaneme jednoduchý vztah

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} \;=\; -\frac{1}{\sigma}\int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{B}\;\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,. \tag{1.258}$$

Energie magnetického pole je dána vztahem

$$W_\mathrm{M} \;=\; \frac{1}{2\mu}\int_V B^2\;\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,. \tag{1.259}$$

Časová změna energie je dána Jouleovou disipací

$$\frac{\mathrm{d}W_\mathrm{M}}{\mathrm{d}t} \;=\; -\frac{1}{\sigma}\int_V j^2\;\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,. \tag{1.260}$$

K dalšímu výpočtu využijeme Schwarzovu nerovnost (I.3.165) na prostoru L^2:

$$\left|\langle \mathbf{j}|\mathbf{B}\rangle\right| \;\le\; \|\mathbf{j}\|\cdot\|\mathbf{B}\| \qquad \Rightarrow \qquad \left|\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{B}\;\mathrm{d}^3\mathbf{x}\right| \;\le\; \sqrt{\int j^2\;\mathrm{d}^3\mathbf{x}}\,\sqrt{\int B^2\;\mathrm{d}^3\mathbf{x}}\,.$$

Okamžitě tak získáme odhad

$$\left|\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\right| \;\le\; \left(\frac{2\mu}{\sigma}W_\mathrm{M}\left|\frac{\mathrm{d}W_\mathrm{M}}{\mathrm{d}t}\right|\right)^{1/2}. \tag{1.261}$$

Vztah ještě upravíme pomocí dvou dalších rozměrových odhadů: Podíl magnetické energie a helicity je nepřímo úměrný rozměrům systému

$$\frac{W_\mathrm{M}}{|K|} \sim \frac{(B^2/2\mu)\,\Delta V}{|AB|\,\Delta V} \sim \frac{B^2/2\mu}{BL\cdot B} = \frac{1}{2\mu_0 L} \qquad \Rightarrow \qquad W_\mathrm{M} \sim \frac{|K|}{2\mu L}\,. \tag{1.262}$$

Druhým odhadem je charakteristická doba difúze magnetického pole (tzv. rezistivní čas):

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad B/\tau_\mathrm{R} \simeq \frac{1}{\sigma\mu}B/L^2 \quad \Rightarrow \quad \tau_\mathrm{R} \sim L^2\sigma\mu\,. \tag{1.263}$$

Odhad (1.261) nyní můžeme upravit do používaného tvaru

$$\left|\frac{\Delta K}{\Delta t}\right| \lesssim \left(\frac{2\mu}{\sigma}\frac{|K|}{2\mu L}\frac{|K|}{2\mu L\,\Delta t}\right)^{1/2} = \left(\frac{K^2}{2\sigma\mu L^2\Delta t}\right)^{1/2} = \left(\frac{K^2}{2\tau_\mathrm{R}\Delta t}\right)^{1/2}$$

a pro relativní změnu helicity platí řádový odhad

► $$\left|\frac{\Delta K}{K}\right| < \left(\frac{\Delta t}{\tau_\mathrm{R}}\right)^{1/2}\,. \tag{1.264}$$

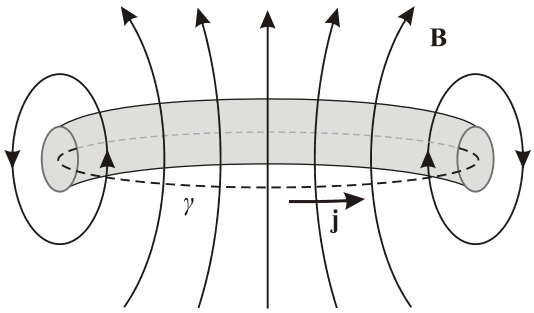
Pro rychlé děje ($\Delta t \ll \tau_\mathrm{R}$) je změna helicity ΔK zanedbatelná. Například sluneční koronální erupce s dobou rekonekce $\Delta t \sim 1\,000$ s, lineárními rozměry $L \sim 5\,000$ km a koeficientem magnetické difúze $\eta_\mathrm{M} \sim 10^{-6}\ \mathrm{km^2 s^{-1}}$ dají charakteristický rezistivní čas $\tau_\mathrm{R} \sim 10^{13}$ s a relativní změnu helicity $\Delta K/K < 10^{-5}$. Opačná situace je v plazmatu tokamaku. Rezistivní čas je v řádu jednotek sekund a doba udržení v desítkách sekund. Změna helicity je zde podstatná.

Tekutinové dynamo

Velmi důležitou části magnetohydrodynamiky je problematika generování magnetických polí v nitru Slunce a planet. Současná teorie tekutinového dynama nedokáže vysvětlit vznik těchto polí, ale úspěšně popisuje jejich udržování, zesilování a překlápění mezi dipólovou a azimutální složkou.

Cowlingův anti-dynamo teorém

Anglický astronom Thomas George Cowling (1906–1990) ukázal v roce 1934, že *stacionární osově symetrické magnetické pole nemůže vznikat osově symetrickým prouděním plazmatu*. Představme si jednoduché osově symetrické pole podle obrázku.



Obr. 1.35: Anti-dynamo teorém

Elektrický proud generující pole teče v proudové trubici podél neutrální linie, kde je rotace pole nenulová a samotné pole nulové. Na obrázku je neutrální linie vyznačena

čárkovaně. Integrujme proudovou hustotu podél této neutrální linie s využitím Ohmova zákona (1.174):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_{\gamma} \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \,.$$

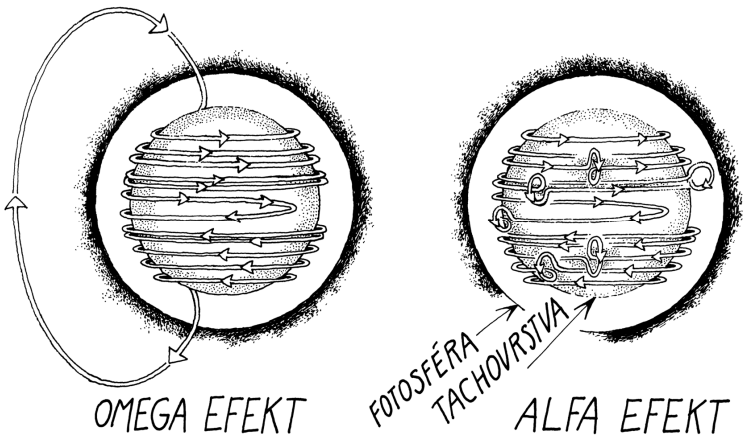
Magnetické pole je podél neutrální linie nulové, a proto je nulový i druhý člen integrace. První člen převedeme na plošný integrál ze Stokesovy věty a upravíme ho pomocí Maxwellových rovnic. Ze stacionarity plyne poté i nulovost prvního členu:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \sigma \int_{S} \left(\mathrm{rot}\, \mathbf{E} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \sigma \int_{S} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Dostali jsme se do sporu s předpokladem, že stacionární osově symetrické pole je generováno nenulovým proudem tekoucím podél neutrální linie. Generování magnetického pole je složitější záležitostí, dochází k přelévání mezi dipólovou a azimutální složkou.

Parkerův model tekutinového dynama

Současnou teorii tekutinového dynama v rotujícím tělese rozpracoval americký astrofyzik Eugene Parker (1927–2022). K teorii dynama ovšem přispěla i řada dalších fyziků, například významný sovětský teoretik Jakov Borisovič Zeldovič (1914–1987) nebo skotský astrofyzik Henry Keith Moffatt (*1935). Pokud těleso rotuje s diferenciální rotací, jsou původně dipólové magnetické indukční čáry vytahovány v místech rychlejší rotace (u Slunce v okolí rovníku) v azimutálním směru. Tím dochází k natahování magnetické indukční čáry, tj. zvětšování její délky. Tomuto jevu říkáme *omega efekt* (podle písmene omega, kterým se zpravidla značí úhlová frekvence rotujícího tělesa, ale i podle tvaru vychlípené indukční čáry). Při omega efektu se mění dipólová složka v azimutální složku. U Slunce k tomuto jevu dochází nejvýrazněji v blízkosti tzv. tachovrstvy, což je oblast přechodu mezi radiačním a konvektivním přenosem energie. Nachází se přibližně 220 000 km pod slunečním povrchem. Navinutí magnetické indukční čáry kolem dokola Slunce trvá přibližně 8 měsíců. U Země dochází k obdobnému jevu ve vodivém plastickém prostředí na hranici jádra a pláště.



Obr. 1.36: Sluneční dynamo

Druhým významným jevem je *alfa efekt*. Dochází při něm k vychýlení magnetické trubice vlivem Coriolisovy síly, k její deformaci a překlopení do dipólové složky. Jev je nazván podle tvaru vychlípené indukční čáry, která připomíná písmeno alfa. Tyto jevy umožňují vzájemnou transformaci obou složek pole a udržování pole tekutinovým dynamem. Vždy je jedna složka postupně zesilována na úkor druhé a poté naopak. Magnetický dipól se proto pravidelně překlápí. Například pro Slunce trvá celý cyklus (doba, za kterou je severní pól zpět na svém místě) 22 let. V období překlápění dipólu má pole výrazné vyšší momenty (kvadrupólový a oktupólový), pole připomíná *vlasatou kouli*, na jejímž povrchu se střídá více oblastí vystupujících a vstupujících indukčních čar.

Při odvození omega a alfa efektu je podstatná jednak diferenciální rotace tělesa a jednak fluktuace magnetického a rychlostního pole. Rozložme obě pole na část středovanou přes *krátkodobé fluktuace* a na fluktuační část:

$$\mathbf{u} = \langle\, \mathbf{u} \,\rangle + \delta\mathbf{u}\,; \qquad \mathbf{B} = \langle\, \mathbf{B} \,\rangle + \delta\mathbf{B}\,. \tag{1.265}$$

Střední hodnoty fluktuačních částí jsou zjevně nulové:

$$\langle\, \delta\mathbf{u} \,\rangle = 0\,; \qquad \langle\, \delta\mathbf{B} \,\rangle = 0\,. \tag{1.266}$$

Dosaďme nyní rozklad (1.265) do rovnice pro magnetické pole (1.177):

$$\frac{\partial\left[\langle\, \mathbf{B} \,\rangle + \delta\mathbf{B}\right]}{\partial t} \;=\; \frac{1}{\sigma\mu}\,\nabla^2\left[\langle\, \mathbf{B} \,\rangle + \delta\mathbf{B}\right] \;+\; \mathrm{rot}\Big[\big(\langle\, \mathbf{u} \,\rangle + \delta\mathbf{u}\big)\times\big(\langle\, \mathbf{B} \,\rangle + \delta\mathbf{B}\big)\Big]\,. \tag{1.267}$$

Středováním této rovnice zmizí členy lineární ve fluktuacích a získáme tak rovnici pro střední hodnotu magnetického pole:

► $$\frac{\partial\langle\, \mathbf{B} \,\rangle}{\partial t} \;=\; \frac{1}{\sigma\mu}\,\nabla^2\langle\, \mathbf{B} \,\rangle \;+\; \mathrm{rot}\big[\langle\, \mathbf{u} \,\rangle\times\langle\, \mathbf{B} \,\rangle\big] + \mathrm{rot}\big\langle\delta\mathbf{u}\times\delta\mathbf{B}\big\rangle\,. \tag{1.268}$$

Odečteme-li nyní od (1.267) rovnici pro střední hodnoty (1.268), získáme rovnici pro fluktuace magnetického pole:

► $$\frac{\partial}{\partial t}\big(\delta\mathbf{B}\big) = \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\big(\delta\mathbf{B}\big) + \mathrm{rot}\big[\langle\, \mathbf{u} \,\rangle\times\delta\mathbf{B} + \delta\mathbf{u}\times\langle\, \mathbf{B} \,\rangle + \delta\mathbf{u}\times\delta\mathbf{B} - \langle\, \delta\mathbf{u}\times\delta\mathbf{B} \,\rangle\big]\,. \tag{1.269}$$

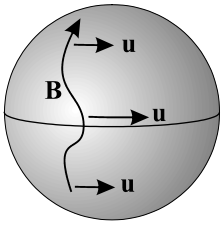
Získali jsme tedy jak rovnici pro časový vývoj střední hodnoty pole, tak pro časový vývoj fluktuační části. První člen na pravé straně rovnice (1.268) popisuje standardní difúzi pole, druhý člen je zodpovědný za Ω efekt a třetí za α efekt, který má původ ve fluktuacích rychlostního a magnetického pole.

Omega efekt

Pro Ω efekt je podstatný druhý člen rovnice (1.268):

► $$\frac{\partial\langle\, \mathbf{B} \,\rangle}{\partial t} \;=\; \mathrm{rot}\big[\langle\, \mathbf{u} \,\rangle\times\langle\, \mathbf{B} \,\rangle\big]\,. \tag{1.270}$$

Střední hodnota magnetického pole je zamrznutá do střední hodnoty rychlostního pole, tj. magnetické pole sleduje pohyby plazmatu. Pokud těleso rotuje konstantní úhlovou rychlostí, tvar dipólového pole se nemění. Například Slunce ale rotuje diferenciální rotací, na rovníku je úhlová rychlost o třetinu větší než na pólech. Výsledkem diferenciální rotace je vznik azimutální složky magnetického pole. Pro úplnost uveďme, že na Slunci je v blízkosti tachovrstvy nenulová diferenciální rotace i v radiálním směru.



Obr. 1.37: Omega efekt

Alfa efekt

Pro α efekt je podstatný třetí člen rovnice (1.268):

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}; \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \langle \delta\mathbf{u} \times \delta\mathbf{B} \rangle. \tag{1.271}$$

Alfa efekt zajišťuje transformaci azimutální složky pole zpět na dipólovou. Celá režie alfa efektu je čistě ve fluktuacích rychlostního a magnetického pole. Z hlediska statistické fyziky představuje výraz $\varepsilon \equiv \langle \delta\mathbf{u} \times \delta\mathbf{B} \rangle$ korelační funkci $\langle ab \rangle$ mezi složkami fluktuací rychlosti a magnetického pole. Pokud by byl výraz nulový, neexistovala by žádná korelace mezi rychlostním a magnetickým polem, to ale není případ námi popisované vodivé tekutiny. Výpočet korelační funkce $\varepsilon \equiv \langle \delta\mathbf{u} \times \delta\mathbf{B} \rangle$ může být velmi komplikovaný, často se provádí jen numerickým řešením rovnice pro fluktuace magnetického pole (1.269). Z ní je patrné, že fluktuace pole je úměrná střední hodnotě pole, proto bude mít při pomalu se měnícím poli korelační funkce tvar

$$\varepsilon_k = \alpha_{kl} \langle B_l \rangle + \beta_{klm} \partial_l \langle B_m \rangle + \cdots \tag{1.272}$$

Koeficienty α, β závisí na statistických vlastnostech fluktuací. Speciálně pro izotropní turbulence bude mít vztah pro korelační funkci jednoduchý tvar

$$\varepsilon_k = \alpha \langle B_k \rangle + \beta \varepsilon_{klm} \partial_l \langle B_m \rangle + \cdots \tag{1.273}$$

Po dosazení do rovnice (1.271) dostaneme vztah

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \alpha \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle - \beta \Delta \langle \mathbf{B} \rangle + \cdots \tag{1.274}$$

První člen na pravé straně popisuje alfa efekt – kladnou zpětnou vazbu, při níž je časová změna střední hodnoty pole úměrná samotné střední hodnotě. Z chaosu povstává nový řád. Alfa efekt je pojmenován podle koeficientu α u prvního členu. Druhý člen na pravé straně ($\beta < 0$) představuje tzv. *turbulentní difúzi* a nebudeme se jím dále zabývat. Pole $\langle \mathbf{B} \rangle$ je axiálním vektorem, proto musí být koeficient α pseudoskalárem, tedy měnit znaménko při změně pravotočivé souřadnicové soustavy za levotočivou. Jednoduchým měřítkem této ztráty zrcadlové symetrie fluktuujícího plazmatu je hustota helicity rychlostního pole. Pokud je nenulová, například díky Coriolisově síle, stane se ve vodivém plazmatu automaticky helikálním i magnetické pole, u kterého se objeví složka kolmá na původní směr a ta podle rovnice (1.274) dále narůstá, neboť u helikálních polí je

alespoň část pole Beltramova, tj. rot $\langle \mathbf{B} \rangle \sim \langle \mathbf{B} \rangle$, a proto je $\partial \langle \mathbf{B} \rangle / \partial t \sim \langle \mathbf{B} \rangle$. Tato kladná zpětná vazba bude jakoukoli statisticky vzniklou příčnou složku pole nadále zesilovat až do případné saturace. Pro fungování α efektu jsou tedy podstatné tři podmínky:

1) Plazma má alespoň malý nenulový odpor (jedině tak se helicita nezachovává a pole se mohou stát helikálními);
2) Fluktuace rychlosti jsou helikální (zajistí pseudoskalaritu koeficientu α);
3) Dojde ke vzniku kladné zpětné vazby, tj. malé poruchy musí narůstat a perturbační analýza vést k nestabilitě. Pro plazma ve hvězdách je podmínka splněna.

Ve Slunci je pro alfa efekt nejdůležitější tzv. tachovrstva na spodní části konvektivní zóny, kde se obracejí sestupné proudy na vzestupné a fluktuace rychlostního pole jsou veliké, a navíc helikální.

◖ **Příklad 1.2:** Představme si, že se v plazmatu vytvoří kruhově polarizovaná vlna šířící se ve směru osy z (lokálně, může jít i o azimutální směr):

$$\delta\mathbf{u} = \left(u_0 \cos(kz - \omega t), u_0 \sin(kz - \omega t), 0\right).$$

Výsledkem takové poruchy je nenulová vířivost

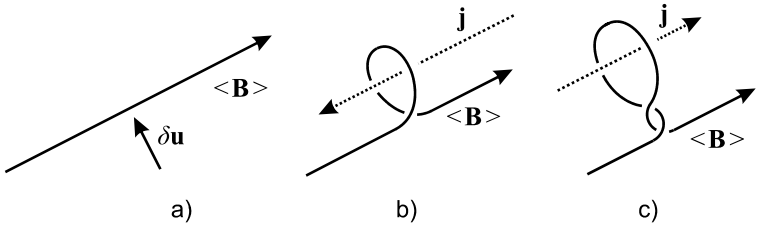
$$\delta\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\, \delta\mathbf{u} = -k\delta\mathbf{u}.$$

Uvažovaná fluktuace rychlostního pole je Beltramovým polem a má hustotu helicity

$$\mathcal{H} = \delta\mathbf{u} \cdot \delta\boldsymbol{\omega} = -ku_0^2.$$

Takový tok okamžitě povede k deformaci magnetického pole do helikální struktury. ◗

Rotace střední hodnoty magnetického pole je úměrná proudové hustotě, a proto má nově vznikající pole složku ve směru tekoucího proudu. Magnetické pole tak díky fluktuacím získává komponentu ve směru proudové hustoty a nově vznikající (a postupně sílící) část pole je nutně helikální (jde o Beltramovo pole). Tím se vytváří složka pole kolmá na pole původní. Pokud jsou rychlostní fluktuace periodické, jako v příkladu s kruhově polarizovanou vlnou, mění se periodicky i směr indukovaného proudu a magnetické pole vytvoří překroucenou smyčku [8]:



Obr. 1.38: Překroucení smyčky

Uveďme na závěr, že alfa efekt sám postačí k překlápění jak toroidální složky v poloidální, tak i poloidální v toroidální. Modelu postavenému jen na α efektu se říká $\alpha\alpha$ model. Mnohem účinnější mechanizmus, který jsme popsali již dříve, je tzv. Parkerův neboli $\alpha\Omega$ model.

◖ **Příklad 1.3:** Odhadněme korelační funkci pro plazma s vysokou hodnotou Reynoldsova magnetického čísla. Taková situace je jak na Slunci, tak ve fúzním plazmatu. Čtenář, který nepotřebuje znát detaily, může tento příklad vynechat.

Řešení: V rovnici (1.269) pro fluktuaci magnetického pole bude na pravé straně dominovat třetí člen, neboť magnetické fluktuace jsou způsobeny především fluktuacemi rychlostního pole. První člen je vzhledem k předpokladu vysokého Reynoldsova čísla zanedbatelný, členy s druhými mocninami fluktuací jsou vyššího řádu. Proto v našem přiblížení máme pro fluktuaci pole

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B}) \approx \operatorname{rot}\left[\delta\mathbf{u}\times\langle\mathbf{B}\rangle\right] \Rightarrow$$

$$\delta B_k \approx \int_0^t \varepsilon_{klm}\varepsilon_{mno}\partial_l \delta u_n(t')\langle B_o\rangle(t')\,\mathrm{d}t',$$

kde jsme provedli integraci fluktuace podle času a rozepsali dvojný vektorový součin. V zápisu vynecháváme zjevné prostorové závislosti. Nyní upravíme dvojí vektorový součin:

$$\delta B_k \approx \int_0^t \partial_n \delta u_k(t')\langle B_n\rangle(t')\,\mathrm{d}t' - \int_0^t \partial_n \delta u_n(t')\langle B_k\rangle(t')\,\mathrm{d}t'.$$

V dalším kroku provedeme naznačené derivace součinu a budeme předpokládat, že plazma se chová jako nestlačitelná kapalina (divergence obou polí jsou nulové):

$$\delta B_k \approx \int_0^t \delta u_{k,n}(t')\langle B_n\rangle(t')\,\mathrm{d}t' - \int_0^t \delta u_n(t')\langle B_{k,n}\rangle(t')\,\mathrm{d}t'.$$

Parciální derivace píšeme ve zkratce za čárku v indexu. Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu korelační funkce $\varepsilon \equiv \langle\, \delta\mathbf{u}\times\delta\mathbf{B}\,\rangle$, která je zodpovědná za α efekt:

$$\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{ijk}\left\langle \delta u_j \delta B_k \right\rangle =$$

$$= \left\langle \int_0^t \varepsilon_{ijk}\delta u_j(t)\,\delta u_{k,n}(t')\langle B_n\rangle(t')\,\mathrm{d}t' \right\rangle - \left\langle \int_0^t \varepsilon_{ijk}\delta u_j(t)\,\delta u_n(t')\langle B_{k,n}\rangle(t')\,\mathrm{d}t' \right\rangle.$$

Výsledek lze napsat přehledně takto:

$$\varepsilon_i = \left\langle \int_0^t \alpha_{in}(t,t')\langle B_n\rangle(t')\,\mathrm{d}t' \right\rangle - \left\langle \int_0^t \eta_{ikn}(t,t')\langle B_{k,n}\rangle(t')\,\mathrm{d}t' \right\rangle;$$

$$\alpha_{in}(t,t') \equiv \varepsilon_{ijk}\delta u_j(t)\,\delta u_{k,n}(t'), \qquad (1.275)$$

$$\eta_{ikn}(t,t') \equiv \varepsilon_{ijk}\delta u_j(t)\,\delta u_n(t').$$

Lze předpokládat, že korelační koeficienty jsou funkcí časové odlehlosti, tj.

$$\alpha_{in}(t,t') \equiv \alpha_{in}(t-t'), \qquad (1.276)$$

$$\eta_{ikn}(t,t') \equiv \eta_{ikn}(t-t')$$

a do minulosti rychle konvergují k nule. Pomalu se měnící střední hodnotu pole a jeho derivaci lze z integrace (1.275) potom vytknout:

$$\varepsilon_i(t) = \tilde{\alpha}_{in}(t)\langle B_n \rangle(t) - \tilde{\eta}_{ikn}(t)\langle B_{k,n} \rangle(t)\,;$$

$$\tilde{\alpha}_{in}(t) \equiv \left\langle \int_0^t \alpha_{in}(t-t')\ \mathrm{d}t' \right\rangle, \tag{1.277}$$

$$\tilde{\eta}_{ikn}(t) \equiv \left\langle \int_0^t \eta_{ikn}(t-t')\,\mathrm{d}t' \right\rangle.$$

Fluktuace magnetického pole je tedy v našem přiblížení úměrná střední hodnotě pole samotného a jeho derivacím. Koeficienty úměrnosti jsou dány integrály z fluktuací rychlostního pole. Pokud budeme pro jednoduchost předpokládat izotropii plazmatu (to ale nemusí platit vždy), musí platit

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{in} &\sim \delta_{in}\,, \\ \tilde{\eta}_{ikn} &\sim \varepsilon_{ikn}\,. \end{aligned} \tag{1.278}$$

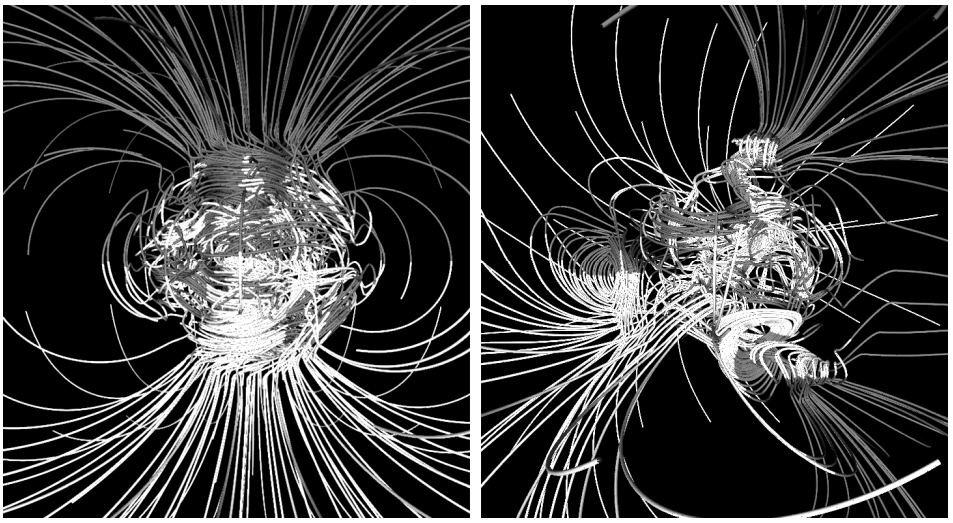
Za našich zjednodušujících předpokladů tedy pro korelační funkci $\varepsilon \equiv \langle\, \delta\mathbf{u}\times\delta\mathbf{B} \,\rangle$ platí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha\langle \mathbf{B} \rangle - \eta\mathbf{J} \tag{1.279}$$

a skutečně má část úměrnou střední hodnotě pole.

◗

V obecném případě jsou k určení složek pole potřebné numerické simulace výchozích rovnic alfa a omega efektu, které jsou mimořádně náročné. Na obrázku jsou výsledky takových simulací pro zemské dynamo v superpočítačovém centru v San Diegu.



Obr. 1.39: Počítačová simulace tekutinového dynama uvnitř Země. Odstínem jsou odlišeny vstupující a vystupující indukční čáry. Nalevo je převážně dipólové pole, napravo stav při přepólování, kdy má Země několik pólů severních a několik jižních. San Diego Supercomputer Centrum, 1999. Gary Glatzmaier, Paul Roberts.

Přepojení magnetických indukčních čar

V přírodě je velmi časté, že magnetická pole různých zdrojů se vzájemně propojují a vytvářejí tak jakousi pavučinovou síť magnetických polí. Například pole střelky kompasu má jak uzavřené indukční čáry, které se vracejí do druhého pólu, tak i otevřené indukční čáry vyvěrající z oblasti pólů střelky, které se nikdy nevrátí zpět. Napojují se totiž na indukční čáry pole Země. Právě proto střelka kompasu míří k severu.

V přírodě také dochází k přepojování magnetických indukčních čar, tzv. *rekonekci*. Magnetické pole (většinou velmi rychle) přejde do stavu s nižší energií tím, že změní topologii svých indukčních čar. Indukční čáry se uspořádají do jiné, energeticky výhodnější konfigurace. Uvolněná energie zahřeje okolní plazma. K přepojení dochází nejčastěji v oblastech, kde magnetické indukční čáry míří opačným směrem. Tak tomu je například ve smyčkách magnetického pole ve sluneční koróně, na čelní straně magnetosféry Země nebo v magnetickém ohonu Země.

Bohužel neexistuje uspokojivý analytický model, který by popisoval přepojení indukčních čar na všech škálách. Většina modelů je jen bilancí, kolik látky do oblasti rekonekce vteklo a kolik z ní vyteklo. Detailnější popis se zpravidla opírá o robustní numerické simulace. K popisu přepojení magnetických indukčních čar již nelze použít ideální magnetohydrodynamiku, ve které má plazma nulový elektrický odpor, resp. nekonečnou vodivost. V takovém prostředí má rovnice pro časový vývoj jen člen zamrzání a plazma je dokonale provázané s magnetickým polem. Budeme předpokládat, že se plazma chová jako nestlačitelná kapalina, tj. div $\mathbf{u} = 0$, což koresponduje s rovnicí div $\mathbf{B} = 0$ a je jistým vyjádřením provázanosti rychlostního a magnetického pole. V ideální magnetohydrodynamice není možné proudění plazmatu napříč magnetických indukčních čar, neexistuje disipace energie, magnetický tok libovolnou uzavřenou plochou je konstantní, magnetická helicita magnetické trubice se zachovává a dvě částice ležící na jedné indukční čáře budou na této čáře neustále. Jakákoli změna topologie indukčních čar je v rámci ideální magnetohydrodynamiky nemožná.

Pro popis přepojení magnetických indukčních čar v rámci tekutinových modelů je proto nutné použít tzv. *rezistivní magnetohydrodynamiku*, ve které má plazma nenulový odpor. Energie nahromaděná v magnetickém poli se při přechodu do jiné topologie indukčních čar musí uvolnit, a to je možné jedině v plazmatu s nenulovým odporem.

Pro rezistivní magnetohydrodynamiku je velmi významný *rezistivní čas* (1.263) odvozený rozměrovou analýzou z rovnice difúze. Jde o charakteristickou časovou konstantu magnetické difúze, za kterou je odpovědný nenulový odpor plazmatu.

Většina pohybů v plazmatu s magnetickým polem je charakterizována Alfvénovou rychlostí (1.237). Doba, za kterou rozruch projde touto rychlostí plazmatem, se nazývá *Alfvénův čas*. Oba charakteristické časy jsou dány relacemi

$$\tau_{\mathrm{R}} \sim L^2 \sigma\mu\,; \qquad \tau_{\mathrm{A}} \sim \frac{L}{v_{\mathrm{A}}} = \frac{L\sqrt{\mu\rho}}{B_0}\,. \tag{1.280}$$

Z experimentů je známo, že typická doba rekonekce leží mezi oběma časy a je rovna přibližně geometrickému průměru těchto časů:

$$\tau_{\mathrm{REC}} = \sqrt{\tau_{\mathrm{R}}\,\tau_{\mathrm{A}}}\,. \tag{1.281}$$

Důležitou charakteristikou plazmatu je *Lundquistovo číslo* $\#_{\mathrm{Lu}}$ (někdy se značí S), které je poměrem rezistivního a Alfvénova času:

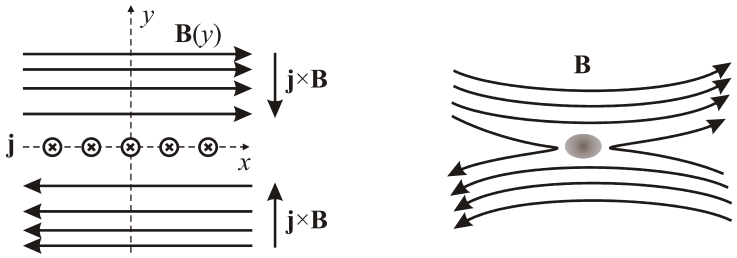
$$\#_{\mathrm{Lu}} \equiv S \equiv \frac{\tau_{\mathrm{R}}}{\tau_{\mathrm{A}}} = \frac{L^2 \sigma \mu}{L/v_A} = L\sigma\mu v_{\mathrm{A}} \,. \tag{1.282}$$

Lundquistovo číslo je shodné s Reynoldsovým magnetickým číslem, pokud za rychlost plazmatu dosadíme Alfvénovu rychlost. Pro různá plazmata přibližně platí [26]:

Plazma	L (m)	τ_{R} (s)	τ_{A} (s)	$\#_{\mathrm{Lu}}$
oblouk	10^{-1}	10^{-3}	10^{-3}	1
tokamak	1	1	10^{-8}	10^{8}
jádro Země	10^{6}	10^{12}	10^{5}	10^{7}
sluneční skvrna	10^{7}	10^{14}	10^{5}	10^{9}
sluneční koróna	10^{9}	10^{18}	10^{6}	10^{12}

Vidíme, že s výjimkou obloukového plazmatu je Reynoldsovo (Lundquistovo) číslo velmi vysoké a jak pro fúzní, tak pro astrofyzikální plazma dominuje v rovnici pro časový vývoj člen zamrzání. Ve většině plazmatu lze proto použít ideální magnetohydrodynamiku. Oblasti přepojení indukčních čar, kde jsou podstatné difúzní procesy, jsou prostorově omezené a nacházejí se jen v místech slabého nebo nulového magnetického pole. Těmto oblastem říkáme *difúzní region*. V něm musíme použít rovnice rezistivní magnetohydrodynamiky a na jeho hranicích navázat řešení na řešení ideální magnetohydrodynamiky, tedy i s členem popisujícím difúzi magnetického pole. Zpravidla se do rovnic přidává i rovnice kontinuity pro energii, jejíž změny jsou při rekonekci podstatné.

Samovolná 2D rekonekce v magnetické vrstvě



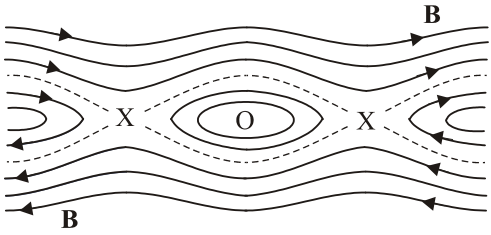
Obr. 1.40: Princip přepojení magnetických indukčních čar

Nejjednodušší možná situace je zakreslena na obrázku. V kolmém směru (na obrázku v ose y) magnetické pole postupně slábne až na nulovou hodnotu pro $y = 0$. Zde pole obrací směr a opět roste. V oblasti nulového pole musí téct elektrický proud (rotace pole je nenulová). V rovině (xz) se vytváří tzv. *neutrální vrstva*, kde proud míří v ose z. Na plazma působí Lorentzova síla $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ a stlačuje ho směrem k neutrální vrstvě. V plazmatu s nulovým odporem se vytvoří rovnováha mezi hustotou Lorentzovy síly a gradientem tlaku plazmatu, veškerý makroskopický pohyb ustane.

Má-li plazma ovšem nenulový, libovolně malý odpor, nejsou již magnetické indukční čáry vmrznuté do plazmatu a plazma se může pohybovat (driftovat) napříč indukčním čarám. Rychlost tohoto pohybu je dána prvním výrazem obecného vztahu pro driftovou rychlost (1.110):

$$\mathbf{u}_\mathrm{d} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2} \approx \frac{\mathbf{j}\times\mathbf{B}}{\sigma B^2} = \frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\times\mathbf{B}}{\sigma\mu B^2}\,. \tag{1.283}$$

Vzájemný pohyb plazmatu a indukčních čar v prostředí s nenulovým odporem způsobuje jejich přetrhávání a napojování na jiné indukční čáry. Uvolněná magnetická energie Jouleovsky zahřeje plazma. Podle tvaru indukčních čar se bod, ve kterém došlo k přepojení, nazývá *X* bod. Často je takových bodů v neutrální vrstvě celá řada a mezi nimi vznikají tzv. magnetické ostrovy (plazmoidy), v jejichž středech jsou tzv. O body:



Obr. 1.41: Body X a O vznikající při přepojení indukčních čar

Čárkovanou čarou je označena *separatrisa*, křivka oddělující různé topologie magnetického pole. V horní části míří indukční čáry magnetického pole jedním směrem, v dolní míří směrem opačným. V oblasti kolem neutrální vrstvy se vytvořily magnetické ostrovy.

Pro posouzení rychlosti rekonekce se používá tzv. *index rekonekce* (Machovo-Alfvénovo číslo). Index rekonekce je definován jako poměr rychlosti plazmatu vstupujícího do oblasti rekonekce a Alfvénovy rychlosti, kterou je plazma samovolně vytlačováno z oblasti rekonekce ven. Pro samovolnou (spontánní) 2D rekonekci máme

$$\#_\mathrm{sp} = \frac{u_\mathrm{in}}{u_\mathrm{out}} \approx \frac{u_\mathrm{d}}{v_\mathrm{A}} \approx \frac{1/L\sigma\mu}{v_\mathrm{A}} = \frac{1}{L\sigma\mu\, v_\mathrm{A}} = \frac{1}{\#_\mathrm{Lu}}\,,$$

tedy platí

► $$\#_\mathrm{sp} \approx \frac{1}{\#_\mathrm{Lu}}\,. \tag{1.284}$$

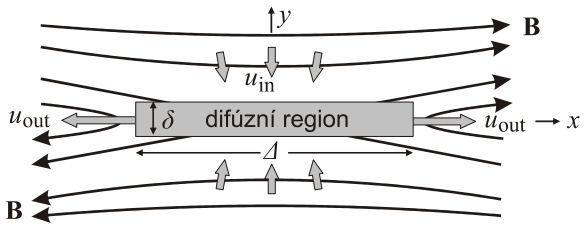
Pro samovolnou 2D rekonekci je index rekonekce převrácenou hodnotou Lundquistova čísla, pro fúzní i astrofyzikální plazma je velmi malý ($u_\mathrm{in} \ll u_\mathrm{out}$), což znamená, že rekonekce probíhá velmi pomalu. V kapitole 1.3.3 ukážeme, že v dostatečně „tlustém“ plazmovém vlákně se neutrální vrstva nulového pole vytvoří samovolně. Na opačných stranách vrstvy má pole opačnou polaritu a dochází zde k samovolné 2D rekonekci.

Řízená 2D rekonekce (Sweetův–Parkerův model)

K přepojení indukčních čar nemusí dojít samovolně, jako v minulém případě, kdy se v plazmatu vytvořila neutrální vrstva (nulová vrstva, vrstva nulového pole neboli proudová vrstva) a plazma samotné se díky relaxačním procesům začalo pohybovat k neutrální vrstvě.

V malé oblasti plazmatu v okolí neutrální vrstvy často dochází k značnému zvýšení odporu plazmatu. Mechanizmy, které k tomu vedou, nejsou dosud zcela jasné. Oblast se zvýšeným odporem plazmatu se nazývá *difúzní region*. Plazma je do difúzního regionu hnáno difúzí magnetického pole. Podél indukčních čar plazma z difúzního regionu volně vytéká ven Alfvénovou rychlostí (plazma vytlačuje magnetický tlak). Typickým příkladem takové rekonekce jsou procesy ve sluneční koróně a následná erupce jako projev uvolněné energie.

Jednoduchý model řízené rekonekce navrhl anglický astronom Peter Alan Sweet (1921–2005) v roce 1958 a nezávisle americký astrofyzik Eugene Parker (1927–2022) v roce 1957. Model předpokládá, že oblasti plazmatu s opačně orientovanými indukčními čarami jsou difúzí (magnetického pole) vtlačovány do difúzního regionu k neutrální vrstvě rychlostí u_{in}. V této oblasti probíhá rekonekce indukčních čar. Na bocích oblasti musí být plazma vytlačováno ven z difúzního regionu rychlostí u_{out}, často v podobě plazmových výstřiků. Sweetův–Parkerův model předpokládá, že pro rozměry regionu platí $\Delta \gg \delta$, tj. difúzní region je rozsáhlý, ale velmi tenký. Elektrický proud teče opět v rovině *x*-*z* ve směru osy *z*.



Obr. 1.42: Difúzní region

Sweetův-Parkerův model se opírá o tři tvrzení:

1) Vtékající plazma sleduje difundující indukční čáry magnetického pole, tj. rychlost pohybu plazmatu je dána rezistivním časem τ_{R}, viz (1.263)

$$u_{\mathrm{in}} \approx \frac{\delta}{\tau_{\mathrm{R}}} = \frac{\delta}{\delta^2 \sigma\mu} = \frac{1}{\delta\sigma\mu}\,. \tag{1.285}$$

2) Vytékající plazma se pohybuje volně (tedy je vytlačováno magnetickým tlakem), proto má Alfvénovu rychlost

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \approx \frac{1}{2}\rho u_{\mathrm{out}}^2 \qquad \Rightarrow \qquad u_{\mathrm{out}} \approx v_{\mathrm{A}} = \frac{B}{\sqrt{\mu\rho}}\,. \tag{1.286}$$

3) Vztah mezi oběma rychlostmi je dán zachováním hmotnosti (rovnicí kontinuity ve tvaru $uS = \mathrm{const}$)

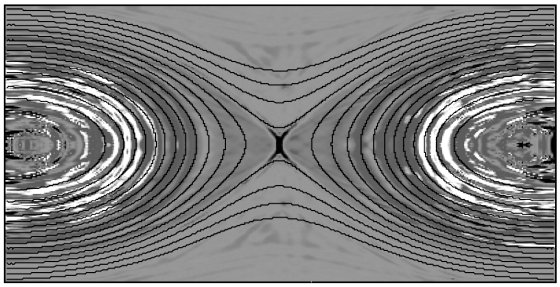
$$u_{\mathrm{in}}\Delta = u_{\mathrm{out}}\delta\,. \tag{1.287}$$

Určeme na závěr ještě index řízené rekonekce, který je roven Machovu-Alfvénovu číslu. Vyjdeme z rovnice kontinuity (1.287) a ze vztahu (1.285) pro u_{in}:

$$\#_{\mathrm{dr}}^2 = \frac{u_{\mathrm{in}}}{u_{\mathrm{out}}} \cdot \frac{u_{\mathrm{in}}}{u_{\mathrm{out}}} \approx \frac{\delta}{\Delta} \cdot \frac{1/\delta\sigma\mu}{v_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{\Delta\sigma\mu v_{\mathrm{A}}} \approx \frac{1}{\#_{\mathrm{Lu}}}\,.$$

Po odmocnění máme

$$\#_{\mathrm{dr}} \approx 1/\sqrt{\#_{\mathrm{Lu}}}\ . \tag{1.288}$$



Obr. 1.43: MHD simulace rekonekce s difúzním regionem. Stupněm šedi je značena proudová hustota. J. Birn.

Rychlá 2D rekonekce (Petschekův model)

Index řízené rekonekce je větší než index samovolné rekonekce, řízená rekonekce proto probíhá rychleji. Nicméně některé děje, jako například koronální výrony hmoty, jsou ještě rychlejší, než by odpovídalo Sweetovu–Parkerovu modelu. Za rychlou rekonekci považujeme děje s indexem rekonekce srovnatelným nebo vyšším než 0,1. Často se používá model, který odvodil americký fyzik a inženýr Harry Petschek v roce 1964. K rekonekci dochází jen ve velmi malé oblasti ($\Delta \approx \delta$) a je způsobena rozvojem *ostrůvkové* (tearing) nestability vznikající z MHD vln. V blízkosti difúzního regionu se vytváří rázová vlna, která proces rekonekce urychlí. Rychlost vtékání i vytékání plazmatu není při tomto mechanizmu příliš odlišná. V takovém modelu vychází pro index rekonekce

$$\#_{\mathrm{P}} \approx \frac{1}{\ln(\#_{\mathrm{Lu}})}\ . \tag{1.289}$$

Petschekův model je vynikající pro popis rychlé rekonekce. Jeho hlavním problémem je to, že nijak neřeší vznik malého regionu se zvýšenou rezistivitou a není tedy vnitřně konzistentní. Zcela selhává pro plazma s homogenním průběhem rezistivity. Navíc rezistivita daná Spitzerovým vztahem je jen přiblížení platné pro malé hodnoty elektrického pole, při rekonekci lze očekávat genezi silných elektrických polí a anomální průběh rezistivity. Správné předpovědi někdy nedává ani v astrofyzikálním plazmatu, kde difúzní region není „malý“. Přes všechny nedostatky jde o první model založený na rozvoji ostrůvkové nestability, který dobře postihuje základní fyzikální mechanizmus.

Rychlá 2D rekonekce s Hallovým jevem

Pro difúzní regiony menší než Larmorův poloměr iontů je třeba započítat Hallův jev (vznik elektrického a magnetického pole kolmého na tekoucí proud). Zobecněný Ohmův zákon má tvar

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}\right) - \frac{\sigma}{Qn}\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B} - \nabla p_{\mathrm{e}}\right) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega_{\mathrm{p}}^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\ . \tag{1.290}$$

Prostřední člen s výrazem $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ odpovídá Hallovu jevu. Hallův jev zásadně ovlivňuje strukturu polí na vzdálenostech menších, než je typická prostorová periodicita pohybu iontů daná Larmorovým poloměrem, nebo tzv. inerciální škála iontů:

$$R_{\mathrm{L}} = \frac{M v_{\perp}}{QB};, \tag{1.291}$$

$$R_{\mathrm{i}} = c/\omega_{\mathrm{pi}}\,. \tag{1.292}$$

Na tak malých škálách dojde k oddělení elektronů od iontů, což umožní vznik Hallova proudu. Taková situace vede při nenulové rezistivitě k rychlé rekonekci Petschekova typu (Shay, 1999). Uvažujeme-li Hallův jev, není k rekonekci zapotřebí srážkového plazmatu. Tuto obdobu Petschekova modelu lze odvodit i čistě kinematicky a bezesrážkově. Model je, na rozdíl od Petschekova modelu, vnitřně konzistentní. Vzniklé MHD vlny patří do skupiny hvizdů (viz kapitola 1.4.5) a jejich frekvence je úměrná druhé mocnině vlnového vektoru

$$\omega \sim k^2\,, \tag{1.293}$$

vlny s malými rozměry získávají vysoké rychlosti, které předávají plazmatu

$$u_{\mathrm{out}} \sim \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \sim k \sim \frac{1}{\delta}\,. \tag{1.294}$$

Index rekonekce s Hallovým jevem není závislý na Lunquistovu číslu a je roven přibližně 0,1:

► $$\#_{\mathrm{H}} \approx 0{,}1\,. \tag{1.295}$$

Příkladem rekonekce Hallova typu je rekonekce v magnetickém ohonu Země. Tloušťka nulové vrstvy protékané proudem je za normálních okolností 5 000 km. Při magnetických bouřích dojde k jejímu ztenčení až na 200 km, což odpovídá Larmorovu poloměru iontů v magnetickém ohonu. V tu chvíli začne bouřlivě probíhat rekonekce Hallova typu.

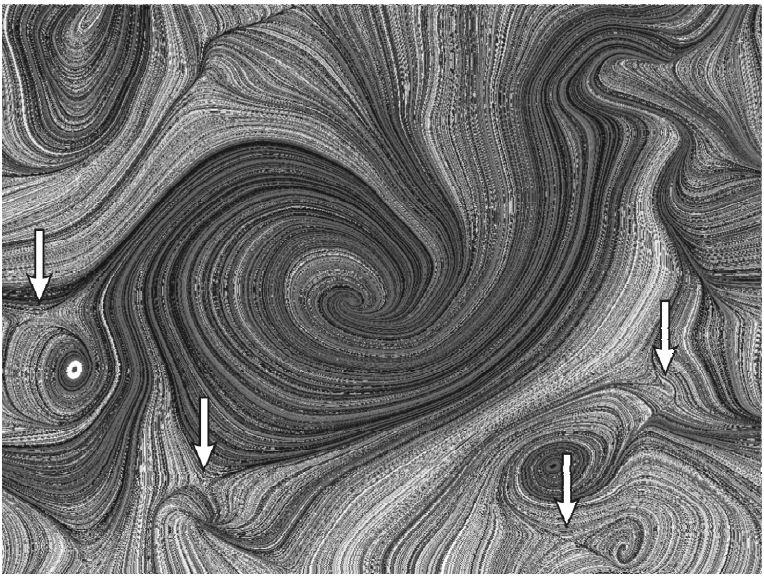
Turbulentní 2D rekonekce (GS95 model)

Procesy rekonekce může dále urychlit či ovlivnit přítomnost vln a turbulencí v plazmatu. V roce 1995 byl například vytvořen turbulentní model GS95 (pojmenovaný podle amerických teoretiků Petera Goldreicha a Seshadri Sridhara), ve kterém je index rekonekce dokonce roven

► $$\#_{\mathrm{GS}} \approx \#_{\mathrm{Lu}}^{1/4}\,. \tag{1.296}$$

Rekonekce v tomto modelu tedy probíhá mimořádně rychle. Charakter difúzního regionu je fraktální, struktury se na menších vzdálenostech opakují až do Larmorova poloměru iontů. V difúzním regionu se vytváří velké množství magnetických ostrovů nejrůznějších velikostí, které připomínají saponátovou pěnu. Turbulentní rekonekce může ve vesmíru urychlovat částice kosmického záření za pomoci Fermiho mechanizmu, v oblasti silnějšího pole vznikají magnetická zrcadla. Také vzniklé magnetické ostrovy, jež se pohybují a mění svou velikost, mohou nabitým částicím předávat energii. Turbulentní rekonekce může ovlivnit i proces vzniku hvězd, přepojování indukčních čar efektivně zeslabí původní pole; pokud by bylo pole jen „zamrzlé“, hvězda by získala při prosté kontrakci ze zárodečné mlhoviny extrémně silné magnetické pole. Model GS95 dále rozvinuli v roce 1999 američtí astrofyzici Alexander Lazarian a Ethan Tecumseh Vishniac – vytvořili tzv. model stochastické rekonekce založený na náhodných fluktua-

cích magnetického pole v plně ionizovaném neviskózním plazmatu, kde narůstající alfa efekt vytváří nové magnetické uspořádání.



Obr. 1.44: Oblasti rekonekce magnetických indukčních čar z PIC simulací autora

3D rekonekce a další otevřené otázky

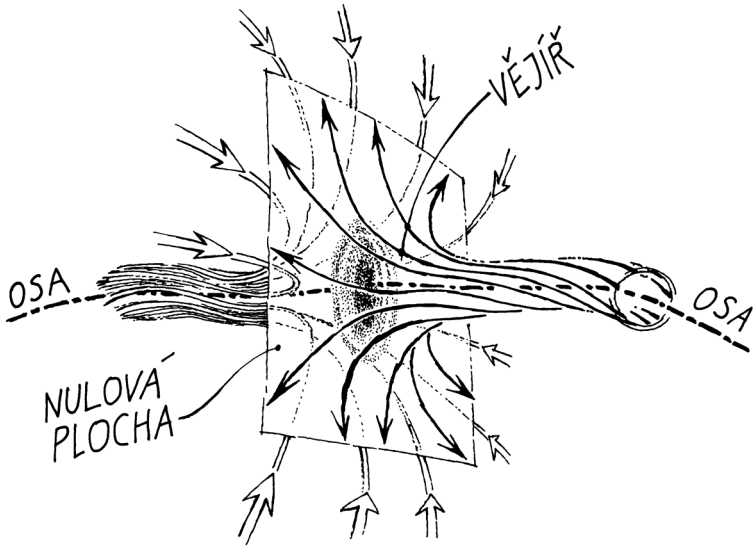
Pokud má magnetické pole i výraznou složku kolmou na neutrální vrstvu, hovoříme o 3D rekonekci. Situace může vypadat obdobně jako na obrázku 1.45, oproti obrázku může být vějíř indukčních čar v reálné situaci ještě stočen do spirály v rovině (*xy*). Mechanizmy 3D rekonekce jsou prozkoumány zatím jen velmi málo.

2D modely popisující rekonekci jsou většinou jen stacionární, rekonekce má ovšem v mnoha případech eruptivní charakter, který tyto modely nemohou postihnout. Na rekonekci magnetických indukčních čar mohou mít zásadní vliv i různé další jevy, například separace elektronů a iontů, anomální rezistivita nebo urychlování nabitých částic. K rekonekci magnetických indukčních čar může dojít i v bezesrážkovém plazmatu. Popis takových dějů se neopírá o magnetohydrodynamiku (ta je srážkově dominantní), ale o statistické modely plazmatu. Úplný popis rekonekce není v tuto chvíli k dispozici, je pravděpodobné, že k rekonekci vede celá řada mechanizmů, které se většinou zkoumají za pomoci numerických simulací.

Pro rozsáhlé difúzní regiony dobře funguje Sweetův-Parkerův model, který byl v roce 2007 zobecněn na asymetrický případ (Paul Cassak, Michael Shay). Pro oblasti menší, než je Larmorův poloměr iontů, je třeba započítat Hallův jev, který s sebou nese katastrofické chování a rychlou rekonekci Petschekova typu s indexem rekonekce ~ 0,1. Existuje řada otevřených otázek: Je index rychlé rekonekce vždy 0,1? Proč? Může existovat stacionární rekonekce a nebo jde vždy o eruptivní jev? Jak z mikroskopických rekonekcí vznikají makroskopické jevy (sluneční erupce, magnetické bouře, koronální výrony hmoty)? Jaká je role turbulencí při rekonekci? Jak probíhá třírozměrná rekonekce?

Připomeňme na závěr, že počátky chápání rekonekce spadají do roku 1946, kdy australský astronom Ronald Gordon Giovanelli (1915–1984) navrhl, že zdrojem ohřevu

plazmatu a urychlení částic mohou být nulové body magnetického pole ve tvaru písmene X. Označení *magnetické přepojení* (anglicky *magnetic reconnection*) zavedl anglický fyzik a astronom James Dungey, který v roce 1953 objevil, že změna topologie magnetických indukčních čar je možná jedině v plazmatu s nenulovým odporem. V roce 1961 Dungey navrhl, že magnetické přepojení je mechanizmus odpovědný za transport energie slunečního větru do magnetosféry Země. Dříve se pořepokládalo, že je magnetická rekonekce také zodpovědná za ohřev sluneční koróny. Dnes je jasné, že v koróně mikrorekonekce sice probíhají, ale hlavním zdrojem ohřevu je rozpad magnetoakustických vln.



Obr. 1.45: Třírozměrné přepojení magnetických indukčních čar

1.3.3 Některé rovnovážné konfigurace v plazmatu

Rovnováha v plazmatu

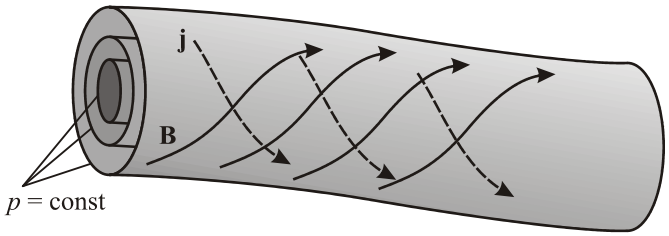
V ustáleném stavu, kdy je plazma v rovnováze a nepohybuje se, musí být pravá strana pohybové rovnice (1.213) nulová.

► $$-\nabla p + \mathbf{j}\times\mathbf{B} = 0\,. \tag{1.297}$$

Viskózní procesy se v rovnováze neuplatňují, neboť se plazma nepohybuje. V rovnováze je gradient tlaku látky roven hustotě Lorentzovy síly. Uděláme-li skalární součin rovnice rovnováhy (1.297) s proudovou hustotou nebo magnetickým polem, okamžitě dostaneme:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}\cdot\nabla p &= 0\,,\\ \mathbf{B}\cdot\nabla p &= 0\,.\end{aligned} \tag{1.298}$$

Vzhledem k tomu, že gradient je kolmý na plochy konstantního tlaku, je zřejmé, že elektrické proudy v rovnováze tečou podél ploch konstantního tlaku. Stejně tak sledují plochy konstantního tlaku i magnetické indukční čáry. Proudové trubice jsou tak totožné s magnetickými trubicemi, i když směr vektorů **j**, **B** obecně není totožný.



Obr. 1.46: Rovnováha v plazmatu

Magnetický povrch

Předpokládejme, že existuje funkce $\psi(\mathbf{x})$ taková, že povrch magnetické trubice je dán rovnicí

$$\psi(\mathbf{x}) = \text{const}\,. \tag{1.299}$$

Gradient hledané funkce bude kolmý na povrch magnetické trubice, a proto musí platit

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\psi = 0\,. \tag{1.300}$$

Magnetické pole můžeme ve válcových souřadnicích (r, φ, z) snadno vyjádřit za pomoci vektorového potenciálu ze vztahů

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\,; \qquad B_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\,; \qquad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\,. \tag{1.301}$$

Rovnici (1.300) splníme ve válcových souřadnicích pro jednotlivé symetrie úlohy snadno následujícími volbami:

Translační symetrie ($\partial/\partial z = 0$):

$$\psi(r,\varphi) = A_z(r,\varphi)\,. \tag{1.302}$$

Osová symetrie ($\partial/\partial\varphi = 0$):

$$\psi(r,z) = rA_\varphi(r,z)\,. \tag{1.303}$$

Helikální symetrie se stoupáním α:

$$\psi(r,\varphi-\alpha z) = A_z(r,\varphi-\alpha z)+\alpha r A_\varphi(r,\varphi-\alpha z)\,. \tag{1.304}$$

Funkce, která charakterizuje povrch magnetické trubice, je v uvedených symetriích dána vhodnými kombinacemi složek vektorového potenciálu.

Rovnováha v osové symetrii

Předpokládejme osovou symetrii (proměnné nezávisí na toroidálním úhlu φ, viz obr. 1.47). Funkci, která určuje tvar magnetických povrchů, určíme ze vztahu (1.303)

$$\psi(r,z) = rA_\varphi(r,z)\,.$$

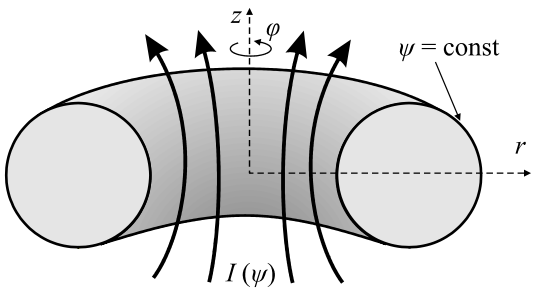
Radiální a osovou složku pole máme okamžitě z (1.301):

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,,\\ B_z &= +\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,. \end{aligned} \tag{1.305}$$

Poslední komponentu určíme z Ampérova zákona:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I(\psi)}{2\pi r}\,, \tag{1.306}$$

kde $I(\psi)$ je elektrický proud tekoucí v poloidálním směru skrze kruh ohraničený magnetickým povrchem, viz obrázek 1.47:



Obr. 1.47: Osově symetrická rovnováha v plazmatu

Zapišme nyní pro tuto symetrii radiální složku podmínky rovnováhy (1.297), ve které za proudovou hustotu dosadíme z příslušné Maxwellovy rovnice:

$$-\frac{\partial p(\psi)}{\partial r}+j_\varphi B_z-j_z B_\varphi \;=\; 0\,;$$

$$-\frac{\partial p(\psi)}{\partial r}+\frac{1}{\mu_0}\left[\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\right]_\varphi B_z-\frac{1}{\mu_0}\left[\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\right]_z B_\varphi \;=\; 0\,;$$

$$-\frac{\partial p(\psi)}{\partial r}+\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial r}\right]B_z-\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)\right]B_\varphi \;=\; 0\,.$$

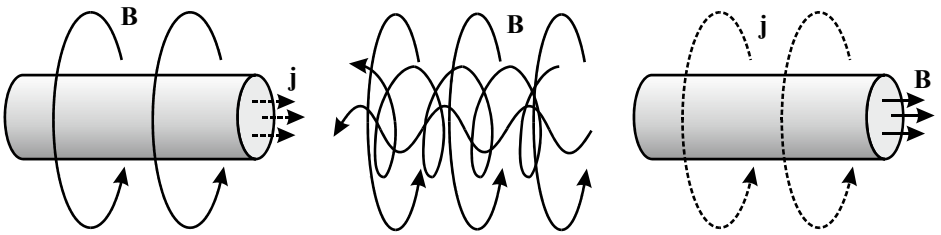
Nyní dosadíme za magnetické pole ze vztahů (1.305) a (1.306) a vyjádříme derivaci tlaku a proudu jako derivaci složené funkce $\partial f(\psi)/\partial r = \partial f/\partial\psi \cdot \partial\psi/\partial r$. Po přímočarých úpravách dostaneme rovnici pro ψ:

► $$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\mu_0^2}{8\pi^2}\frac{\partial I^2}{\partial\psi}+\mu_0 r^2\frac{\partial p}{\partial\psi}=0\,. \qquad (1.307)$$

Jde o *Gradovu-Šafranovovu rovnici* pro rovnováhu plazmatu za předpokladu osové symetrie. Vztah poprvé odvodili v roce 1958 Harold Grad a Hanan Rubin z Newyorské univerzity a nezávisle na nich v roce 1959 v tehdejším Sovětském Svazu Vitalij Dmitrijevič Šafranov. Šafranovova práce byla publikována v západním světě až v roce 1966.

Proudové vlákno (pinč)

Proudová vlákna neboli *pinče* či filamenty patří snad k nejběžnějším útvarům v plazmatu. V nejjednodušší situaci teče proud v ose pinče (axiální směr) a kolem pinče vytváří magnetické pole (azimutální směr), které působí Lorentzovou silou na proudové vlákno a snaží se ho smrštit. Po čase se ustaví rovnováha mezi gradientem tlaku plazmatu, který se snaží plyn rozepnout a Lorentzovou silou, která pinč komprimuje. Takový útvar se nazývá *z*-pinč, písmeno *z* naznačuje, že proud teče v ose *z* pinče. Slovo pinč pochází z anglického *pinch* (stisknout).



z-pinč helikální pinč θ-pinč

Obr. 1.48: Různé druhy proudových vláken

V kapitole 1.5.2 uvidíme, že rovnováha je nestabilní a pinč tohoto typu se rychle rozpadá. Stačí však, aby magnetické indukční čáry byly zkroucené do magnetického provazce, a pinč se stává relativně stabilním útvarem. Proudová hustota i magnetické pole mají axiální i azimutální složky. Axiální složka proudu generuje azimutální pole a azimutální složka proudu generuje axiální pole. V tomto případě hovoříme o *helikálním (šroubovicovém) pinči*. V laboratořích jsou významné ještě další konfigurace. Známý je θ-pinč, ve kterém proud teče v elektrodě po povrchu pinče v azimutálním směru. Vytvořené magnetické pole je axiální. Další konfigurací je *toroidální pinč* –

plazma držené v toroidální geometrii v *tokamacích*. Jde vlastně o stočený pinč do tvaru toroidu. Místo axiálního pole zde bývá zvykem hovořit o poli *toroidálním* a místo azimutálního pole o poli *poloidálním*.

Bennettova rovnováha

Nalezněme nyní rovnováhu *z*-pinče za předpokladu homogenně rozloženého elektrického proudu a zanedbatelných radiačních procesů. Podmínky rovnováhy z-pinče za výše uvedených předpokladů poprvé řešil finský vědec a vynálezce Willard Harrison Bennett (1903–1987) již v roce 1934. Nejprve nalezneme v pinči o poloměru R azimutální magnetické pole $B(r)$ z Ampérova zákona přepsaného do válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} \quad &\Rightarrow \\ \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB) = \mu_0 j \quad &\Rightarrow \\ B(r) = \frac{\mu_0 j}{2}r + \frac{C}{r}&. \end{aligned}$$

Je zjevné, že první člen popisuje chování pole uvnitř pinče (druhý by v centru pinče divergoval, a proto je $C = 0$. Naopak vně pinče je proudová hustota nulová a tím i první člen. Obě řešení navážeme na hranici pinče a dosadíme $j = I/\pi R^2$:

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r\,, & r \le R\,; \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\,, & r \ge R\,. \end{cases} \tag{1.308}$$

Nyní použijeme k výpočtu tlaku rovnici rovnováhy (1.297):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -jB \quad &\Rightarrow \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{I}{\pi R^2}\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r \quad &\Rightarrow \\ p(r) = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4}r^2 + p_0&\,. \end{aligned}$$

Integraci jsme prováděli uvnitř pinče, proto bylo použito vnitřní řešení pro magnetické pole. Význam integrační konstanty p_0 je zřejmý. Jde o tlak v centru pinče. Tlak v pinči by měl klesat až k povrchu, kde je nulový, tj. $p\,(R) = 0$. Z této podmínky určíme integrační konstantu p_0 a celkové řešení:

► $$p(r) = p_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right); \qquad p_0 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2}\,. \tag{1.309}$$

Jde o známé Bennettovo řešení s parabolickým průběhem tlaku. Tlak v centrální části pinče je úměrný kvadrátu celkového proudu. Pokud dosadíme za tlak elektronů a iontů ze stavové rovnice

$$p_0 = n_\mathrm{e}k_\mathrm{B}T_\mathrm{e} + n_\mathrm{i}k_\mathrm{B}T_\mathrm{i} \approx n_\mathrm{e}k_\mathrm{B}\left(T_\mathrm{e} + T_\mathrm{i}/Z\right), \tag{1.310}$$

a následně za koncentrace a za koncentraci $n_\alpha = N_\alpha / V = N_\alpha / \pi R^2 l$, získáme důležitý vztah mezi teplotou centrální části a celkovým tekoucím proudem:

► $$\mathcal{N}_\mathrm{e} k_\mathrm{B} \left(T_\mathrm{e} + T_\mathrm{i}/Z \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \; ; \qquad \mathcal{N}_\mathrm{e} \equiv \frac{N_\mathrm{e}}{l} = n_\mathrm{e} \pi R^2 \; . \tag{1.311}$$

Veličina $\mathcal{N}_\mathrm{e}$ představuje počet elektronů na jednotku délky pinče na centrální linii. Vidíme, že dosažená teplota je úměrná druhé mocnině protékajícího proudu.

Bezsilová helikální konfigurace pinče, reverzní pinč

Předpokládejme, že se po dostatečně dlouhé době dostane helikální pinč do stavu s minimem energie v magnetickém poli. Potom je magnetické pole nutně helikální a splňuje Beltramovu podmínku $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$. Ve válcové geometrii bude radiální složka pole nulová a azimutální i axiální složka bude záviset jen na proměnné r. Beltramovu podmínku rozepíšeme ve válcových souřadnicích po složkách:

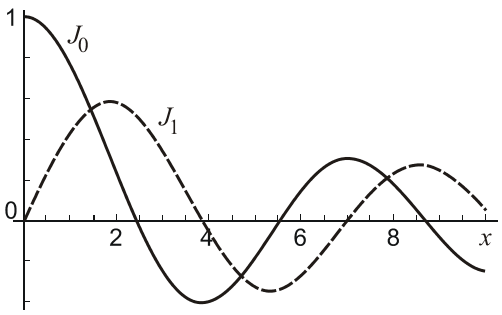
$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \; ; \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} 0 &= \alpha B_r \; , \\ -\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r} &= \alpha B_\varphi \; , \\ \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r B_\varphi \right) &= \alpha B_z \; . \end{aligned} \tag{1.312}$$

Po dosazení za pole B_φ z druhé do třetí rovnice dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r} + \alpha^2 B_z = 0 \; . \tag{1.313}$$

Jde o Besselovu rovnici, která má řešení

► $$\begin{aligned} B_z(r) &= B_0 J_0(\alpha r) \; , \\ B_\varphi(r) &= B_0 J_1(\alpha r) \; . \end{aligned} \tag{1.314}$$



Obr. 1.49: Průběh Besselových funkcí J_0 a J_1

Funkce J_0 a J_1 jsou Besselovy funkce prvního druhu, ve válcových souřadnicích nahrazují funkce kosinus a sinus známé z kartézských souřadnic. Obdobně jako derivace kosinu je minus sinus, je i derivace J_0 rovna minus J_1. Besselova funkce J_0 mění zna-

ménko v argumentu 2,4. Pokud má pinč dosti velký poloměr, nutně dojde pro $r > 2{,}4/\alpha$ k obrácení směru pole B_z. Vzniklý útvar nazýváme reverzní pinč. Na poloměru

$$a = \frac{2{,}4}{\alpha} \tag{1.315}$$

vzniká neutrální vrstva, na jejíchž opačných stranách má pole opačný směr, tedy situace vhodná pro rekonekci magnetických indukčních čar a pro rozvoj ostrůvkové (tearing) nestability.



Obr. 1.50: Nejznámějším plazmovým vláknem je kanál blesku.
Zdroj: Ing. Jaromír Jindra, Česká astronomická společnost.

Krátce z rané historie výzkumu pinčů

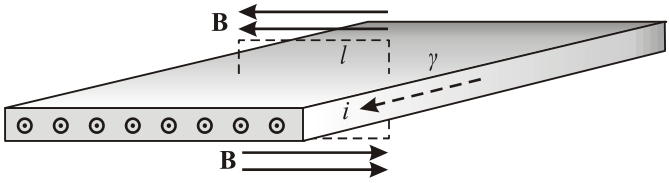
1790	Holandský vědec Martin van Marun (1750–1837) vybil 100 leydenských lahví přes drátek, který explodoval. Vytvořil tak první zdokumentovaný (i když nevysvětlený) pinč.
1905	Australští vědci J. A. Pollock a S. Barraclough pozorují v blízkosti Sydney v Austrálii trvalou deformaci dutého hromosvodu (fotografie napravo) po průchodu blesku a správně deformaci vysvětlili jako důsledek tlaku způsobeného magnetickým polem.
1934	Willard Harrison Bennett (1903–1987) našel řešení průběhu tlaku pro stacionární *z*-pinč s konstantní proudovou hustotou.
1946	George Thompson a Moses Blackman z Imperial College v Londýně patentují fúzní zařízení založené na toroidálním pinči.
1946	George Thompson a Peter Thonemann provádějí rozsáhlé experimenty s toroidálním pinčem.
1954	Martin David Kruskal (1925–2006) a Martin Schwarzschild (1912–1997) vytvářejí první teorii nestabilit pinče, zejména řeší korálkovou a smyčkovou nestabilitu.
1956	Rendel Sebastian Pease (1922–2004) a Stanislav Iosivovich Braginskij nacházejí řešení v podobě elektromagnetického kolapsu, kdy ztráta energie zářením způsobí nekontrolovatelný kolaps pinče k ose.
1957	V anglickém Harwellu bylo zkonstruováno první velké toroidální zařízení ZETA o průměru 3 metry s proudem 900 000 A.
1958	Na toroidálním pinči SCYLLA v Los Alamos byly detekovány první fúzní neutrony.



Nestabilitami plazmového vlákna se budeme zabývat v kapitole 1.5.2.

Proudová stěna

Proudová stěna je dvojrozměrnou analogií proudového vlákna. Proud tekoucí v ploše generuje na obou stranách magnetické pole, které tlačí na stěnu magnetickým tlakem.



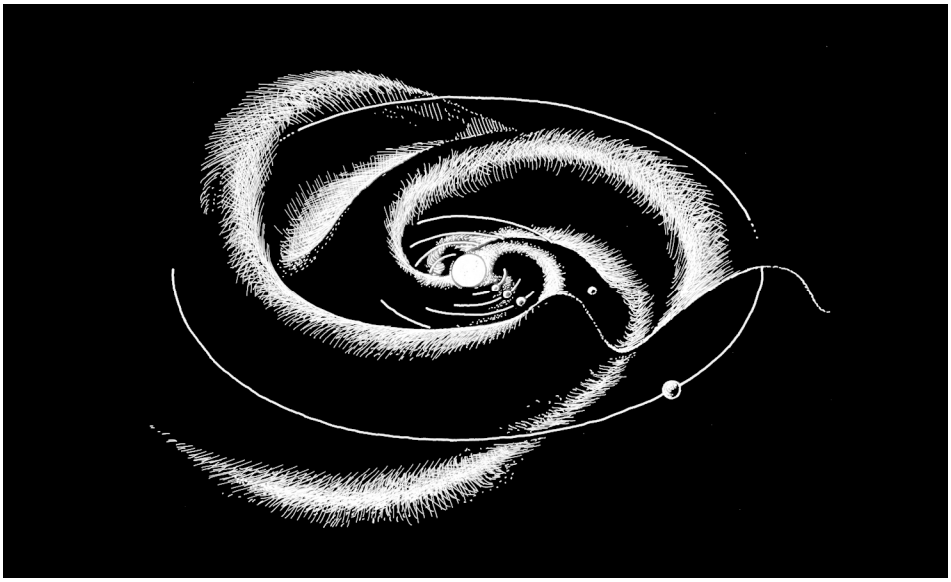
Obr. 1.52: Plazmová stěna

Použijeme-li na křivku naznačenou na obrázku Ampérův zákon v integrálním tvaru, získáme jednoduchý vztah

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I \qquad \Rightarrow \qquad 2Bl = \mu_0 I \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 i\,, \tag{1.316}$$

kde i je elektrický proud vztažený na jednotku příčné délky. Proudové stěny bývají velmi tenké vzhledem ke své šířce (tloušťka a šířka se liší o mnoho řádů). Největší proudovou stěnou ve sluneční soustavě je neutrální vrstva heliosféry, jde o rozvlněnou oblast nulového magnetického pole Slunce, která se nazývá Parkerova plocha. Její tloušťka je v našem okolí cca 1 000 km. Na opačných stranách Parkerovy plochy má sluneční magnetické pole různou polaritu.



Obr. 1.53: Parkerova plocha v okolí Slunce

Planety procházejí střídavě nad a pod touto plochou, při průchodu se mění polarita slunečního magnetického pole. Jiná proudová stěna vzniká v magnetickém ohonu Země. Právě v blízkosti proudových stěn, kde je magnetické pole na různých stranách stěny opačně orientované, dochází často k přepojení magnetických indukčních čar a rozvoji ostrůvkové (*tearing*) nestability.

Dvojvrstva

Dvojvrstvou nazýváme skok elektrického potenciálu v plazmatu. V literatuře se většinou označuje symbolem DL z anglického „Double Layer“. Dvojvrstvy se vyskytují v hojném množství v plazmatu všude tam, kde teče elektrický proud způsobený elektrony a ionty pohybujícími se proti sobě. Při tomto vstřícném pohybu se může projevit tzv. dvousvazková nestabilita, která vede ke vzniku skoku elektrického potenciálu ϕ. Situace je obdobná vodě tekoucí v šikmém kanálu. Samovolně se na jejím povrchu vytvoří tu a tam výškové schody. Obdobně se v plazmatickém prostředí se spádem elektrického potenciálu samovolně vytvoří tu a tam schody v potenciálu. Stejný typ dvojvrstvy vzniká i z náhodné fluktuace koncentrace iontů nebo při pohybu nabitých částic podél indukčních čar magnetického pole.

Jinou možností vzniku dvojvrstvy je rozhraní dvou plazmatických prostředí s různou teplotou nebo koncentrací elektronů. Elektrony začnou vlivem gradientu teploty či koncentrace difundovat do druhého prostředí, ve kterém se proto objeví zvýšený záporný náboj. Vznikne elektrické pole a s ním související schod v potenciálu. Takovými dvojvrstvami neteče elektrický proud trvale.

Základem vzniku elektrické dvojvrstvy je vždy existence pohybu elektronů vůči okolí a následné narušení kvazineutrality vedoucí na vznik elektrického pole, a tím skoku potenciálu.

Pro posouzení výraznosti dvojvrstvy slouží tzv. parametr dvojvrstvy, který je definován jako podíl energie schodu potenciálu a tepelné energie elektronů:

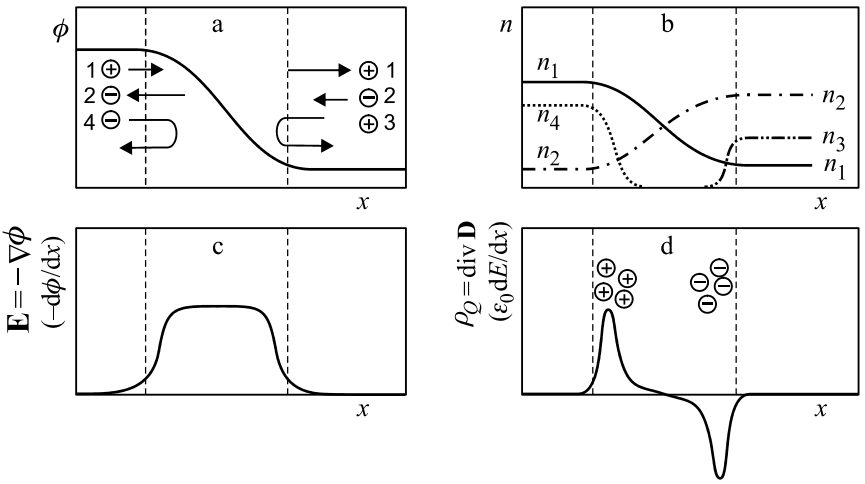
► $$\#_{\mathrm{DL}} \equiv \frac{e\,\Delta\phi}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}. \tag{1.317}$$

Dvojvrstvy vznikající na hranici dvou prostředí s různou teplotou mají tento parametr přibližně rovný jedné. Dvojvrstvy vznikající při velkých spádech potenciálu jsou velmi výrazné a mají $\#_{\mathrm{DL}} > 1$. Pro takové dvojvrstvy se částice rozdělí do čtyř skupin znázorněných na obrázku 1.54:

1) ionty urychlované ve směru poklesu potenciálu,
2) elektrony urychlované ve směru nárůstu potenciálu,
3) ionty zachycené na nižší straně potenciálu,
4) elektrony zachycené na vyšší straně potenciálu.

Průběh koncentrací n těchto čtyř druhů částic je na obrázku *b*, tečkovaně jsou vykresleny koncentrace záporných částic a plnou čarou kladných. Odpovídající celková hustota náboje ρ_Q je zobrazena na obrázku *d*. Výsledkem je vrstva kladného náboje na vyšší straně potenciálu a vrstva záporného náboje na nižší straně potenciálu. Tato konfigurace dala dvojvrstvě její jméno. Před a za schodem potenciálu je celkový prostorový náboj nulový, kladné a záporné náboje se přesně vyruší. Elektrické pole E dvojvrstvy je zná-

zorněné na obrázku *c*, mezi oběma vrstvami je zvýšené a odpovídá záporně vzaté derivaci potenciálu. Dvojvrstvy mohou (ale nemusí) být dlouhodobě stabilními útvary, ve kterých schod potenciálu vede na vznik výše zmíněných čtyř skupin částic a jejich elektrické pole zpětně napomáhá udržení skoku v potenciálu.



Obr. 1.54: Dvojvrstva

Dvojvrstvy jsou útvary, na kterých dochází k urychlování nabitých částic. Jde o jakési přirozené urychlovače v laboratoři i ve vesmíru. Vzhledem k separaci kladného a záporného náboje se také chovají jako přirozené kondenzátory. Právě energie těchto „kondenzátorů" se transformuje na kinetickou energii urychlených částic. Výkon uvolňovaný na dvojvrstvě je dán součinem skoku potenciálu a elektrického proudu tekoucího dvojvrstvou:

$$P = \Delta\phi\, I\,. \tag{1.318}$$

Ke vzniku relativistických elektronů může na dvojvrstvě dojít tehdy, pokud je energie schodu potenciálu větší než klidová energie elektronu, tedy relativistický parametr dvojvrstvy zavedený vztahem

► $$\#_{\mathrm{DLR}} \equiv \frac{e\,\Delta\phi}{m_{\mathrm{e}}c^2} \tag{1.319}$$

je větší než jedna, $\#_{\mathrm{DLR}} > 1$.

Dvojvrstvy zpravidla vytvářejí různě zprohýbané plochy malé tloušťky. Tloušťka dvojvrstvy je dána narušením kvazineutrality náboje, která v plazmatu nemůže být vyšší než několikanásobek Debyeovy vzdálenosti. Nejtlustší dvojvrstvy mají příčný rozměr cca deset Debyeových poloměrů. V laboratorním plazmatu jde o milimetry, v ionosféře o centimetry, v meziplanetárním prostředí o desítky metrů a v mezigalaktickém prostředí o desítky kilometrů.

Dvojvrstvy mohou plazmatickým prostředím driftovat, mohou prudce zvýšit svou tloušťku a rozpadnout se nebo zaniknout difúzními jevy pokojnou cestou. Normální dvojvrstvy jsou kolmé na magnetické pole, podél kterého se pohybují částice, a vzniklé elektrické pole je rovnoběžné s polem magnetickým. Existují ale i šikmé dvojvrstvy.

Na dvojvrstvách mohou být urychleny elektrony a ionty na značné rychlosti a magnetická energie elektrického obvodu se zde může přeměnit na kinetickou energii částic. Dvojvrstvy se vyskytují všude tam, kde tečou plazmatem elektrické proudy. Nacházíme je v magnetosférách planet, například na několikanásobku zemského poloměru vznikají ve dvojvrstvách energetické ionty urychlené ve směru indukčních čar zemského pole. Skok potenciálu je zde $10^2 \div 10^4$ V. Dvojvrstvy pravděpodobně vznikají ve slunečních filamentech protékaných proudem. Zde se odhaduje skok potenciálu až na $10^9 \div 10^{11}$ V a energie protonů urychlených ve dvojvrstvě na několik desítek gigaelektronvoltů. Pokud vznikají dvojvrstvy v plazmových vláknech v blízkosti jader galaxií, mohl by být skok potenciálu až 10^{17} V a uvolňovaný výkon řádově 10^{37} J/s.

Velmi zajímavou aplikací dvojvrstev jsou iontové motory. V Australské národní univerzitě vyvinuli v roce 2003 Christine Charles a Rod Boswell iontový motor, ve kterém se vytvoří dvojvrstva na hranici mezi vysoce koncentrovaným plazmatem zdroje a plazmatem s nízkou koncentrací ve výstupní trysce. Dvojvrstva urychlí ionty na vysoké energie a významně přispěje k tahu motoru. Takový motor může přispět k zefektivnění meziplanetárních letů.

Dvojvrstva vytvořená pouhou změnou koncentrace elektronů

Předpokládejme, že v plazmatu dojde z nějakých důvodů, například fluktuací, ke změně koncentrace elektronů. Budeme hledat nejjednodušší stacionární řešení v jedné dimenzi bez magnetického pole a tlaku elektronů. Využijeme rovnici kontinuity a pohybovou rovnici. Z rovnice kontinuity máme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(n_\mathrm{e} u_\mathrm{e}\right) = 0 .$$

Vzhledem k tomu, že x je jedinou proměnnou, můžeme psát

$$n_\mathrm{e} u_\mathrm{e} = \mathrm{const} \qquad \Rightarrow \qquad n_\mathrm{e} u_\mathrm{e} = -\frac{j_\mathrm{e}}{e} \qquad \Rightarrow$$

$$u_\mathrm{e}(x) = -\frac{j_\mathrm{e}}{e n_\mathrm{e}(x)} . \tag{1.320}$$

Tedy hustota elektrického proudu elektronů je konstantní a rychlost elektronů se v oblasti se změněnou koncentrací mění tak, aby zůstala v platnosti rovnice kontinuity. Napišme nyní pohybovou rovnici pro elektrony pro ustálený stav

$$n_\mathrm{e} m_\mathrm{e} u_\mathrm{e} \frac{\partial}{\partial x} u_\mathrm{e} = -n_\mathrm{e} e E .$$

Z této pohybové rovnice spočteme elektrické pole, které se vytvořilo změnou rychlosti pohybu elektronů:

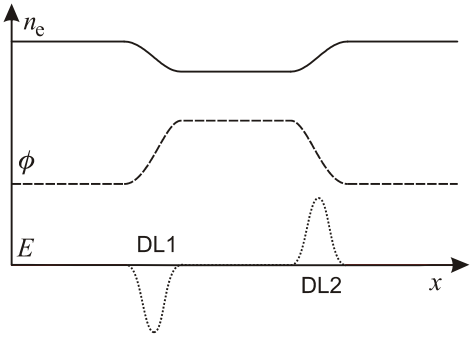
$$E = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{m_\mathrm{e} u_\mathrm{e}^2}{2e} .$$

Po dosazení za rychlost z (1.320) máme pro vzniklé elektrické pole vztah

$$E(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{m_\mathrm{e} j_\mathrm{e}^2}{2e^3 n_\mathrm{e}^2(x)} . \tag{1.321}$$

Změna koncentrace elektronů s sebou přináší vznik elektrického pole. V oblastech konstantní koncentrace je elektrické pole nulové, nenulové je jen v oblastech, kde se koncentrace mění. Ze souvislosti elektrického pole s elektrickým potenciálem můžeme psát

$$\phi(x) = \frac{m_\mathrm{e} j_\mathrm{e}^2}{2e^3 n_\mathrm{e}^2(x)} . \tag{1.322}$$



Obr. 1.55: Dvojvrstva vytvořená gradientem koncentrace

V oblasti změny koncentrace elektronů se mění i elektrický potenciál a vzniká elektrická dvojvrstva. Lokální snížení koncentrace elektronů vede na vznik dvojité dvojvrstvy. Dodejme pro úplnost, že toto řešení nalezli švédští fyzikové Hannes Alfvén (1908–1995) a Per Carlkvist (1938) v roce 1968.

Řešení potenciálu uvnitř dvojvrstvy udržované dvěma svazky

Hledejme nyní řešení pro potenciál uvnitř dvojvrstvy, který klesá z hodnoty ϕ_DL na nulu. Obecný výpočet musí proběhnout pro všechny 4 populace částic, tedy pro urychlované svazky elektronů a iontů a pro zachycené tepelné elektrony a ionty. V tomto odvození budeme uvažovat jen svazkové populace, tj. zanedbáme tepelné jevy. Předpokládejme svazek elektronů letící s konstantní rychlostí ze strany nižšího potenciálu a svazek iontů ze strany vyššího potenciálu. Oba dva svazky budou na dvojvrstvě urychleny. Výchozími rovnicemi budou: zákon zachování energie, rovnice kontinuity a Poissonova rovnice pro potenciál.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_\mathrm{e} u_\mathrm{e}^2 - e\phi &= \mathrm{const} = \frac{1}{2} m_\mathrm{e} u_{\mathrm{e}0}^2 ; \\ \frac{1}{2} m_\mathrm{i} u_\mathrm{i}^2 + Ze\phi &= \mathrm{const} = \frac{1}{2} m_\mathrm{i} u_{\mathrm{i}0}^2 + Ze\phi_\mathrm{DL} . \end{aligned} \tag{1.323}$$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{e} u_\mathrm{e} &= \mathrm{const} = -\frac{j_\mathrm{e}}{e} ; \\ n_\mathrm{i} u_\mathrm{i} &= \mathrm{const} = \frac{j_\mathrm{i}}{Ze} ; \end{aligned} \tag{1.324}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{e n_\mathrm{e}}{\varepsilon_0} - \frac{Z e n_\mathrm{i}}{\varepsilon_0} . \tag{1.325}$$

Konstantu v zákoně zachování energie počítáme na té straně schodu, ze které daná částice přilétá z nekonečna. Všechny proměnné (u_α, n_α, ϕ) jsou funkcemi polohy x v dvojvrstvě. V Poissonově rovnici (1.325) dosadíme za koncentraci z kontinuity (1.324) a za rychlosti ze zákona zachování energie (1.323). Výsledkem je rovnice pro potenciál

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{j_\mathrm{e}/\varepsilon_0}{\sqrt{u_{\mathrm{e}0}^2 + \dfrac{2e}{m_\mathrm{e}}\phi}} - \frac{j_\mathrm{i}/\varepsilon_0}{\sqrt{u_{\mathrm{i}0}^2 + \dfrac{2Ze}{m_\mathrm{i}}(\phi_\mathrm{DL} - \phi)}}\,. \tag{1.326}$$

Jde o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro funkci $\phi(x)$, kterou je sice možné řešit analyticky (vede na eliptické integrály), ale zpravidla se řeší numericky. Integrační konstanty jsou dány okrajovými podmínkami – na obou krajích dvojvrstvy je nulové elektrické pole, tj. nulová derivace potenciálu a samotný potenciál je na jedné straně nulový a na druhé má hodnotu ϕ_DL. Výsledkem je Langmuirova-Childova relace mezi celkovou proudovou hustotou j tekoucí dvojvrstvou, tloušťkou dvojvrstvy d a spádem potenciálu ϕ_DL na dvojvrstvě:

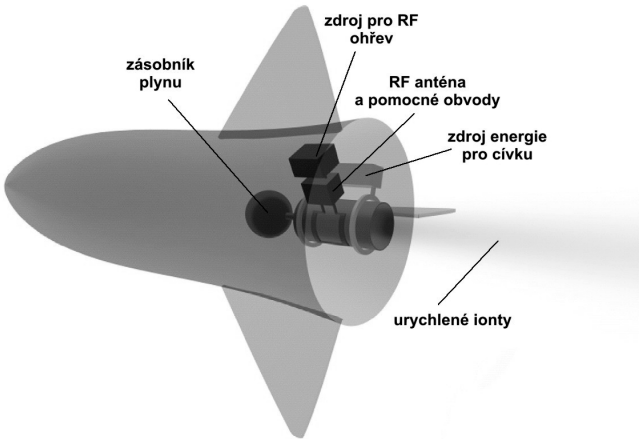
$$jd^2 = A\phi_\mathrm{DL}^{3/2}\,; \qquad A \approx 0{,}20724\left(1 + \sqrt{\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{i}}}\right)\sqrt{\frac{2e}{m_\mathrm{e}}}\,; \qquad j = j_\mathrm{e} + j_\mathrm{i}\,. \tag{1.327}$$

V obecném případě musíme vzít v úvahu i populace zachycených tepelných částic, jejichž koncentrace je dána Boltzmannovým rozdělením (tj. připustíme nenulovou teplotu) a na pravé straně Poissonovy rovnice přibudou ještě dva členy ve tvaru

$$n_\alpha = n_{0\alpha}\exp\left[-Q_\alpha\phi/k_\mathrm{B}T_\alpha\right]; \qquad \alpha = \mathrm{e},\,\mathrm{i}\,.$$

Krátce z historie výzkumu dvojvrstev

1929	Americký plazmový chemik a fyzik Irving Langmuir (1881–1957) detekuje dvojvrstvy v laboratorním plazmatu.
1958	Švédský plazmový fyzik Hannes Alfvén (1908–1995) navrhuje, že elektrony zodpovědné za polární záře jsou urychlovány směrem k Zemi dvojvrstvami v magnetosféře Země.
1967	Švédští plazmoví fyzikové Hannes Alfvén a Per Carlqvist (1938) navrhují teorii slunečních erupcí, ve které hrají významnou roli dvojvrstvy.
1987	Švédská družice Viking detekuje výrazné dvojvrstvy v magnetosféře Země. Družice pracovala na polární dráze v letech 1986 až 1987. Čtyři ramena se senzory elektrického pole byla dlouhá 40 metrů.
1992	Americký plazmový fyzik Noah Hershkowitz nalézá v laboratorním plazmatu násobné dvojvrstvy se schodovitým průběhem potenciálu.
2003	Australští fyzikové Christine Charles a Rod Boswell vyvinuli iontový motor pro kosmické lodě, který využívá k urychlení iontů dvojvrstvu. Evropská kosmická agentura provedla první laboratorní testy motoru v roce 2005.



Obr. 1.56: Iontový motor ESA

Evropská kosmická agentura vyvíjí nový iontový pohon pro meziplanetární lety. Plazma vzniká radiofrekvenčním ohřevem a je udržováno cívkami magnetického pole. Na výstupu z komory se vytvoří stabilní dvojvrstva, která urychlí ionty na vysokou energii. Tím vzniká tah tohoto nového typu motoru.

Rázové vlny

V plazmatu se často vytvářejí oblasti, ve kterých se prudce mění některé parametry, například rychlost, koncentrace, teplota nebo magnetické pole. Takové oblasti nazýváme rázovými vlnami, některé z nich se mohou plazmatem pohybovat. Typickým příkladem je rázová vlna vznikající interakcí slunečního větru s magnetosférou Země. Na „návětrné“ straně se vytvoří obloukovitá rázová vlna obdobná rázové vlně vzniklé před přídí lodi pohybující se po moři. Rázové vlny vznikají i tam, kde se proudění mění z nadzvukového na podzvukové a jsou typickými rysy laboratorního i astrofyzikálního plazmatu. Na rázových vlnách může dojít k významnému urychlení částic. Dvojvrstva probíraná v minulé kapitole je vlastně speciálním případem rázové vlny.

Rázové vlny studovali v klasické hydrodynamice skotský inženýr William John Macquorn Rankine (1820–1872) a francouzský inženýr Pierre Henri Hugoniot (1851–1887). Podmínky, které musí jednotlivé veličiny splňovat na rázové vlně, nazýváme Rankinovy-Hugoniotovy podmínky. Pokud pro nějakou aditivní veličinu A platí rovnice kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A = 0\,, \tag{1.328}$$

je vyjádřením zákona zachování této veličiny. Postupem obdobným jako u Maxwellových rovnic (kapitola II.2.1.7 v druhém díle „Vybraných kapitol“) nalezneme podmínku pro obě strany skoku platící v soustavě spojené s rázovou vlnou

$$\begin{gathered}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})_1 = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})_2 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})_2 - (\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})_1 = 0 \quad \Rightarrow \\ [\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}]_1^2 = 0\,.\end{gathered} \tag{1.329}$$

Význam hranaté závorky je stejný jako u určitého integrálu. Index označuje strany rázové vlny a **n** je normálový vektor. Ze zákona zachování hmotnosti a hybnosti získáme okamžitě podmínky

► $$\left[\rho\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right]_1^2 = 0\,, \tag{1.330}$$

► $$\left[\rho\mathbf{u}\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)+\left(p+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)\mathbf{n}-\frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\mathbf{B}}{\mu_0}\right]_1^2 = 0\,, \tag{1.331}$$

Pro energii je situace nepatrně složitější. Tok energie je dán vztahem

$$\mathbf{j}_\mathrm{E} = e\mathbf{u}+\frac{1}{2}\rho u^2\mathbf{u}+p\mathbf{u}+\mathbf{E}\times\mathbf{H}\,, \tag{1.332}$$

jednotlivé členy postupně znamenají: tok vnitřní energie, tok kinetické energie (uspořádané složky pohybu), tok tlakové energie (neuspořádané složky pohybu) a Poyntingův vektor vyjadřující tok elektromagnetické energie. Odpovídající podmínka na rázové cvlně bude mít tvar

$$\left[\left(e+\frac{\rho u^2}{2}+p\right)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})+\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{n}\right]_1^2 = 0\,. \tag{1.333}$$

Vnitřní energii pro polytropní plazma s koeficientem γ vyjádříme za pomoci tlaku:

$$p = nk_\mathrm{B}T\,, \tag{1.334}$$

$$e = \frac{f}{2}nk_\mathrm{B}T = \frac{f}{2}p\,, \tag{1.335}$$

kde f je počet stupňů volnosti jednoho atomu či molekuly. Mezi polytropním koeficientem a počtem stupňů volnosti excistuje jednoduchý vztah

$$\gamma = \frac{f+2}{f}\,, \tag{1.336}$$

ze kterého vypočteme f, dosadíme do vztahu pro energii a dostaneme

$$e = \frac{p}{\gamma-1}\,. \tag{1.337}$$

Pro skoková řešení využíváme ideální magnetohydrodynamiku (difúzní členy způsobí konečnou tloušťku rázové vlny) a za elektrické pole proto dosadíme

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u}\times\mathbf{B}\,. \tag{1.338}$$

Nyní již snadno získáme relaci

► $$\left[\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{\gamma p}{\gamma-1}+\frac{B^2}{\mu_0}\right)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})-\frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})}{\mu_0}\right]_1^2 = 0\,. \tag{1.339}$$

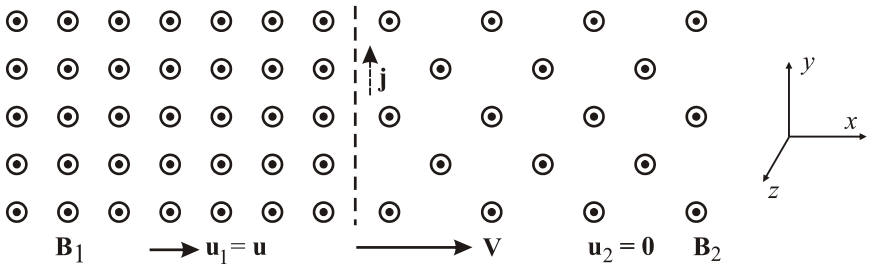
Tyto podmínky musíme doplnit spojitostí normálových složek magnetického pole (div **B** = 0) a tečných složek elektrického pole (rot **E** = $-\partial\mathbf{B}/\partial t$). Využijeme opět fakt, že v ideální magnetohydrodynamice je $\mathbf{E} = -\mathbf{u}\times\mathbf{B}$:

► $$\left[\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\right]_1^2 = 0\,, \tag{1.340}$$

► $$\left[\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\right]_1^2 = 0\,. \tag{1.341}$$

Podmínky (1.330) až (1.341) nazýváme Rankinovy-Hugoniotovy podmínky.

◖ **Příklad 1.4:** pohybující se rázová vlna. Předpokládejme, že se klidným plazmatem pohybuje rychlostí V rázová vlna tvořená skokem magnetického pole rovnoběžného s touto rázovou vlnou:



Obr. 1.57: Pohybující se rázová vlna

Před čelem vlny je rychlost plazmatu nulová, za vlnou je plazma strháváno rychlostí u. Určete tuto rychlost u z hodnot magnetického pole na obou stranách rázové vlny.

Řešení: V soustavě souřadnicové spojené s rázovou vlnou se pro nerelativistické rychlosti podle transformace (II.3.83) magnetické pole nezmění (viz druhý díl „Vybraných kapitol“). Z podmínky (1.341) potom v této souřadnicové soustavě plyne

$$B_1(u-V) = B_2(-V)\,. \tag{1.342}$$

Nyní již snadno určíme rychlost u prostředí za rázovou vlnou:

$$u = \left(1-\frac{B_2}{B_1}\right)V\,. \tag{1.343}$$

◗

1.4 Lineární vlny v plazmatu

1.4.1 Základní pojmy

Superpozice rovinných vln

S lineární analýzou vlnění jsme se již setkali v druhém dílu „Vybraných kapitol“, v části věnované elektromagnetickým vlnám. Proto zde shrneme jen ta nejdůležitější fakta. Pokud je soustava rovnic popisujících vlnění lineární, můžeme ihned hledat řešení jako superpozici jednotlivých Fourierových módů

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \int \psi_{\omega,\mathbf{k}}\, \mathrm{d}^3\mathbf{k}\,; \tag{1.344}$$

$$\psi_{\omega,\mathbf{k}} = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = a(\omega,\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \tag{1.345}$$

kde ψ je komplexní vlnová funkce – zástupný symbol pro jakékoli vlnění, z něhož má skutečný význam pouze reálná část; $\psi_{\omega,\mathbf{k}}$ je příslušný fourierovský mód, a je jeho amplituda a φ jeho fáze. Superpozice (1.344) není ničím jiným než Fourierovou transformací, z fyzikálního hlediska jde o složení výsledného řešení z rovinných vln. Čtveřice čísel (ω, $\mathbf{k}$) se nazývá vlnový čtyřvektor. Je tvořen úhlovou frekvencí ω a vlnovým vektorem $\mathbf{k}$:

►
$$\omega = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{1.346}$$

►
$$\mathbf{k} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}} = \nabla\varphi\,. \tag{1.347}$$

Znaménko minus u úhlové frekvence zajišťuje jednak stejný směr vlnového vektoru a rychlosti šíření vlnoplochy (plochy konstantní fáze), a jednak správné chování čtyřvektoru vůči Lorentzově transformaci. Detaily nalezne čtenář v druhém dílu „Vybraných kapitol“, v kapitole 2.5 *Elektromagnetické vlny*. Pro rovinnou vlnu ve velikostech platí jednoduché vztahy

$$|\omega| = \frac{2\pi}{T}, \tag{1.348}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{1.349}$$

kde T je perioda vlnění a λ jeho vlnová délka. Integrace módů probíhá pouze přes $\mathbf{k}$ prostor, neboť je čtveřice čísel popisujících vlnění závislá. Tuto závislost lze vyjádřit disperzní relací

$$\phi(\omega,\mathbf{k}) = 0 \tag{1.350}$$

V některých případech z disperzní relace můžeme vypočítat buď vztah $\omega = \omega(\mathbf{k})$ nebo $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega)$. Jednotlivé módy se šíří fázovou rychlostí

$$v_{\mathrm{f}} = \frac{\omega}{k}; \qquad \mathbf{v}_{\mathrm{f}} = \frac{\omega}{k}\frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\omega}{k^2}\mathbf{k}. \tag{1.351}$$

Na fázovou rychlost nemáme žádná omezení, může a v některých případech dokonce musí být vyšší, než je rychlost světla ve vakuu. Jako celek se superpozice vln, například vlnový balík, šíří tzv. grupovou rychlostí

$$\mathbf{v}_{\mathrm{g}} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_x}, \frac{\partial\omega}{\partial k_y}, \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\right). \tag{1.352}$$

Obdobný vztah ve sférické souřadnicové soustavě (k, θ, φ) má tvar (gradient v **k** prostoru)

$$\mathbf{v}_{\mathrm{g}} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}, \frac{1}{k}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}, \frac{1}{k\sin\theta}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right). \tag{1.353}$$

Superpozice rovinných vln již může přenášet informace, proto je grupová rychlost vždy podsvětelná.

Je-li soustava rovnic popisujících vlnění lineární, platí princip superpozice a do soustavy můžeme dosazovat jednotlivé parciální módy (1.345). Jejich chování vzhledem k diferenciálním opearcím je mimořádně jednoduché:

Výraz	Příklad
$\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{i}\omega$	$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathrm{i}\omega f$
$\frac{\partial}{\partial x_l} \to +\mathrm{i}k_l$	$\frac{\partial f}{\partial x_l} = +\mathrm{i}k_l f$
$\nabla \to +\mathrm{i}\mathbf{k}$	$\nabla f = +\mathrm{i}\mathbf{k} f$
$\mathrm{div} \to \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot$	$\mathrm{div}\,\mathbf{V} = \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}$
$\mathrm{rot} \to \mathrm{i}\mathbf{k}\times$	$\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{V}$
$\nabla^2 \to -k^2$	$\nabla^2 f = -k^2 f$

Soustavu parciálních diferenciálních rovnic tak převedeme na algebraickou soustavu pro fourierovské módy všech hledaných veličin. Aplikace těchto pravidel není ničím jiným než provedením Fourieorvy transformace. Je-li to možné, snižujeme řád soustavy, buď ještě na úrovni parciálních diferenciálních rovnic, nebo na úrovni algebraických rovnic. Soustava algebraických rovnic nemá pravé strany, podmínkou nenulového řešení je nulovost determinantu soustavy. Tato podmínka je vztahem mezi ω, **k**, tj. jde o hledanou disperzní relaci. Z ní pak můžeme určit fázovou a grupovou rychlost daného vlnění. Celý postup jsme si několikrát procvičili v druhém díle „Vybraných kapitol" v pasážích věnovaných elektromagnetickým vlnám ve vakuu, v anizotropním prostředí a ve vodivém prostředí. Na závěr celého výpočtu se můžeme vrátit k původní soustavě rovnic a hledat směry jednotlivých vektorů (například elektrického, magnetického či rychlostního pole).

◖ Příklad 1.5: Kleinova –Gordonova rovnice

Kleinova-Gordonova rovnice je správnou relativistickou rovnicí pro volnou částici se spinem rovným nule

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2\right)\psi = 0\,; \qquad \mu^2 \equiv \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,. \tag{1.354}$$

Jde o vlnovou rovnici s konstantním členem, která limitně přechází v nerelativistickou Schrödingerovu rovnici. Detaily nalezne čtenář v prvním díle „Vybraných kapitol“, v části I.2.7.3 *Kleinova-Gordonova rovnice*. Rovnice je lineární, její řešení budeme chápat jako superpozici rovinných vln. Po provedení Fourierovy transformace Kleinovy-Gordonovy rovnice dle pravidel na předchozí straně získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2k^2 + c^2\mu^2\,. \tag{1.355}$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_\mathrm{f} = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1+\frac{\mu^2}{k^2}} = c\sqrt{1+\frac{\mu^2\lambda^2}{4\pi^2}}\,, \tag{1.356}$$

$$v_\mathrm{g} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{\mu^2}{k^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{\mu^2\lambda^2}{4\pi^2}}}\,. \tag{1.357}$$

Na první pohled je zřejmé, že grupová rychlost je vždy podsvětelná. Oproti tomu fázová rychlost je nadsvětelná a nemá význam přenosu informace. Mezi oběma rychlostmi je jednoduchý vztah $v_\mathrm{f}\,v_\mathrm{g} = c^2$. Obě rychlosti závisí na vlnové délce parciální vlny (tzv. disperze). Jedině pro částici s hmotností rovnou nule ($\mu = 0$) jsou jak fázová, tak grupová rychlost rovny rychlosti světla ve vakuu. Částice s nulovou klidovou hmotností a jí příslušící vlnový balík se jinou rychlostí šířit nemůže. Obdobné chování budou mít plazmové vlny diskutované v kapitole 1.4.3.

◗

Nelineární soustava rovnic

Je-li výchozí model nelineární, může jít o značný problém. Rovnice jsou řešitelné jen někdy a žádné obecné postupy neexistují. Rovnice je možné linearizovat, ale tím ztrácíme mnoho z vlastností skutečných řešení. Lineární aproximace je ospravedlnitelná jen pro vlny malých amplitud, které chápeme jako malé poruchy nějakého známého (nejlépe stacionárního) řešení výchozí soustavy rovnic. Někdy je linearizace jedinou možností, jak se o řešení vůbec něco dozvědět. Z chování malých poruch můžeme obdobnými postupy jako v teoretické mechanice řešit problém stability řešení. Linearizace probíhá ve dvou krocích. Nejprve nalezneme „klidové“ řešení výchozí soustavy rovnic bez přítomnosti vln. V homogenním neomezeném prostředí jde zpravidla o konstantní řešení, u omezeného prostředí (například válcové vlákno) je situace složitější. V dalším kroku chápeme vlnu jako malou poruchu nalezeného řešení. „Malá porucha“ znamená, že relativní poruchy (vydělené nějakou charakteristickou hodnotou) se chovají jako

malý bezrozměrný parametr, jehož mocniny vyšší než první zanedbáváme. V praxi řešení s přidanou poruchou dosadíme do výchozí soustavy rovnic a zanedbáme druhé a vyšší mocniny všech poruch. Výsledkem je lineární soustava rovnic pro poruchy, na kterou aplikujeme již známý postup. Než se pustíme do řešení rovnic magnetohydrodynamiky, ukážeme si jednotlivé kroky na obyčejných zvukových vlnách v plynech.

1.4.2 Zvukové vlny v plynech

U nelineární soustavy rovnic můžeme tedy použít postup založený na linearizaci, který je obdobný vyšetřování stability u soustav obyčejných diferenciálních rovnic [1]. I zde zkoumáme chování malých poruch, které mohou být utlumeny (stabilita), exponenciálně narůstat (nestabilita) nebo mít vlnový charakter. Shrňme nyní základní kroky řešení nelineární soustavy metodou linearizace (metodou perturbací, malých poruch):

1. Nalezení nějakého (nejlépe stacionárního) řešení.
2. Linearizace pomocí malých poruch.
3. Možná eliminace proměnných.
4. Fourierova transformace.
5. Možná eliminace proměnných (algebraická).
6. Nalezení disperzní relace (determinant soustavy = 0).
7. Vyšetření stability řešení.
8. Nalezení fázové a grupové rychlosti.
9. Nalezení vzájemných směrů mezi vektory.

U lineárních soustav začíná výpočet krokem 3. U nelineárních soustav musí proběhnout celý uvedený postup, který si ukážeme na zvukových vlnách šířících se v homogenním izotropním plynném prostředí.

Klidné prostředí

Za výchozí model budeme považovat soustavu rovnic:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} \;=\; 0\,,$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} \;=\; -\nabla\, p\,, \tag{1.358}$$

$$p = p(\rho) = K\,\rho^{\gamma}\,.$$

První rovnice je rovnicí kontinuity pro hustotní pole ρ, druhá rovnice je pohybovou rovnicí pro rychlostní pole $\mathbf{u}$ a soustava je uzavřena polytropní tlakovou závislostí (tlak závisí na hustotě mocninným vztahem, takové chování je pro plyny i plazma velmi typické). V soustavě je celkem pět neznámých (ρ, $\mathbf{u}$, p) a soustava je nelineární, vystupují zde součiny hledaných funkcí. Proto provedeme celý postup (body 1 až 9):

1. **Stacionární řešení:** Řešením (například nepohyblivý plyn v místnosti) je

$$\rho = \rho_0 , \qquad \mathbf{u}_0 = 0 , \qquad p = p_0 .$$

2. **Linearizace:** Přepokládejme přítomnost malé poruchy stacionárního řešení

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho , \qquad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u} , \qquad p = p_0 + \delta p .$$

Tuto poruchu dosadíme do soustavy (1.358):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \operatorname{div}\Big[(\rho_0 + \delta\rho)(\delta\mathbf{u})\Big] = 0 ,$$

$$(\rho_0 + \delta\rho)\frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial t} + \rho\big(\delta\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\big)(\delta\mathbf{u}) = -\boldsymbol{\nabla}(p_0 + \delta p) ,$$

$$\delta p = \alpha(\rho_0)\,\delta\rho ; \qquad \alpha \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho} .$$

V soustavě ponecháme jen poruchy prvního řádu, poruchy vyšších řádů zanedbáme. Derivace konstant jsou nulové. Ze soustavy po linearizaci proto zbude:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) + \operatorname{div}\Big[\rho_0(\delta\mathbf{u})\Big] &= 0 , \\ \rho_0 \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial t} &= -\boldsymbol{\nabla}(\delta p) , \\ \delta p &= \alpha(\rho_0)\,\delta\rho . \end{aligned} \tag{1.359}$$

3. **Eliminace proměnných:** Soustava (1.359) je již lineární soustavou pro neznámé $\delta\rho$, $\delta\mathbf{u}$, δp. V principu můžeme nyní eliminovat ze soustavy poruchu tlaku δp dosazením z poslední rovnice. Tento krok ale také můžeme provést později.

4. **Fourierova transformace:** Soustavu převedeme na algebraickou pomocí Fourierovy transformace. Naše soustava je již lineární a tak je tento krok ekvivalentní dosazení rovinné vlny do soustavy. Výsledkem je

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\,\omega\delta\rho + \mathrm{i}\,\rho_0(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u}) &= 0 , \\ -\mathrm{i}\,\omega\rho_0\,\delta\mathbf{u} &= -\mathrm{i}\mathbf{k}\,\delta p , \\ \delta p &= \alpha\,\delta\rho . \end{aligned} \tag{1.360}$$

5. **Eliminace proměnných:** Získaná soustava je pro pět neznámých a determinant by se počítal z matice 5×5. Pomocí poslední rovnice eliminujeme tlak:

$$\begin{aligned} -\omega\delta\rho + \rho_0(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u}) &= 0 , \\ \mathbf{k}\,\alpha\,\delta\rho - \omega\rho_0\,\delta\mathbf{u} &= 0 . \end{aligned}$$

Nyní máme jen čtyři rovnice (jednu skalární a jednu vektorovou) pro čtyři neznámé $\delta\rho, \delta\mathbf{u}$ a determinant by se počítal z matice 4×4. Z druhé (vektorové) rovnice můžeme ještě spočítat poruchu rychlosti a dosadit do první rovnice:

$$(-\omega^2 + \alpha k^2)\,\delta\rho = 0 .$$

Výsledkem je jedna jediná rovnice pro jednu jedinou neznámou $\delta\rho$. Ne vždy lze provést eliminaci proměnných až do konce.

6. **Disperzní relace:** Podmínkou nenulovosti řešení je nulovost kulaté závorky před $\delta\rho$ (jde o determinant matice 1×1):

$$-\omega^2 + \alpha(\rho_0)k^2 = 0\,. \tag{1.361}$$

Nalezenou disperzní relaci lze snadno řešit vzhledem k ω, za α dosadíme z (1.359):

$$\omega = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}\,k\,. \tag{1.362}$$

7. **Stabilita řešení:** Disperzní relace vyšla reálná, reálnému vlnovému vektoru odpovídá reálná úhlová frekvence a řešením jsou vlny. V systému nedochází ani k útlumu, ani k nestabilitě.
8. **Fázová a grupová rychlost:** Výsledná disperzní relace je lineární, fázová a grupová rychlost mají stejnou hodnotu, zvuk se šíří rychlostí

$$c_\mathrm{s} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \tag{1.363}$$

Speciálně pro polytropní děje $p = K\rho^\gamma$ vychází (m_0 je hmotnost jednoho atomu)

$$c_\mathrm{s} = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma\frac{k_\mathrm{B}T}{m_0}}\,. \tag{1.364}$$

9. **Vztahy vektorů:** Z druhé rovnice (1.360) je zřejmé, že porucha rychlostního pole míří ve směru šíření vln (vlnového vektoru), a jde proto o *vlnění podélné*.

Za pomoci rychlosti zvuku lze disperzní relaci zvukových vln zapsat v často používaném tvaru

► $$\omega = c_\mathrm{s}\,k\,; \qquad c_\mathrm{s} \equiv \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}\,.. \tag{1.365}$$

Pohybující se prostředí

Připusťme nyní nenulovou rychlost ve stacionárním řešení (to odpovídá šíření zvuku v pohybujícím se prostředí) a požadujme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta\rho\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}\,, \\ p &= p_0 + \delta p\,. \end{aligned} \tag{1.366}$$

Co všechno se změní? Výpočet probíhá zcela analogicky, nyní ale při linearizaci přispěje i konvektivní člen v pohybové rovnici. Po snadném výpočtu získáme disperzní relaci

$$\left(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0\right)^2 - \alpha(\rho_0)k^2 = 0\,; \qquad \alpha \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho} \tag{1.367}$$

a z ní pozorovanou úhlovou frekvenci

$$\omega = c_s k + \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0 = c_s k + k u_0 \cos\varphi = c_s k\left(1 + \frac{u_0}{c_s}\cos\varphi\right). \tag{1.368}$$

Ve výrazu jsme φ označili úhel mezi vlnovým vektorem $\mathbf{k}$ a rychlostí prostředí $\mathbf{u}_0$. Označíme-li ještě frekvenci zvuku v nepohyblivém prostředí $\omega_0 = c_s k$, máme výsledný vztah

► $$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{u_0}{c_s}\cos\varphi\right), \tag{1.369}$$

který není nic jiného než Dopplerův vzorec pro změnu frekvence vlivem pohybu zdroje vlnění. U pohybujících se tekutin se tedy v disperzní relaci objeví místo úhlové frekvence ω kombinace °

$$\Omega = \omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0. \tag{1.370}$$

Jeansovo kritérium

Popišme nyní vlny v oblaku plynu a prachu, který je ovládán gravitačním polem (mlhovinu). Zejména se budeme zajímat o to, za jakých podmínek je zvuková vlna nestabilní a může dojít k zhroucení části mlhoviny a vzniku globule – zhuštěniny, která je předchůdcem budoucí hvězdy.

V následující tabulce jsou porovnány veličiny popisující elektrostatické a gravitační pole. Správný koeficient u Laplaceovy-Poissonovy rovnice pro gravitační potenciál získáte porovnáním vztahů pro potenciální energii v prvním řádku.

Veličina	Elektrostatické pole	Gravitační pole
potenciál bodového zdroje	$\phi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\phi_G = -G\frac{M}{r}$
potenciální energie	$V_E = q\,\phi_E$	$V_G = m\,\phi_G$
rovnice pro potenciál	$\nabla^2\phi_E = -\frac{\rho_Q}{\varepsilon_0}$	$\nabla^2\phi_G = 4\pi G\rho_M$
síla vyjádřená z energie	$\mathbf{F} = -\nabla V_E$	$\mathbf{F} = -\nabla V_G$
síla vyjádřená z potenciálu	$\mathbf{F} = -q\nabla\phi_E$	$\mathbf{F} = -m\nabla\phi_G$
hustota síly	$\mathbf{f} = -\rho_Q\nabla\phi_E$	$\mathbf{f} = -\rho_M\nabla\phi_G$

Za výchozí sadu rovnic budeme považovat soustavu (1.358) doplněnou o hustotu gravitační síly a rovnici pro gravitační potenciál:

$$\begin{aligned} \partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} &= 0\,, \\ \rho\,\partial\mathbf{u}/\partial t + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} &= -\nabla p - \rho\nabla\phi\,, \\ \nabla^2\phi &= 4\pi G\rho\,, \\ p &= p(\rho)\,. \end{aligned} \tag{1.371}$$

Vzhledem k tomu, že jde o gravitační problém bez přítomnosti elektrických polí, a nemůže proto dojít k záměně hustot ani potenciálů, vynecháváme index *G*. Celkem máme 6 rovnic pro 6 neznámých ρ, $\mathbf{u}$, ϕ, p. Řešení budeme hledat v perturbovaném tvaru

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho\,, \qquad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}\,, \qquad \phi = \phi_0 + \delta\phi\,, \qquad p = p_0 + \delta p\,.$$

Veličiny nultého řádu musí splňovat rovnici $\Delta\phi_0 = 4\pi G\rho_0$, ze které plyne, že by mělo platit $\nabla\phi_0 \neq 0$. To je ale v rozporu s klidovým řešením pohybové rovnice pro $p_0 = \text{const}$. Tato nekonzistence vzniká nahrazením konečné mlhoviny nekonečným prostorem vyplněným látkou s konstantní hustotou, tlakem a teplotou. V přiblížení rozsáhlé mlhoviny můžeme zanedbat okrajové jevy a v perturbační analýze nadále požadovat $\nabla\phi_0 = 0$. Tato „nekonzistence“ byla obsažena již i v původním Jeansově řešení. Obdobným postupem nalezneme disperzní relaci zvukových vln ovlivněných gravitačním polem

$$\omega^2 = c_\mathrm{s}^2\, k^2 - 4\pi G\rho_0\,; \qquad c_\mathrm{s}^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}\,. \tag{1.372}$$

Oproti relaci (1.365) je zde navíc druhý člen na pravé straně. Řešení vzhledem k frekvenci ω je jednoduché:

$$\omega = \pm\sqrt{c_\mathrm{s}^2\, k^2 - 4\pi G\rho_0}\,. \tag{1.373}$$

Na první pohled vidíme, že úhlová frekvence nemusí být reálnou veličinou. Pro

$$c_\mathrm{s}^2\, k^2 < 4\pi G\rho_0 \tag{1.374}$$

je úhlová frekvence ryze imaginární, $\omega = \pm \mathrm{i}\, b$ a v rovinné vlně se objeví členy

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{e}^{\mp b t}\,.$$

Některé typy poruch proto mohou exponenciálně narůstat a mlhovina se stává nestabilní. Právě v takovém prostředí mohou vznikat hvězdy jako původně malé poruchy narostlé do makroskopických rozměrů. Prozkoumejme proto podmínku (1.374) podrobněji:

$$c_\mathrm{s}^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} < 4\pi G\rho_0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}\, c_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}\sqrt{\gamma\frac{k_\mathrm{B}T}{m_0}}\,.$$

Při odvození jsme použili pro rychlost zvuku vztah (1.364), m_0 je hmotnost jednoho atomu či molekuly mlhoviny. Poruchy s vlnovou délkou větší než určitá mez jsou gravitačně nestabilní. Aby se v mlhovině mohly tvořit hvězdy, musí mít rozměry větší než tato kritická mez. Uvedené tvrzení se nazývá Jeansovo kritérium a bylo odvozeno v roce 1902:

► $$L > \sqrt{\frac{\pi\gamma k_\mathrm{B}T}{G\rho_0 m_0}}\,. \tag{1.375}$$

Z disperzní relace (1.373) není samozřejmě problém dopočítat fázovou a grupovou rychlost šíření poruch mlhovinou. V ionizovaném prostředí za přítomnosti magnetických polí mohou hvězdy vznikat, aniž by splňovaly Jeansovo kritérium.

Je-li splněno Jeansovo kritérium a v mlhovině vzniká kulový objekt, je třeba ještě řešit podmínky rovnováhy tohoto objektu. Gravitační síla působící na nějakou vrstvu uvnitř vznikající hvězdy má tvar

$$F_{\text{grav}} \sim \frac{1}{R^2}\,.$$

Tlaková síla na tuto vrstvu je úměrná součinu tlaku $p \sim \rho^{\gamma}$ a povrchu $S \sim R^2$, tj

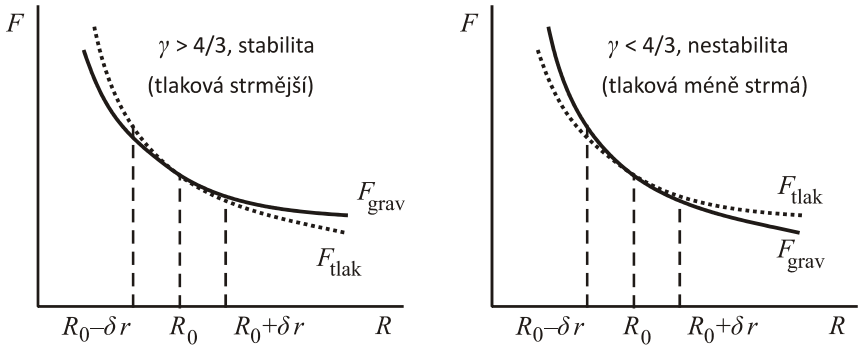
$$F_{\text{tlak}} \sim \rho^{\gamma} R^2 \sim R^{-3\gamma} R^2 \sim \frac{1}{R^{3\gamma-2}}\,.$$

Obě síly za normálních okolností klesají s rostoucími rozměry hvězdy. Rovnováha se ustaví při rovnosti obou sil. Styl poklesu obou sil je stejný pro koeficient

$$\gamma = \frac{4}{3}\,.$$

Diskutujme dva případy. Nejprve $\gamma > 4/3$. Tlaková křivka je strmější než gravitační. Jestliže hvězda zcela náhodně zvětší své rozměry, převládne gravitační síla a hvězdu opět smrští. Zmenší-li hvězda své rozměry, převládne tlaková síla a nafoukne hvězdu na původní rozměr. Hvězda je stabilní a výkyvy v jejích rozměrech neohrozí její existenci.

V případě $\gamma < 4/3$ je tomu jinak. Jestliže hvězda zcela náhodně zvětší své rozměry, převládne tlaková síla a bude hvězdu nadále nutit zvětšovat rozměry. Hvězda bude nestabilní a minimálně odhodí obálku. Zmenší-li hvězda své rozměry, převládne gravitační síla a bude nutit hvězdu ke kolapsu.



Obr. 1.58: Rovnováha polytropní hvězdy

Poznámka: Materiál bílých trpaslíků má polytropní koeficient blízký 4/3. Polytropní koeficient se poněkud mění s hmotností trpaslíka. Při hmotnosti přibližně 1,4 hmotnosti Slunce má polytropní koeficient právě hodnotu 4/3 a pro vyšší hmotnosti je bílý trpaslík nestabilní. Této hranici se říká Chandrasekharova mez.

1.4.3 Plazmové oscilace a vlny

Oblast vyplněná plazmatem je schopna na základě různých vnějších podnětů přenášet mnoho druhů vlnění. V této kapitole se budeme zabývat nejjednoduššími plazmovými oscilacemi a vlnami, které probíhají *bez přítomnosti magnetického pole*. Hybnou silou je pouze pole elektrické, které tvoří vratnou sílu a umožňuje periodický pohyb. Počáteční porucha způsobí rozkmitání elektronové a iontové tekutiny na dvou charakteristických frekvencích a současně vznik globálního elektrického pole. Elektronová tekutina je schopna oscilací na podstatně vyšších frekvencích než iontová tekutina. Proto za výchozí soustavu rovnic nemůžeme využít jednotekutinový model, ale dvoutekutinový model. Viskózní členy zanedbáme. Pro tento typ vlnění platí Maxwellova rovnice rot $\mathbf{E} = 0$ (i při nulovém magnetickém poli je možná vlna elektrického pole), ze které bezprostředně plyne $\mathbf{k} \times \delta\mathbf{E} = 0$. Proto platí $\delta\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ a vlnění je podélné.

Odvození disperzní relace

Za výchozí soustavu rovnic budeme volit sadu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial t} + \mathrm{div}(n_\mathrm{e}\mathbf{u}_\mathrm{e}) = 0\,,\\
&\frac{\partial n_\mathrm{i}}{\partial t} + \mathrm{div}(n_\mathrm{i}\mathbf{u}_\mathrm{i}) = 0\,,\\
&m_\mathrm{e} n_\mathrm{e}\frac{\partial \mathbf{u}_\mathrm{e}}{\partial t} + m_\mathrm{e} n_\mathrm{e}(\mathbf{u}_\mathrm{e}\cdot\nabla)\mathbf{u}_\mathrm{e} \;=\; -\nabla p_\mathrm{e} - e n_\mathrm{e}\mathbf{E}\,,\\
&m_\mathrm{i} n_\mathrm{i}\frac{\partial \mathbf{u}_\mathrm{i}}{\partial t} + m_\mathrm{i} n_\mathrm{i}(\mathbf{u}_\mathrm{i}\cdot\nabla)\mathbf{u}_\mathrm{i} \;=\; -\nabla p_\mathrm{i} + Z e n_\mathrm{i}\mathbf{E}\,,\\
&\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}(Z e n_\mathrm{i}\mathbf{u}_\mathrm{i} - e n_\mathrm{e}\mathbf{u}_\mathrm{e})\,,\\
&p_\mathrm{e} = n_\mathrm{e} k_\mathrm{B} T_\mathrm{e} = C_\mathrm{e} n_\mathrm{e}^{\gamma_\mathrm{e}}\;;\\
&p_\mathrm{i} = n_\mathrm{i} k_\mathrm{B} T_\mathrm{i} = C_\mathrm{i} n_\mathrm{i}^{\gamma_\mathrm{i}}\,.
\end{aligned} \tag{1.376}$$

Jde o rovnice kontinuity pro elektrony a ionty, pohybové rovnice s tlakovým a elektrickým členem, rovnici pro elektrické pole a polytropní stavové rovnice. Rovnice pro elektrické pole je odvozena z Maxwellovy rovnice rot $\mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t$, ve které je magnetické pole nulové a proudová hustota je vyjádřena ze vztahu (1.170). Budeme předpokládat Z-násobnou ionizaci plazmatu. Uvedené rovnice budeme linearizovat, tj. provedeme perturbaci klidového řešení:

$$\begin{aligned}
&n_\mathrm{e} = n_{\mathrm{e}0} + \delta n_\mathrm{e}\;;\quad n_\mathrm{i} = n_{\mathrm{i}0} + \delta n_\mathrm{i}\;;\quad \mathbf{u}_\mathrm{e} = \delta\mathbf{u}_\mathrm{e}\;;\quad \mathbf{u}_\mathrm{i} = \delta\mathbf{u}_\mathrm{i}\;;\\
&\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}\;;\quad p_\mathrm{e} = p_{\mathrm{e}0} + \delta p_\mathrm{e}\;;\quad p_\mathrm{i} = p_{\mathrm{i}0} + \delta p_\mathrm{i}\,.
\end{aligned} \tag{1.377}$$

Po dosazení do původní sady a zanedbání členů vyšších řádů získáme:

$$\frac{\partial \delta n_\mathrm{e}}{\partial t} + \mathrm{div}(n_{\mathrm{e}0}\,\delta \mathbf{u}_\mathrm{e}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial \delta n_\mathrm{i}}{\partial t} + \mathrm{div}(n_{\mathrm{i}0}\,\delta \mathbf{u}_\mathrm{i}) = 0\,,$$

$$m_\mathrm{e} n_{\mathrm{e}0} \frac{\partial \delta \mathbf{u}_\mathrm{e}}{\partial t} = -\nabla \delta p_\mathrm{e} - e n_{\mathrm{e}0}\,\delta \mathbf{E}\,,$$

$$m_\mathrm{i} n_{\mathrm{i}0} \frac{\partial \delta \mathbf{u}_\mathrm{i}}{\partial t} = -\nabla \delta p_\mathrm{i} + Z e n_{\mathrm{i}0}\,\delta \mathbf{E}\,,$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\,(Z n_{\mathrm{i}0} \delta \mathbf{u}_\mathrm{i} - n_{\mathrm{e}0} \delta \mathbf{u}_\mathrm{e})\,,$$

$$\delta p_\mathrm{e} = m_\mathrm{e} c_\mathrm{e}^2 \delta n_\mathrm{e}\,; \quad c_\mathrm{e}^2 \equiv \frac{\gamma_\mathrm{e} k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}\,,$$

$$\delta p_\mathrm{i} = m_\mathrm{i} c_\mathrm{i}^2 \delta n_\mathrm{i}\,; \quad c_\mathrm{i}^2 \equiv \frac{\gamma_\mathrm{i} k_\mathrm{B} T_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}}\,.$$

Další postup je přímočarý. Snížíme řád dosazením posledních dvou rovnic do předchozích a provedeme Fourierovu transformaci:

$$-\omega \delta n_\mathrm{e} + n_{\mathrm{e}0}\,(\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_\mathrm{e}) = 0\,,$$

$$-\omega \delta n_\mathrm{i} + n_{\mathrm{i}0}\,(\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_\mathrm{i}) = 0\,,$$

$$\mathrm{i}\,\omega m_\mathrm{e} n_{\mathrm{e}0} \delta \mathbf{u}_\mathrm{e} = \mathrm{i}\,\mathbf{k}\, m_\mathrm{e} c_\mathrm{e}^2 \delta n_\mathrm{e} + e n_{\mathrm{e}0}\,\delta \mathbf{E}\,,$$

$$\mathrm{i}\,\omega m_\mathrm{i} n_{\mathrm{i}0} \delta \mathbf{u}_\mathrm{i} = \mathrm{i}\,\mathbf{k}\, m_\mathrm{i} c_\mathrm{i}^2 \delta n_\mathrm{i} - Z e n_{\mathrm{i}0}\,\delta \mathbf{E}\,,$$

$$\mathrm{i}\,\omega \delta \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon_0}\,(Z n_{\mathrm{i}0} \delta \mathbf{u}_\mathrm{i} - n_{\mathrm{e}0} \delta \mathbf{u}_\mathrm{e})\,.$$

Jde o soustavu 11 algebraických rovnic pro jedenáct neznámých δn_e, δn_i, $\delta \mathbf{u}_\mathrm{e}$, $\delta \mathbf{u}_\mathrm{i}$, $\delta \mathbf{E}$. Pokusíme se snížit řád soustavy. Z třetí a čtvrté rovnice vypočteme $\delta \mathbf{u}_\mathrm{e}$, $\delta \mathbf{u}_\mathrm{i}$ a dosadíme do zbývajících. Potom z poslední rovnice vypočteme $\delta \mathbf{E}$ (bude se vyskytovat na obou stranách rovnice) a dosadíme do zbývajících dvou. Získáme výsledek

$$\left[(\omega^2 - \omega_\mathrm{pe}^2 - \omega_\mathrm{pi}^2)(\omega^2 - c_\mathrm{e}^2 k^2) - \omega_\mathrm{pe}^2 c_\mathrm{e}^2 k^2\right] \delta n_\mathrm{e} + \left[Z \omega_\mathrm{pe}^2 c_\mathrm{i}^2 k^2\right] \delta n_\mathrm{i} = 0\,,$$

$$\left[\frac{1}{Z} \omega_\mathrm{pi}^2 c_\mathrm{e}^2 k^2\right] \delta n_\mathrm{e} + \left[(\omega^2 - \omega_\mathrm{pe}^2 - \omega_\mathrm{pi}^2)(\omega^2 - c_\mathrm{i}^2 k^2) - \omega_\mathrm{pi}^2 c_\mathrm{i}^2 k^2\right] \delta n_\mathrm{i} = 0\,,$$

kde jsme vzniklé kombinace veličin označili jako rychlost zvuku (u elektronů jde o formální označení, lidské ucho zvuk nesený elektrony neslyší) a plazmovou frekvenci:

$$c_\mathrm{e}^2 \equiv \frac{\gamma_\mathrm{e} k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}\,; \qquad c_\mathrm{i}^2 \equiv \frac{\gamma_\mathrm{i} k_\mathrm{B} T_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}}\,, \tag{1.378}$$

$$\omega_{\mathrm{pe}}^2 \equiv \frac{n_{\mathrm{e}0}\, e^2}{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0}; \qquad \omega_{\mathrm{pi}}^2 \equiv \frac{n_{\mathrm{i}0} Z^2 e^2}{m_{\mathrm{i}}\varepsilon_0}, \tag{1.379}$$

Má-li mít vzniklá soustava nenulové řešení, musí být její determinant nulový.

$$\left(\begin{array}{l} \left[(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 - \omega_{\mathrm{pi}}^2)(\omega^2 - c_{\mathrm{e}}^2 k^2) - \omega_{\mathrm{pe}}^2 c_{\mathrm{e}}^2 k^2 \right] \times \\ \times \left[(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 - \omega_{\mathrm{pi}}^2)(\omega^2 - c_{\mathrm{i}}^2 k^2) - \omega_{\mathrm{pi}}^2 c_{\mathrm{i}}^2 k^2 \right] \end{array} \right) - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \omega_{\mathrm{pi}}^2 c_{\mathrm{e}}^2 c_{\mathrm{i}}^2 k^4 \;=\; 0\,.$$

Vhodným přeskupením členů (MATHEMATICA, MATLAB) získáme disperzní relaci

$$\left(\begin{array}{c} \left[\; (\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2)(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pi}}^2) - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \omega_{\mathrm{pi}}^2 \right] \; \times \\ \times \left[\; (\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 - c_{\mathrm{e}}^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pi}}^2 - c_{\mathrm{i}}^2 k^2) - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \omega_{\mathrm{pi}}^2 \right] \end{array} \right) = 0\,,$$

která má dvě základní větve, první nezávisí na vlnovém vektoru (tzv. plazmové oscilace – viznásledující text), druhá závisí (plazmové vlny – viz strana 128 a iontové vlny – viz strana 129):

► $$\left[(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2)(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pi}}^2) - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \omega_{\mathrm{pi}}^2 \right] = 0\,, \tag{1.380}$$

► $$\left[(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 - c_{\mathrm{e}}^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pi}}^2 - c_{\mathrm{i}}^2 k^2) - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \omega_{\mathrm{pi}}^2 \right] = 0\,. \tag{1.381}$$

Plazmové oscilace

Po roznásobení rovnice (1.380) získáme nenulové řešení

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2 + \omega_{\mathrm{pi}}^2\,.$$

Kvadrát plazmové frekvence elektronů je o tři řády vyšší než iontů. Druhý člen na pravé straně představuje jen nepatrnou korekci na hmotnost iontů a většinou se vůbec neuvažuje. Upravme pravou stranu (z důvodu kvazineutrality je $n_{\mathrm{i}0} = n_{\mathrm{e}0}/Z$):

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2 + \omega_{\mathrm{pi}}^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2 \left(1 + \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega_{\mathrm{pe}}^2} \right) = \omega_{\mathrm{pe}}^2 \left(1 + \frac{n_{\mathrm{i}0} Z^2 e^2}{m_{\mathrm{i}}\varepsilon_0} \frac{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0}{n_{\mathrm{e}0} e^2} \right) = \omega_{\mathrm{pe}}^2 \left(1 + \frac{Z m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}} \right) \;\Rightarrow$$

► $$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2 \left(1 + \frac{Z m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}} \right)\,. \tag{1.382}$$

Kdyby měly ionty nekonečnou hmotnost, oscilace by probíhaly přesně na plazmové frekvenci elektronů a ionty by se vůbec nepohybovaly. Můžeme si představit, že tekutina elektronů osciluje na nehybném pozadí iontů. Druhý člen v závorce je malou korekcí na konečnou hmotnost iontů. Plazmová frekvence elektronů je jednou z nejdůležitějších charakteristik plazmatu. Plazma často reaguje na vnější podněty oscilacemi nebo vlnami na plazmové frekvenci elektronů, která se pro většinu druhů plazmatu pohybuje v radiové oblasti.

Plazmové vlny

Věnujme se druhé větvi (1.381) disperzní relace. Realizujme nerovnost $m_e \ll m_i$ limitním přechodem $m_i \to \infty$. Tím budeme sledovat vysokofrekvenční část vln, při kterých se ionty nestíhají pohybovat a efektivně mají nekonečnou hmotnost. Limitní přechod dává

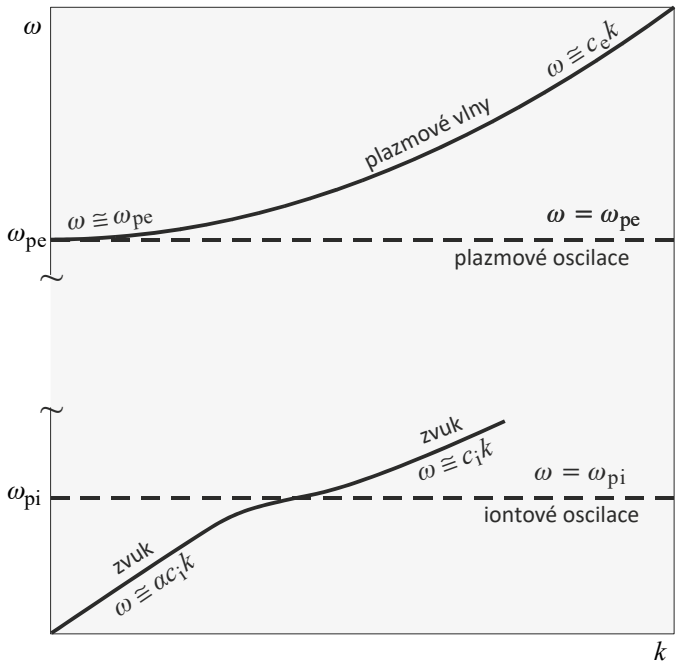
$$\omega_{pi}^2 \to 0\,; \qquad c_i^2 \to 0\,.$$

Z disperzní relace (1.381) zůstane jen vztah

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2 = 0\ ,$$

ze kterého plyne disperzní relace *plazmových vln*

► $$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2\ ; \quad \text{resp.} \qquad \omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2}\,. \tag{1.383}$$



Obr. 1.59: Disperzní relace plazmových oscilací a vln

Limita dlouhých vln (k malé)

Druhý člen v disperzní relaci je zanedbatelný a jde o oscilace na plazmové frekvenci elektronů

$$\omega = \omega_{pe}\,.$$

Limita krátkých vln (k velké)

První člen v disperzní relaci je zanedbatelný a jde o lineární závislost

$$\omega = c_e k\ .$$

Směrnicí závislosti je rychlost „zvuku“ elektronů (přibližně tepelná rychlost elektronů). Skutečný zvuk je samozřejmě nesen těžkými částicemi (ionty a neutrály) a má mnohem nižší frekvenci.

Poznámka 1: Plazmové vlny jsou nejtypičtějším vysokofrekvenčním rozvlněním plazmatu (zpravidla v oboru radiových frekvencí). Disperzní relace (1.383) připouští jen řešení

$$\omega > \omega_{\mathrm{pe}} . \tag{1.384}$$

Při nižších frekvencích se vlna nešíří. Je to patrné z disperzní relace přímo i z přiloženého obrázku. Pro nižší frekvence, než je plazmová, poskytuje disperzní relace komplexní řešení a vlna je tlumená.

Poznámka 2: Co znamená malé či velké k? Jde o to, který ze dvou členů ve výrazu (1.383) převládne. Vzhledem k tomu, že $\omega_{\mathrm{p}}^2/c^2k^2 = \lambda^2/4\pi^2\gamma\lambda_{\mathrm{D}}^2$, můžeme limitu malých k chápat jako dlouhovlnnou oblast $\lambda >> \lambda_{\mathrm{D}}$ a limitu velkých k jako krátkovlnnou oblast s $\lambda << \lambda_{\mathrm{D}}$, kde λ_{D} je Debyeova vzdálenost.

Poznámka 3: Druhý člen v disperzní relaci (1.383) je dán tepelným pohybem elektronů. Kdyby neexistoval tepelný pohyb, vlny by se nešířily, šlo by jen o oscilace.

Poznámka 4: Z disperzní relace (1.383) snadno spočteme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_{\mathrm{f}} = \frac{\omega}{k} = c_{\mathrm{e}} \sqrt{1 + \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2 \lambda^2}{4\pi^2 c_{\mathrm{e}}^2}} ; \qquad v_{\mathrm{g}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_{\mathrm{e}} \Big/ \sqrt{1 + \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2 \lambda^2}{4\pi^2 c_{\mathrm{e}}^2}} . \tag{1.385}$$

Snadno nahlédneme, že pro fázovou a grupovou rychlost platí vztahy:

$$v_{\mathrm{f}} > c_{\mathrm{e}} ; \qquad v_{\mathrm{g}} < c_{\mathrm{e}} ; \qquad v_{\mathrm{f}} v_{\mathrm{g}} = c_{\mathrm{e}}^2 . \tag{1.386}$$

Poznámka 5: V přítomnosti magnetických polí přejde vysokofrekvenční větev na složitější komplex elektromagnetických vln v plazmatu. Naopak nízkofrekvenční větev popsaná v následující kapitole přejde v přítomnosti magnetických polí na komplex magnetoakustických vln.

Iontové vlny

Realizujme nyní nerovnost $m_{\mathrm{e}} << m_{\mathrm{i}}$ limitním přechodem $m_{\mathrm{e}} \to 0$. Elektrony s nulovou hmotností se stanou jakýmsi všudypřítomným záporným oblakem. Ionty mají nyní konečnou, i když velkou hmotnost. Budou oscilovat s velmi nízkými frekvencemi na pozadí elektronů. Limitní přechod znamená

$$\omega_{\mathrm{pe}}^2 \to \infty ;$$
$$c_{\mathrm{e}}^2 \to \infty .$$

V disperzní relaci (1.381) zůstanou podstatné členy

$$(-\omega_{\mathrm{pe}}^2 - c_{\mathrm{e}}^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pi}}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \omega_{\mathrm{pi}}^2 = 0 .$$

Relaci snadno vyřešíme vzhledem ω:

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pi}}^2 + c_{\mathrm{i}}^2 k^2 - \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2\, \omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega_{\mathrm{pe}}^2 + c_{\mathrm{e}}^2 k^2}$$

a po jednoduché úpravě dostaneme

► $$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pi}}^2 \left[1 - \frac{1}{1 + c_{\mathrm{e}}^2 k^2 / \omega_{\mathrm{pe}}^2} \right] + c_{\mathrm{i}}^2 k^2 \ . \tag{1.387}$$

Vztah je možné (ale není to nutné) přepsat také za pomoci Debyeovy stínící vzdálenosti, se kterou se seznámíme v kapitole 1.6.4, str. 231. Mezi rychlostí zvuku (1.378), plazmovou frekvencí (1.379) a Debyeovou stínící vzdáleností platí jednoduchý vztah

$$c_\alpha^2 / \omega_{\mathrm{p}\alpha}^2 = \gamma_\alpha \lambda_\alpha^2 \,,$$

pomocí kterého se disperzní relace iontových vln někdy upravuje do tvaru:

► $$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pi}}^2 \left[1 \ - \ \frac{1}{1 + \gamma_{\mathrm{e}} \lambda_{\mathrm{De}}^2 k^2} + \ \gamma_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{Di}}^2 k^2 \right]. \tag{1.388}$$

Limita dlouhých vln (k malé)

V limitě dlouhých vln upravíme disperzní relaci (1.387) takto

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pi}}^2 \left[1 - \frac{1}{1 + c_{\mathrm{e}}^2 k^2 / \omega_{\mathrm{pe}}^2} \right] + c_{\mathrm{i}}^2 k^2 \approx$$

$$\approx \ \omega_{\mathrm{pi}}^2 \left[1 - \left(1 - c_{\mathrm{e}}^2 k^2 / \omega_{\mathrm{pe}}^2 \right) \right] + c_{\mathrm{i}}^2 k^2 \ \Rightarrow$$

$$\omega^2 = c_{\mathrm{i}}^2 k^2 \left[1 + \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega_{\mathrm{pe}}^2} \frac{c_{\mathrm{e}}^2}{c_{\mathrm{i}}^2} \right] .$$

Využijeme-li definice rychlostí zvuku (1.378), plazmové frekvence (1.379) a kvazineutralitu $n_{\mathrm{i}0} = n_{\mathrm{e}0} / Z$, dostaneme

$$\omega^2 \ = \ c_{\mathrm{i}}^2 k^2 \left(1 + Z \frac{\gamma_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}}}{\gamma_{\mathrm{i}} T_{\mathrm{i}}} \right); \quad \text{resp.}$$

$$\omega \ = \ c_{\mathrm{i}} k \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}}}{\gamma_{\mathrm{i}} T_{\mathrm{i}}}} \,.$$

Jde o zvukové vlny šířící se rychlostí

$$c_{\mathrm{s}} = c_{\mathrm{i}} \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}}}{\gamma_{\mathrm{i}} T_{\mathrm{i}}}} \,.$$

Limita krátkých vln (k velké)

Z disperzní relace (1.387) zbude pro krátké vlny jediný člen

$$\omega^2 \approx c_\mathrm{i}^2 k^2 \; ; \quad \text{resp.} \qquad \omega = c_\mathrm{i} k \; .$$

Jde opět o zvukové vlny šířící se rychlostí

$$c_\mathrm{s} = c_\mathrm{i} \; .$$

Nízkofrekvenční řešení jsou zvukové vlny s malou závislostí rychlosti na vlnové délce.

Další vlivy

Pohyb prostředí

Plazmové oscilace a vlny ovlivňuje samozřejmě celá řada dalších faktorů zde neprobíraných. Pohybuje-li se prostředí, v němž je generována vlna, rychlostí $\mathbf{u}_0$, změní se disperzní relace (1.381) na relaci

$$\left[(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0)^2 - \omega_\mathrm{pe}^2 - c_\mathrm{e}^2 k^2\right] \cdot \left[(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0)^2 - \omega_\mathrm{pi}^2 - c_\mathrm{i}^2 k^2\right] - \omega_\mathrm{pe}^2 \omega_\mathrm{pi}^2 = 0 \; ,$$

která v sobě přirozeným způsobem zahrnuje Dopplerův posun frekvence.

Srážky

V plazmatu mohou probíhat srážky, které by se projevily srážkovým členem na pravé straně pohybové rovnice. Srážkový člen je úměrný rychlosti a srážkové frekvenci ν. Vzhledem k tomu, že plazmové oscilace elektronů jsou podélné, lze učinit odhad vlivu srážek na oscilace jen v jedné dimenzi a bez nepodstatných členů (tlak atd.):

$$\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_\mathrm{e} u_\mathrm{e}) = 0 \; ,$$

$$m_\mathrm{e} n_\mathrm{e} \frac{\partial u_\mathrm{e}}{\partial t} = -e\, n_\mathrm{e} E - n_\mathrm{e} m_\mathrm{e} \nu u_\mathrm{e} \; ,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} e n_\mathrm{e} u_\mathrm{e} \; .$$

Po provedení perturbací a Fourierovy transformace získáme disperzní relaci. Bez srážkového členu má tvar (jde asi o nejrychlejší způsob jak odvodit hodnotu plazmové frekvence)

$$\omega^2 = \omega_\mathrm{pe}^2 \; ; \qquad \omega_\mathrm{pe}^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e} \varepsilon_0}$$

Se srážkovým členem dostaneme z podmínky na nulovost determinantu

$$\omega^2 + \mathrm{i}\,\omega\nu - \omega_\mathrm{pe}^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = -\mathrm{i}\frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\omega_\mathrm{pe}^2 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2} \; .$$

Srážky způsobují útlum plazmových oscilací s koeficientem útlumu $\delta = \nu/2$.

Magnetické pole

Přítomnost magnetického pole ovlivní zásadně charakter vln. Vysokofrekvenční větev přejde v *komplex anizotropních elektromagnetických vln* (viz kapitola 1.4.5) a nízkofrekvenční větev v *komplex anizotropních magnetoakustických vln* (viz kapitola 1.4.4).

1.4.4 Magnetoakustické vlny

V této kapitole si povšimneme nízkofrekvenčních vln generovaných pohybem iontů v přítomnosti magnetického pole. Samo magnetické pole vnáší do hry zcela nový prvek – anizotropii. Dalšími činiteli ovlivňujícími charakter vln jsou samozřejmě elektrický náboj iontů a vodivost prostředí.

Odvození disperzní relace

Za výchozí sadu rovnic budeme uvažovat klasickou jednotekutinovou magnetohydrodynamiku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0\,, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{\operatorname{rot}\mathbf{B}}{\mu_0}\times\mathbf{B}\,, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma\mu_0}\nabla^2\mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\,, \\ p &= p(\rho)\,. \end{aligned} \tag{1.389}$$

Difúzní člen v rovnici pro magnetické pole je zodpovědný za útlum magnetoakustických vln. V případě vysoce vodivého plazmatu $\sigma \to \infty$ je možné tento člen zanedbat a magnetoakustické vlny nebudou tlumené. Kdybychom tento člen v soustavě ponechali, poskytovala by disperzní relace komplexní řešení pro frekvenci i vlnový vektor a rovinná vlna by tak byla exponenciálně tlumena. Celá výchozí soustava je opět algebraicky uzavřena stavovou rovnicí.

Postupujme nyní obdobně jako v minulém případě, tj. provedeme perturbace klidového řešení

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho\,; \qquad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}\,; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}\,; \qquad p = p_0 + \delta p\,. \tag{1.390}$$

Hledané řešení (1.390) dosadíme do soustavy (1.389), zanedbáme druhé a vyšší mocniny poruch a budeme předpokládat poruchu ve tvaru rovinné vlny. Výsledná linearizovaná algebraická soustava rovnic je:

$$\begin{aligned} -\omega\delta\rho + \rho_0\,\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u} &= 0\,, \\ \mathbf{k}\,\delta p - \rho_0\omega\delta\mathbf{u} + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\delta\mathbf{B})\mathbf{k} - \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})\,\delta\mathbf{B} &= 0\,, \\ \mathbf{k}\times(\mathbf{B}_0\times\delta\mathbf{u}) - \omega\delta\mathbf{B} &= 0\,, \\ \delta p - c_{\mathrm{s}}^2\,\delta\rho &= 0\,; \qquad c_{\mathrm{s}}^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}\,. \end{aligned} \tag{1.391}$$

Jde o soustavu osmi rovnic (2 skalární a 2 vektorové) bez pravých stran. Postupnou eliminací proměnných je možné nalézt jen rovnici pro rychlost (druhá rovnice). Nejprve dosadíme za δp z poslední rovnice. Poté za $\delta\rho$ z první rovnice a nakonec za $\delta\mathbf{B}$ ze třetí rovnice (upravíme dvojný vektorový součin). Získáme tak soustavu rovnic pro perturbace rychlostního pole

$$\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{u}=\mathbf{0}\,. \tag{1.392}$$

Složky symetrické matice $\mathbf{M}$ mají tvar

$$M_{kl}=\left[\omega^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A})^2\right]\delta_{kl}+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A})(k_k v_l^{(\mathrm{A})}+k_l v_k^{(\mathrm{A})})\;-\;\left(v_\mathrm{A}^2+c_\mathrm{s}^2\right)k_k k_l\,.$$

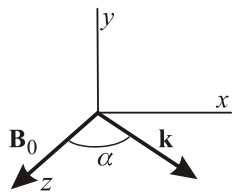
Tuto matici můžeme také zapsat v invariantním tvaru

$$\mathbf{M}=\left[\omega^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A})^2\right]\vec{\mathbf{I}}\;+\;(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A})\left[\mathbf{k}\otimes\mathbf{v}_\mathrm{A}+\mathbf{v}_\mathrm{A}\otimes\mathbf{k}\right]\;-\;\left(v_\mathrm{A}^2+c_\mathrm{s}^2\right)\;\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}\,.$$

Veličina $\mathbf{v}_\mathrm{A}$ se nazývá Alfvénova rychlost a je definována jako

$$\mathbf{v}_\mathrm{A}\equiv\frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0\,\rho_0}}\,. \tag{1.393}$$

Pro dopočet disperzní relace můžeme zvolit souřadnicový systém. Osu z volme ve směru magnetického pole $\mathbf{B}_0$ (ve směru Alfvénovy rychlosti). Kolem této osy otočíme souřadnicový systém tak, aby vlnový vektor $\mathbf{k}$ byl v rovině (x, z). V takto zvoleném souřadnicovém systému platí $\mathbf{B}_0=(0,0,B_0)$, $\mathbf{v}_\mathrm{A}=(0,0,v_\mathrm{A})$ a pro vlnový vektor máme výraz $\mathbf{k}=(k\sin\alpha,\,0,\,k\cos\alpha)$. Úhel mezi vektory $\mathbf{B}_0$ a $\mathbf{k}$ je α.



Obr. 1.60: Volba souřadnic

Pro tuto volbu má matice $\mathbf{M}$ jednoduchý tvar:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\omega^2-k^2v_\mathrm{A}^2-c_\mathrm{s}^2k^2\sin^2\alpha & 0 & -c_\mathrm{s}^2k^2\sin\alpha\cos\alpha\\ 0 & \omega^2-k^2v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha & 0\\ -c_\mathrm{s}^2k^2\sin\alpha\cos\alpha & 0 & \omega^2-c_\mathrm{s}^2k^2\cos^2\alpha\end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení soustavy (1.392), musí být determinant matice $\mathbf{M}$ nulový. Z této podmínky získáme disperzní relaci magnetoakustických vln, a to dokonce ve tvaru nezávislém na souřadnicové soustavě

$$\left[\omega^2-\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A}\right)^2\right]\cdot\left[\omega^4-k^2\left(v_\mathrm{A}^2+c_\mathrm{s}^2\right)\omega^2+c_\mathrm{s}^2k^2\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A}\right)^2\right]=0\,. \tag{1.394}$$

Alfvénova rychlost míří ve směru magnetického pole $\mathbf{B}_0$. Již na první pohled je vidět, že magnetoakustické vlny jsou mnohem složitější než obyčejný zvuk. Bude-li výraz v první hranaté závorce nulový, získáme jeden z módů, tzv. *Alfvénovu vlnu* (*A*). Bude-li nulový výraz v druhé hranaté závorce, získáme snadno řešitelnou bikvadratickou rovnici pro úhlovou frekvenci. Její řešení poskytuje další dva módy magnetoakustických vln, tzv. *pomalou vlnu* (*S*, Slow) a *rychlou vlnu* (*F*, Fast). Disperzní relace jednotlivých módů zřejmě jsou (α je úhel mezi vlnovým vektorem a magnetickým polem resp. Alfvénovou rychlostí):

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= v_\mathrm{A}^2 k^2 \cos^2\alpha\,, \\
\omega^2 &= \frac{1}{2}k^2\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right) - \frac{1}{2}k^2\sqrt{\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right)^2 - 4c_\mathrm{s}^2 v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha}\,, \qquad (1.395)\\
\omega^2 &= \frac{1}{2}k^2\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right) + \frac{1}{2}k^2\sqrt{\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right)^2 - 4c_\mathrm{s}^2 v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že v některé literatuře se Alfvénovými vlnami nazývají všechny tři zde zavedené módy magnetoakustických vln. V klasické zvukové vlně dochází k přelévání hustoty energie mezi chaotickou (tlakovou, p) částí energie a uspořádanou (kinetickou, $\rho v^2/2$) částí energie. V magnetoakustické vlně je rovnocenným partnerem ještě hustota energie magnetického pole (magnetický tlak, $p_\mathrm{M} = B^2/2\mu_0$). Položíme-li sobě rovny hustotu kinetické energie a magnetický tlak, získáme hodnotu Alfvénovy rychlosti:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad \Rightarrow \qquad v = v_\mathrm{A} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0\rho}}\,.$$

Vlnoplochy magnetoakustických vln

Z disperzních relací (1.395) snadno určíme fázové rychlosti šíření jednotlivých módů:

$$\begin{aligned}
v_\mathrm{Af}^2 &= v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha\,, \\
v_\mathrm{Sf}^2 &= \frac{1}{2}\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right)^2 - 4c_\mathrm{s}^2 v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha}\,, \qquad (1.396)\\
v_\mathrm{Ff}^2 &= \frac{1}{2}\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right)^2 - 4c_\mathrm{s}^2 v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha}\,.
\end{aligned}$$

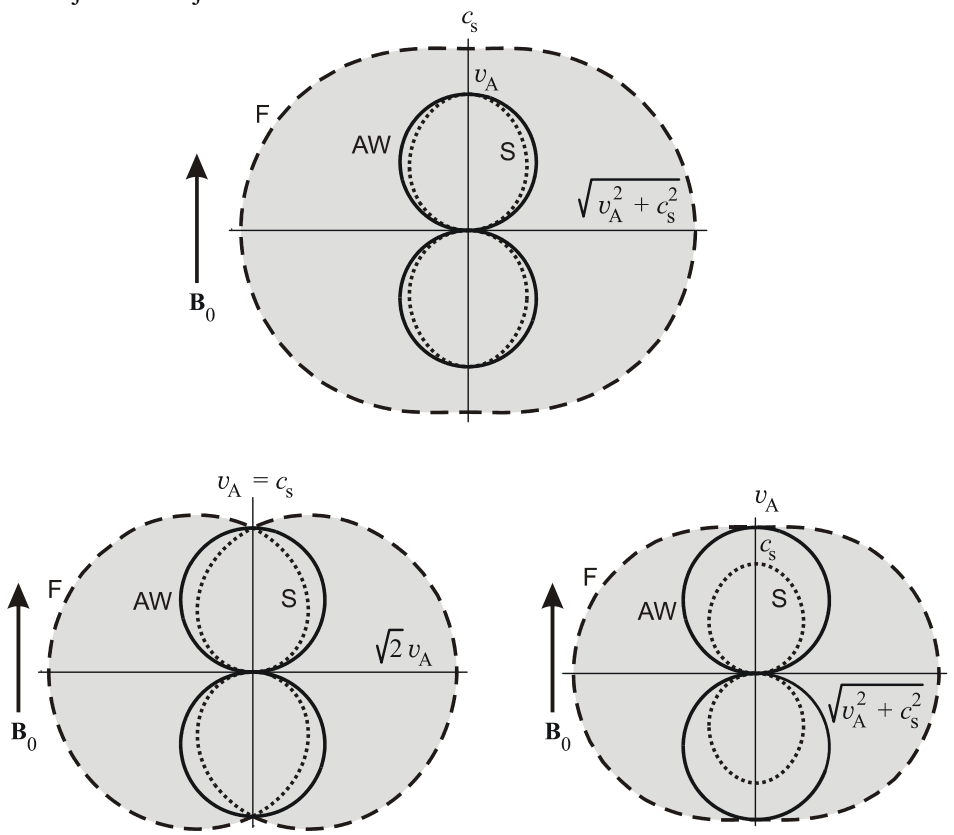
Nalezněme nyní tyto rychlosti ve směru magnetického pole $\mathbf{B}_0$ ($\alpha = 0$) a ve směru kolmém na toto pole ($\alpha = \pi/2$). Výsledek je v následující tabulce:

mód	A	S	F
$\alpha = 0$	v_A	$\min\{v_\mathrm{A}, c_\mathrm{s}\}$	$\max\{v_\mathrm{A}, c_\mathrm{s}\}$ (1.397)
$\alpha = \pi/2$	0	0	$\sqrt{v_\mathrm{A}^2 + c_\mathrm{s}^2}$ (1.398)

Ve směru pole je fázová rychlost Alfvénovy vlny rovna Alfvénově rychlosti, pomalá vlna získá menší z obou základních rychlostí (rychlosti zvuku a Alfvénovy rychlosti) a rychlá vlna se bude šířit větší z obou rychlostí. Ve směru kolmém na původní magne-

tické pole má nenulovou rychlost šíření jen rychlá vlna, pomalá a Alfvénova mají nulové rychlosti.

Situace je dobře patrná na polárním diagramu závislosti fázové rychlosti všech tří módů. Takový diagram můžeme interpretovat jako tvary jednotlivých vlnoploch. Při zmenšujícím se magnetickém poli se vlnoplochy Alfvénovy vlny a pomalé magnetoakustické vlny zmenšují a vlnoplocha rychlé magnetoakustické vlny se stává „obyčejnou“ zvukovou vlnoplochou. Magnetické pole vnáší do šíření zvuku anizotropii. Chování vlnoploch při různých hodnotách pole si můžete vyzkoušet v apletech na serveru aldebaran.cz (jejich podpora webovými prohlížeči ale stále bohužel klesá). Tvar vlnoploch resp. polární diagram fázové rychlosti pro různé hodnoty magnetických polí si prohlédněte na obrázcích. Pokud je v plazmatu přítomen prach, je vlnoploch ještě více a jsou složitější.



Obr. 1.61: Na horním obrázku je znázorněna situace pro slabé pole ($v_A < c_s$). Rychlá vlna (F) reprezentuje „normální“ zvukovou vlnu. Na levém dolním obrázku je vyrovnán vliv magnetického a dynamického tlaku ($v_A = c_s$). Na pravém dolním obrázku dominuje magnetické pole ($v_A > c_s$).

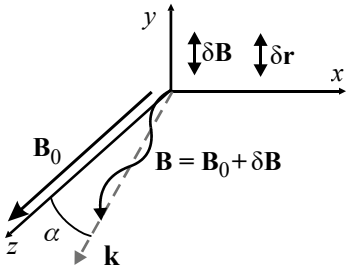
Směry vektorů v magnetoakustických vlnách

Chceme-li zkoumat směry jednotlivých poruch u konkrétního módu, musíme dosadit příslušnou disperzní relaci do původní linearizované soustavy (1.391). Volba souřadnicového systému zůstává zachována. Ze soustavy rovnic (1.391) nalezneme vzájemné

směry jednotlivých vektorů. Ukazuje se, že magnetoakustické vlny jsou směsicí podélných i příčných vln. Z rovnice $\partial\mathbf{B}/\partial t = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ plyne $-\omega\delta\mathbf{B} = \mathbf{k}\times(\delta\mathbf{u}\times\mathbf{B}_0)$, tj. porucha magnetického pole je vždy kolmá na směr šíření vlny. Povšimněme si nyní alespoň tří zajímavých situací.

Alfvénova vlna

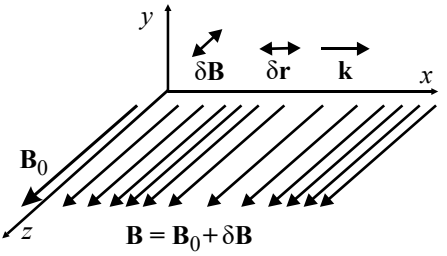
Alfvénův mód je nejjednodušší ze tří nalezených disperzních relací. Ze soustavy rovnic (1.391) snadno určíme, že plazma kmitá napříč magnetickému poli i směru šíření a jde tedy o vlnu příčnou. Porucha magnetického pole je kolmá na původní magnetické pole. To způsobuje rozvlnění magnetických indukčních čar podle obrázku. Je-li pole orientováno ve směru třetí osy, má disperzní relace tvar $\omega = v_A k \cos\alpha = v_A k_3$ a grupová rychlost je rovna $\mathbf{v} = (0, 0, v_A)$. Energie se v Alfvénově vlně šíří jen podél magnetického pole $\mathbf{B}_0$ a to Alfvénovou rychlostí.



Obr. 1.62: Směry vektorů v Alfvénově vlně

Kompresní vlna

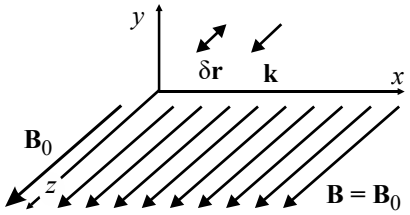
V rychlé magnetoakustické vlně je při směru šíření kolmém na magnetické pole ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) porucha pole rovnoběžná s polem původním. Tím vzniká vlna hustších a řidších oblastí magnetických indukčních čar, kterou nazýváme kompresní vlna. Plazma kmitá podél směru šíření vln $\mathbf{k}$ (kolmo na pole $\mathbf{B}_0$). Jde proto o *podélnou vlnu*. Vlnění je velmi podobné „obyčejnému“ zvuku. Roli pružného prostředí však přebírá nejenom hydrostatický tlak p, ale i magnetický tlak $p_M = B^2/2\mu_0$. Rychlost vln je dána oběma vlivy a má hodnotu $v_f = (c_s^2 + v_A^2)^{1/2}$. Kompresní vlna se někdy nazývá *kompresní Alfvénova podélná vlna*.



Obr. 1.63: Směry vektorů v kompresní vlně

Klasická zvuková vlna

Ve směru magnetického pole $\mathbf{B}_0$ se buď rychlá nebo pomalá vlna šíří rychlostí zvuku c_s (podle velikosti magnetického pole). Plazma kmitá podél směru šíření a není ovlivněno přítomností magnetického pole. Porucha magnetického pole je nulová.



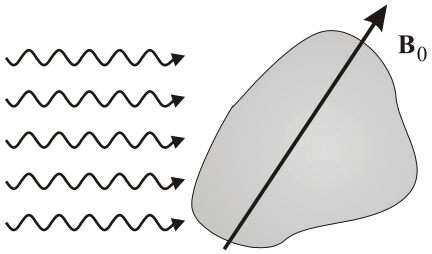
Obr. 1.64: Směry vektorů v klasické zvukové vlně

1.4.5 Elektromagnetické vlny

Elektromagnetické vlny šířící se plazmatem interagují především s málo hmotnými elektrony. Ionty nemohou vysokofrekvenční děje sledovat. V elektromagnetické vlně bude vždy platit

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \delta\mathbf{B} \perp \mathbf{k}\,, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad &\Rightarrow \qquad \delta\mathbf{B} \perp \delta\mathbf{E}\,. \end{aligned} \tag{1.399}$$

Konstantní magnetické pole $\mathbf{B}_0$ způsobuje anizotropii v šíření vln, vlny se šíří jinak podél pole $\mathbf{B}_0$ a jinak kolmo na pole $\mathbf{B}_0$. Podobně jako u krystalů nalezneme v plazmatu *řádnou* a *mimořádnou* vlnu, budeme-li vlny sledovat kolmo na směr pole. Tytéž vlny se ale podél pole budou jevit jako směsice *levotočivých* a *pravotočivých* módů. K projevům plazmatu patří také několik sekund trvající nízkofrekvenční záblesky vznikající jako doprovodné efekty blesků a šířící se podél zemského magnetického pole, tzv. *hvizdy*. Velmi zajímavá je také otázka reakce materiálu na vysokofrekvenční vlny a výpočet *permitivity plazmatu*.



Obr. 1.65: Při interakci elektromagnetické vlny s plazmatem lze vybudit celou řadu módů

Disperzní relace elektromagnetického komplexu

Za výchozí rovnice budeme volit rovnici kontinuity pro elektrony, pohybovou rovnici pro elektrony a Maxwellovy rovnice pro časový vývoj elektrického a magnetického pole. Maxwellův posuvný proud nelze vzhledem k frekvenci dějů zanedbat. Všude uvažujeme limitu $m_\mathrm{i} \to \infty$; $p \to 0$, tj. pro šíření elektromagnetických vln plazmatem zanedbáváme pohyb iontů a tepelné děje v plazmatu (omezíme se na chladné elektronové plazma):

$$\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial t} + \mathrm{div}(n_\mathrm{e}\mathbf{u}_\mathrm{e}) = 0\,,$$

$$m_\mathrm{e} n_\mathrm{e} \frac{\partial \mathbf{u}_\mathrm{e}}{\partial t} + m_\mathrm{e} n_\mathrm{e} (\mathbf{u}_\mathrm{e}\cdot\nabla)\mathbf{u}_\mathrm{e} = -en_\mathrm{e}\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}\,, \tag{1.400}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}\,; \qquad \mathbf{j} = -en_\mathrm{e}\mathbf{u}_\mathrm{e}\,.$$

Standardním postupem provedeme linearizaci

$$n_\mathrm{e} = n_0 + \delta n_\mathrm{e}\,, \qquad \mathbf{u}_\mathrm{e} = \delta\mathbf{u}_\mathrm{e}\,, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}\,, \qquad \mathbf{E} = \delta\mathbf{E} \tag{1.401}$$

a Fourierovu transformaci soustavy (1.400). Perturbace koncentrace se nikde nevyskytuje, a proto je možné rovnici kontinuity vynechat. Za proudovou hustotu všude dosadíme z poslední rovnice:

$$\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\,\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{E} - \mathrm{i}\,\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\,\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}\times\mathbf{B}_0\,,$$

$$\delta\mathbf{B} = \frac{1}{\omega}\,\mathbf{k}\times\delta\mathbf{E}\,, \tag{1.402}$$

$$\delta\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\,\mathbf{k}\times\delta\mathbf{B} + \mathrm{i}\,\frac{en_0}{\varepsilon_0\omega}\,\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}\,.$$

Zaveďme standardní označení

$$c^2 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\,; \qquad \omega_\mathrm{p}^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\varepsilon_0}\,; \qquad \omega_\mathrm{c} \equiv \frac{eB_0}{m_\mathrm{e}} \tag{1.403}$$

pro rychlost světla, plazmovou frekvenci a cyklotronní frekvenci a dále zaveďme jednotkový vektor ve směru magnetického pole

$$\mathbf{e}_B \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}\,. \tag{1.404}$$

V soustavě (1.402) budeme eliminovat proměnné, z druhé rovnice dosadíme za $\delta\mathbf{B}$ do ostatních rovnic:

$$\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\,\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{E} - \mathrm{i}\,\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\,\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}\times\mathbf{e}_B,$$

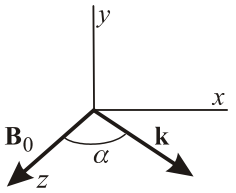
$$\delta\mathbf{E} = -\frac{c^2}{\omega^2}\,\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\delta\mathbf{E}) + \mathrm{i}\,\frac{en_0}{\varepsilon_0\omega}\,\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}\,.$$

V dalším kroku vypočteme z druhé rovnice poruchu rychlostního pole a dosadíme do rovnice první (vyjádříme dvojné vektorové součiny). Získáme tak samostatnou rovnici pro poruchu elektrického pole:

$$(\omega^2-\omega_\mathrm{p}^2-c^2k^2)\,\delta\mathbf{E}+\mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}(\omega^2-c^2k^2)(\delta\mathbf{E}\times\mathbf{e}_B)+$$

$$+c^2(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{E})\mathbf{k}+\mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}c^2(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{E})(\mathbf{k}\times\mathbf{e}_B)=0\,.$$

Souřadnicový systém zvolíme stejně jako v minulé kapitole, tj. osa z bude mířit ve směru pole $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ a vektor $\mathbf{k}$ bude v rovině (x, y), tj. $\mathbf{k} = (k \sin\alpha, 0, k\cos\alpha)$:



Obr. 1.66: Volba souřadnicového systému

Rovnice pro poruchu elektrického pole získá v této souřadnicové soustavě tvar

$$\mathbf{M}_\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}=0\,; \tag{1.405}$$

$$\mathbf{M}_\mathrm{E}=\begin{pmatrix} \omega^2-\omega_\mathrm{p}^2-c^2k^2\cos^2\alpha, & \mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}(\omega^2-c^2k^2), & c^2k^2\cos\alpha\sin\alpha, \\ -\mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}(\omega^2-c^2k^2\cos^2\alpha), & \omega^2-\omega_\mathrm{p}^2-c^2k^2, & -\mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}c^2k^2\cos\alpha\sin\alpha, \\ c^2k^2\cos\alpha\sin\alpha, & 0, & \omega^2-\omega_\mathrm{p}^2-c^2k^2\sin^2\alpha. \end{pmatrix}.$$

Pro netriviální řešení musí být determinant matice $\mathbf{M}_\mathrm{E}$ nulový, což vede na relaci

$$-\left[c^4k^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right]\cdot\left[\left(\omega^2-\omega_\mathrm{p}^2-c^2k^2\right)-\left(\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\right)^2\left(\omega^2-c^2k^2\right)\right]+$$

$$+\left[\omega^2-\omega_\mathrm{p}^2-c^2k^2\sin^2\alpha\right]\cdot\left[\begin{array}{l}\left(\omega^2-\omega_\mathrm{p}^2-c^2k^2\cos^2\alpha\right)\left(\omega^2-\omega_\mathrm{p}^2-c^2k^2\right)- \\ -\left(\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\right)^2\left(\omega^2-c^2k^2\right)\left(\omega^2-c^2k^2\cos^2\alpha\right)\end{array}\right]=0. \tag{1.406}$$

U elektromagnetických vln je velmi často důležitý index lomu daný vztahem

$$N=\frac{c}{v_\mathrm{f}}=\frac{c}{\omega/k}=\frac{ck}{\omega}\,. \tag{1.407}$$

Disperzní relaci bývá proto někdy výhodné řešit vzhledem k ck resp. ck/ω. Výsledný index lomu je potom funkcí úhlové frekvence

$$N(\omega)\equiv\frac{ck(\omega)}{\omega}\,. \tag{1.408}$$

Index lomu závisí samozřejmě i na koncentraci (prostřednictvím plazmové frekvence) a na magnetickém poli (prostřednictvím cyklotronní frekvence). Zajímavé jsou limitní situace, kdy index lomu je nekonečný (tzv. *rezonance*) nebo nulový (tzv. *cut-off*, mezní frekvence za kterou se vlna nešíří):

$$\text{rezonance:} \qquad N \to \infty \;\; (v_\mathrm{f} \to 0)\,; \tag{1.409}$$

$$\text{mezní frekvence:} \qquad N \to 0 \;\; (v_\mathrm{f} \to \infty)\,. \tag{1.410}$$

R a L vlny – vlny šířící se podél pole $\mathbf{B}_0$

Podél pole platí $\alpha = 0$ z disperzní relace zůstane relativně jednoduchý výraz

$$\left[\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2\right] \cdot \left[\left(\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2 - c^2k^2\right)^2 - \left(\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\right)^2 \left(\omega^2 - c^2k^2\right)^2\right] = 0\,. \tag{1.411}$$

Řešení vzhledem k ω má tři základní módy. První mód získáme vynulováním levé závorky, jde o plazmové oscilace elektronů na plazmové frekvenci. Tentokrát se ve výrazu neobjevila oprava na hmotnost iontů, protože je považujeme za nekonečně hmotné. Vynulováním pravé závorky získáme další dva módy, tzv. R a L vlny.

R a L vlna

Disperzní relaci získáme z rovnosti

$$\left(\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2 - c^2k^2\right)^2 - \left(\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\right)^2 \left(\omega^2 - c^2k^2\right)^2 = 0\,,$$

ze které nejprve vypočteme kombinaci $\omega^2 - c^2k^2$ (vyskytuje se v obou závorkách). Z ní poté určíme c^2k^2 (řešení disperzní relace vzhledem ke k je jednodušší):

► $$c^2k^2 = \omega^2 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{1 \mp \omega_\mathrm{c}/\omega}\,; \qquad \omega_\mathrm{c} = \left|\omega_\mathrm{ce}\right|. \tag{1.412}$$

Pro index lomu máme

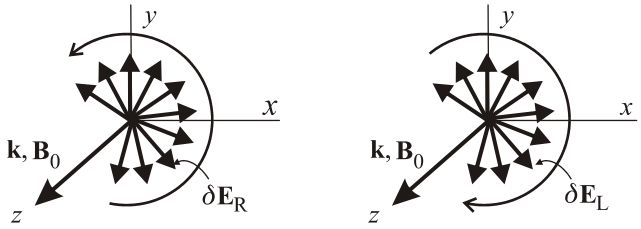
► $$N_\mathrm{R,L}^2 = 1 - \frac{(\omega_\mathrm{p}/\omega)^2}{1 \mp \omega_\mathrm{c}/\omega}\,. \tag{1.413}$$

Po dosazení c^2k^2 z disperzní relace (1.412) do linearizované rovnice (1.405) pro elektrické pole zjistíme, že

$$\delta E_y = \pm\,\mathrm{i}\,\delta E_x\,; \qquad \delta E_z = 0\,. \tag{1.414}$$

Imaginární jednotka znamená vzájemný fázový posun složek E_x a E_y o $\pi/2$, tj. (podobně jako u skládání dvou fázově posunutých kolmých kmitů). Jde o pravotočivě a levotočivě polarizovanou kruhovou vlnu, tzv. *R* vlnu (Right, horní znaménko) a *L* vlnu. (Left, dolní znaménko). Porucha elektrického pole je kolmá na základní magnetické pole, $\delta\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$. Pro vlnu $\delta E_x = A\,\exp(\mathrm{i}kz - \mathrm{i}\omega t)$ je reálná část časové složky rovna $\mathrm{Re}(\delta E_x) \sim A\cos\omega t$

a podle vztahu (1.414) je $\mathrm{Re}(\delta E_y) \sim \pm A \sin \omega t$. Směr stáčení proto odpovídá následujícímu obrázku:



Obr. 1.67: Pravotočivá a levotočivá vlna

Pravotočivost a levotočivost posuzujeme podle vektoru elektrického pole při pohledu ve směru magnetického pole B_0. Určeme nyní rezonanční a mezní frekvence:

Cyklotronní rezonance. Situace $N \to \infty$ nastane jen pro R vlnu při frekvenci

$$\omega = \omega_\mathrm{c} \,. \tag{1.415}$$

Vlna je absorbována na frekvenci Larmorova pohybu elektronů. L vlna rezonanci s elektrony nepodléhá (elektrický vektor se otáčí opačně, než je přirozený pohyb elektronů kolem magnetického pole).

Mezní frekvence (pravá a levá). Situace $N \to 0$ odpovídá odrazu vln, respektive hranici šíření vln a nastává pro tzv. levou a pravou mezní frekvenci:

$$\omega = \omega_{\mathrm{R,L}} \equiv \pm\frac{1}{2}\omega_\mathrm{c} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_\mathrm{c}^2 + 4\omega_\mathrm{p}^2} \,. \tag{1.416}$$

Při řešení kvadratické rovnice bylo použito před diskriminantem jen znaménko "+", aby výsledná frekvence byla kladná. Veškeré možné kombinace jsou zastoupeny a žádné řešení se neztratí. Možnosti šíření R a L vln jsou na obrázku 1.68.

O a X vlny – vlny šířící se kolmo na pole $\mathbf{B_0}$

Pro $\alpha = \pi/2$ z disperzní relace (1.406) máme

$$\left[\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2 - c^2k^2\right]\cdot\left[\left(\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2\right)\left(\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2 - c^2k^2\right) - \omega_\mathrm{c}^2\left(\omega^2 - c^2k^2\right)\right] = 0 \,. \tag{1.417}$$

Řádná vlna (O)

Anulováním první závorky získáme *řádnou vlnu* (O vlnu – Ordinary Wave), jejíž disperzní relace má obdobný tvar jako disperzní relace plazmových vln:

► $$\omega^2 = \omega_\mathrm{p}^2 + c^2k^2 \,. \tag{1.418}$$

Pro index lomu řádné vlny z této disperzní relace odvodíme

► $$N_\mathrm{O}^2 \equiv \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_\mathrm{p}}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\varepsilon_0\omega^2} \,. \tag{1.419}$$

Index lomu je frekvenčně závislý, různé frekvence elektromagnetické vlny se šíří různou rychlostí. Na vztahu (1.419) pro index lomu jsou založeny různé diagnostické metody pro plazma, například *šlírová fotografie*, při které se zobrazují příčné gradienty indexu lomu. V experimentální fyzice se často využívá zjednodušený vztah (platí pro $\omega \gg \omega_p$), který získáme jako první člen Taylorova rozvoje

$$N_O = \sqrt{1-\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega^2}} \simeq 1-\frac{n_0 e^2}{2 m_e \varepsilon_0 \omega^2}. \tag{1.420}$$

Rovnice (1.418) resp. (1.419) je základní disperzní relací pro šíření elektromagnetické vlny plazmatem. Úhlová frekvence a vlnový vektor budou reálná čísla pro $\omega > \omega_p$. Pro $\omega < \omega_p$ dochází k útlumu vlnění (komplexní k, ω), vlna se nešíří. Dochází k rozkmitání elektronů a absorpci vlnění. Oblasti šíření O vlny jsou patrné z obrázku 1.68.

Rezonance. Pro řádnou vlnu nedochází k žádným rezonancím ($N \to \infty$), index lomu je vždy konečný.

Mezní frekvence (plazmová). Mezní frekvencí ($N \to 0$) je plazmová frekvence elektronů ω_p.

- Šíření řádné vlny není ovlivněno magnetickým polem. Vlna se šíří, jakoby magnetické pole neexistovalo.
- Řádná vlna má kmitající poruchu elektrického pole rovnoběžnou s původním magnetickým polem, $\delta\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$.
- Pro frekvence vyšší než plazmová frekvence je plazma pro elektromagnetické vlny „průhledné“.

Mimořádná vlna (X)

Anulováním druhé závorky v (1.417) získáme disperzní relaci mimořádné vlny (*X* vlny – eXtraordinary Wave).

$$\left(\omega^2-\omega_p^2\right)\left(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2\right)-\omega_c^2\left(\omega^2-c^2k^2\right)=0. \tag{1.421}$$

Po vypočtení kombinace $\omega^2-c^2k^2$ určíme c^2k^2 a následně index lomu mimořádné vlny:

► $$N_X^2 = 1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{\omega^2-\omega_p^2}{\omega^2-\omega_p^2-\omega_c^2}, \quad \text{resp.}$$

► $$N_X^2 = 1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{1-(\omega_p/\omega)^2}{1-(\omega_p/\omega)^2-(\omega_c/\omega)^2}. \tag{1.422}$$

Standardní limitní situace nastávají pro

$$N \to \infty \ \ (v_\mathrm{f} \to 0) \qquad \Rightarrow$$

$$\omega = \omega_\mathrm{h} \equiv \sqrt{\omega_\mathrm{p}^2 + \omega_\mathrm{c}^2}\,. \tag{1.423}$$

$$N \to 0 \ \ (v_\mathrm{f} \to \infty) \qquad \Rightarrow$$

$$\omega = \omega_{\mathrm{L,R}} \equiv \mp\frac{1}{2}\omega_\mathrm{c} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_\mathrm{c}^2 + 4\omega_\mathrm{p}^2} \tag{1.424}$$

Odvození mezních frekvencí (1.424) přímým výpočtem je obtížné (vede na odmocnění výrazu, který již obsahuje odmocninu). Výhodnější je dokázat (přímým dosazením do obou stran rovnosti), že mezi indexy lomu platí velmi užitečný vztah (označte si například $\omega_\mathrm{p}/\omega = \mathscr{P}$, $\omega_\mathrm{c}/\omega = \mathscr{C}$)

$$N_\mathrm{X}^2 = \frac{2N_\mathrm{R}^2 N_\mathrm{L}^2}{N_\mathrm{R}^2 + N_\mathrm{L}^2}\ , \tag{1.425}$$

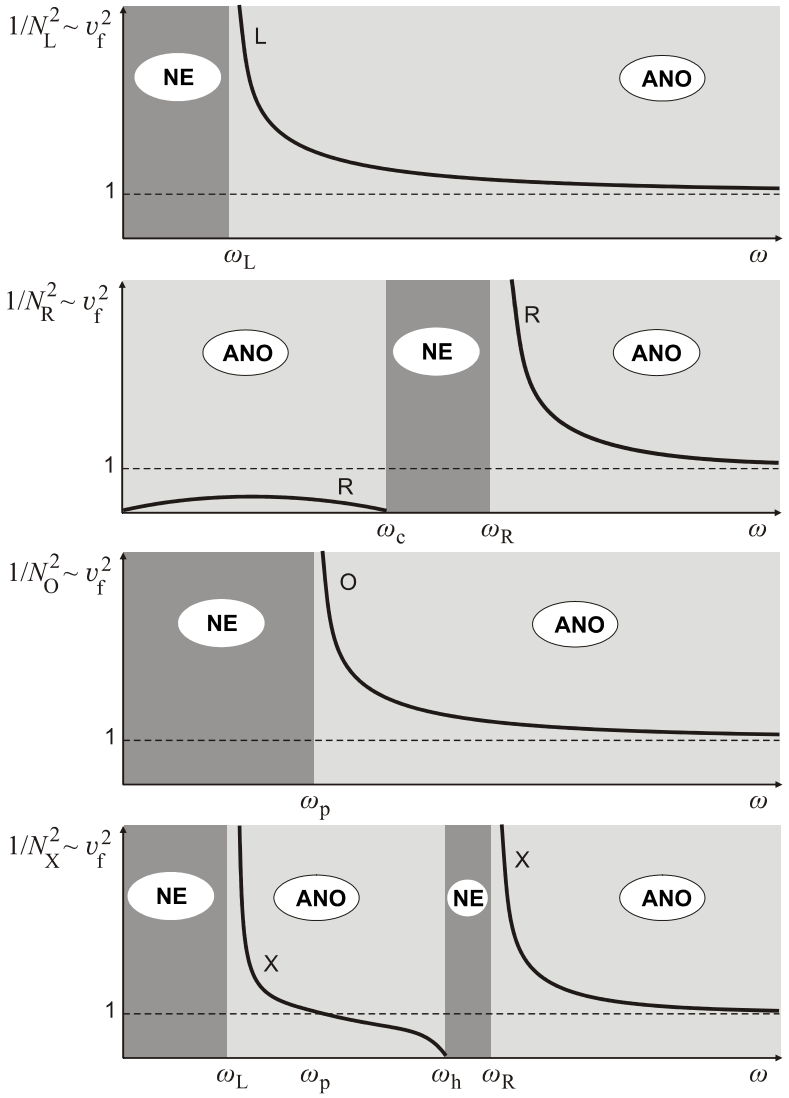
ze kterého plyne, že $N_\mathrm{X} = 0$ pro $N_\mathrm{R} = 0$ nebo $N_\mathrm{L} = 0$, tj. pro levou a pravou mezní frekvenci.

Horní hybridní rezonance. K rezonanci dochází pro tzv. horní hybridní frekvenci ω_h, při které vlna nepostupuje, porucha magnetického pole je nulová a jde o čistě elektrostatické oscilace elektronů na horní hybridní frekvenci ($v_\mathrm{g} = 0$). Jde o zobecnění plazmových oscilací, které jsou vyvolány elektromagnetickou vlnou. Vratnou silou je kromě Coulombovy síly ještě Lorentzova síla (Larmorova gyrace kolem $\mathbf{B}_0$), proto je frekvence vyšší než u čistých plazmových oscilací bez magnetického pole. Při nenulové teplotě elektronů (započtení tlakového členu) se tyto oscilace začnou šířit jako vlny.

Mezní frekvence (pravá a levá). Hranice šíření X vlny je dána mezní pravou a levou frekvencí $\omega_{\mathrm{R,L}}$. Mimořádná vlna se šíří v intervalu frekvencí $\omega \in (\omega_\mathrm{L}, \omega_\mathrm{h}) \cup (\omega_\mathrm{R}, \infty)$. Jednotlivé oblasti jsou patrné na obrázku 1.68.

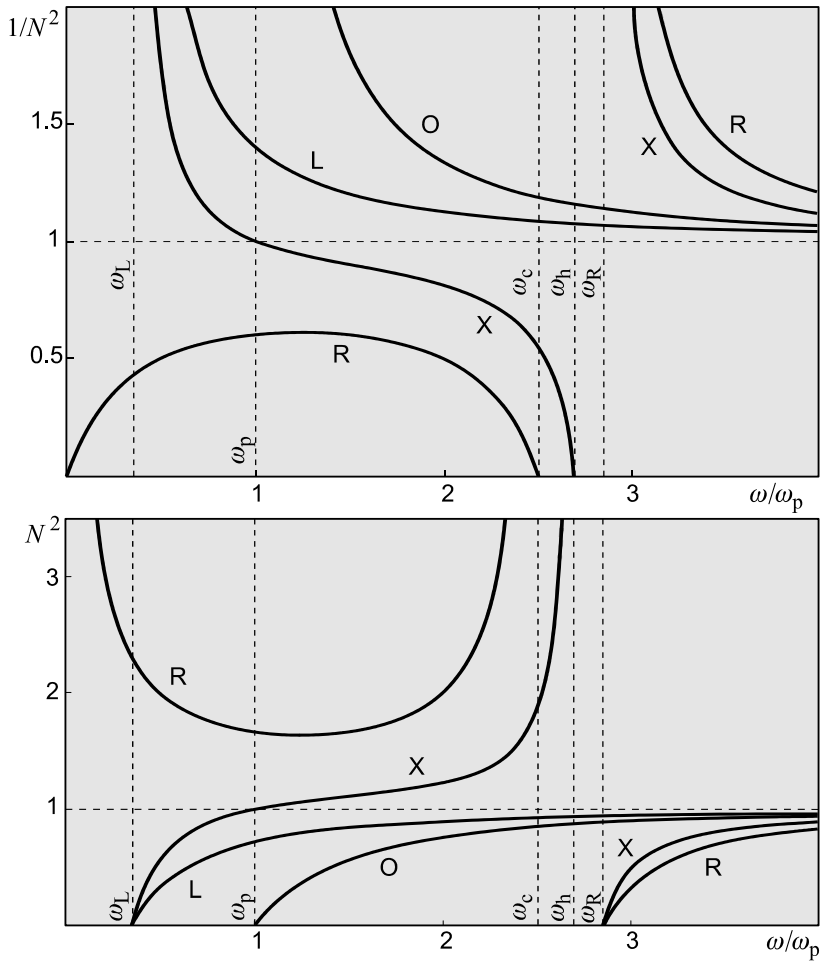
- X vlna se nešíří v oblastech $(0, \omega_\mathrm{L}) \cup (\omega_\mathrm{h}, \omega_\mathrm{R})$.
- X vlna je dominantně ovlivněna přítomností magnetického pole $\mathbf{B}_0$.
- V X vlně je kmitající porucha elektrického pole kolmá na původním magnetickým polem $\delta\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$, elektrony oscilují podél elektrického pole a současně gyrují kolem magnetických siločar.

V případě obecného směru vlny vzhledem k magnetickému poli $\mathbf{B}_0$ je šíření elektromagnetické vlny popsáno obecnou disperzní relací (1.406). Poznamenejme, že na rezonančních frekvencích je elektromagnetická vlna pohlcována, což vede k ohřevu plazmatu. Takový dodatečný ohřev elektromagnetickými vlnami vhodných frekvencí je využíván u různých zařízení, například u tokamaků. Vzhledem k tomu, že jsme dosud neuvažovali pohyb iontů, nevyšla nám cyklotronní iontová rezonance pro L vlnu a dolní hybridní rezonance pro X vlnu.



Obr. 1.68. Disperzní relace L, R, O a X vlny. Vlny se šíří jen ve světlých pásech.

Na následujícím obrázku jsou disperzní relace elektromagnetických vln pro chladné elektronové plazma. Křivky jsou vykresleny pro $\omega_c = 2{,}5\ \omega_p$. V grafech není uvažován ani vliv iontů ani vliv tlakového členu (tepelných dějů) – v takovém případě by byly disperzní relace složitější. Na horním grafu snadno detekujeme rezonance (daná větev disperzní relace se dotkne *x*-ové osy). Jediným módem elektromagnetické vlny, který se může šířit i při ultranízkých frekvencích je R vlna, jde o tzv. hvizdy. Z dolního grafu je patrné, že elektromagnetická vlna má v plazmatu index lomu větší než jedna pro R vlnu v oblasti $\omega < \omega_c$ a X vlnu v oblasti $\omega \in (\omega_p, \omega_h)$. Grafy byly vykresleny v programovém balíku Mathematica.



Obr. 1.69: Disperzní relace elektromagnetických vln pro chladné elektronové plazma

Stixovy koeficienty, CMA diagram

Obecná disperzní relace $\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0$ se buď řeší vzhledem k frekvenci ω, nebo vzhledem k vlnovému vektoru $\mathbf{k}$. Někdy je také užitečné z disperzní relace vypočítat index lomu $N \equiv ck/\omega$. Výhody jsou zjevné: index lomu je bezrozměrné číslo a disperzní relace v tomto tvaru nezávisí na volbě jednotek; rezonanční a mezní frekvence lze snadno najít jako limity $N \to \infty$, resp. $N \to 0$. Pro kvadráty indexů lomu se často používá označení

$$R \equiv N_{\mathrm{R}}^2 = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2/\omega^2}{1-\omega_{\mathrm{c}}/\omega}; \qquad L \equiv N_{\mathrm{L}}^2 = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2/\omega^2}{1+\omega_{\mathrm{c}}/\omega};$$

$$P \equiv N_{\mathrm{O}}^2 = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}; \qquad X \equiv N_{\mathrm{X}}^2 = \frac{2RL}{R+L}. \tag{1.426}$$

►

Poslední výraz je jen přepsáním vztahu (1.425). Pro více tekutin se sčítá přes všechny komponenty plazmatu (v našem případě bylo $\omega_{c\alpha} = \omega_{ce} = -eB/m$).

$$N_R^2 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2/\omega^2}{1+\omega_{c\alpha}/\omega};$$

$$N_L^2 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2/\omega^2}{1-\omega_{c\alpha}/\omega}; \tag{1.427}$$

$$N_O^2 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}.$$

Je také výhodné zavést symetrickou a antisymetrickou část kvadrátů indexů N_R a N_L:

$$\begin{aligned} S &\equiv \tfrac{1}{2}(R+L); \\ D &\equiv \tfrac{1}{2}(R-L). \end{aligned} \tag{1.428}$$

Veličinu X lze pak jednoduše zapsat ve tvaru

$$X = RL/S \ . \tag{1.429}$$

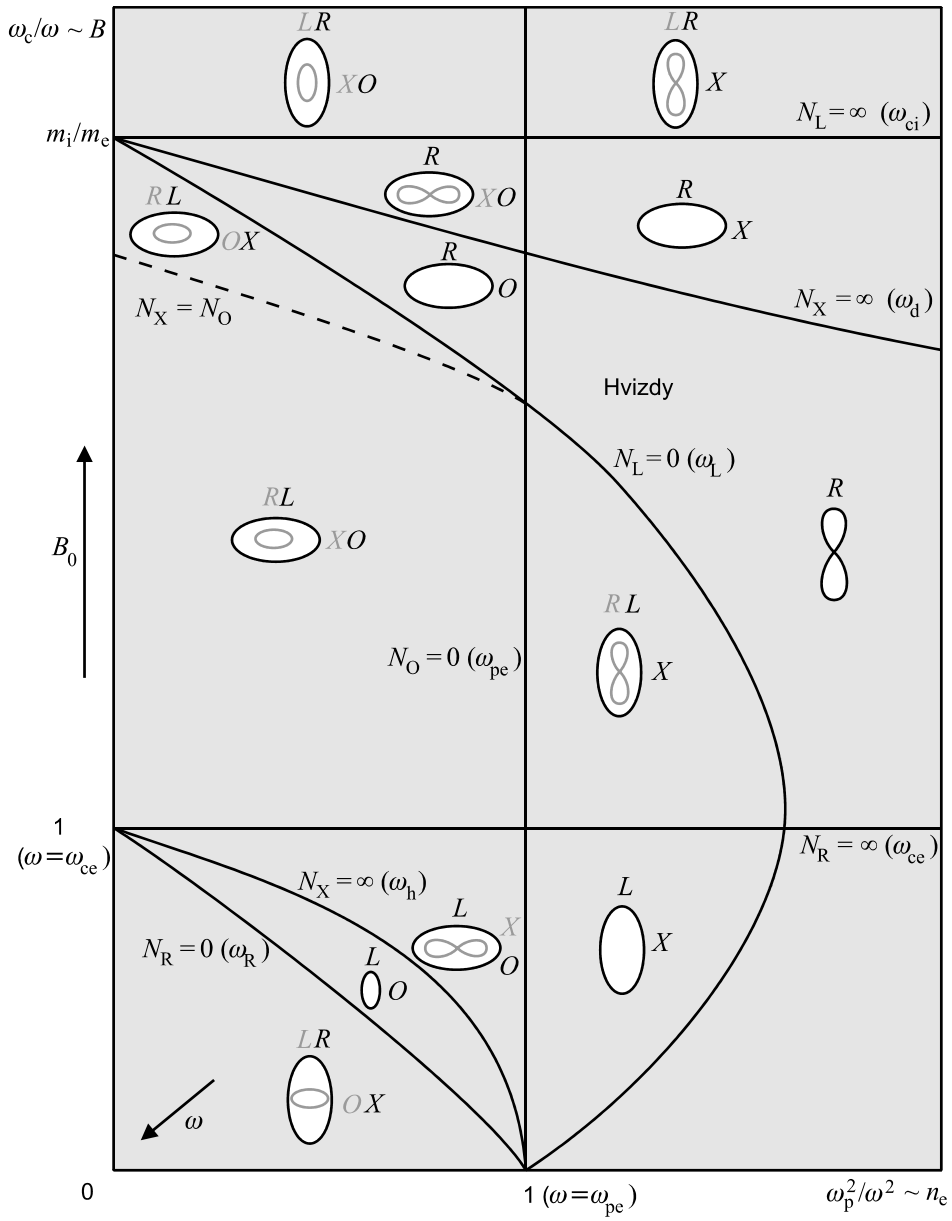
Koeficienty S, D, P a X se nazývají Stixovy koeficienty. Jsou pojmenované podle amerického plazmového fyzika Thomase Howarda Stixe (1924–2001), který je zavedl v roce 1962. Na grafech disperzních relací z předchozí kapitoly je na svislé ose vždy převrácená hodnota příslušného Stixova koeficientu, která je úměrná kvadrátu fázové rychlosti. Obecnou disperzní relaci (1.406) lze vyřešit vzhledem k indexu lomu

$$N^2 = 1 - \frac{\mathscr{P}^2}{1 - \frac{\frac{1}{2}\mathscr{C}^2 \sin^2\alpha}{1-\mathscr{P}^2} \pm \frac{1}{1-\mathscr{P}^2}\sqrt{\frac{1}{4}\mathscr{C}^4\sin^4\alpha + \mathscr{C}^2\left[1-\mathscr{P}^2\right]^2\cos^2\alpha}}; \tag{1.430}$$

$$\mathscr{C} \equiv \frac{\omega_c}{\omega}; \qquad \mathscr{P} \equiv \frac{\omega_p}{\omega}.$$

Získaná formule se nazývá Appletonova-Hartreeho formule podle anglického fyzika Edwarda Victora Appletona (1892–1965) a anglického matematika a fyzika Douglase Reynera Hartreeho (1897–1958). Nezávisle na nich odvodil vztah již dříve německý radioinženýr H. K. Lassen, jeho práce ale nebyla v anglicky mluvících zemích známa. Pro vlnu šířící se podél vnějšího magnetického pole se relace větví (znaménko ± ve jmenovateli) na R a L mód, pro vlnu šířící se kolmo na pole na O a X mód.

Pokud se budeme zabývat dvoutekutinovým plazmatem (tekutinou elektronů a iontů), získáme ještě dvě rezonanční frekvence: cyklotronní rezonanci iontů pro L vlnu (ionty mají Larmorovu rotaci ve vnějším magnetickém poli shodnou s otáčením poruchy elektrického pole v L vlně) a dolní hybridní rezonanci pro X vlnu. Tvary vlnoploch naleznete na následujícím diagramu (tzv. CMA diagramu) a všechny rezonanční a mezní frekvence jsou přehledně shrnuty v následujících tabulkách.



Obr. 1.70: CMA Diagram. Tvary vlnoploch (polární diagramy fázové rychlosti) se zakreslují do CMA diagramu, který je pojmenován podle počátečních písmen autorů (P. Clemmow & R. Mullaly – 1955, W. Allis – 1959). Na osách diagramu je magnetické pole a koncentrace plazmatu. Vlnoplochy se skokem mění na hranicích oblastí, kde je index lomu různých vln (*L*, *R*, *O*, *X*) nulový nebo nekonečný. Na obrázku je CMA diagram pro chladné dvoutekutinové plazma složené z elektronů a iontů. Povšimněte si, že v pravé polovině diagramu ($\omega < \omega_{pe}$) neexistuje řádná vlna (O). Oblast hvizdů, kde se šíří pouze R vlna (a žádná jiná), je omezena zleva podmínkou $\omega < \omega_{pe}$ a zdola podmínkou $\omega < \omega_{ce}$.

Rezonanční frekvence

$N_\mathrm{L} \to \infty$	cyklotronní iontová rezonance	$\omega = \omega_\mathrm{ci} = \dfrac{ZeB_0}{m_\mathrm{i}}$
$N_\mathrm{R} \to \infty$	cyklotronní elektronová rezonance	$\omega = \lvert\omega_\mathrm{ce}\rvert = \dfrac{eB_0}{m_\mathrm{e}}$
$N_\mathrm{O} \to \infty$	–	–
$N_\mathrm{X} \to \infty$	horní hybridní rezonance	$\omega = \omega_\mathrm{h} = \sqrt{\omega_\mathrm{pe}^2 + \omega_\mathrm{ce}^2}$
	dolní hybridní rezonance	$\omega = \omega_\mathrm{d} = \sqrt{\lvert\omega_\mathrm{ci}\omega_\mathrm{ce}\rvert}$

Mezní frekvence

$N_\mathrm{L} = 0$	mezní frekvence *L* vln	$\omega = \omega_\mathrm{L} = -\dfrac{1}{2}\lvert\omega_\mathrm{ce}\rvert + \dfrac{1}{2}\sqrt{\omega_\mathrm{ce}^2 + 4\omega_\mathrm{pe}^2}$
$N_\mathrm{R} = 0$	mezní frekvence *R* vln	$\omega = \omega_\mathrm{R} = +\dfrac{1}{2}\lvert\omega_\mathrm{ce}\rvert + \dfrac{1}{2}\sqrt{\omega_\mathrm{ce}^2 + 4\omega_\mathrm{pe}^2}$
$N_\mathrm{O} = 0$	mezní frekvence *O* vln	$\omega = \omega_\mathrm{pe} = \sqrt{\dfrac{n_\mathrm{e}e^2}{m_\mathrm{e}\varepsilon_0}}$
$N_\mathrm{X} = 0$	mezní frekvence *L* vln	$\omega = \omega_\mathrm{L} = -\dfrac{1}{2}\lvert\omega_\mathrm{ce}\rvert + \dfrac{1}{2}\sqrt{\omega_\mathrm{ce}^2 + 4\omega_\mathrm{pe}^2}$
	mezní frekvence *R* vln	$\omega = \omega_\mathrm{R} = +\dfrac{1}{2}\lvert\omega_\mathrm{ce}\rvert + \dfrac{1}{2}\sqrt{\omega_\mathrm{ce}^2 + 4\omega_\mathrm{pe}^2}$

Tabulky rezonančních a mezních frekvencí (předpokládáme $\omega_\mathrm{ce} \gg \omega_\mathrm{ci}$, $\omega_\mathrm{pe} \gg \omega_\mathrm{pi}$)

Faradayova rotace

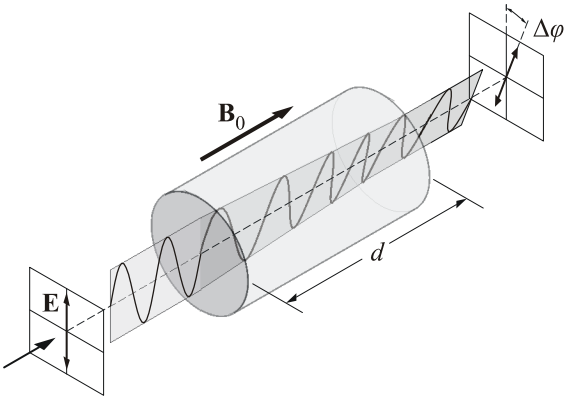
Uvažujme lineárně polarizovanou vlnu šířící se chladným plazmatem ve směru magnetického pole. Lineárně polarizovanou vlnu můžeme vytvořit složením pravotočivé a levotočivé vlny se stejnou amplitudou. V geometrii používané v této kapitole (magnetické pole míří v ose z) pro kruhově polarizované vlny máme:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\mathrm{R} &= E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\mathrm{R}z-\omega t)}(\mathbf{e}_x + \mathrm{i}\,\mathbf{e}_y)\,; \\ \mathbf{E}_\mathrm{L} &= E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\mathrm{L}z-\omega t)}(\mathbf{e}_x - \mathrm{i}\,\mathbf{e}_y)\,. \end{aligned} \tag{1.431}$$

Složku E_y jsme zapsali ve shodě se vztahem (1.414) (zkuste si oddělit E_x a E_y). Nyní budeme zkoumat pohyb lineárně polarizované vlny ve směru pole. Každou lineárně polarizovanou vlnu můžeme zapsat jako superpozici kruhově polarizovaných vln:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_\mathrm{L} + \mathbf{E}_\mathrm{R}\right) = \frac{E_0}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mathrm{L}z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mathrm{R}z}\right)\mathbf{e}_x - \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mathrm{L}z} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mathrm{R}z}\right)\mathbf{e}_y\right]. \tag{1.432}$$

Pokud by oba vlnové vektory k_R, k_L byly stejné, y-ové složky se vyruší a zůstane lineárně polarizovaná vlna v rovině (zx). V plazmatu se ovšem vlnový vektor levotočivé a pravotočivé vlny nepatrně liší, což vede ke stáčení polarizace elektromagnetické vlny. Tento jev se nazývá *Faradayova rotace* a byl objeven významným anglickým fyzikem a chemikem Michaelem Faradayem (1791–1867) v roce 1845.



Obr. 1.71: Faradayova rotace

Pro vlnové vektory podle (1.412) máme

$$k_{R,L} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2/\omega^2}{1\mp\omega_c/\omega}}\,.$$

V limitě vysokých frekvencí $\omega \gg \omega_c, \omega_p$ lze psát

$$k_{R,L} = \frac{\omega}{c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2/\omega^2}{(1\mp\omega_c/\omega)}+\cdots\right) \approx \frac{\omega}{c}\left(1-\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\mp\frac{\omega_p^2\omega_c}{2\omega^3}+\cdots\right),$$

neboli

$$\begin{aligned} k_{R,L} &= k \mp \Delta k\,; \\ k &\equiv \frac{k_L+k_R}{2} \approx \frac{\omega}{c}\left(1-\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right); \\ \Delta k &\equiv \frac{k_L-k_R}{2} \approx \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\omega_c}{c}\,. \end{aligned} \qquad (1.433)$$

Po dosazení (1.433) do (1.432) máme

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_R+\mathbf{E}_L\right) = \frac{E_0}{2}\,e^{i(kz-\omega t)}\left[\left(e^{+i\Delta k z}+e^{-i\Delta k z}\right)\mathbf{e}_x - i\left(e^{+i\Delta k z}-e^{-i\Delta k z}\right)\mathbf{e}_y\right],$$

neboli

$$\mathbf{E} = E_0\,e^{i(kz-\omega t)}\left[\cos(\Delta k z)\,\mathbf{e}_x + \sin(\Delta k z)\,\mathbf{e}_y\right].$$

Je zřejmé, že odlišnost obou vektorů bude způsobovat stočení polarizační roviny na jednotku vzdálenosti dz

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = \Delta k \,.$$

Po integraci máme pro stočení na celkové vzdálenosti d

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{e^3}{2\varepsilon_0 c m_\mathrm{e}^2}\frac{1}{\omega^2}\int_0^d n_\mathrm{e}(z)B_0(z)\,\mathrm{d}z \,. \tag{1.434}$$

Pro konstantní koncentraci i pole máme jednoduchý vztah

► $$\Delta\varphi = \frac{e^3}{2\varepsilon_0 c m_\mathrm{e}^2}\frac{1}{\omega^2} n_\mathrm{e} B_0 d \,. \tag{1.435}$$

V astronomii jsou typickým zdrojem radiových emisí s vysoce polarizovaným světlem pulzary objevené v roce 1967. Z měření změny úhlu polarizace pulzaru se známou frekvencí a rovinou polarizace lze určit integrál ze součinu koncentrace elektronů a podélného galaktického magnetického pole podél úsečky spojující pulzar a Zemi.

Obdobný jev také probíhá v průhledných dielektrikách (včetně kapalných) v silném magnetickém poli. V diamagnetickém materiálu platí experimentální vztah

► $$\Delta\varphi = \mathscr{V} B_0 d \,, \tag{1.436}$$

kde $\mathscr{V}$ je tzv. Verdetova konstanta, jejíž hodnota závisí na konkrétním materiálu. Kladná hodnota znamená stáčení proti směru hodinových ručiček (při pohledu podél magnetického pole), záporná ve směru hodinových ručiček. Krystaly terbium galiového granátu (TGG) využívaného jako optický izolátor mají Verdetovu konstantu s hodnotou až $\mathscr{V} \sim -40$ rad T^{-1}m^{-1}.

Hvizdy (whistlers)

Hvizdy vznikají jako doprovodné efekty blesků v dolních vrstvách atmosféry a vyskytují se také v magnetosférickém plazmatu. Jde o elektromagnetické vlny s frekvencemi v rozsahu 300 Hz až 30 kHz, jejichž energie se šíří přibližně ve směru indukčních čar zemského magnetického pole. Hvizdy byly objeveny německým fyzikem H. Barkhausenem v roce 1919 a podrobně popsány až britsko-francouzským fyzikem a elektroinženýrem Llewelynem Robertem Owenem Storeyem v roce 1953. Jde o modifikaci R vln s nenulovým úhlem mezi směrem magnetického pole Země a šíření. Disperzní relace hvizdů je obdobná relaci R vln a získáme ji z Appletonovy-Hatreeho formule (1.430) pro malé úhly (sin $\alpha \approx 0$):

$$N^2 = 1 - \frac{(\omega_\mathrm{p}/\omega)^2}{1-(\omega_\mathrm{c}/\omega)\cos\alpha}\,; \qquad N \equiv \frac{ck}{\omega}\,. \tag{1.437}$$

Pro většinu hvizdů je frekvence vln podstatně nižší než cyklotronní frekvence ($\omega \ll \omega_\mathrm{c}$) a lze použít jednodušší aproximaci (zanedbáme jednotku ve jmenovateli):

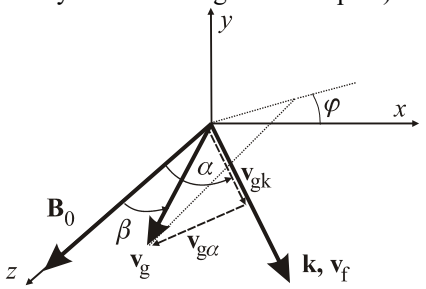
$$\omega^2 = c^2k^2 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2\,\omega}{\omega_\mathrm{c}\cos\alpha}\,. \tag{1.438}$$

Pro velmi nízké frekvence lze zanedbat i kvadrát frekvence na levé straně a získat ještě jednodušší aproximaci pro nízkofrekvenční hvizdy:

$$\omega(k,\alpha) \cong \frac{c^2 k^2}{\omega_\mathrm{p}^2}\,\omega_\mathrm{c}\,\cos\alpha\ . \tag{1.439}$$

Fázová a grupová rychlost

Určeme nyní fázovou a grupovou rychlost (úhel α je odklon **k** vektoru od magnetického pole, úhel β odklon grupové rychlosti od magnetického pole):



Pro fázovou rychlost máme

$$\mathbf{v}_\mathrm{f} = v_\mathrm{f}\mathbf{e}_k\ ;$$

$$v_\mathrm{f} \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{c^2 k}{\omega_\mathrm{p}^2}\,\omega_\mathrm{c}\cos\alpha\,. \tag{1.440}$$

Složky grupové rychlosti určíme ze vztahu pro gradient v **k** prostoru ve sférických souřadnicích

$$\mathbf{v}_\mathrm{g} = \frac{\partial\omega}{\partial k}\mathbf{e}_k + \frac{1}{k}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{k\sin\alpha}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\,. \tag{1.441}$$

Po derivování máme pro jednotlivé složky

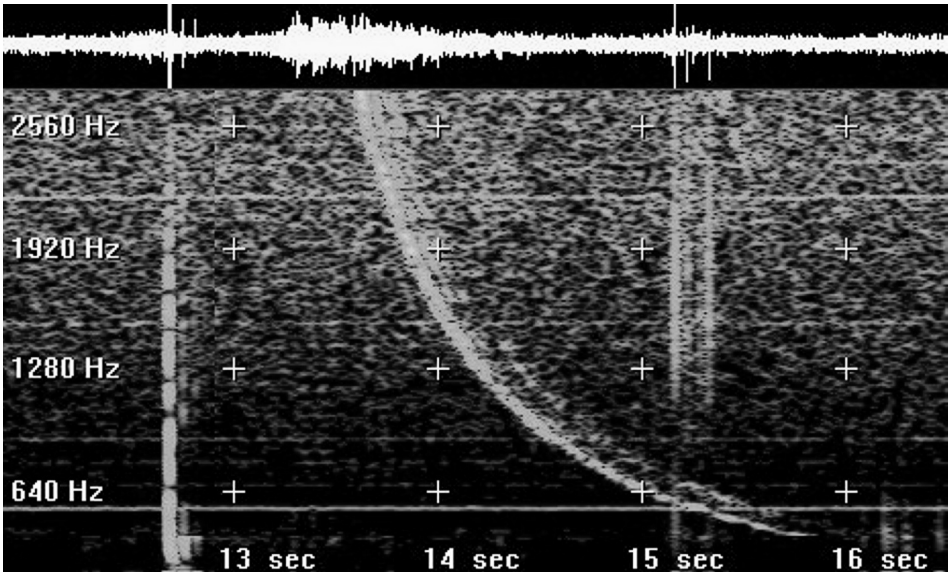
$$\begin{aligned} v_{\mathrm{g}k} &= 2\frac{c^2 k}{\omega_\mathrm{p}^2}\,\omega_\mathrm{c}\cos\alpha\,,\\ v_{\mathrm{g}\alpha} &= -\frac{c^2 k}{\omega_\mathrm{p}^2}\,\omega_\mathrm{c}\sin\alpha\,,\\ v_{\mathrm{g}\varphi} &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.442}$$

I z rozkladu na obrázku je patrné, že složka α míří proti směru rostoucího úhlu α a je záporná. Tato složka je mnohem menší než složka ve směru **k**, která je zcela dominantní. Z poslední rovnice (1.442) je zřejmé, že $\mathbf{v}_\mathrm{g}$ leží v rovině ($\mathbf{e}_z$, **k**).

Nalezněme nyní rychlost šíření energie v závislosti na frekvenci. Do vztahů (1.442) dosadíme za vlnový vektor z disperzní relace (1.439):

► $$v_{\mathrm{g}k} = \frac{2c}{\omega_\mathrm{p}}\sqrt{\omega_\mathrm{c}\cos\alpha}\;\omega^{1/2}\ ; \qquad v_{\mathrm{g}\alpha} = -\frac{c}{\omega_\mathrm{p}}\sqrt{\frac{\omega_\mathrm{c}}{\cos\alpha}}\sin\alpha\;\omega^{1/2}. \tag{1.443}$$

Obě složky jsou úměrné $\omega^{1/2}$. Vzhledem k malému úhlu šíření je $v_{g\alpha} << v_{gk}$. Hvizd se od místa úderu blesku šíří podél magnetické indukční čáry zemského pole. Vyšší frekvence se šíří vyšší rychlostí a proto k pozorovateli dolétnou dříve. Hvizd trvá řádově sekundy a postupně k místu pozorování přicházejí nižší a nižší frekvence. Vzhledem k nízké frekvenci je možné zaznamenané změny elektrického pole přivést na reproduktor a slyšet jako zvukovou nahrávku. Hvizdy se podél indukčních čar zemského pole šíří od pólu k pólu a několikrát se i odrazí. Za bouřkové činnosti jsou pravděpodobně zodpovědné za urychlení elektronů na relativistické rychlosti.



Obr. 1.73: Typický hvizd s postupně se snižující frekvencí. NASA, 2001.

Maximální odklon šíření hvizdů od magnetického pole

Pro odklon grupové rychlosti od fázové je z obrázku zřejmé, že platí

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = -\frac{v_{g\alpha}}{v_{gk}}\,,\ \text{tj.}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Druhá relace plyne dosazením z (1.442) do první relace. Z této rovnice určíme úhel β odklonu grupové rychlosti od magnetického pole

$$2\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow .$$

$$2\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin 2\alpha}{3+\cos 2\alpha}\right).$$

Najděme nyní maximální hodnotu β (stačí položit derivaci argumentu podle α rovnou nule, vyjde $\cos 2\alpha = -1/3$, $\sin 2\alpha = (8/9)^{1/2}$

► $$\beta_{\max} = \mathrm{arctg}\left[2^{-3/2}\right] = 19°29'. \qquad (1.444)$$

Maximální odklon šíření energie nízkofrekvenčních hvizdů od směru magnetického pole Země je 19°29' (tzv. Storeyův úhel). Směr šíření vln je při tomto největším odklonu $\alpha = 54°44'$ ($2\alpha = 109°28'$).

Tenzor permitivity pro elektromagnetické vlny v plazmatu

Při vysokých frekvencích a v přítomnosti magnetického pole se plazma chová zcela jinak než běžné vodivé prostředí. Proto určíme tenzor permitivity pro náš případ chladného elektronového plazmatu s polem $\mathbf{B}_0$. Určeme nyní indukci elektrického pole v plazmatu reagujícím na vysokofrekvenční vlnu:

$$\delta\mathbf{D} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{P} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} - en_\mathrm{e}\delta\mathbf{x}_\mathrm{e} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \frac{en_\mathrm{e}}{\mathrm{i}\omega}\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}. \qquad (1.445)$$

K převodu poloh na rychlostní pole jsme využili integraci příslušné rovinné Fourierovy komponenty. Perturbaci rychlostního pole musíme určit z pohybové rovnice pro elektrony, nejlépe v perturbovaném tvaru po Fourierově transformaci (1.402):

$$\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{E} - \mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}\times\mathbf{B}_0.$$

Rovnici zapíšeme ve složkách a vypočteme poruchu rychlostního pole elektronů:

$$\delta u_k = -\frac{\mathrm{i}e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta E_k - \frac{\mathrm{i}e}{m_\mathrm{e}\omega}\varepsilon_{klm}\delta u_l B_{0m} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\delta_{kl} + \mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\varepsilon_{klm}\beta_m\right)\delta u_l = -\frac{\mathrm{i}e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta E_k.$$

Rovnice pro rychlost má jednoduchý maticový tvar

$$\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{u} = -\frac{\mathrm{i}e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{E}; \qquad (1.446)$$

$$\mathbf{M} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}\omega_\mathrm{c}/\omega & 0 \\ -\mathrm{i}\omega_\mathrm{c}/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

K určení poruchy rychlostního pole postačí najít inverzní matici k matici **M**. Porucha indukce elektrického pole potom podle (1.445) bude

$$\delta\mathbf{D} \;=\; \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \frac{en_\mathrm{e}}{i\omega}\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} \;=\; \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \frac{en_\mathrm{e}}{i\omega}\left(-\frac{\mathrm{i}\,e}{m_\mathrm{e}\omega}\mathbf{M}^{-1}\delta\mathbf{E}\right) = \varepsilon_0\left(\mathbf{1} - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}\right)\delta\mathbf{E}\,.$$

Hledaný tenzor permitivity proto je

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0\left(\mathbf{1} - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}\right). \tag{1.447}$$

Posledním krokem tedy bude určení inverzní matice k matici **M**. Můžeme použít jakoukoli standardní metodu – výpočet přes subdeterminanty, Gaussovu eliminaci nebo spektrální rozvoj (matice je hermitovská a má reálná vlastní čísla 1, 1– ω_c/ω, 1+ ω_c/ω). Výsledek je

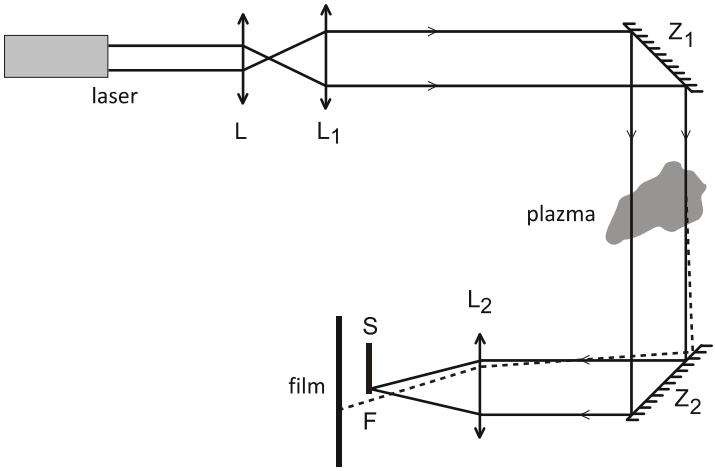
$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{1-(\omega_\mathrm{c}/\omega)^2}\begin{pmatrix} 1\,; & -\mathrm{i}(\omega_\mathrm{c}/\omega); & 0\,; \\ \mathrm{i}(\omega_\mathrm{c}/\omega); & 1\,; & 0\,; \\ 0\,; & 0\,; & 1-(\omega_\mathrm{c}/\omega)^2 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení do (1.447) získáme tenzor permitivity

► $$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0\begin{pmatrix} S & -\mathrm{i}\,D & 0 \\ \mathrm{i}\,D & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \tag{1.448}$$

Tenzor permitivity je zjevně anizotropní, má nediagonální prvky a prvek na diagonále odpovídající směru magnetického pole (P) je jiný než ve zbývajících směrech (S). Tenzor permitivity je navíc komplexní. Násobení imaginární jednotkou způsobí fázový posuv mezi vektorem $\delta\mathbf{D}$ obsahujícím reakci plazmatu a původním vektorem $\delta\mathbf{E}$.

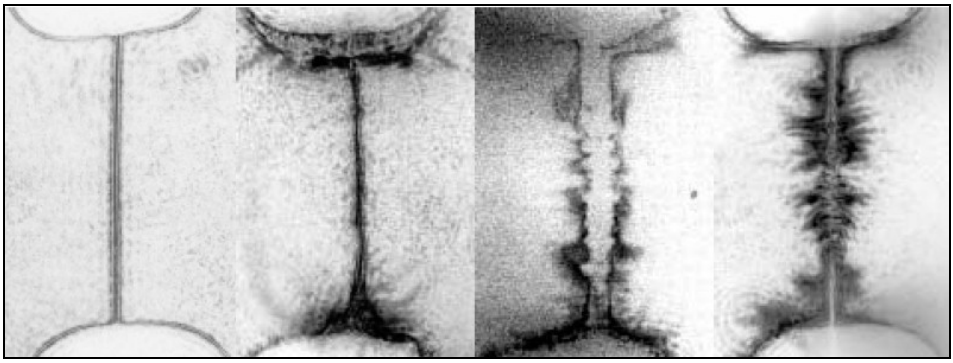
Šlírová fotografie



Obr. 1.74: Princip šlírové fotografie

Šíření elektromagnetických vln v plazmatu se také využívá v různých zobrazovacích technikách. K nejznámějším patří tzv. *šlírová fotografie*. Jako zdroj světla slouží kolimovaný (nerozbíhavý) svazek, například z laseru. Laserový paprsek se plazmatem šíří zpravidla jako řádná vlna s indexem lomu (1.420). Příčný gradient koncentrace plazmatu způsobí změnu indexu lomu a odklon paprsku od původního směru. Břit S v ohnisku F (viz obrázek 1.74) zacloní neodkloněné paprsky a na stínítku (filmu, CCD) se zobrazí jen paprsky ovlivněné plazmatem. Vzniklá fotografie je obrazem příčných gradientů koncentrace plazmatu. Slovo šlírová pochází z německého *schliere* (šmouha). Postup lze využít u jakýchkoli nehomogenit vedoucích ke změně indexu lomu, tedy i pro fotografování turbulencí a rázových vln v obyčejných plynech.

Na šlírové fotografii nevidíme samotné plazma, ale oblasti s nenulovým gradientem indexu lomu (neboli koncentrace). Zvýrazněny jsou tak hranice veškerých struktur v plazmatu.



Obr. 1.75: Šlírová fotografie explodujícího vlákna (uhlík, průměr 120 μm, délka 7 mm). Expozice 3 ns. Pavel Kubeš a kol., FEL ČVUT.

1.5 Nestability v plazmatu

1.5.1 Neomezené chladné plazma

Základní pojmy

Ve většině případů získáme disperzní relaci v implicitním tvaru

$$\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \tag{1.449}$$

a zajímá nás, kdy je řešení $\omega(\mathbf{k})$ nebo $\mathbf{k}(\omega)$ komplexní, neboť komplexní úhlová frekvence či vlnový vektor znamenají, že kmitavá exponenciála $\exp[\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)]$ se stane rostoucí nebo tlumenou exponenciálou v čase nebo v některé prostorové proměnné.

Řešení v ω (vývoj v čase)

Předpokládejme, že je vlnový vektor reálný a že jsme disperzní relaci vyřešili vzhledem k úhlové frekvenci ω:

$$\omega = \omega(\mathbf{k})\,; \qquad \text{resp.} \quad \omega = \omega_1(\mathbf{k}) + \mathrm{i}\,\omega_2(\mathbf{k})\,. \tag{1.450}$$

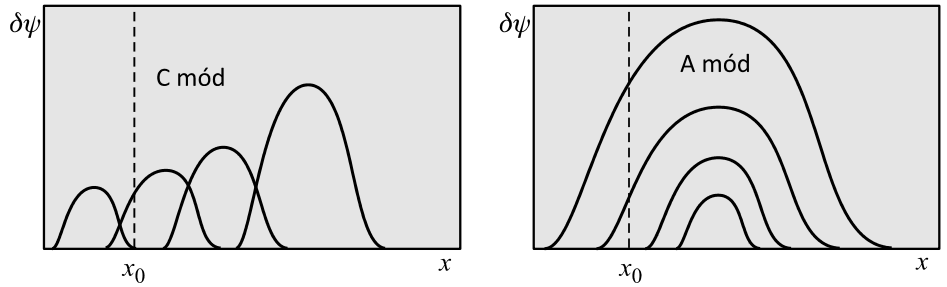
Řešení v čase může být podle znaménka ω_2 rostoucí nebo tlumené. V rostoucím případě můžeme zavést *koeficient nárůstu nestability* typu $\exp[\gamma t]$ vztahem

$$\gamma \equiv \omega_2 = \mathrm{Im}(\omega)\,. \tag{1.451}$$

Vzhledem k vývoji v čase rozlišujeme dva módy nestabilit:

C nestabilní mód (konvektivní mód): V kterémkoli fixním bodě bude po určité době amplituda poruchy s časem klesat. Nestabilita „odtekla“ do jiného místa.

A nestabilní mód (absolutně nestabilní mód): V kterémkoli fixním bodě bude amplituda poruchy narůstat.



Obr. 1.76: Různé způsoby narůstání nestability

Rozdělení na A mód a C mód může (ale nemusí) záviset na volbě souřadnicového systému. Nacházíme-li se například u C módu v souřadnicové soustavě spojené s pohybující se poruchou, bude se pozorovateli jevit jako A mód.

Řešení v *k* (vývoj v prostoru)

Předpokládejme, že úhlová frekvence je reálná a že jsme disperzní relaci vyřešili vzhledem k vlnovému vektoru **k**:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega)\,; \qquad \text{resp.} \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1(\omega) + \mathrm{i}\,\mathbf{k}_2(\omega)\,. \tag{1.452}$$

Řešení poruchy může být v některém směru od zdroje exponenciálně klesající – potom hovoříme o *evanescentním módu*, nebo rostoucí – potom hovoříme o *zesilujícím módu*.

Nesvázané módy disperzní relace

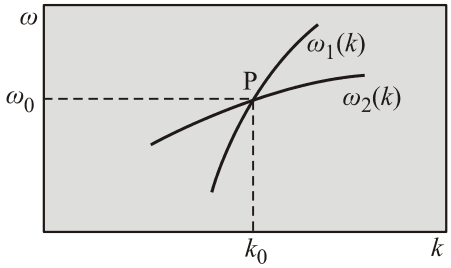
Někdy je možné disperzní relaci rozložit na jednotlivé módy

$$\left[\omega - \omega_1(\mathbf{k})\right]\cdot\left[\omega - \omega_2(\mathbf{k})\right]\cdots\left[\omega - \omega_N(\mathbf{k})\right] = 0\,. \tag{1.453}$$

Každá z hranatých závorek může být vynulována zvlášť a přispěje jednou větví k celkové disperzní relaci. Předpokládejme pro jednoduchost jen existenci dvou větví v jediné prostorové dimenzi

$$\left[\omega - \omega_1(k)\right]\cdot\left[\omega - \omega_2(k)\right] = 0\,, \tag{1.454}$$

které se protínají v bodě P = (ω_0, k_0):



Obr. 1.77: Dva módy disperzní relace

V okolí místa křížení můžeme oba módy nahradit přímkovou závislostí

$$\begin{aligned}\omega_1(k) &\cong \omega_0 + \frac{\partial\omega_1}{\partial k}(k - k_0) = \omega_0 + v_1(k - k_0)\,;\\ \omega_2(k) &\cong \omega_0 + \frac{\partial\omega_2}{\partial k}(k - k_0) = \omega_0 + v_2(k - k_0)\,,\end{aligned} \tag{1.455}$$

kde v_1, v_2 jsou grupové rychlosti obou větví disperzní relace.

Svázané módy disperzní relace

Pokud se v plazmatu objeví dvě vlny se stejnou vlnovou délkou a frekvencí (obecně způsobené různými mechanizmy), budou se samozřejmě vzájemně ovlivňovat a energie jednoho módu bude pumpována do druhého a naopak. Nejjednodušší způsob, jak oba módy provázat, je zavést nenulovou konstantu na pravé straně disperzní relace (1.454):

$$\left[\omega - \omega_1(k)\right]\cdot\left[\omega - \omega_2(k)\right] = \varepsilon\,. \tag{1.456}$$

Pro malé ε v porovnání s členy na levé straně hovoříme o tzv. *slabé vazbě*. Konstantu ε nazýváme *vazebnou konstantou*. Ukažme, že její nenulová hodnota zcela změní portrét křížení obou větví disperzní relace. Využijme v rovnici (1.456) lineární aproximace (1.455):

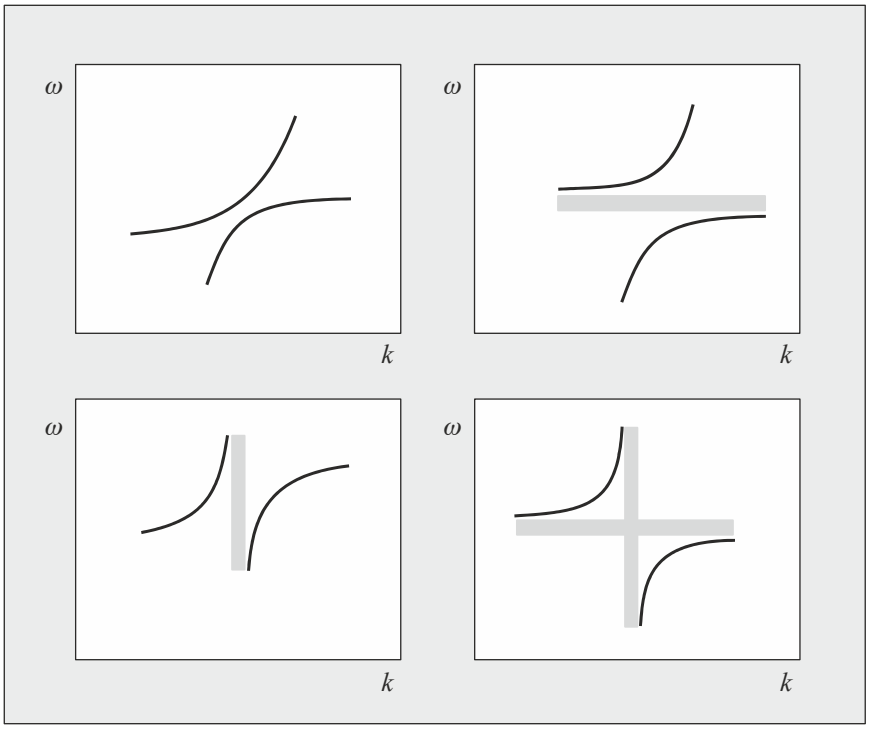
$$\left[\omega-\omega_0-v_1(k-k_0)\right]\cdot\left[\omega-\omega_0-v_2(k-k_0)\right]=\varepsilon\,.$$

Díky vazebné konstantě již nemůžeme každý z módů položit roven nule, konstantou jsou vzájemně svázané. V lineární aproximaci je poslední rovnice kvadratickou rovnicí jak pro ω, tak pro k. Vyřešme rovnici v obou proměnných. Pro ω najdeme kombinaci $\xi\equiv\omega-\omega_0$, v diskriminantu využijeme, že $(v_1+v_2)^2-4v_1v_2=(v_1-v_2)^2$. Analogicky postupujeme pro vlnový vektor. Oba výsledky jsou:

$$\omega=\omega_0+\frac{1}{2}\left[(v_1+v_2)(k-k_0)\pm\sqrt{(v_1-v_2)^2(k-k_0)^2+4\varepsilon}\right];\qquad(1.457)$$

$$k=k_0+\frac{1}{2v_1v_2}\left[(v_1+v_2)(\omega-\omega_0)\pm\sqrt{(v_1-v_2)^2(\omega-\omega_0)^2+4\varepsilon v_1v_2}\right].\qquad(1.458)$$

Je zřejmé, že již nebude docházet ke křížení módů a pro některá znaménka veličin ε a v_1v_2 nebudou existovat reálná řešení pro úhlovou frekvenci nebo pro vlnový vektor. Celkem mohou nastat čtyři případy znázorněné na obrázku. Oblasti neexistujících reálných řešení jsou označeny šedými pásy.



Obr. 1.78: Disperzní relace při vazbě módů

Vícesvazková nestabilita

Uvažujme plazma složené z různě se pohybujících tekutin několika druhů α. Při odvození disperzní relace využijeme následujících předpokladů:

1. *Plazma je neomezené*. V plazmatu nejsou žádné hranice. Na nich by se řešení muselo navazovat a takovou situací se budeme zabývat v příští kapitole.
2. *Plazma je chladné*. V pohybové rovnici nebudeme uvažovat gradient tlaku. Tento předpoklad zjednoduší výpočet a umožní zjistit podmínky nástupu nestability. Při jejím následném rozvoji dochází k termalizaci plazmatu a předpoklad již neplatí. K popisu horkého plazmatu je nejvhodnější využít statistické metody, viz kapitola 1.6.
3. *Nestabilita je řízena elektrickým polem*. Zanedbáváme magnetické pole, což podle rovnice rot $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ vede na $\mathbf{k}\times\delta\mathbf{E} = 0$, tedy poruchy jsou způsobené podélným elektrickým polem. V nepřítomnosti vzájemného přelévání poruch magnetického a elektrického pole není nutné uvažovat rovnici pro časový vývoj elektrického pole, postačí jen počáteční podmínka div $\mathbf{D} = \rho_Q$.

Za výchozí soustavu rovnic budeme uvažovat

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = 0\,,$$

$$m_\alpha n_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + m_\alpha n_\alpha \left(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla\right)\mathbf{u}_\alpha = Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E}\,, \tag{1.459}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_\alpha n_\alpha Q_\alpha\,.$$

Poruchy budeme předpokládat ve tvaru

$$n_\alpha = n_{0\alpha} + \delta n_\alpha\,; \qquad \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}_{0\alpha} + \delta\mathbf{u}_\alpha; \qquad \mathbf{E} = \delta\mathbf{E}\,.$$

Po provedení standardní perturbační analýzy a Fourierovy transformace získáme v prvním řádu linearizovanou soustavu pro poruchy:

$$\left(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{0\alpha}\right)\delta n_\alpha - n_{0\alpha}\left(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u}_\alpha\right) = 0\,,$$

$$\mathrm{i}\left(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{0\alpha}\right)\delta\mathbf{u}_\alpha = -\frac{Q_\alpha}{m_\alpha}\delta\mathbf{E}\,,$$

$$\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_\alpha Q_\alpha \delta n_\alpha\,.$$

Z prostřední rovnice vypočteme poruchu $\delta\mathbf{u}_\alpha$ a dosadíme do první rovnice. Z ní určíme poruchu δn_α a dosadíme do poslední rovnice. Výsledkem je disperzní relace

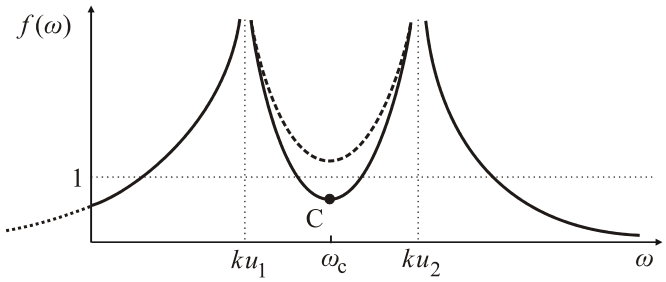
► $$\sum_\alpha \frac{\omega_{\mathrm{p}\alpha}^2}{\left(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{0\alpha}\right)^2} = 1\,; \qquad \omega_{\mathrm{p}\alpha}^2 \equiv \frac{n_{0\alpha}Q_\alpha^2}{m_\alpha\varepsilon_0}\,. \tag{1.460}$$

Uvažujme jednoduchou situaci dvou svazků pohybujících se v jednom směru (*Bunemanova nestabilita*; pro různé směry svazků v rychlostním prostoru hovoříme o *Weibelově*

nestabilitě). V témže směru se objeví porucha elektrického pole a vlna šířící se podél tohoto pole. Disperzní relace bude

$$f(\omega)=\frac{\omega_{\mathrm{p1}}^2}{(\omega-ku_1)^2}+\frac{\omega_{\mathrm{p2}}^2}{(\omega-ku_2)^2}=1. \tag{1.461}$$

U neporušených rychlostí jsme pro jednoduchost vynechali index 0. Funkci $f(\omega)$ na levé straně můžeme snadno vykreslit do grafu:



Obr. 1.79: Levá strana disperzní relace

Řešení nalezneme jako průsečíky funkce $f(\omega)$ s jednotkou, $f(\omega)=1$. Charakter řešení bude záviset na poloze bodu C, kde má funkce f lokální minimum. Pokud bude $y_{\mathrm{C}}<1$, existují čtyři reálná řešení. V případě, že $y_{\mathrm{C}}>1$ (čárkovaná křivka), budou existovat jen dvě reálná řešení. Vzhledem k tomu, že disperzní relace je čtvrtého řádu v ω, budou v tomto případě dvě řešení komplexní a rozvine se nestabilita. Kritický bod nalezneme z podmínky

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\omega}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{\mathrm{C}}=\frac{u_2\omega_{\mathrm{p1}}^{2/3}+u_1\omega_{\mathrm{p2}}^{2/3}}{\omega_{\mathrm{p1}}^{2/3}+\omega_{\mathrm{p2}}^{2/3}}k\,. \tag{1.462}$$

Podmínku stability odvodíme ze vztahu $f(\omega_{\mathrm{C}})\le 1$:

► $$k^2 \;\ge\; \frac{\left[\omega_{\mathrm{p1}}^{2/3}+\omega_{\mathrm{p2}}^{2/3}\right]^3}{(u_2-u_1)^2}\,. \tag{1.463}$$

Vztah odvodil Oscar Buneman (1914–1993) v roce 1959. Pro dostatečně krátké vlnové délky je v chladném plazmatu situace stabilní. Nestabilita vznikne vždy pro dosti dlouhé vlnové délky. V horkém plazmatu tomu tak ale nemusí být, situaci je vhodnější analyzovat metodami statistické fyziky, viz kapitola 1.6. Svazky se budou brzdit, ale nikoli srážkami. Vznikne silné elektrické pole s vlnovou délkou $\lambda>\lambda_{\mathrm{c}}$, které způsobí jejich postupnou termalizaci.

Dva symetrické svazky

Uvažujme nyní dva stejné svazky pohybující se symetricky proti sobě. Disperzní relace má jednoduchý jednodimenzionální tvar

► $$\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{(\omega-ku_0)^2}+\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{(\omega+ku_0)^2}=1. \tag{1.464}$$

Po roznásobení získáme bikvadratickou rovnici pro úhlovou frekvenci, která má řešení

$$\omega^2 = \omega_\mathrm{p}^2 + k^2 u_0^2 \pm \omega_\mathrm{p}\sqrt{\omega_\mathrm{p}^2 + 4k^2 u_0^2}\ . \tag{1.465}$$

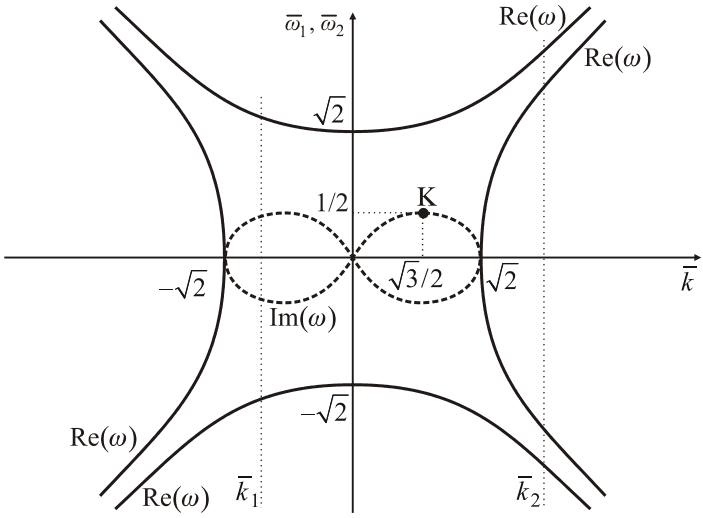
Je zřejmé, že po prvním odmocnění jsou všechna řešení reálná. Oblast reálných řešení (a tedy stability) získáme buď přímo z relace (1.465) nebo z již připravené Bunemanovy podmínky *stability* (1.463):

$$k^2 \geq 2\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{u_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{k} \equiv \frac{k u_0}{\omega_\mathrm{p}} \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right\rangle \cup \left\langle +\sqrt{2}, \infty\right) . \tag{1.466}$$

Disperzní relaci (1.465) je výhodné přepsat do bezrozměrného tvaru

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^2 &= 1 + \bar{k}^2 \pm \sqrt{1 + 4\bar{k}^2}\ ; \\ \bar{\omega} &\equiv \frac{\omega}{\omega_\mathrm{p}}\ ; \qquad \bar{k} \equiv \frac{k u_0}{\omega_\mathrm{p}}\ . \end{aligned} \tag{1.467}$$

Po odmocnění dostaneme čtyři řešení, obecně komplexní ve tvaru $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \mathrm{i}\bar{\omega}_2$. Reálné i imaginární části disperzní relace jsou vykresleny v následujícím grafu:



Obr. 1.80: Reálné a imaginární větve disperzní relace

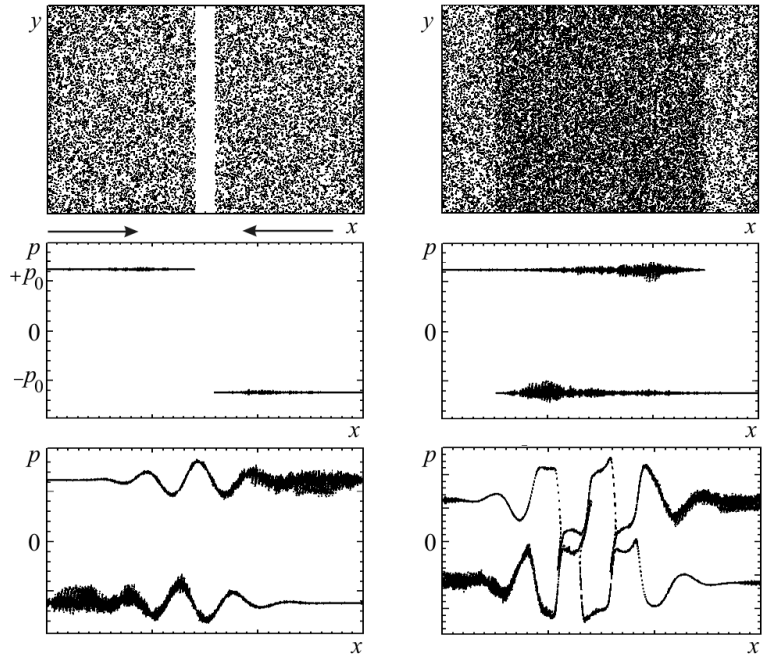
Povšimněte si, že pro velké vlnové vektory (na obrázku k_2) jsou 4 reálná řešení v ω. Pro malé vlnové vektory (bezrozměrné) z intervalu $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ existují jen dvě reálná řešení a dvě komplexní (na obrázku vektor k_1). Pro nestabilitu je klíčový bod K na obrázku, ve kterém je největší hodnota imaginární části úhlové frekvence a tím i největší koeficient nárůstu nestability. Jeho vodorovnou souřadnici nalezneme jako lokální maximum disperzní relace (1.467). Derivaci pravé strany položíme rovnu nule a získáme hodnotu $\bar{k} = \sqrt{3}/2$. V tomto bodě dává disperzní relace (1.467) čtyři řešení

$$\bar{\omega} = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}; \qquad \bar{\omega} = \pm\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

Z hlediska nestability nás zajímá imaginární řešení, souřadnice bodu K jsou ($\sqrt{3}/2$, 1/2) a koeficient maximálního růstu nestability

$$\gamma = \mathrm{Im}(\omega) = \mathrm{Im}(\bar{\omega})\,\omega_\mathrm{p} = \frac{\omega_\mathrm{p}}{2}. \tag{1.468}$$

Pro dva různé svazky lze provést obdobný rozbor, jen disperzní relace již nebude symetrická jako v našem případě. Nástup dvousvazkové nestability znamená rozvoj vln a následnou termalizaci obou svazků. Jejich energie se tedy nakonec promění v energii tepelnou. Tam již ale naše přiblížení chladného plazmatu neplatí. Nestabilita dvou symetrických svazků se často používá k testování různých simulačních algoritmů pro pohyby nabitých částic. Elegantní analytické řešení a oblast nástupu nestability je v numerické simulaci snadno ověřitelná.



Obr. 1.81: Numerická simulace dvousvazkové nestability (O. Hastings, E. Liang, Rice University) pro dva svazky prolínajících se pozitronů. Na spodních čtyřech obrázcích je časový vývoj nestability ve fázovém prostoru (x, p). Na počátku byla hybnost svazků $\pm p_0$.

Nestabilita typu svazek-plazma

Věnujme nyní pozornost svazku, který interaguje s klidným plazmatem. Z obecné disperzní relace (1.460) máme

$$\frac{\omega_\mathrm{pb}^2}{(\omega - k u_\mathrm{b})^2} + \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2} = 1, \tag{1.469}$$

kde jsme označili ω_p plazmovou frekvenci plazmatu, ω_pb plazmovou frekvenci svazku a u_b jeho rychlost. Podmínku stability (1.463) snadno přepíšeme do tvaru

$$k \geq \frac{\omega_\mathrm{p}}{u_\mathrm{b}}\left[1+\left(\frac{\omega_\mathrm{pb}}{\omega_\mathrm{p}}\right)^{2/3}\right]^{3/2} . \tag{1.470}$$

V limitě slabého svazku (tak se nazývá situace, kdy platí $\omega_\mathrm{pb} \ll \omega_\mathrm{p}$, například pro ionty pronikající do elektronového plazmatu) přibližně platí $k \geq \omega_\mathrm{p}/u_\mathrm{b}$. Disperzní relaci (1.469) lze snadno přepsat do jiného elegantního tvaru:

$$\left[\omega^2-\omega_\mathrm{p}^2\right]\cdot\left[(\omega-ku_\mathrm{b})^2-\omega_\mathrm{pb}^2\right]=\omega_\mathrm{pb}^2\omega_\mathrm{p}^2 . \tag{1.471}$$

Jde o tvar analogický (1.456), v našem případě jsou čtyři vlnové módy svázané vazbou. Někdy se hovoří o *čtyřvlnné interakci*. Limita slabého svazku je současně limitou slabé vazby, tj. malé konstanty na pravé straně.

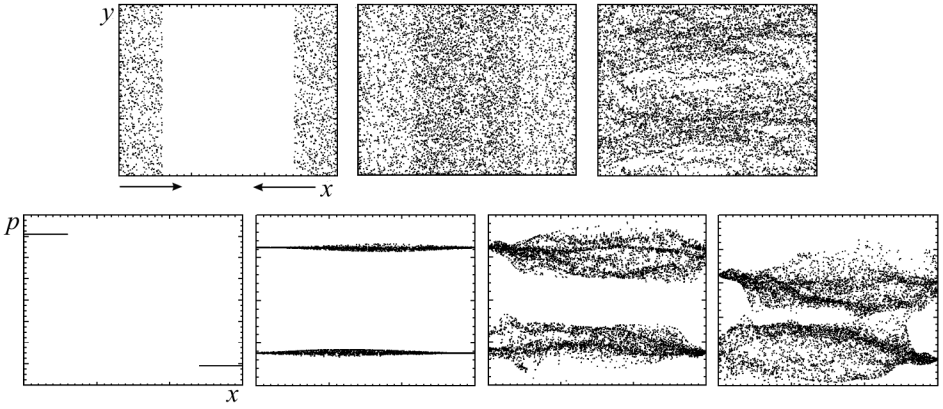
Nestabilita typu svazek-plazma je velmi častá. Objevuje se ve slunečním větru poblíž rázových vln planet, při prostupu různých plazmových výtrysků okolním prostředím. Výsledkem je termalizace svazku. Té lze využívat i při ohřevu plazmatu pomocí svazků nabitých částic.

Další nestability (driftová, Weibelova)

Další situace, kdy se v plazmatu pohybují dvě tekutiny opačným směrem, nastává v přítomnosti driftových pohybů. U většiny driftů se elektrony a ionty pohybují opačným směrem, a proto může dojít k rozvoji nestability. Podmínka *stability* (1.463) dává

$$k \geq \frac{\omega_\mathrm{pe}}{|v_\mathrm{Di}-v_\mathrm{De}|}\left[1+\left(\frac{\omega_\mathrm{pi}}{\omega_\mathrm{pe}}\right)^{2/3}\right]^{3/2} . \tag{1.472}$$

Nestability vzniklé vzájemným prolínáním dvou nebo více prostředí s různými rychlostmi obecně nazýváme vícesvazkové nestability. Není to název příliš šťastný, neboť ne vždy musí jít o svazky. V 1D případě (rychlosti všech prostředí, elektrické pole a vlnový vektor mají stejný směr) hovoříme o *Bunemanově nestabilitě*. V případě anizotropie v rychlostním prostoru (2D a 3D případ) hovoříme o tzv. *Weibelově nestabilitě* (Erich S. Weibel, 1959).



Obr. 1.82: Weibelova nestabilita. První řádek je v (*x*, *y*) prostoru, druhý v (*x*, *p*) prostoru. O. P. Hastings, E. Liang, Rice University, PIC simulace, 2007.

1.5.2 Plazma s hranicí a výměnné nestability

Základní vztahy, vektor posunutí

Budeme uvažovat plazmatické prostředí s rozhraním v rámci ideální magnetohydrodynamiky. Tedy zanedbáme difúzní člen, posuvný proud (vysokofrekvenční děje) a samozřejmě předpokládáme, že vlnová délka dějů je větší než střední volná dráha všech částic (jinak by nebylo možné použít teorii kontinua).

Přítomnost hranice značně komplikuje řešení úlohy. Musíme nalézt řešení na obou stranách hranice a tato řešení na hranici navázat. Tato úloha vyžaduje znalost průběhu perturbované hranice a budeme se jí zabývat v této kapitole. Další komplikací je, že základní neperturbované řešení již zpravidla není konstantní, ale závisí na některých proměnných, například na vzdálenosti od hranice. V takových proměnných již není možné hledat periodickou poruchu jako dříve. Uvažujme nejprve rovinné rozhraní a poté válcové rozhraní (plazmové vlákno).

Rovinné rozhraní

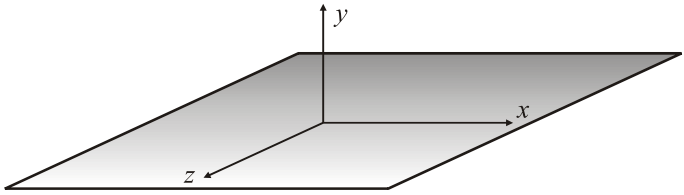
Předpokládejme rozhraní v rovině (xz). Klidové řešení může být funkcí vzdálenosti, tedy funkcí y. Perturbace klidového řešení proto bude mít tvar

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \psi_0(y) + \delta\psi\,; \qquad \delta\psi = \psi_1(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t}\,. \tag{1.473}$$

Porucha se nyní skládá ze dvou částí: neperiodické, kterou označujeme ψ_1 a periodické, která je obsažena v kmitavé exponenciále. Periodická část povede na algebraické vztahy jako dříve, neperiodická na diferenciální rovnice, které bude třeba řešit. Index 1 u neperiodické části označuje, že se nacházíme v prvním řádu poruchové teorie. V proměnných, kde to je možné, provedeme opět rozklad na parciální vlny, což povede na sadu pravidel pro příslušnou Fourierovu transformaci:

► $$\partial_t \to -\mathrm{i}\omega\,; \qquad \partial_x \to \mathrm{i}k_x\,; \qquad \partial_y \to \mathrm{d}/\mathrm{d}\,y\,; \qquad \partial_z \to \mathrm{i}k_z\,. \tag{1.474}$$

Jedinou změnou je tedy to, že v proměnné y, která nemůže být díky hranici periodická, derivace zůstane. Stane se však obyčejnou derivací, protože po aplikaci pravidel již ve výrazech žádná jiná proměnná než y nezůstane.



Obr. 1.83: Rovinné rozhraní dvou prostředí

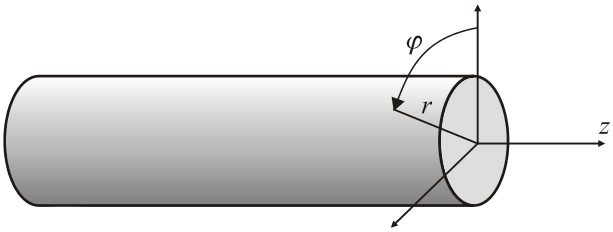
Válcové rozhraní

Předpokládejme nyní válcové rozhraní plazmového vlákna neboli pinče. Klidové řešení (například Bennettovo řešení) bude funkcí radiální vzdálenosti od osy vlákna. Perturbace klidového řešení proto bude mít ve válcových souřadnicích tvar

$$\psi(t,r,\varphi,z) = \psi_0(r) + \psi_1(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\varphi \varphi + \mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t}\,. \tag{1.475}$$

Porucha $\delta\psi$ se opět bude skládat z neperiodické části $\psi_1(r)$ a kmitavé exponenciály. Řešení musí splňovat periodicitu v polárním úhlu φ:

$$\psi(t,r,\varphi+2\pi,z)=\psi(t,r,\varphi,z)\,. \tag{1.476}$$



Obr. 1.84: Válcové rozhraní dvou prostředí

Tuto podmínku splníme, pokud platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\varphi\varphi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\varphi(\varphi+2\pi)} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k_\varphi}=1 \quad\Rightarrow\quad k_\varphi=m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

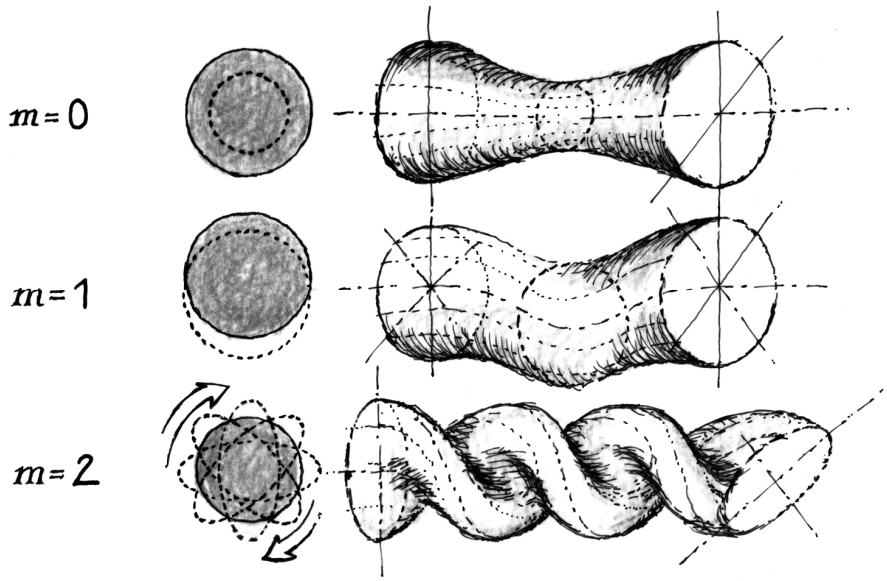
Číslo m nazýváme řád (mód) poruchy resp. nestability a výraz (1.475) získá tvar

$$\psi(t,r,\varphi,z)=\psi_0(r)+\psi_1(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi+\mathrm{i}k_z z-\mathrm{i}\omega t}\;;\qquad m=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{1.477}$$

Odpovídající pravidla pro rozklad do parciálních vln jsou

► $$\partial_t\to-\mathrm{i}\omega\,;\qquad \partial_r\to\mathrm{d}/\mathrm{d}\,r\,;\qquad \partial_\varphi\to\mathrm{i}m\,;\qquad \partial_z\to\mathrm{i}k_z\,. \tag{1.478}$$

Proměnná r je neperiodická a v rovnicích zůstane včetně svých derivací. První tři módy poruchy jsou znázorněny na následujícím obrázku



Obr. 1.85: První tři módy poruch

Poznámka 1: Pokud bychom ztotožnili levý a pravý okraj vlákna (jde o jednoduché přiblížení toroidální geometrie), musí platit $\psi(t, r, \varphi, z) = \psi(t, r, \varphi, z+L)$, kde L je délka vlákna, což vede na podmínku

$$k_z = \frac{2\pi}{L} n\,; \quad \delta\psi = \psi_1(r) \exp\left[\mathrm{i}\, m\varphi + \mathrm{i} \frac{2\pi}{L} nz - \mathrm{i}\, \omega t \right]; \quad n = 0, 1, 2\ldots \tag{1.479}$$

Poznámka 2: Obecná hranice vede na poruchu

$$\psi(t, \mathbf{q}_\mathrm{n}, \mathbf{q}_\mathrm{p},) = \psi_0(\mathbf{q}_\mathrm{n}) + \psi_1(\mathbf{q}_\mathrm{n})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}_\mathrm{p}\cdot\mathbf{k}_\mathrm{p} - \mathrm{i}\omega t}\,, \tag{1.480}$$

kde $\mathbf{q}_\mathrm{n}$ jsou neperiodické proměnné a $\mathbf{q}_\mathrm{p}$ periodické proměnné.

Vektor posunutí

U problému s hranicí nás většinou nezajímá rychlostní pole, ale vektor posunutí zvolené oblasti plazmatu definovaný vztahem

► $$\delta\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t} \delta\mathbf{u}(t', \mathbf{x})\, \mathrm{d}t'\,. \tag{1.481}$$

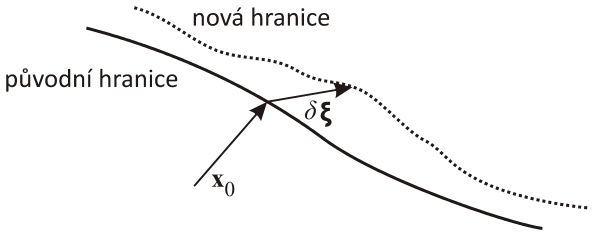
Opačná relace má tvar

$$\delta\mathbf{u} = \frac{\partial \delta\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\,. \tag{1.482}$$

V počátečním čase je vektor posunutí nulový. Tato vlastnost ale již neplatí pro jeho parciální Fourierovy komponenty, ze kterých se výsledný vektor složí. Opět budou mít periodickou ($\mathbf{q}_\mathrm{p}$) i neperiodickou ($\mathbf{q}_\mathrm{n}$) část:

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\xi}_\omega &= \boldsymbol{\xi}_{1\omega}(\mathbf{q}_\mathrm{n})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}_\mathrm{p}\cdot\mathbf{k}_\mathrm{p} - \mathrm{i}\omega t}\,; \\ \delta\boldsymbol{\xi} &= \int \delta\boldsymbol{\xi}_\omega\, \mathrm{d}\omega \end{aligned}\,. \tag{1.483}$$

U parciálních vln se index ω zpravidla píše jen tehdy, mohlo-li by dojít k záměně. Vektor posunutí vyjadřuje posunutí každého vnitřního elementu plazmatu v průběhu poruchy. Právě přes tento vektor bude definován i tvar nové, narušené hranice.



Obr. 1.86: K definici vektoru posunutí

Základní rovnice pro vektor posunutí

Vyjděme ze standardní soustavy ideální magnetohydrodynamiky pro jednosložkové plazma s polytropní stavovou rovnicí (1.222), k pohybové rovnici přidáme člen s tíhovým zrychlením:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})=0\,,\\ \rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}\;=\;-\boldsymbol{\nabla}p\;+\rho\,\mathbf{g}+\frac{\operatorname{rot}\mathbf{B}}{\mu_0}\times\mathbf{B}\,,\\ \frac{\partial p}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})p\;+\;\gamma p\operatorname{div}\mathbf{u}\;=\;0\,,\\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=\operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\,.\end{gathered}\tag{1.484}$$

Nyní provedeme linearizaci:

$$\rho=\rho_0(\mathbf{q}_\mathrm{n})+\delta\rho\,;\quad \mathbf{u}=\delta\mathbf{u}\,;\quad p=p_0(\mathbf{q}_\mathrm{n})+\delta p\,;\quad \mathbf{B}=\mathbf{B}_0(\mathbf{q}_\mathrm{n})+\delta\mathbf{B}\,.\tag{1.485}$$

Základní řešení je ovšem funkcí některých prostorových proměnných, proto již nebudeme moci přesouvat toto řešení před prostorové derivace a nebo pokládat jeho derivaci rovnou nule. Výsledkem linearizace bude soustava (vypisujeme jen členy 1. řádu)

$$\begin{gathered}\frac{\partial \delta\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_0\delta\mathbf{u})=0\,,\\ \rho_0\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial t}=\;-\boldsymbol{\nabla}\delta p+\mathbf{g}\delta\rho+\frac{\operatorname{rot}\delta\mathbf{B}}{\mu_0}\times\mathbf{B}_0+\frac{\operatorname{rot}\mathbf{B}_0}{\mu_0}\times\delta\mathbf{B}\,,\\ \frac{\partial \delta p}{\partial t}+(\delta\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})p_0\;+\;\gamma p_0\operatorname{div}\delta\mathbf{u}\;=\;0\,,\\ \frac{\partial \delta\mathbf{B}}{\partial t}=\operatorname{rot}(\delta\mathbf{u}\times\mathbf{B}_0)\,.\end{gathered}\tag{1.486}$$

V dalším kroku dosadíme za poruchu rychlostního pole $\delta\mathbf{u}=\partial\delta\boldsymbol{\xi}/\partial t$. Využijeme, že v linearizované soustavě jsou jediné časové závislosti v perturbovaných členech typu $\delta\psi$. Veličiny typu ψ_0 jsou jen prostorově závislé. S výjimkou druhé rovnice bude možné všechny integrovat v čase (od nuly do času t). Integrační konstanty v určitých integrálech nebudou, v dolní mezi jsou poruchy nulové:

$$\begin{gathered}\delta\rho+\operatorname{div}(\rho_0\delta\boldsymbol{\xi})=0\,,\\ \rho_0\frac{\partial^2\delta\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2}=-\boldsymbol{\nabla}\delta p+\mathbf{g}\delta\rho+\frac{\operatorname{rot}\delta\mathbf{B}}{\mu_0}\times\mathbf{B}_0+\frac{\operatorname{rot}\mathbf{B}_0}{\mu_0}\times\delta\mathbf{B}\,,\\ \delta p+(\delta\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})p_0\;+\;\gamma p_0\operatorname{div}\delta\boldsymbol{\xi}\;=\;0\,,\\ \delta\mathbf{B}\;=\operatorname{rot}(\delta\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0)\,.\end{gathered}\tag{1.487}$$

Druhá rovnice (pohybová rovnice) je rovnicí pro vektor posunutí. Z posledních dvou rovnic do ní dosadíme za δp a $\delta\mathbf{B}$, z první rovnice za $\delta\rho$. Výsledek je

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \nabla(\delta\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)p_0 \; + \; \nabla(\gamma p_0 \operatorname{div}\delta\boldsymbol{\xi}) \; - \mathbf{g}\operatorname{div}\left(\rho_0\delta\boldsymbol{\xi}\right) \; +$$

$$+ \; \frac{\operatorname{rot}\delta\mathbf{B}}{\mu_0}\times\mathbf{B}_0 + \frac{\operatorname{rot}\mathbf{B}_0}{\mu_0}\times\delta\mathbf{B}\,; \qquad \text{kde} \tag{1.488}$$

$$\delta\mathbf{B} \equiv \operatorname{rot}\left(\delta\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0\right).$$

Pravá strana je lineárním diferenciálním operátorem působícím na poruchu vektoru posunutí

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \hat{\mathcal{I}}\,\delta\boldsymbol{\xi}\,. \tag{1.489}$$

V celém odvození nebyl proveden Fourierův rozklad na parciální vlny. Budeme-li předpokládat časový průběh ve tvaru $\exp[-\mathrm{i}\omega t]$, máme

$$\hat{\mathcal{I}}\,\delta\boldsymbol{\xi} = -\rho_0\omega^2\,\delta\boldsymbol{\xi}\,. \tag{1.490}$$

Jde o problém vlastních hodnot operátoru $\hat{\mathcal{I}}$ vlastní číslo je funkcí úhlové frekvence. Na navazování řešení na hranici závisí, zda bude mít operátor diskrétní spektrum, a tím poruchy diskrétní módy s frekvencemi ω_n, a nebo bude mít spojité spektrum a frekvence poruch ω bude libovolná. Celkové řešení potom složíme obvyklým způsobem

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \sum_n \mathbf{a}_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}\,; \qquad \text{resp.} \quad \delta\boldsymbol{\xi} = \int_\omega \mathbf{a}(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{1.491}$$

Lze ukázat, že v ideální magnetohydrodynamice (nestlačitelná dokonale vodivá tekutina) je operátor $\hat{\mathcal{I}}$ hermitovský ve smyslu skalárního součinu

$$\langle\,\mathbf{f}\,|\,\mathbf{g}\,\rangle \equiv \int \mathbf{f}^*(\mathbf{x})\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} = \int f_l^*(\mathbf{x})\,g_l(\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,, \tag{1.492}$$

tedy působí v obou částech skalárního součinu stejně:

$$\langle\,\mathbf{f}\,|\,\hat{\mathcal{I}}\,\mathbf{g}\,\rangle = \langle\,\hat{\mathcal{I}}\,\mathbf{f}\,|\,\mathbf{g}\,\rangle\,. \tag{1.493}$$

Prvky prostoru považujeme za komplexní, neboť k popisu vlnění využíváme komplexní vlnové funkce. Operátor má proto reálná vlastní čísla a mohou nastat jen případy $\omega^2 > 0$ (stabilní řešení) nebo $\omega^2 < 0$ (frekvence je ryze imaginární a řešení nestabilní). V ryze imaginárním případě obsahuje řešení jak exponenciálně rostoucí módy, tak exponenciálně tlumené (evanescentní) módy, nezůstane však přítomna kmitavá část. V neideální magnetohydrodynamice s disipací magnetického pole může mít úhlová frekvence reálnou i imaginární část a řešení jak exponenciální, tak kmitavou část.

Z rovnice (1.489) je zřejmé, že výraz $\mathbf{f} \equiv \hat{\mathcal{I}}\,\delta\boldsymbol{\xi}$ představuje hustotu síly působící na plazma. Napíšeme-li potenciální energii jako záporně vzatou práci, máme

$$\delta W = -\int \delta\boldsymbol{\xi}^*\cdot\hat{\mathcal{I}}\,\delta\boldsymbol{\xi}\;\mathrm{d}^3\mathbf{x} = -\int \delta\xi_l^*\hat{\mathcal{I}}\,\delta\xi_l\;\mathrm{d}^3\mathbf{x} = -\left\langle\delta\boldsymbol{\xi}\,\middle|\,\hat{\mathcal{I}}\,\delta\boldsymbol{\xi}\right\rangle. \tag{1.494}$$

Pokud se potenciální energie přesunem plazmatu o $\delta\boldsymbol{\xi}$ zmenší oproti předchozímu stavu, plazma může (ale nemusí) přejít do nové energeticky výhodnější konfigurace. Pokud by se ale potenciální energie měla pohybem plazmatu zvýšit, samovolně k tomu nikdy nedojde. Postačující podmínkou pro *stabilitu* plazmatu tedy je

$$\langle\, \delta\boldsymbol{\xi} \,|\, \hat{\mathscr{L}}\, \delta\boldsymbol{\xi} \,\rangle < 0\,. \tag{1.495}$$

Navazování polí na hranici

Je-li bod původní hranice $\mathbf{x}_0$, je bodem nové hranice v prvním řádu poruchové teorie

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}_0)\,. \tag{1.496}$$

Po dosazení řešení za vektor posunutí pro konkrétní situaci máme rovnici nové hranice, ke které standardním postupem (zapíšeme hranici v implicitním tvaru a najdeme gradient) odvodíme normálový vektor, který bude mít část nultého i prvního řádu:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}\,. \tag{1.497}$$

Známe-li rovnici hranice a normálový vektor k ní, můžeme již na hranici navazovat vektorová i skalární pole.

Spojitost normálové složky vektorového pole

Přepokládejme, že normálová složka pole je spojitá (například magnetická indukce), potom na hranici platí

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{n} = \text{const}\,, \tag{1.498}$$

což v prvním řádu poruchové teorie dá podmínku pro navázání řešení na obou stranách

$$\mathbf{K}_0\cdot\delta\mathbf{n} + \delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}_0 = \text{const}\,. \tag{1.499}$$

Dosadíme-li za poruchy parciální vlny a na obou stranách rovnosti zkrátíme periodické části, máme finální podmínku pro navázání

► $$\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{n}_1 + \mathbf{K}_1\cdot\mathbf{n}_0 = \text{const}\,. \tag{1.500}$$

Spojitost tečné složky vektorového pole

Přepokládejme, že tečná složka pole je spojitá (například intenzita elektrického pole), potom na hranici platí

$$\mathbf{K}\times\mathbf{n} = \text{const} \tag{1.501}$$

a obdobným způsobem jako v minulém případě dostaneme podmínku navázání

► $$\mathbf{K}_0\times\mathbf{n}_1 + \mathbf{K}_1\times\mathbf{n}_0 = \text{const}\ . \tag{1.502}$$

Spojitost skalárního pole

Uvažujme jakékoli skalární pole, které má být na hranici dvou prostředí spojité (například celkový tlak):

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x}) + \delta\psi(t,\mathbf{x})\,. \tag{1.503}$$

Na nové hranici bude mít pole hodnotu

$$\psi(t,\mathbf{x}_0+\delta\boldsymbol{\xi})=\psi_0(\mathbf{x}_0+\delta\boldsymbol{\xi})+\delta\psi(t,\mathbf{x}_0+\delta\boldsymbol{\xi})=$$
$$=\psi_0+(\delta\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\psi_0+\delta\psi+(\delta\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\delta\psi\,,$$

na pravé straně jsme provedli Taylorův rozvoj obou členů do prvního řádu (všechny členy bereme v argumentu $\mathbf{x}_0$). Předpokládejme, že v nultém řádu je naše skalární pole spojité, potom stačí řešit spojitost v prvním řádu poruchové teorie, což dá

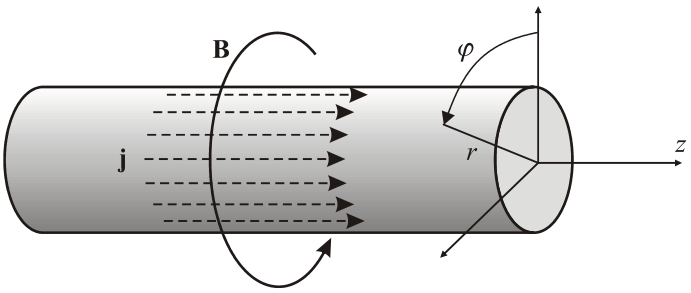
$$(\delta\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\psi_0+\delta\psi=\text{const}\,.$$

Dosadíme-li za poruchy opět parciální vlny a na obou stranách rovnosti zkrátíme periodické části, máme finální podmínku pro navázání skalárního pole

► $$(\boldsymbol{\xi}_1\cdot\nabla)\psi_0+\psi_1=\text{const}\,. \tag{1.504}$$

Nestability plazmového vlákna

Uvažujme nejjednodušší možné plazmové vlákno s válcovou symetrií, ve kterém teče elektrický proud jen po povrchu. (Druhým nejjednodušším případem by byl Bennettův pinč s konstantní proudovou hustotou v celém průřezu a parabolickým průběhem tlaku.) Jedinou neperiodickou proměnnou bude radiální vzdálenost, tedy každé řešení bude mít tvar (1.477).



Obr 1.87: Volba souřadnic u válcového vlákna

Řešení uvnitř

V tomto jednoduchém případě plyne z Maxwellovy rovnice rot $\mathbf{H}=\mathbf{j}$, že rovnovážné magnetické pole uvnitř je nulové a z rovnice rovnováhy $\mathbf{j}\times\mathbf{B}=-\nabla p$, že tlak je konstantní. Celkově tedy pro rovnovážné řešení uvnitř máme všechny veličiny konstantní (to by neplatilo u Bennettova pinče):

$$\rho_0=\text{const}\,;\qquad p_0=\text{const}\,;$$
$$\mathbf{u}_0=\mathbf{B}_0=0\,. \tag{1.505}$$

Z rovnice pro vektor posunutí (1.488) v tomto případě zbude jen

$$-\rho_0\,\omega^2\delta\boldsymbol{\xi}=\gamma p_0\nabla\,\mathrm{div}\,\delta\boldsymbol{\xi}\,;\qquad \delta\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_1(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi+\mathrm{i}k_z z}\,. \tag{1.506}$$

V principu můžeme vektor posunutí určit z této rovnice. Jedinou neperiodickou proměnnou je radiální souřadnice a tak jde o tři vzájemně provázané obyčejné diferenciální rovnice pro komponenty ξ_{1r}, $\xi_{1\varphi}$, ξ_{1z}. V takto triviálním případě by ale tento postup byl zbytečně složitý. Přímo z rovnic (1.487) po dosazení rovnovážného řešení máme

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho_0 \delta\boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\nabla}\delta p\,, \\ \delta p + \gamma p_0 \operatorname{div} \delta\boldsymbol{\xi} &= 0\,, \\ \delta\mathbf{B} &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.507}$$

Z poslední rovnice okamžitě vidíme, že porucha magnetického pole uvnitř vlákna je nulová a proto je nulová i neperiodická část

$$\mathbf{B}_1 = 0\,. \tag{1.508}$$

První dvě rovnice v (1.507) tvoří soustavu rovnic pro vektor posunutí $\delta\boldsymbol{\xi}$ a pro poruchu tlaku δp. Vyloučíme-li z rovnic poruchu tlaku, získáme rovnici (1.506) pro vektor posunutí. Pokud naopak dosadíme za $\delta\boldsymbol{\xi}$ z první rovnice do druhé rovnice, získáme skalární rovnici pro poruchu tlaku a po jejím vyřešení již snadno dopočteme vektor posunutí z první rovnice. Tento postup zvolíme:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{\omega^2}{c_\mathrm{s}^2}\right)\delta p = 0\,; \qquad c_\mathrm{s}^2 \equiv \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\,. \tag{1.509}$$

Nyní vyjádříme Laplaceův operátor ve válcových souřadnicích, detaily čtenář nalezne v prvním díle „Vybraných kapitol“, v části 3.10.3 Operátory v křivočarých souřadnicích)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \delta p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \delta p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_\mathrm{s}^2}\delta p = 0\,.$$

Po aplikaci pravidel (1.478) nebo přímém dosazení $\delta p = p_1(r)\exp[\mathrm{i}m\varphi + \mathrm{i}kz]$ a zkrácení kmitající části řešení máme rovnici

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 p_1}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}r} - \left[m^2 + \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_\mathrm{s}^2}\right)r^2\right]p_1 = 0\,. \tag{1.510}$$

Označme

$$q^2 \equiv k^2 - \frac{\omega^2}{c_\mathrm{s}^2}\,; \qquad x \equiv qr\,. \tag{1.511}$$

Veličina q může být obecně komplexní, ale pro $\gamma \to \infty$, což odpovídá isochorickému ději a tedy nestlačitelné tekutině, je $q^2 > 0$. S tímto označením získá rovnice tvar modifikované Besselovy rovnice

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 p_1}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}x} - \left[m^2 + x^2\right]p_1 = 0\,. \tag{1.512}$$

Detaily k této rovnici jsou popsány v prvním díle „Vybraných kapitol“, v části 3.7.1 Besselovy funkce. Řešení rovnice má tvar

$$p_1(r) = AI_m(qr) + BK_m(qr)\,. \tag{1.513}$$

Vzhledem k tomu, že pro $r \to 0$ funkce K_m diverguje, je konstanta B nulová a řešení tedy je

$$p_1(r) = AI_m(qr)\,. \tag{1.514}$$

Jako poslední krok nalezneme vektor posunutí z první rovnice (1.507):

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\omega^2\rho_0}\nabla\delta p = \frac{1}{\omega^2\rho_0}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right) AI_m(qr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi+\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t} =$$
$$= \left(\frac{Aq}{\omega^2\rho_0}I'_m, \frac{\mathrm{i}mA}{\omega^2\rho_0 r}I_m, \frac{\mathrm{i}kA}{\omega^2\rho_0}I_m\right)\mathrm{e}^{[\mathrm{i}m\varphi+\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t]}\,.$$

Pro neperiodickou část vektoru posunutí platí

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(\frac{Aq}{\omega^2\rho_0}I'_m, \frac{\mathrm{i}mA}{\omega^2\rho_0 r}I_m, \frac{\mathrm{i}kA}{\omega^2\rho_0}I_m\right). \tag{1.515}$$

Celkově tedy pro neperiodické části poruch máme uvnitř plazmového vlákna ve válcových souřadnicích (r, φ, z) řešení

► (1.516)

$\mathbf{B}_0 = (0,0,0)\,,$	$\mathbf{B}_1 = (0,0,0)\,,$
$p_0 = \mathrm{const}\,,$	$p_1 = AI_m(qr)\,,$
$\boldsymbol{\xi}_0 = (0,0,0)\,,$	$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(\frac{Aq}{\omega^2\rho_0}I'_m(qr), \frac{\mathrm{i}mA}{\omega^2\rho_0 r}I_m(qr), \frac{\mathrm{i}kA}{\omega^2\rho_0}I_m(qr)\right).$

Řešení vně

Vně plazmového vlákna rovnovážné magnetické pole ubývá podle Ampérova zákona jako $1/r$ a lze pro něho psát

$$\mathbf{B}_0 = B_0(r_0)\frac{r_0}{r}\mathbf{e}_\varphi\,, \tag{1.517}$$

kde r_0 je poloměr vlákna. Vně není plazma a tak jsou poruchy p_1 i $\boldsymbol{\xi}_1$ nulové. Jedině nenulová bude porucha magnetického pole, pro kterou vně vlákna platí Maxwellova rovnice rot $\delta\mathbf{B} = 0$. Porucha magnetického pole je tedy nevírová a musí existovat skalární potenciál:

$$\delta\mathbf{B} = \nabla\delta\phi\,. \tag{1.518}$$

Divergence magnetického pole musí být nulová, tj. div$(\mathbf{B}_0+\delta\mathbf{B}) = 0$. Vzhledem k tomu, že pro rovnovážné řešení platí div $\mathbf{B}_0 = 0$, musí platit i div $\delta\mathbf{B} = 0$. Kombinací s (1.518) máme pro potenciál poruchy rovnici

$$\nabla^2\delta\phi = 0\,. \tag{1.519}$$

Rozepíšeme-li Laplaceův operátor do válcových souřadnic, dostaneme pro jeho neperiodickou část rovnici

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}r}-\left[m^2+k^2r^2\right]\phi_1=0\,. \tag{1.520}$$

Za vnitřní proměnnou tentokrát zvolíme

$$x=kr\,, \tag{1.521}$$

a dostaneme opět modifikovanou Besselovu rovnici

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}x^2}+r\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x}-\left[m^2+x^2\right]\phi_1=0 \tag{1.522}$$

s řešením

$$\phi_1(r)=CI_m(kr)+DK_m(kr)\,. \tag{1.523}$$

Vně vlákna pro $r\to\infty$ diverguje funkce I_m, takže řešení je

$$\phi_1(r)=DK_m(kr)\,. \tag{1.524}$$

Nyní již snadno nalezneme poruchu magnetického pole z rovnice (1.518), neboli

$$\delta\mathbf{B}=\nabla\delta\phi=\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi+\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}=\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial z}\right)DK_m(kr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi+\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}\,.$$

Po provedení derivací a oddělení kmitající části máme výsledek

$$\mathbf{B}_1=\left(DkK_m',\frac{\mathrm{i}Dm}{r}K_m,\mathrm{i}kDK_m\right). \tag{1.525}$$

Shrňme tedy výsledky vně vlákna:

	$\mathbf{B}_0=\left(0,B_0(r_0)\frac{r_0}{r},0\right)$,	$\mathbf{B}_1=\left(DkK_m'(kr),\frac{\mathrm{i}Dm}{r}K_m(kr),\mathrm{i}kDK_m(kr)\right)$,
►	$\boldsymbol{\xi}_0$: vně není plazma,	$\boldsymbol{\xi}_1$: vně není plazma, nemá smysl,
	$p_0=0$,	$p_1=0$.

(1.526)

Navázání řešení

Nejprve nalezneme vektor normály k hranici proudového vlákna, pro kterou platí

$$r=r_0+\xi_{1r}(r_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi+\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}\,. \tag{1.527}$$

Hranici zapíšeme v implicitním tvaru

$$F(t,r,\varphi,z)=-r+r_0+\xi_{1r}(r_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi+\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}=0 \tag{1.528}$$

a vektor normály určíme jako gradient

$$\mathbf{n}=\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\left(-1,\frac{\mathrm{i}m\xi_{1r}}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi+\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t},\mathrm{i}k\xi_{1r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi+\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}\right). \tag{1.529}$$

Vektor normály můžeme rozdělit na původní a perturbovanou část $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}$ a poté z perturbované části oddělit neperiodickou část:

$$\mathbf{n}_0 = (-1, 0, 0)\,, \tag{1.530}$$

$$\delta\mathbf{n} = \left(0, \frac{\mathrm{i}\,m\xi_{1r}}{r}, ik\xi_{1r}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,m\varphi + \mathrm{i}\,kz - \mathrm{i}\,\omega t}\,, \tag{1.531}$$

$$\mathbf{n}_1 = \left(0, \frac{\mathrm{i}\,m\xi_{1r}}{r}, \mathrm{i}\,k\xi_{1r}\right). \tag{1.532}$$

To je vše co potřebujeme pro úspěšné navazování: řešení uvnitř (1.516), řešení vně (1.526) a části vektoru normály $\mathbf{n}_0$ a $\mathbf{n}_1$. Jako první navažme normálovou složku magnetického pole $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}$ podle vztahu (1.500):

$$\left[\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_0\right]_{\text{uvnitř}}^{\text{vně}} = 0\,. \tag{1.533}$$

Uvnitř vlákna je výraz nulový a venku dá $B_{0\varphi} n_{1\varphi} + B_{1r} n_{0r} = 0$. Vzhledem k tomu, že hranice je společná, musíme za vektor posunutí ξ_{1r} dosadit z vnitřního řešení. Ve všech výrazech provedeme limitu $r \to r_0$:

► $$A\left[\frac{\mathrm{i}\,mB_0(r_0)q}{\omega^2\rho_0 r_0} I'_m(qr_0)\right] - D\left[kK'_m(kr_0)\right] = 0\,. \tag{1.534}$$

Zbývá navázat celkový tlak $\psi = p + B^2/2\mu_0$ podle vztahu (1.504):

$$\left[\xi_{1r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{B_0^2}{2\mu_0} + p_1 + \frac{B_{0\varphi}B_{1\varphi}}{\mu_0}\right]_{\text{uvnitř}}^{\text{vně}} = 0\,.$$

Opět dosadíme nalezená řešení uvnitř i vně, hranice je společná (tedy dosazujeme vnitřní), provedeme derivaci a poté ve všech výrazech limitu $r \to r_0$:

► $$A\left[I_m(qr_0) + \frac{B_0^2 q}{\omega^2\rho_0\mu_0 r_0} I'_m(qr_0)\right] - D\left[\frac{\mathrm{i}\,mB_0}{\mu_0 r_0} K_m(kr_0)\right] = 0\,. \tag{1.535}$$

Rovnice (1.534) a (1.535) jsou soustavou rovnic pro hledané integrační konstanty A a D. Netriviální řešení bude existovat jen tehdy, pokud bude determinant soustavy roven nule:

$$-\frac{\mathrm{i}\,mB_0(r_0)q}{\omega^2\rho_0 r_0} I'_m(qr_0)\left[\frac{\mathrm{i}\,mB_0}{\mu_0 r_0} K_m(kr_0)\right] + kK'_m(kr_0)\left[I_m(qr_0) + \frac{B_0^2 q}{\omega^2\rho_0\mu_0 r_0} I'_m(qr_0)\right] = 0.$$

Poslední dva výrazy roznásobíme a z rovnice vypočteme ω^2:

► $$\omega^2 = -\frac{v_\mathrm{A}^2 q}{r_0}\frac{I'_m(qr_0)}{I_m(qr_0)}\left[1 + \frac{m^2}{kr_0}\frac{K_m(kr_0)}{K'_m(kr_0)}\right]; \qquad v_\mathrm{A}^2 \equiv \frac{B_0^2(r_0)}{\rho_0\mu_0}\,. \tag{1.536}$$

Získali jsme tak disperzní relaci v našem jednoduchém případě a současně vlastní čísla problému (1.490).

Rozbor řešení

Získaná disperzní relace je skutečně taková, jak jsme již avizovali u rovnice pro vektor posunutí – mohou nastat jen případy $\omega^2 > 0$ (stabilní řešení) a $\omega^2 < 0$ (frekvence je ryze imaginární a řešení nestabilní). Základní *podmínka stability* je

$$\frac{v_A^2}{r_0} q \frac{I'_m(qr_0)}{I_m(qr_0)} \left[1 + \frac{m^2}{kr_0} \frac{K_m(kr_0)}{K'_m(kr_0)} \right] < 0 .$$

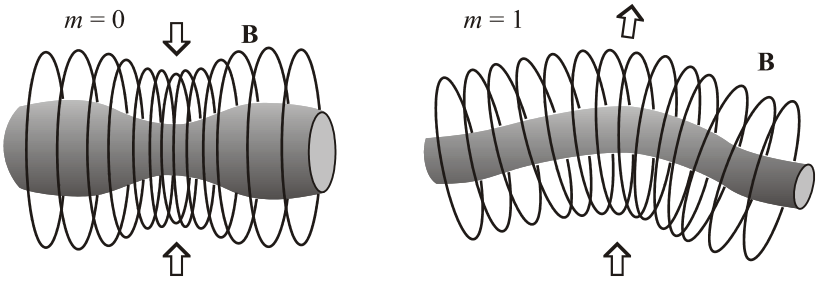
Uvědomíme-li si (viz I.3.7.1), že funkce I_m je vždy kladná a stejně tak její derivace I'_m, veličina q^2 je v režimu blízkém nestlačitelnému (ideální magnetohydrodynamika, γ velké) také kladná, získáme finální tvar tzv. *Kruskalovy-Šafranovovy podmínky stability.*

► $$1 + \frac{m^2}{kr_0} \frac{K_m(kr_0)}{K'_m(kr_0)} < 0 . \qquad (1.537)$$

Povšimněte si, že jediná veličina obsahující materiálové vlastnosti plazmatu q ve finálním vztahu není. Označíme-li $x \equiv kr_0$, můžeme podmínku přepsat do tvaru (K_m je kladné, K'_m záporné):

$$F(x) \equiv xK'_m(x) + m^2 K_m(x) > 0 . \qquad (1.538)$$

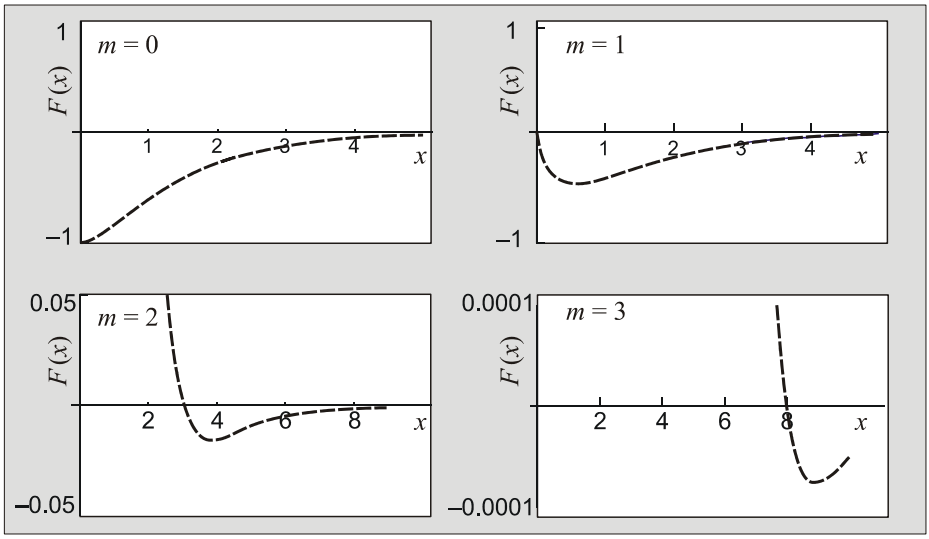
Podmínka stability v tomto tvaru je vhodná pro grafické řešení (vykreslíme levou stranu vztahu a sledujeme, zda je výsledek kladný). Z obou posledních vztahů je okamžitě vidět, že pro $m = 0$ neexistuje řešení a vlákno bude vždy nestabilní vůči poruchám módu nula. Totéž lze ukázat pro mód $m = 1$.



Obr. 1.88: Nultý a první mód poruchy vlákna

Nestabilitu $m = 0$ nazýváme *korálková nestabilita* (sausage instability), nestabilitu $m = 1$ *smyčková nestabilita* (kink instability). V obou případech se objeví silnější pole (hustší magnetické indukční čáry) na „nesprávném“ místě a tlak magnetického pole počáteční deformaci nadále prohlubuje.

Na grafech v obrázku 1.89 je vykreslena levá strana nerovnosti (1.538). První dva módy nemají žádné nulové řešení a jsou vždy nestabilní. Všechny další módy jsou *stabilní* pro $x < x_0$, které je pro prvních pět módů zaznamenáno v tabulce za obrázkem.



mód m	0	1	2	3	4	5
$x_0 = kr_0$	–	–	3,04	8,02	15,01	24,01

Obr. 1.89: K výpočtu stability vlákna. V tabulce pod obrázkem jsou argumenty, pro které prochází grafy nulou

Pro x_0 platí přibližná formule

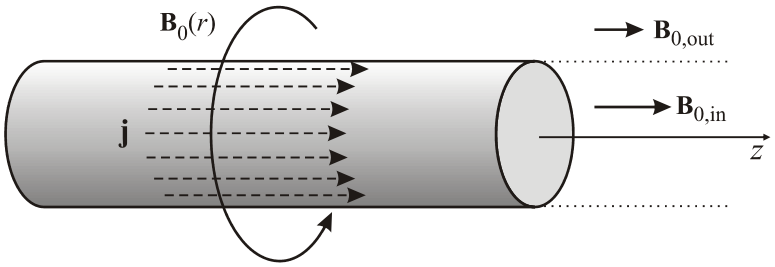
$$x_0 \approx m^2 - 1\,. \tag{1.539}$$

Od módu 2 je řešení stabilní pro $kr_0 < x_0$, tedy pro vlnové délky

► $$\lambda > \frac{2\pi r_0}{m^2 - 1}; \qquad m = 2, 3, \ldots\,. \tag{1.540}$$

Řešení pro nenulové osové pole

V případě, že by na počátku existovalo osové pole B_{0z}, budou první dva módy již alespoň v některých oblastech parametrů stabilní. Osové pole má na proudové vlákno stabilizující účinek.



Obr. 1.90: Obecnější případ plazmového vlákna

Obdobným postupem můžeme získat disperzní relaci i nyní. Uveďme jen výsledek, který je nutné řešit graficky, pro první dva módy budou existovat stabilní oblasti řešení:

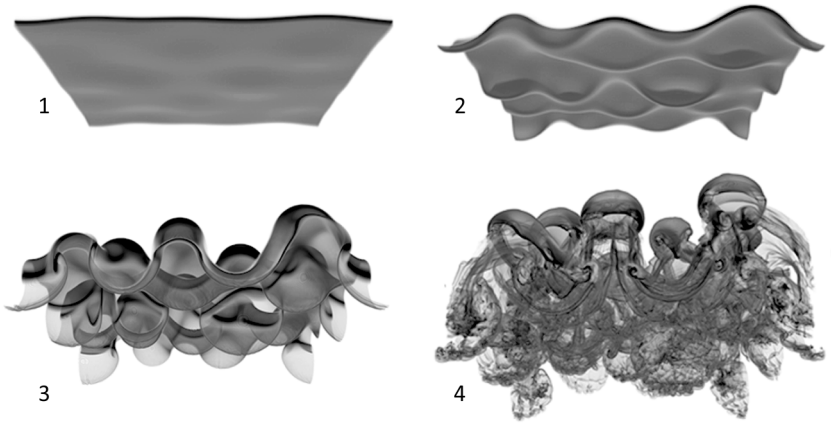
$$\omega^2 = k^2 v_{\mathrm{A,in}}^2 - \left(k\, v_{\mathrm{A,ex}} + m\frac{v_{\mathrm{A}}}{r_0} \right)^2 \frac{q}{k}\frac{I_m'(qr_0)}{I_m(qr_0)}\frac{K_m(kr_0)}{K_m'(kr_0)} - \frac{v_{\mathrm{A}}^2 q}{r_0}\frac{I_m'(qr_0)}{I_m(qr_0)};$$

► $$v_{\mathrm{A}}^2 \equiv \frac{B_0^2(r_0)}{\rho_0\mu_0}; \quad v_{\mathrm{A,in}}^2 \equiv \frac{B_{0,\mathrm{in}}^2}{\rho_0\mu_0}; \quad v_{\mathrm{A,ex}}^2 \equiv \frac{B_{0,\mathrm{ex}}^2}{\rho_0\mu_0}; \tag{1.541}$$

$$q^2 \equiv \frac{\left(k^2 - \omega^2/c_{\mathrm{s}}^2\right)\left(k^2 - \omega^2/v_{\mathrm{A,in}}^2\right)}{k^2 - \omega^2/c_{\mathrm{s}}^2 - \omega^2/v_{\mathrm{A,in}}^2}.$$

Rayleighova-Taylorova nestabilita

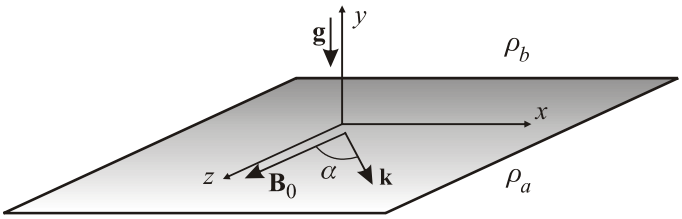
Rayleighova Taylorova nestabilita (RT nestabilita) vzniká na rozhraní dvou tekutin různých hustot (například je-li v gravitačním poli hustší kapalina „nad“ řidší). Pro tekutiny v konstantním tíhovém poli byla poprvé tato nestabilita popsána anglickým fyzikem, lordem Rayleighem (1842–1919) v roce 1883. Anglický fyzik a matematik Geoffrey Ingram Taylor (1886–1975) zobecnil tuto nestabilitu v roce 1950 i pro jakékoli konstantní zrychlení, které míří směrem od hustší k řidší tekutině. V takové situaci se snaží hustší tekutina zaujmout polohu „pod“ řidší tekutinou (v daném poli) a počáteční poruchy na rozhraní se rozvinou do charakteristických útvarů podobných prstům a později kloboučkům hub. Někdy se nestabilitám tohoto typu říká *výměnné nestability*, protože si různé oblasti tekutiny vyměňují pozici a „hledají“ stav s nižší energií. Typickým příkladem jsou dvě nemísící se kapaliny nalité do sklenice tak, aby hustší kapalina byla nad řidší. RT nestabilita ale vzniká i při inverzi na rozhraní dvou vzdušných mas nebo při interakci expandujícího hvězdného větru s Krabí mlhovinou, jež je pozůstatkem po explozi supernovy pozorované v roce 1054. RT nestabilita je zodpovědná i za hřibovitý útvar vznikající při atomovém výbuchu. V místě exploze vznikne lehký a horký plyn, který za pomoci RT nestability proniká vzhůru.



Obr. 1.91: Numerická simulace rozvoje Rayleighovy-Taylorovy nestability. Pittsburg Supercomputing Centrum.

V roce 1954 ukázali Martin Kruskal (1925–2006) a Martin Schwarzschild (1912–1997), že přítomnost magnetického pole může u krátkých vlnových délek zabránit rozvoji této nestability na rozhraní dvou druhů plazmatu.

Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby rozhraní obou prostředí bylo v rovině $y = 0$. Předpokládejme, že ve směru osy y působí homogenní tíhové pole a na plazma působí vnější magnetické pole $\mathbf{B}_0$ rovnoběžné s rozhraním. Na rozhraní obou prostředí se rozvine malá porucha. Osu z můžeme opět volit ve směru magnetického pole a zajistit tak kompatibilitu s předchozími výpočty. Jinou možností je volit osu z ve směru šíření poruchy – periodická část pak bude mít jednoduchou závislost $\exp[\mathrm{i}kz]$. Postup odvození, který následuje, na volbě osy z nezávisí. Důležité je jen, že vektory $\mathbf{B}_0$ a $\mathbf{k}$ jsou rovnoběžné s rozhraním. Pro určitost předpokládejme souřadnicový systém zvolený dle obrázku:



Obr. 1.92: Volba souřadnicového systému

Výpočet vektoru posunutí

Při naší volbě souřadnicového systému budou mít poruchy tvar

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \psi_0(y) + \delta\psi(t,\mathbf{x}); \qquad \delta\psi(t,\mathbf{x}) = \psi_1(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_z z - \omega t]}. \tag{1.542}$$

U vektoru posunutí budeme pro jednoduchost index 1 vynechávat

$$\delta\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_z z - \omega t]}. \tag{1.543}$$

Z geometrie problému pro jednotlivé veličiny plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0, k_z)\,, \\ \boldsymbol{\xi}(y) &= \xi_{\perp}\mathbf{e}_y + \boldsymbol{\xi}_{\parallel} = (\xi_{\parallel x}, \xi_{\perp}, \xi_{\parallel z})\,, \\ \mathbf{B}_0 &= \mathbf{B}_0(y) = (B_{0x}, 0, B_{0z})\,, \\ \rho_0 &= \rho_0(y); \quad p_0 = p_0(y)\,. \end{aligned} \tag{1.544}$$

Symbol $\parallel$ znamená rovnoběžný s rozhraním, symbol $\perp$ znamená kolmý na rozhraní (tedy ve směru osy y). Hodnota B_{0x} je v naší geometrii nulová, ale pro další odvození to není podstatné. Pro jednoduchost budeme předpokládat nestlačitelné plazma, tj. $\mathrm{div}\,\delta\boldsymbol{\xi} = 0$. Po rozepsání dá tato podmínka jednoduchý vztah

$$\xi_{\perp}' + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_{\perp}' + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi} = \mathrm{i}\,\xi_{\perp}'\,. \tag{1.545}$$

Čárka ve všech výrazech znamená derivaci podle jediné neperiodické proměnné y. V rovnici pro vektor posunutí (1.488) určíme nejprve poruchu magnetického pole v dané geometrii ($\mathrm{div}\,\mathbf{B}_0 = 0$; $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} = 0$):

$$\delta\mathbf{B} = \mathrm{rot}\left(\delta\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0\right) = \left(\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\delta\boldsymbol{\xi} - \left(\delta\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{B}_0 = \mathrm{i}\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}\right)\delta\boldsymbol{\xi} - \delta\xi_\perp\mathbf{B}_0' . \quad (1.546)$$

Poruchu dosadíme do rovnice (1.488) pro vektor $\delta\boldsymbol{\xi}$, která pro nestlačitelné plazma dává

$$-\omega^2\rho_0\,\delta\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\nabla}(\delta\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})p_0 \;-\; \mathbf{g}\,\mathrm{div}\left(\rho_0\,\delta\boldsymbol{\xi}\right) \;+\; \frac{\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{B}}{\mu_0}\times\mathbf{B}_0 + \frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0}{\mu_0}\times\delta\mathbf{B} . \quad (1.547)$$

V rovnici rozepíšeme všechny členy, provedeme derivace, zkrátíme periodické části, upravíme dvojné vektorové součiny a za všechny výskyty ($\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}$) dosadíme z (1.545):

$$-\omega^2\rho_0\xi_\perp = \left[\xi_\perp p_0' - \frac{\mathrm{i}}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\xi}\right)\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_0'\right)\xi_\perp\right]' - \frac{\xi_\perp}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}\right)^2 + g\rho_0'\xi_\perp ,$$

$$-\omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi}_\parallel = \mathrm{i}\,\mathbf{k}\xi_\perp p_0' + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{k}\left(\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\xi}\right)\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}\right) - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\xi}_\parallel\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}\right)^2 + \frac{\mathrm{i}}{\mu_0}\mathbf{k}\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_0'\right)\xi_\perp .$$

Jde o tři rovnice (1+2) pro vektor posunutí. Druhou rovnici vynásobíme skalárně vektorem $\mathbf{k}$, za $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_\parallel = \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}$ opět dosadíme z (1.545), a vypočteme kombinaci

$$\frac{\mathrm{i}}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\xi}\right)\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}\right) = \xi_\perp p_0' + \frac{\omega^2}{k^2}\rho_0\xi_\perp' - \frac{1}{\mu_0 k^2}\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}\right)^2\xi_\perp' + \frac{\xi_\perp}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_0'\right),$$

kterou dosadíme do první rovnice. Tím získáme jednu jedinou rovnici pro kolmou složku vektoru posunutí:

$$\left[\left(\omega^2\rho_0 - \frac{\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0\right)^2}{\mu_0}\right)\xi_\perp'\right]' - k^2\left(\omega^2\rho_0 - \frac{\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0\right)^2}{\mu_0}\right)\xi_\perp - gk^2\rho_0'\xi_\perp = 0 . \quad (1.548)$$

Pokud označíme kulaté závorky symbolem $\mathcal{K}_0$, získá rovnice pro kolmou složku vektoru posunutí jednoduchý tvar

$$\left(\mathcal{K}_0\xi_\perp'\right)' - k^2\left(\mathcal{K}_0\xi_\perp\right) - gk^2\rho_0'\xi_\perp = 0 ;$$

$$\mathcal{K}_0 \equiv \omega^2\rho_0 - \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0\right)^2 . \quad (1.549)$$

►

Zavedeme-li Alfvénovu rychlost odpovídající neporušenému magnetickému poli vztahem

$$\mathbf{v}_{0\mathrm{A}} \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}, \quad (1.550)$$

lze funkci $\mathcal{K}_0$ přepsat do podoby

$$\mathcal{K}_0 \equiv \rho_0\left[\omega^2 - \left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{0\mathrm{A}}\right)^2\right]. \quad (1.551)$$

Pokud budeme uvažovat infinitezimálně tenké rovinné rozhraní (přechodovou vrstvu), jsou hustota $\rho_0(y)$ a magnetické pole $\mathbf{B}_0(y)$ v obou poloprostorech konstantní, ale

v rovině $y = 0$ mají skok, takže derivace ρ'_0, $\mathbf{B}'_0$ vedou na distribuce. Nicméně pro $y \neq 0$ je $\rho'_0 = 0$ a funkce $\mathcal{H}_0$ je konstantní. Rovnice má proto v obou poloprostorech tvar

$$\xi_\perp'' - k^2 \xi_\perp = 0 \,. \tag{1.552}$$

Řešením je lineární kombinace dvou exponenciálních funkcí, z nichž v každém poloprostoru vybereme tu, která v nekonečnu klesá k nule. Vektor posunutí bude spojitý:

$$\xi_\perp(y) = C\mathrm{e}^{-k|y|} = \begin{cases} C\mathrm{e}^{-ky} \,; & y > 0 \,, \\ C\mathrm{e}^{+ky} \,; & y < 0 \,. \end{cases} \tag{1.553}$$

Navázání řešení a disperzní relace

Je zřejmé, že první derivace nalezeného řešení má v rovině $y = 0$ skok a druhá derivace se chová jako distribuce. Všechny derivace skoků se musí v původní rovnici (1.549) vyrušit. Toho můžeme využít k navázání řešení na rozhraní. Nalezené řešení dosadíme do původní rovnice (1.549). Integrací v proměnné y se zbavíme derivace v prvním výrazu (a s ní souvisejících derivací skoků). V druhém výrazu derivace skoků nejsou. V posledním výrazu provedeme integraci per partes a derivaci skoku v hustotě tak převedeme na derivaci spojité veličiny $\xi_\perp$:

$$\left[-\mathcal{H}_0 k \operatorname{sgn} y \, \mathrm{e}^{-k|y|}\right]_{-l}^{+l} - k^2 \int_{-l}^{+l} \mathcal{H}_0 \mathrm{e}^{-k|y|} \mathrm{d}y - \left[gk^2 \rho_0 \mathrm{e}^{-k|y|} \right]_{-l}^{+l} - \int_{-l}^{+l} gk^3 \rho_0 \operatorname{sgn} y \, \mathrm{e}^{-k|y|} \mathrm{d}y = 0 \,.$$

Nyní provedeme limitu $l \to 0$ (tedy z obou poloprostorů se blížíme k rozhraní). Oba integrandy jsou omezené a v limitě se integrály blíží k nule. Zbývá podmínka

$$\left[-\mathcal{H}_0 k \operatorname{sgn} y \, \mathrm{e}^{-k|y|} - gk^2 \rho_0(y) \mathrm{e}^{-k|y|}\right]_{y \to 0^-}^{y \to 0^+} = 0 \,,$$

ze které okamžitě plyne disperzní relace

► $$\mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b + gk(\rho_b - \rho_a) = 0 \,, \tag{1.554}$$

kde indexy a a b značí dolní a horní poloprostor. Po dosazení za funkci $\mathcal{H}$ máme finální disperzní relaci problému

► $$\omega^2 (\rho_a + \rho_b) - \frac{1}{\mu_0} \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_b)^2 \right] + gk(\rho_b - \rho_a) = 0 \,. \tag{1.555}$$

Rozbor řešení (nulové magnetické pole)

Pro nulové magnetické pole vychází:

► $$\omega^2 = -gk \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a + \rho_b} \,. \tag{1.556}$$

Situace je tedy vždy nestabilní, pokud je těžší tekutina nad lehčí ($\omega^2 < 0$, $\rho_b > \rho_a$). Koeficient nárůstu nestability je

$$\gamma = \sqrt{gk\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a + \rho_b}}\,, \tag{1.557}$$

tedy k nejrychlejšímu rozvoji nestability bude docházet pro krátké vlnové délky a pro velké rozdíly hustot ($\rho_b \gg \rho_a$, hustší kapalina je nad řidší).

Rozbor řešení (nenulové magnetické pole)

V přítomnosti magnetického pole máme disperzní relaci

$$\omega^2 = -gk\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a + \rho_b} + \frac{1}{\mu_0}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_b)^2}{\rho_a + \rho_b}\,, \tag{1.558}$$

která vede na podmínku stability ($\omega^2 \geq 0$)

$$-gk(\rho_b - \rho_a) + \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_b)^2}{\mu_0} \geq 0\,. \tag{1.559}$$

Snadno ji přepíšeme do tvaru

$$\lambda \leq \frac{2\pi\left(B_a^2\cos^2\alpha_a + B_b^2\cos^2\alpha_b\right)}{\mu_0 g(\rho_b - \rho_a)}\,. \tag{1.560}$$

Úhel mezi magnetickým polem a vlnovým vektorem jsme označili α. Pro poruchu šířící se podél pole tedy vždy existuje pro dosti krátké vlnové délky oblast stability i v případě hustší kapaliny nad řidší. Pro kužel stability platí (pokud jsou oba úhly stejné, tj. $\alpha_a = \alpha_b = \alpha$)

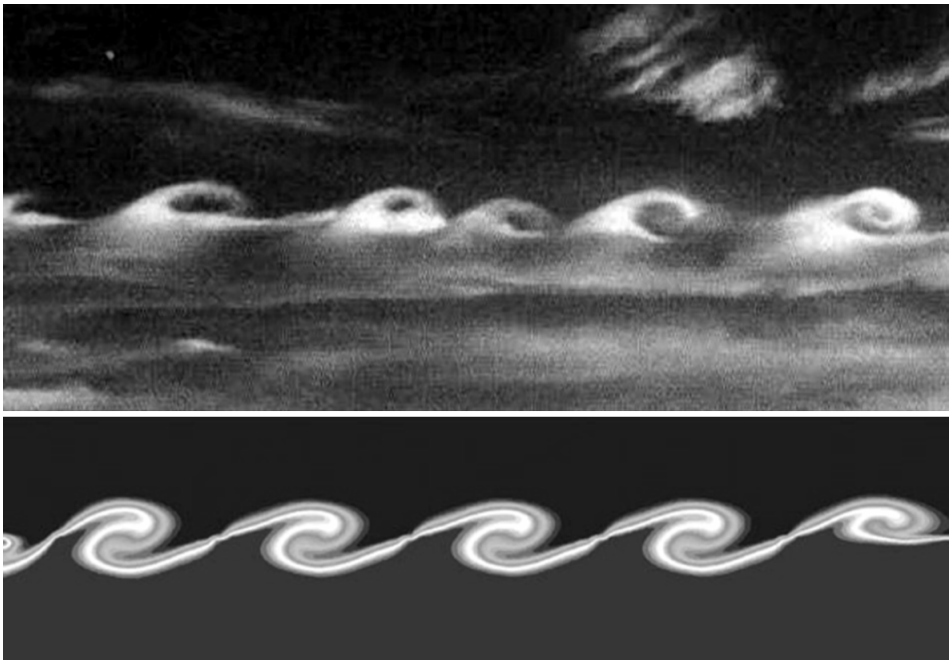
$$\begin{aligned} &\alpha \in <0, \alpha_{\max}); \quad \alpha_{\max} = \arccos\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_{\max}}}\,; \\ &\lambda \leq \lambda_{\max} \equiv \frac{2\pi\left(B_a^2 + B_b^2\right)}{\mu_0 g(\rho_b - \rho_a)}; \quad \rho_b > \rho_a\,. \end{aligned} \tag{1.561}$$

Kelvinova-Helmholtzova nestabilita

Další typickou nestabilitou, která se může rozvinout na rozhraní dvou prostředí je Kelvinova Helmholtzova (KH) nestabilita. Vzniká tam, kde se vůči sobě obě prostředí pohybují (vítr nad vodní hladinou, sluneční vítr obtékající na bocích magnetosféru, rozhraní pásů obřích planet nebo rozhraní dvou vrstev atmosféry Země). Při dostatečně velikém rozdílu rychlostí dojde k rozvoji nestability i tehdy, pokud je situace RT stabilní (tj. lehčí tekutina je nad těžší). KH nestabilita vzniká i při velkém střižném (kolmém na směr rychlosti) gradientu rychlosti v tekutině jediné. K stabilizujícím prvkům patří přítomnost gravitačního pole, magnetického pole v plazmatu nebo neostrost hranice rozhraní (rychlost se nemění skokem, ale postupně).

Nestabilitu poprvé popsal Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894) v roce 1868 a nezávisle na něm lord Kelvin (1824–1907) v roce 1871. Kompletní řešení pro nestlačitelné kapaliny nalezl v roce 1961 Subrahmanyan Chandrasekhar. V roce 1963 zobecnil toto řešení pro ideální magnetohydrodynamiku Amiya Sen, o rok později

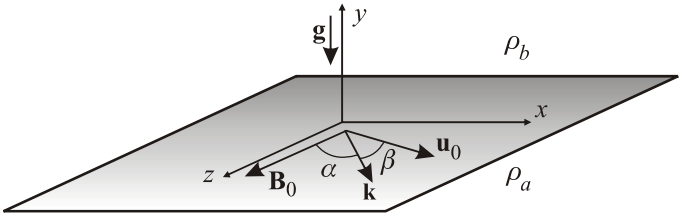
nalezl i řešení pro stlačitelný případ, které v roce 1968 zobecnil Richard Gerwin a v témže roce ještě David John Southwood pro magnetopauzu. V roce 1980 nalezl Attilio Ferrari alespoň částečné řešení pro relativistické rychlosti, které je důležité například u relativistických výtrysků z černých děr.



Obr. 1.93: Porovnání KH nestability v oblačnosti s numerickou simulací.
Foto: University of Notre Dame. Simulace: Programový balík FLUENT.

Disperzní relace

Uvažujme obdobné podmínky, jako u Rayleighovy-Taylorovy nestability, tj. nestlačitelné plazma s infinitezimálně úzkým rovinným rozhraním v rovině $y = 0$. Opět budeme předpokládat závislost počátečních podmínek na souřadnici y, tj. $\rho_0 = \rho_0(y)$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0(y)$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(y)$. Magnetické pole $\mathbf{B}_0$ i vektor rychlosti $\mathbf{u}_0$ leží v rovině rozhraní $y = 0$. Souřadnicový systém můžeme zvolit obdobně jako u RT nestability (na této volbě je ale výsledná disperzní relace nezávislá):



Obr. 1.94: Volba souřadnicového systému

Disperzní relaci lze odvodit stejným postupem, obdobně jako ve vztahu (1.367) dojde jen k záměně

$$\omega \to \omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0 \,. \tag{1.562}$$

Disperzní relace tedy opět bude mít tvar (1.554):

$$\begin{gathered} \mathcal{K}_a + \mathcal{K}_b + gk(\rho_b - \rho_a) = 0 \,; \\ \mathcal{K}_0 \equiv \left[\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0\right]^2 \rho_0 - \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0\right)^2 . \end{gathered} \tag{1.563}$$

Po dosazení máme

$$\blacktriangleright\quad \left(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_a\right)^2 \rho_a + \left(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_b\right)^2 \rho_b - \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_b)^2}{\mu_0} + gk(\rho_b - \rho_a) = 0. \tag{1.564}$$

Rozbor řešení (nulová tíže, nulové magnetické pole)

Předpokládejme pro jednoduchost, že tekutina v poloprostoru *a* je v klidu, rychlost $\mathbf{u}_b$ má pak význam vzájemné rychlosti $\Delta\mathbf{u}_0$ obou prostředí, úhlová frekvence je měřena v námi zavedené soustavě, tj. vzhledem k tekutině v klidu. Disperzní relace je

$$\omega^2 \rho_a + \left(\omega - \mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{u}_0\right)^2 \rho_b = 0 \,,$$

$$\omega^2 \rho_a + \omega^2 \rho_b - 2\omega(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{u}_0)\rho_b + \left(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{u}_0\right)^2 \rho_b = 0 \,,$$

$$\blacktriangleright\qquad \omega_{1,2} = (\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{u}_0)\frac{r \pm \mathrm{i}\sqrt{r}}{(1+r)} \,; \qquad r \equiv \frac{\rho_b}{\rho_a} \,. \tag{1.565}$$

Vzhledem k tomu, že má úhlová frekvence nenulovou imaginární část, dojde k rozvoji KH nestability vždy, dokonce i pro $r = 1$, tj. pro stejné tekutiny pohybující se vůči sobě nenulovou rychlostí. Koeficient nárůstu nestability (kladná imaginární část úhlové frekvence) je

$$\gamma = \frac{(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{u}_0)\sqrt{r}}{(1+r)} \,. \tag{1.566}$$

Rozbor řešení (vliv tíže)

Opět budeme předpokládat, že tekutina v poloprostoru *a* je v klidu. Jediné pole, které na obě tekutiny působí, je tíže. Z disperzní relace snadno nalezneme řešení pro ω:

$$\blacktriangleright\qquad \omega_{1,2} = \frac{(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{u}_0)r}{1+r} \pm \sqrt{\frac{gk(1-r)}{1+r} - \frac{(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{u}_0)^2 r}{(1+r)^2}} \,; \qquad r \equiv \frac{\rho_b}{\rho_a} \,. \tag{1.567}$$

Z řešení je patrné, že tíže má stabilizující vliv, úhlová frekvence již nemusí mít nenulovou imaginární část. Podmínkou stability je, aby výraz, který je pod odmocninou, nebyl záporný, tj.

$$gk(1-r^2) - (\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{u}_0)^2 r \geq 0 \,.$$

Předpokládejme, že situace je RT stabilní (tj. lehčí tekutina je nad těžší, $r < 1$, v opačném případě by byla RT nestabilita jen zvýrazněna). Podmínka stability potom je

► $$\lambda \geq \lambda_{\max} \cos^2 \beta\,; \qquad \lambda_{\max} \equiv 2\pi \frac{\Delta u_0^2}{g} \frac{r}{1-r^2}\,; \qquad \beta = \sphericalangle(\mathbf{k}, \Delta \mathbf{u}_0)\,. \tag{1.568}$$

Vlny větší než $\lambda_{\max}$ jsou stabilní, pokud by vůbec vznikly, nebudou zesilovány. Například pro vítr nad vodní hladinou (vítr je sice stlačitelný, ale v prvním přiblížení lze vztah použít) vznikají vlny ve směru větru ($\beta = 0$) a hustota větru je mnohem menší než vody ($r \ll 1$). Podmínka stability se v tomto případě redukuje na vztah

$$\lambda \geq \lambda_{\max}\,; \qquad \lambda_{\max} \equiv 2\pi r \frac{\Delta u_0^2}{g}\,. \tag{1.569}$$

Nutno ale poznamenat, že krátkovlnné módy jsou stabilizovány povrchovým napětím.

Rozbor řešení (vliv tíže a magnetického pole)

Disperzní relace (1.564) bude mít při nenulové tíži a nenulovém poli řešení

$$\omega_{1,2} = \frac{(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{u}_0)r}{1+r} \pm \sqrt{\frac{gk(1-r)}{1+r} + \frac{\left[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_a)^2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_b)^2 r\right]}{1+r} - \frac{(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{u}_0)^2 r}{(1+r)^2}}\,,$$

► $$\mathbf{v}_a \equiv \frac{\mathbf{B}_a}{\sqrt{\mu_0 \rho_a}}\,; \qquad \mathbf{v}_{\mathrm{b}} \equiv \frac{\mathbf{B}_b}{\sqrt{\mu_0 \rho_b}}\,; \tag{1.570}$$

$$r \equiv \frac{\rho_b}{\rho_a}\,.$$

Variabilita možností je nyní značná, přítomnost tíže i magnetického pole má stabilizující účinek (přispívají ke kladné části výrazu pod odmocninou). Podmínka stability má tvar (předpokládáme RT stabilní systém, tj. $r < 1$)

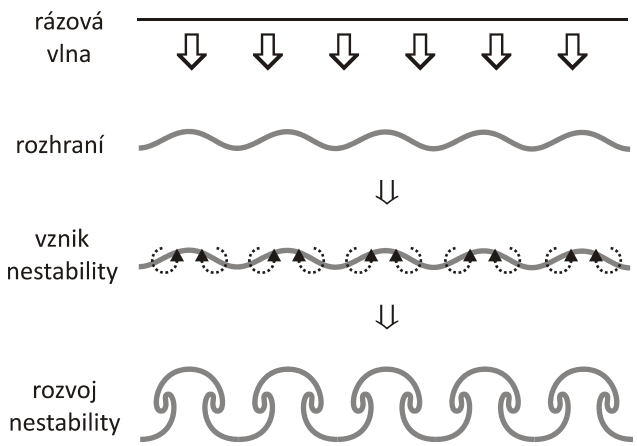
► $$k(\Delta u_0)^2 r \cos^2 \beta \leq g(1-r^2) + k\left(v_a^2 \cos^2\alpha_a + v_b^2 r \cos^2\alpha_b\right)(1+r)\,. \tag{1.571}$$

Z relace je možné pro konkrétní situaci dopočítat oblasti stability systému.

Další nestability (Richtmyerova–Meškovova, diocotronová)

Richtmyerova-Meškovova nestabilita

Další nestabilitou vznikající na rozhraní dvou prostředí je Richtmyerova-Meškovova nestabilita (RM). Dochází k ní při prudkém urychlení hranice dvou prostředí, například při průchodu rázové vlny. K rozvoji této nestability dochází při explozích supernov, vzniklé mísení je kombinací RM a RT nestability. Jiným typickým příkladem je rozvoj této nestability při inerciální fúzi, kdy dochází k implozi horké obálky na zatím studeném peletu s jaderným palivem. Odraz rázové vlny na rozhraní může vést ke vzniku vírových struktur. Teoreticky existenci této nestability předpověděl Robert Davis Richtmyer (1911–2003) v *Los Alamos National Laboratory* v roce 1953. Nestabilitu poprvé experimentálně pozoroval Evgenij Meškov v roce 1970 v Sovětském svazu, v *Vserusskom naučnom issledovatelskom institute*.



Obr. 1.95: Vznik Richtmyerovy-Meškovovy nestability

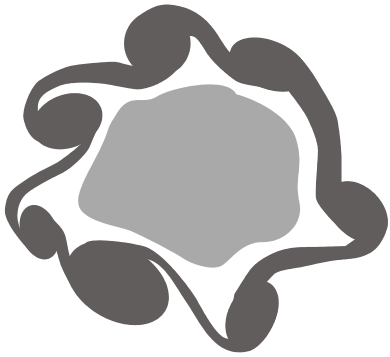
Diocotronová nestabilita

Jde o obdobu KH nestability, u které pohyb plazmatu podél rozhraní vzniká díky narušení kvazineutrality plazmatu. Vzniklé elektrické pole způsobí spolu s magnetickým polem drift nabitých částic, který vede k rozvoji nestability. V oblasti měnící se rychlosti se vytvářejí charakteristické víry. K diocotronové nestabilitě dochází na povrchu plazmových vláken, při průniku svazku elektronů plazmatem, ve stěnách polárních září nebo ve spirálních ramenech galaxií (NGC 3646). Název nestability pochází z řeckého slova *pronásledovat*. Nestabilitu zavedl Hannes Alfvén (1908–1995) v roce 1950 k vysvětlení vzniku vírových struktur v polárních zářích.

Diocotronová nestabilita vzniká všude tam, kde se po sobě posouvají dvě vrstvy různě nabitého plazmatu. Nejčastější je ale u plazmového vlákna, ve kterém z nějakého důvodu došlo k separaci elektrického náboje v radiálním směru. Vzniklé radiální elektrické pole způsobuje spolu s osovým magnetickým polem B_z azimutální drift rychlostí v_φ. Celé vlákno začne rotovat diferenciální rotací (oblasti různě vzdálené od osy mají různou úhlovou rychlost). Na povrchu vlákna se stýkají dvě oblasti s různou rychlostí (rotující vlákno a okolní prostředí) a může dojít k rozvoji diocotronové nestability.

K separaci náboje v radiálním směru, která je základní podmínkou vzniku diocotronové nestability, může dojít mnoha způsoby. Nejčastěji jde o různé drifty, na které reagují elektrony jinak než ionty. Vlastní záření pinče také může způsobit separaci náboje. Zářivé procesy odnášejí část tepelné energie uvolněné při výboji, tím vzniká radiální gradient teploty, který způsobí nejen separaci elektrického náboje (analogie termoelektrického jevu), ale i separaci jednotlivých chemických prvků. Také různé typy jiných nestabilit mohou vést ke vzniku nekompenzovaného náboje.

Diocotronová nestabilita je pro plazmová vlákna velice častá. Je pozorována v mnoha laboratorních experimentech, ve vesmírném plazmatu a v numerických simulacích. Rozvoj diocotronové nestability podmíněný povrchovou rotací může být dominantním impulsem k přestavbě vlákna do helikální struktury.



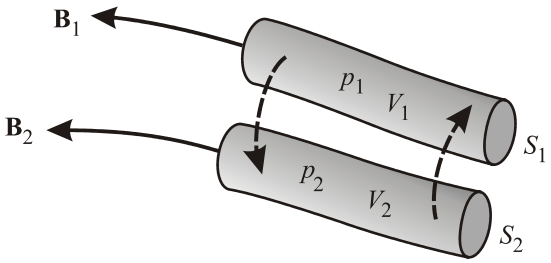
Obr 1.96: Diocotronová nestabilita

Výměnné (tlakem řízené) nestability

K Rayleighově Taylorově nestabilitě dochází proto, že je těžší tekutina nad lehčí. Při přesunu těžší tekutiny pod lehčí (a lehčí nad těžší) dojde k takovému přeskupení, které vede ke snížení vnitřní energie tekutiny. Stejný princip platí ale i obecně. Pokud je situace taková, že přesunem plazmatu můžeme docílit, aby se snížila vnitřní energie systému, je plazma nestabilní. Podmínkou *stability* tedy je

$$\delta W_{\mathrm{int}} \geq 0\,; \qquad \delta W_{\mathrm{int}} \equiv -\int \delta\boldsymbol{\xi}^{*} \cdot \hat{\mathscr{L}}\, \delta\boldsymbol{\xi}\, \mathrm{d}^{3}\mathbf{x}\,. \tag{1.572}$$

K vyjádření energie jsme využili vztahu (1.494). Předpokládejme plazma s dominantním magnetickým polem ($\beta = p/p_{\mathrm{M}} \ll 1$) a vypočtěme změnu vnitřní energie, pokud by se plazma z okolí jedné magnetické indukční čáry zaměnilo za plazma z okolí jiné, blízké magnetické indukční čáry (vyměníme plazma ve dvou sousedních magnetických trubicích).



Obr 1.97: Výměnná nestabilita

Pro vnitřní energii podle vztahu (1.337) platí

$$W_{\mathrm{int}} = \frac{pV}{\gamma - 1}\,, \tag{1.573}$$

kde p je tlak plazmatu v magnetické trubici, V její objem a γ polytropní koeficient. Pro tlak plazmatu předpokládejme polytropní chování, tj.

$$pV^{\gamma} = \text{const}\,. \tag{1.574}$$

Pokud přejde plazma z trubice 1 do trubice 2, bude změna vnitřní energie rovna

$$\delta W_{1\to 2} = \frac{p_2' V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{p_1 (V_1/V_2)^{\gamma} V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1}\,.$$

Pokud přejde naopak plazma z trubice 2 do trubice 1, změní se energie o hodnotu

$$\delta W_{2\to 1} = \frac{p_1' V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{p_2 (V_2/V_1)^{\gamma} V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}\,.$$

Celková změna energie obou trubic bude

$$\delta W = \delta W_{1\to 2} + \delta W_{2\to 1} = \frac{1}{\gamma - 1}\left[p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} V_2 - p_1 V_1 + p_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} V_1 - p_2 V_2 \right].$$

Pokud výchozí tlak a objem označíme $p_1 = p$, resp. $V_1 = V$ a zapíšeme změnu tlaku a objemu jako $p_2 = p + \delta p$, resp. $V_2 = V + \delta V$, můžeme provést rozvoj v poruchách. Nulté a první řády všech poruch se odečtou, rozvoje je tedy třeba dělat do druhého řádu

$$\delta W = \frac{1}{\gamma - 1}\left[p \left(\frac{V}{V + \delta V}\right)^{\gamma} (V + \delta V) - pV + (p + \delta p)\left(\frac{V + \delta V}{V}\right)^{\gamma} V - (p + \delta p)(V + \delta V) \right],$$

$$\delta W = \frac{1}{\gamma - 1}\left[p \left(1 + \frac{\delta V}{V}\right)^{-\gamma} (V + \delta V) - pV + (p + \delta p)\left(1 + \frac{\delta V}{V}\right)^{\gamma} V - (p + \delta p)(V + \delta V) \right].$$

Nyní využijeme pro rozvoj mocnin vztah

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \cdots$$

a po roznásobení všech členů ponecháme jen výrazy do druhého řádu v poruchách:

$$\delta W = \gamma \frac{p}{V} (\delta V)^2 + \delta p\, \delta V\,. \tag{1.575}$$

Vztah jsme odvodili za předpokladu dominantního pole, v případě slabého pole bychom museli u sousedních magnetických trubic ještě uvažovat různý magnetický indukční tok a tedy změnu magnetické energie, což by vedlo na nepatrně odlišný vztah. Objem trubice (předpokládáme, že je konečné délky) je potom

$$V = \int S\, \mathrm{d}l\,.$$

Plochu budeme volit kolmou na element délky trubice a vyjádříme ji ze zákona zachování indukčního toku $\phi = BS$, tj.

$$V = \phi \int \frac{\mathrm{d}l}{B} = \phi U\,; \quad U \equiv \int \frac{\mathrm{d}l}{B}\,.$$

Veličina U je objem magnetické trubice vztažený na jednotku indukčního toku. Vypočítá se jako převrácená hodnota magnetického pole vysčítaná podél celé délky trubice. Základním kritériem *stability* plazmatu vzhledem k výměně plazmatu v sousedních magnetických trubicích je vztah (vnitřní energie se nesmí snížit, neboť taková situace by vedla k výměně trubic a tím k nestabilitě)

$$\gamma \frac{p}{U}(\delta U)^2 + \delta p\, \delta U \geq 0\,; \qquad U \equiv \int \frac{\mathrm{d}l}{B}\,. \tag{1.576}$$

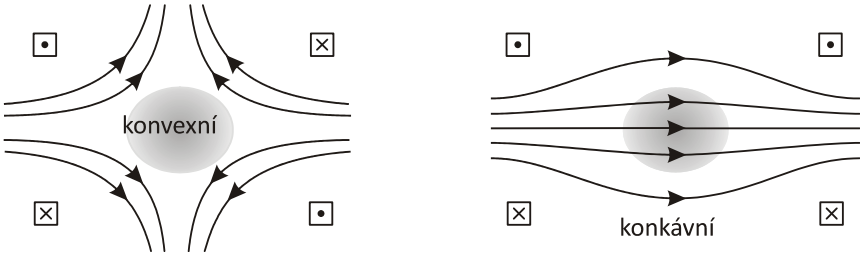
Postačující podmínka stability

Vzhledem k tomu, že první výraz je vždy nezáporný, je postačující (nikoli nutnou) podmínkou stability vztah

$$\delta p\, \delta U > 0\,; \qquad U \equiv \int \frac{\mathrm{d}l}{B}\,. \tag{1.577}$$

Oba členy musí mít stejné znaménko, tj. například s rostoucím tlakem musí růst i veličina U, tj. magnetické pole musí klesat. Ke stabilitě tedy postačí, aby ve směru poklesu tlaku plazmatu magnetické pole rostlo (nebo naopak ve směru růstu tlaku klesalo).

◖ Příklad 1.6: **Konvexní a konkávní zrcadlo**



Obr. 1.98: Konvexní a konkávní zrcadlo

Na obrázku je nalevo azimutální neboli konvexní (vzhledem k plazmatu) zrcadlo, někdy také nazývané *kasp* z anglického slova „cusp“ (roh, cíp). Budeme-li se pohybovat napříč indukčních čar (v tomto směru probíhá výměna plazmatu mezi magnetickými trubicemi) směrem od plazmatu, bude klesat tlak plazmatu a růst magnetické pole. To je postačující podmínka pro stabilitu a takováto konfigurace bude stabilní vzhledem k pronikání plazmatu napříč indukčních čar.

U klasického (konkávního) zrcadla je situace přesně opačná. Budeme-li se pohybovat napříč indukčních čar, klesá tlak plazmatu i magnetické pole. Taková situace nám stabilitu nezaručuje a systém může (ale nemusí) být nestabilní.

◗

Nutná i postačující podmínka stability

Vyšetřeme nyní celou podmínku stability (1.576). Pro její aplikaci je nutné nasčítat veličinu $1/B$ podél magnetické indukční čáry a zjistit závislost na poloze indukční čáry. Pokud se jednotlivé indukční čáry liší parametrem r (například vzdáleností od osy systému), musíme znát průběh tlaku $p(r)$ a závislost $U(r)$. Systém je stabilní právě tehdy, když

$$\gamma \frac{p}{U}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \geq 0\,; \qquad U \equiv \int \frac{\mathrm{d}l}{B}\,. \tag{1.578}$$

Někdy je výhodné přepsat podmínku *stability* (1.576) do alternativního tvaru

$$\frac{\delta \ln p}{\delta \ln U} \geq -\gamma\,. \tag{1.579}$$

Dalším alternativním přepisem podmínky *stability* (ve tvaru součinu) je

$$\delta U \delta\left[\ln\left(pV^{\gamma}\right)\right] \geq 0\,. \tag{1.580}$$

Vzhledem k tomu, že případný rozvoj či utlumení nestability závisí výhradně na průběhu tlaku, nazývají se nestability tohoto druhu někdy *tlakem řízené nestability*.

◖ Příklad 1.7: Nekonečný vodič
Uvažujte nekonečný vodič protékaný konstantním proudem. Předpokládejte, že v okolí vodiče je plazma.

1) Jak rychle může ubývat tlak plazmatu se vzdáleností od vodiče, aby byl systém ještě stabilní?
2) Nalezněte závislost β parametru na vzdálenosti od vodiče pro rozhraní mezi stabilitou a nestabilitou.

Řešení: Předpokládejme, že tlak ubývá se vzdáleností od vodiče jako C/r^{α}. Indukční čáry magnetického pole tvoří kružnice a na kružnici o poloměru r je magnetické pole dané Ampérovým zákonem, $B(r) = D/r$. Na celé kružnici má toto pole stejnou hodnotu, a proto obě klíčové veličiny jsou:

$$p(r) = \frac{C}{r^{\alpha}}\,; \qquad U(r) = \int \frac{\mathrm{d}l}{B(l)} = \frac{2\pi r}{D/r} = Kr^2\,.$$

Z kritéria stability ve tvaru (1.578) máme po dosazení za $p(r)$ a $U(r)$

$$\alpha \leq 2\gamma\,.$$

Parametr β bude mít pro $\alpha = 2\gamma$ závislost

$$\beta \equiv p/p_M \sim p/B^2 \sim 1/r^{\alpha+2} = 1/r^{2\gamma+2}\,.$$

Závěr: Plazma v okolí vodiče bude stabilní vzhledem k pohybu mezi magnetickými trubicemi, pokud tlak klesá pomaleji než $1/r^{2\gamma}$. Pokud tlak klesá rychleji, plazma je nestabilní. Kritická hodnota parametru β ubývá se vzdáleností jako $1/r^{2\gamma+2}$. ◗

◖ Příklad 1.8: Dipól

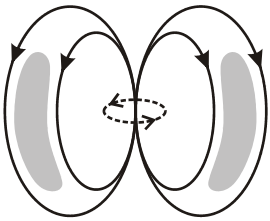
Řešte předchozí příklad pro vodič stočený do kružnice o poloměru a. Předpokládejte, že se nacházíte dosti daleko od vodiče, tj. $r \gg a$.

Řešení: Budeme postupovat obdobně jako u minulého příkladu, délka indukční čáry je úměrná vzdálenosti od vodiče a magnetické pole dipólu klesá dosti daleko od zdroje s třetí mocninou vzdálenosti

$$B(r) \sim \frac{1}{r^3}; \qquad \Rightarrow \qquad U(r) \equiv \int \frac{\mathrm{d}l}{B} \sim r^4 .$$

Aplikací kritéria na tlak s průběhem C/r^{α} získáme podmínku stability

$$\alpha \leq 4\gamma . \tag{1.581}$$



Obr. 1.99: Magnetický dipól

Závěr: Plazma v okolí magnetického dipólu bude stabilní vzhledem k pohybu mezi magnetickými trubicemi, pokud tlak klesá pomaleji než $1/r^{4\gamma}$. Pokud tlak klesá rychleji, plazma je nestabilní. Kritická hodnota parametru β ubývá se vzdáleností jako $1/r^{4\gamma+2}$.

Poznámka 1: Plazma ve Van Allenových pásech je stabilní, a proto zde tlak klesá pomaleji než $1/r^{4\gamma}$.

Poznámka 2: Jednou z konfigurací pro udržení plazmatu při termojaderné fúzi je také pole magnetického dipólu (obdoba Van Allenových pásů). Pokud je pokles tlaku plazmatu se vzdáleností od středu příliš rychlý, uniká plazma ze systému výměnnou nestabilitou.

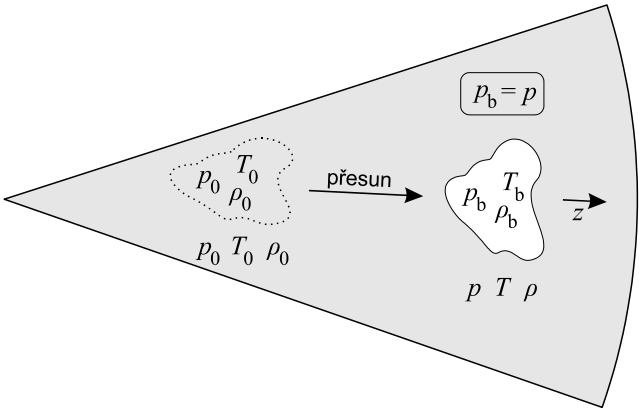
Poznámka 3: Pokud by parametr β nebyl malý, bylo by třeba při odvození uvažovat i změny magnetické energie. Kritérium stability v takovém případě je [13], [21]

$$\gamma \frac{p}{U}(\delta U)^2 + \left(1 + \gamma \frac{pU}{I}\right) \delta p \, \delta U \geq 0 ; \quad U \equiv \int \frac{\mathrm{d}l}{B} ; \quad I \equiv \frac{1}{\mu_0} \int B \, \mathrm{d}l . \tag{1.582}$$

Poznámka 4.: Přítomnost střižného (pole podél rozhraní, jehož velikost závisí na vzdálenosti od rozhraní) magnetického pole může tlakem řízné nestability stabilizovat (obdobně jakou RT nestability).

Schwarzschildovo kritérium konvekce

V roce 1906 odvodil německý fyzik Karl Schwarzschild (1873–1916) kritérium pro rozvoj konvektivního proudění v nitrech hvězd. Jeho kritérium pro vznik konvekce je platné nejenom ve hvězdách, ale i pro jakýkoli plazmový systém. Předpokládejme, že nějakým náhodným procesem dojde k přesunu malé oblasti plazmatu do jiného místa hvězdy. Pro určitost uvažujme malou oblast plazmatu, která se přesune z nitra hvězdy o něco výše ve směru osy z (viz následující obrázek).



Obr. 1.100: Schwarzschildovéo kritérium

Před přesunem jde jen o myšlenou oblast a parametry naší „bubliny" jsou shodné s parametry okolního plazmatu. Po přesunu bude ale situace jiná, v bublině bude teplota T_b, hustota ρ_b a tlak p_b, v okolním plazmatu budou hodnoty T, ρ, p. Jen tlaky se musí shodovat, jinak by hranice bubliny probíhala jinde. Pokud bude v nové oblasti hustota bubliny větší, než má okolí, bude mít tendenci se vracet zpět (ve směru tíže) a půjde o stabilní situaci. Pokud bude hustota bubliny menší, než má okolí, bude se dále přesouvat ve stejném směru a dojde k rozvoji konvekce (proudění). Říkáme, že situace je konvektivně nestabilní. Podmínka pro vznik proudění je tedy velmi jednoduchá:

► $$\rho_b < \rho\,. \tag{1.583}$$

Nejprve rozepíšeme levou stranu kritéria. Předpokládejme, že přesun bubliny je klasickou poruchou, trvá velmi krátkou dobu a bublina nestačí vyměnit s okolím tepelnou energii, tedy jde o adiabatický děj:

$$p_b = K\rho^{\gamma}\,; \qquad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_V}. \tag{1.584}$$

Nyní provedeme Taylorův rozvoj tohoto vztahu do 1. řádu:

$$\begin{aligned} p_b = K\rho^{\gamma} &\approx p_0 + \frac{\partial p_b}{\partial \rho}(\rho_b - \rho_0) = \\ &= p_0 + K\gamma\rho_0^{\gamma-1}(\rho_b - \rho_0) = \\ &= p_0 + \frac{p_0}{\rho_0}\gamma(\rho_b - \rho_0)\,. \end{aligned} \tag{1.585}$$

Konstantu K jsme určili ze vztahu (1.584). Nyní již snadno dopočteme hustotu bubliny do levé části kritéria (při výpočtu využijeme, že tlak v bublině je stejný jako v okolí):

$$\rho_b = \rho_0 + \frac{\rho_0}{\gamma p_0}\left(p - p_0\right). \tag{1.586}$$

Pravou stranu kritéria vyjádříme ze stavové rovnice plazmatu

$$p = A\rho T\,. \tag{1.587}$$

Opět provedeme rozvoj do 1. řádu a konstantu A poté vyjádříme z posledního vztahu:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho - \rho_0) + \frac{\partial p}{\partial T}(T - T_0) = \\ &= p_0 + AT_0(\rho - \rho_0) + A\rho_0(T - T_0) = \\ &= p_0 + \frac{p_0}{\rho_0}(\rho - \rho_0) + \frac{p_0}{T_0}(T - T_0) \end{aligned} \tag{1.588}$$

Nyní určíme hustotu do prvé části kritéria:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_0}{p_0}\left(p - p_0\right) - \frac{\rho_0}{T_0}(T - T_0) \tag{1.589}$$

Po dosazení (1.589) a (1.586) do kritéria (1.583) máme podmínku pro rozvoj konvekce

$$\frac{\rho_0}{\gamma p_0}\left(p - p_0\right) < \frac{\rho_0}{p_0}\left(p - p_0\right) - \frac{\rho_0}{T_0}(T - T_0)\,. \tag{1.590}$$

Další úpravy jsou již přímočaré a vedou na vztah

$$\mathrm{d}T < \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{T_0}{p_0}\mathrm{d}\,p\,. \tag{1.591}$$

Pro situaci znázorněnou na obrázku je ale dT i dp záporné (s rostoucí výškou klesá tlak i teplota), takže výsledný vztah je (indexy 0 už můžeme vynechat, jde o obecné místo, v němž jsme v plazmatu konali myšlenkový experiment):

► $$\left|\mathrm{d}T\right| > \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{T}{p}\left|\mathrm{d}\,p\right|\,. \tag{1.592}$$

K rozvoji konvekce je nutné, aby v plazmatu byl dostatečně velký teplotní gradient, což je například v našem Slunci splněno až 200 000 km pod povrchem a výše. Energie z nitra Slunce se nejprve přenáší zářením a až posledních 200 000 kilometrů prouděním. U hvězd, v jejichž nitru probíhá CNO cyklus je produkce energie v jádře podstatně vyšší než u našeho Slunce a teplotní gradient je naopak největší v okolí jádra. U těchto hvězd se konvekce rozvine pouze v okolí jádra a ve vnějších vrstvách se energie přenáší pouze zářením. Schwarzschildovo kritérium se uvádí v různých alternativních tvarech, uveďme ještě některé:

► $$\frac{\left|\mathrm{d}T\right|}{T} > \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{\left|\mathrm{d}\,p\right|}{p}\,, \tag{1.593}$$

► $$\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln p} < \frac{\gamma - 1}{\gamma}\,. \tag{1.594}$$

Schwarzschildovo kritérium platí obecně, a tam, kde je velký gradient teploty, dojde v plazmatu k nestabilní situaci a rozvoji proudění.

1.5.3 Rezistivní nestability

Základní vztahy

Nenulový odpor plazmatu umožňuje především přepojování magnetických indukčních čar a s tím spojenou ostrůvkovou (tearing) nestabilitu rozvíjející se na rozhraní dvou oblastí s opačným směrem magnetických indukčních čar. Na hranici takové oblasti nemůžeme zanedbat difúzní člen v rovnici pro magnetické pole (1.177). Podstatné jsou ovšem i jevy spojené s případným gradientem rezistivity napříč rozhraním. Proto odvodíme rovnici pro magnetické pole ještě jednou s uvážením nenulového gradientu rezistivity. V celé kapitole budeme uvažovat opět poruchy ve tvaru

$$\psi(t,\mathbf{q}_\mathrm{n},\mathbf{q}_\mathrm{p},) = \psi_0(\mathbf{q}_\mathrm{n}) + \psi_1(\mathbf{q}_\mathrm{n})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{q}_\mathrm{p}\cdot\mathbf{k}_\mathrm{p} - \mathrm{i}\,\omega t}\,, \tag{1.595}$$

kde $\mathbf{q}_\mathrm{n}$ jsou neperiodické proměnné (zpravidla kolmo na rozhraní) a $\mathbf{q}_\mathrm{p}$ periodické proměnné. Budeme také předpokládat „nestlačitelnost“ magnetického pole (je splněna vždy z Maxwellových rovnic) a nestlačitelnost plazmatu (je zpravidla splněna, dominuje-li zamrzání plazmatu nad difúzí, tato situace platí pro naprostou většinu laboratorního i vesmírného plazmatu):

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} \;=\; 0\,, \tag{1.596}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} \;=\; 0\,. \tag{1.597}$$

Rovnice pro magnetické pole

Vyjděme z Maxwellovy rovnice pro časový vývoj magnetického pole

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.598}$$

a Ohmova zákona v diferenciálním tvaru

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\,; \qquad \sigma = \sigma(\mathbf{x})\,. \tag{1.599}$$

Do rovnice (1.598) dosadíme za elektrické pole z (1.599) a po přímočarých úpravách dostaneme

► $$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \;=\; \frac{\eta}{\mu_0}\nabla^2\mathbf{B} + \mathrm{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0}(\nabla\eta)\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\,, \tag{1.600}$$

kde jsme zavedli rezistivitu vztahem

$$\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma(\mathbf{x})}\,. \tag{1.601}$$

První člen popisuje difúzi pole, druhý představuje zamrzání a v dalším uvidíme, že třetí člen se chová jako nové silové pole, které může výrazně ovlivnit přepojování magnetických indukčních čar. Napišme ještě linearizovaný tvar rovnice pro magnetické pole pro $\mathbf{u}_0 = 0$ a $\mathbf{B}_0$ splňující rovnici $\nabla^2\mathbf{B}_0 = 0$ (magnetické pole splňuje vlnovou rovnici a toto je její stacionární podoba):

► $$\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta_0}{\mu_0}\nabla^2 \delta \mathbf{B} + \mathrm{rot}(\delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) - \frac{1}{\mu_0}(\nabla \eta_0) \times \mathrm{rot}\, \delta \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0}(\nabla \delta\eta) \times \mathrm{rot}\, \mathbf{B}_0 \,. \quad (1.602)$$

Rovnice pro rezistivitu

Původ gradientu rezistivity plazmatu může být různý. Zpravidla známe počáteční průběh rezistivity a potřebujeme zjistit její změny způsobené průchodem vlny nebo nestability. V takovém případě se nemusíme opírat o detailní mechanizmus původu vodivosti plazmatu a můžeme konstatovat, že se díky pohybům plazmatu budou přenášet od místa k místu i oblasti s konkrétní rezistivitou, tedy bude platit $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}t = 0$. Po rozepsání máme rovnici pro rezistivitu ve tvaru

► $$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \eta = 0 \,. \quad (1.603)$$

Linearizovaná podoba rovnice pro rezistivitu bude

$$\frac{\partial \delta\eta}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla)\, \eta_0 = 0 \,.$$

Oba členy lze přímo integrovat v čase

$$\delta\eta + (\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\, \eta_0 = 0 \,.$$

Po vynechání periodických proměnných máme finální tvar

► $$\eta_1 + (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla)\, \eta_0 = 0 \,. \quad (1.604)$$

Tím, že neřešíme fyzikální mechanizmy, ale pouhý přesun oblastí s danou rezistivitou, můžeme z vektoru posunutí přímo spočítat poruchu rezistivity η_1. Celá rovnice pro rezistivitu je proto v lineárním přiblížení triviální záležitostí.

Význam gradientu η_0

Přepišme Ohmův zákon (1.599) do tvaru s rezistivitou:

$$\eta \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \,.$$

V lineárním přiblížení máme

$$\delta\eta\, \mathbf{j}_0 + \eta_0\, \delta\mathbf{j} = \delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 \,.$$

Vzhledem k tomu, že jde o algebraické vztahy, můžeme na obou stranách rovnosti vypustit periodickou část

$$\eta_1\, \mathbf{j}_0 + \eta_0\, \mathbf{j}_1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 \,.$$

Poruchu η_1 dosadíme ze vztahu (1.604) a určíme poruchu proudové hustoty $\mathbf{j}_1$:

$$\mathbf{j}_1 = \frac{(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla)\, \eta_0}{\eta_0}\, \mathbf{j}_0 + \frac{\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0}{\eta_0} \,.$$

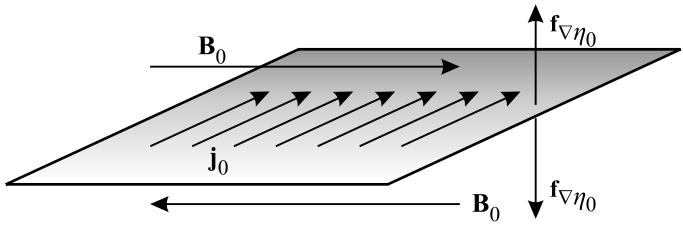
Novému elektrickému proudu bude příslušet hustota Lorentzovy síly působící na plazma

$$\mathbf{f}_1 \equiv \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 = \frac{(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla)\,\eta_0}{\eta_0}\left(\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0\right) + \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0 + (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0}{\eta_0}.$$

Zatímco druhý člen je standardní změna hustoty síly způsobená perturbacemi, první člen je zcela nový. Jde o sílu způsobenou gradientem počátečního rozložení rezistivity, který můžeme zapsat jako:

► $$\mathbf{f}^{(1)}_{\nabla\eta_0} \equiv \frac{(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla)\,\eta_0}{\eta_0}\left(\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0\right). \tag{1.605}$$

Pokud má magnetické pole na obou stranách rozhraní opačný směr, teče proudová hustota $\mathbf{j}_0$ v rozhraní a nová síla má směr kolmý na rozhraní. Taková síla může výrazně vznik nestability na rozhraní ovlivnit (podobně jako tíhové zrychlení je podnětem k rozvoji Rayleighovy-Taylorovy nestability). V tomto případě bude ale na jedné straně nestabilitu podporovat a na druhé tlumit.



Obr. 1.101: Neutrální vrstva v rezistivní magnetohydrodynamice

Rovnice pro vektor posunutí

Pohybovou rovnici budeme uvažovat ve tvaru

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\,\mathbf{B})\times\mathbf{B}\ , \tag{1.606}$$

po linearizaci máme

► $$\rho_0\frac{\partial^2\delta\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} + = -\nabla\delta p + \delta\rho\ \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0)\times\delta\mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{B})\times\mathbf{B}_0\,. \tag{1.607}$$

Další rovnice

Rovnice (1.602), (1.604) a (1.607) je třeba doplnit podmínkami nestlačitelnosti nebo nějakým jiným uzavřením soustavy. V případě nestlačitelnosti bude tlak i hustota sledovat pohybující se plazma obdobně jako rezistivita a můžeme tedy psát analogicky se vztahem (1.604)

► $$\rho_1 + (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla)\,\rho_0 = 0\,, \tag{1.608}$$

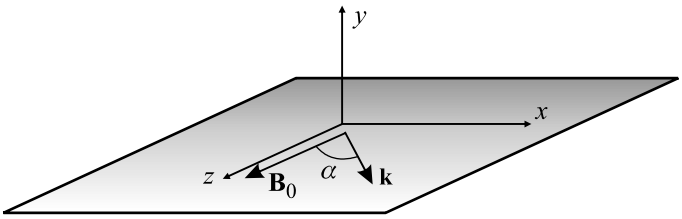
► $$p_1 + (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla)\,p_0 = 0\,. \tag{1.609}$$

Jedinými skutečnými rovnicemi jsou tedy rovnice pro magnetické pole a pro vektor posunutí. Zbylé rovnice jsou jen algebraické a triviálně řešitelné.

Ostrůvková (tearing) nestabilita

Geometrie úlohy

Uvažujme dvě oblasti s opačně orientovanými magnetickými poli oddělenými rovinným rozhraním. Souřadnicovou soustavu zvolíme obdobně jako při řešení Rayleighovy-Taylorovy nestability, tedy tak, aby rozhraní bylo v rovině $y = 0$ a magnetický vektor mířil v ose z. Veličiny budeme opět rozkládat do paralelního směru (roviny $y = 0$) a kolmého směru



Obr. 1.102: Geometrie úlohy

Porucha libovolné veličiny potom bude mít tvar

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \psi_0(y) + \delta\psi = \psi_0(y) + \psi_1(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_z y - \omega t]}\,. \tag{1.610}$$

Neperiodická proměnná je ve směru kolmém na rozhraní, periodické proměnné jsou x a z. Z podmínek nestlačitelnosti (1.596) a (1.597) budeme při této volbě mít

$$\operatorname{div}\delta\mathbf{B} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\delta B_x}{\partial x} + \frac{\partial\delta B_y}{\partial y} + \frac{\partial\delta B_z}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow$$

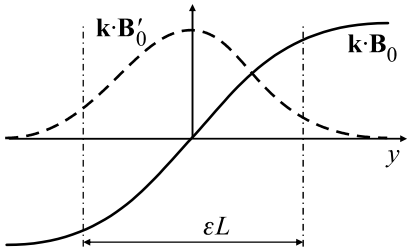
$$\blacktriangleright \qquad \frac{\mathrm{d}B_{1\perp}}{\mathrm{d}y} + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{1\parallel} = 0\ . \tag{1.611}$$

Stejná situace je s vektorem posunutí (div $\boldsymbol{\xi} = 0$),

$$\blacktriangleright \qquad \frac{\mathrm{d}\xi_{1\perp}}{\mathrm{d}y} + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_{1\parallel} = 0\ . \tag{1.612}$$

Obdobně jako u RT nestability je třeba nalézt kolmou složku vektoru posunutí a kolmou složku poruchy magnetického pole, vodorovné projekce je možné opět eliminovat pomocí vztahů (1.611) a (1.612).

Při známém průběhu $\mathbf{B}_0(y)$ a $\eta_0(y)$, případně ostatních rovnovážných hodnot, vede za předpokladu symetrie (1.610) celý problém na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Buď je řešíme numericky, nebo můžeme provádět různé rozměrové odhady, ve kterých vystupuje šířka přechodové oblasti mezi oběma směry pole εL, „malost“ přechodové oblasti je určena parametrem ε.



Obr. 1.103: Přechodová oblast

Na vodorovné ose je vzdálenost od rozhraní. Veličina $\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0$ je vlastně projekcí pole do směru šíření vlny (až na normovací konstantu). Vidíme, že na jedné straně poloprostoru je kladná a na druhé záporná. Samotná rovina oddělující poloprostory s různým polem je definovaná vztahem

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0 = 0 \tag{1.613}$$

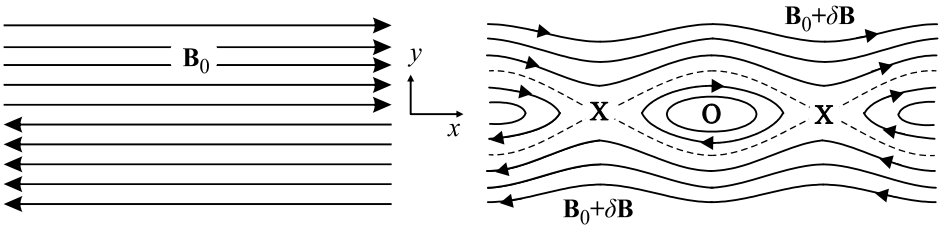
a říkáme jí rezonanční povrch. V grafu je čárkovaně vykreslena derivace této veličiny, která má v místě rezonančního povrchu maximum. V rozměrové analýze problému lze pro derivaci $\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0$ psát

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0' \approx \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0}{\varepsilon L}\,.$$

Nebo naopak, veličina $\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0$, která je nulová na rezonančním povrchu, se píše jako

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0 \approx \varepsilon L\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0'\,.$$

Z rozměrové analýzy rovnic v popsané geometrii lze odhadnout koeficient nárůstu nestability γ definovaný vztahem (1.451). Numerické řešení rovnic dá kolem rezonančního povrchu charakteristický průběh magnetického pole s magnetickými ostrovy (body O) a průsečíky separatris, kde dochází k rekonekci (body X).



Obr. 1.104: Rekonekce a vznik bodů X, O

Elektrický proud teče i nadále v rovině rozhraní, není již ale homogenní. V místech magnetických ostrovů je proudová hustota vyšší. Dojde k rozvrstvení (roztrhání) proudové stěny. Odtud pochází anglický název *tearing instability* (tear = trhat).

Řízené rezistivní nestability

Řízenou nestabilitou nazýváme nestabilitu, jejíž chování ovlivňuje nějaká vnější síla. V případě Rayleighovy-Taylorovy nestability to může být například tíhové pole. V jednom směru tíhové pole situaci stabilizuje (tekutina s vyšší hustotou je dole) v druhém směru dochází k řízené nestabilitě (hustší tekutina je nahoře). Chování ostrůvkové

nestability může ovlivnit tíhové pole také (pak hovoříme o tzv. *g módu*). Mnohem důležitější je ale ovlivnění způsobené gradientem rezistivity plazmatu, který je kolmý na rozhraní (tzv. *rippling mód*). Již jsme si ukázali, že se takový gradient projeví jako síla působící kolmo na rozhraní. Jenže na rozdíl od tíhového zrychlení má v obou poloprostorech opačný směr (buď k rezonančnímu povrchu, nebo od něho). V jednom poloprostoru tato řídící síla nestabilitu stabilizuje a v druhém ji naopak rozvíjí. Je zřejmé, že rozvoj nastane v poloprostoru s nižší rezistivitou, kde mohou téci vyšší proudy.

Tokamakové nestability

Jestliže v tokamaku označíme toroidální úhel φ a poloidální θ, můžeme pro různé veličiny psát

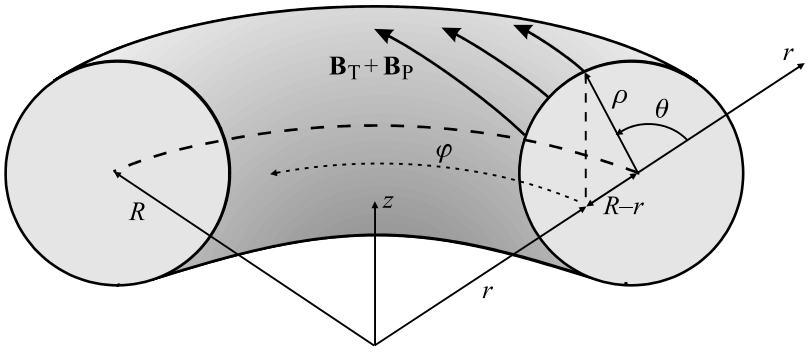
$$\psi = \psi(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[m\theta+n\varphi-\omega t]}\,; \qquad m,n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \tag{1.614}$$

Rovnice div **B** = 0 pro magnetické pole dá

$$\frac{\mathrm{d}B_\rho}{\mathrm{d}\rho} + \frac{m}{\rho}B_\theta + \frac{n}{r}B_\varphi = 0\,. \tag{1.615}$$

Periodická část této rovnice není nic jiného než definice rezonančního povrchu:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = \frac{m}{\rho}B_\theta + \frac{n}{r}B_\varphi = 0\,. \tag{1.616}$$



Obr. 1.105: Situace v tokamaku

Rovnici lze přepsat do tvaru

$$\frac{\rho}{r}\frac{B_\varphi}{B_\theta} = \frac{m}{n}\,.$$

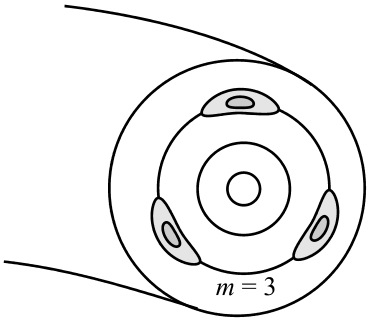
Znaménko není podstatné, obě čísla *m*, *n* mohou nabývat kladných i záporných hodnot. Zaveďme nyní tzv. rotační číslo (bezpečnostní parametr) jako průměrný počet toroidálních otáček pole na jednu poloidální:

$$q(\rho) \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\rho}{r}\frac{r\,\mathrm{d}\varphi}{\rho\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\rho}{r}\frac{B_\varphi}{B_\theta} \approx \frac{\rho}{R}\frac{B_\mathrm{T}}{B_\mathrm{P}}\,.$$

V tokamacích s $a \ll R$ platí proto pro rezonanční povrchy rovnice

► $$q(\rho) \simeq \frac{\rho}{R}\frac{B_\mathrm{T}}{B_\mathrm{P}} = \frac{m}{n} \ . \tag{1.617}$$

Na těchto tzv. „*mn*“ površích dochází k rozvoji ostrůvkové (tearing) nestability. Na povrchu se objeví *m* ostrovů. Jejich opakovaná geneze je doprovázena známými pilovitými signály elektrického pole.



Obr. 1.106: Vznik ostrovů v tokamaku pro $m = 3$

1.6 Statistický popis plazmatu

Při popisu typického plazmatu je technicky nemožné popsat trajektorie všech částic. Jen v řídkém plazmatu mezihvězdného prostoru nalezneme miliony částic v jednom metru krychlovém, v tokamacích 10^{18} částic v m^3 a v jádru Slunce dokonce 10^{31} částic v m^3. Pro tak obrovské systémy částic je mnohdy výhodné využívat statistický popis a spokojit se jen s informací o statistickém rozdělení jednotlivých druhů částic a o jejich průměrném chování jakožto celku. Statistickým popisem plazmatu se budeme zabývat v této kapitole.

1.6.1 Boltzmannova rovnice

Předpokládejme, že systém může být složen z několika druhů částic (elektrony, neutrály, ionty), které budeme označovat indexem α. V celé této kapitole platí sčítací konvence pro indexy psané latinkou (i, j, k,…). Neplatí pro řecké indexy popisující druh částic. Označme hustotu pravděpodobnosti výskytu částic druhu α

$$f_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\,.$$

V termodynamické rovnováze nezávisí hustota pravděpodobnosti na čase a splývá s kanonickou nebo grandkanonickou rozdělovací funkcí ρ [2]. Hustotu pravděpodobnosti závislou na čase budeme normovat vzhledem k počtu částic, tj.

$$\begin{aligned} \int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha &= n_\alpha(t, \mathbf{x})\,, \\ \int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha &= N_\alpha(t)\,. \end{aligned} \qquad (1.618)$$

Integrováním přes rychlostní prostor získáme koncentraci částic

$$n_\alpha = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N_\alpha}{\Delta V}\,, \qquad (1.619)$$

a dostaneme se tak na pozici kontinua. Dalším středováním přes prostorové proměnné získáme celkový počet částic N_α. Při středování obecné dynamické proměnné A musíme vzhledem ke způsobu normování výsledek dělit součtem všech pravděpodobností:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(t, \mathbf{x}) &= \langle A \rangle_{\mathbf{v}} = \frac{\int A\, f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha}\,; \\ \mathscr{A}(t) &= \langle A \rangle_{\mathbf{x},\mathbf{v}} = \frac{\int A\, f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha}\,. \end{aligned} \qquad (1.620)$$

Veličina $\mathscr{A}(t, \mathbf{x})$ má význam hustoty veličiny A. Díky normování je

► $$\int A\, f_\alpha(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_\alpha)\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \;=\; n_\alpha(t,\mathbf{x})\,\mathscr{A}(t,\mathbf{x}) \;. \tag{1.621}$$

Temto výraz je při výpočtech velmi užitečný a často ho budeme používat.

Různé varianty Boltzmannovy rovnice

Hustota pravděpodobnosti výskytu částic druhu α se s časem mění z důvodu srážek částic se sebou samými i s ostatními druhy:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_\alpha(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_\alpha) = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \;. \tag{1.622}$$

Členy napravo se nazývají Boltzmannovy srážkové integrály a budou diskutovány v následující kapitole. Rozepišme úplnou derivaci na levé straně:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha k}}\frac{\mathrm{d}v_{\alpha k}}{\mathrm{d}t} = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \;.$$

Sumační konvence platí v předchozím vztahu jen pro indexy psané latinkou, pro řecké nikoli. Časové derivace poloh jsou rychlosti a časové derivace rychlostí jsou zrychlení, která vyjádříme pomocí síly z druhého Newtonova zákona:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_{\alpha k}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} + \frac{F_{\alpha k}}{m_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha k}} = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \;.$$

Členy přes které se sčítá na levé straně, zapíšeme jako působící operátory:

► $$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \;+\; (\mathbf{v}_\alpha\cdot\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x})\, f_\alpha \;+\; \frac{1}{m_\alpha}(\mathbf{F}_\alpha\cdot\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{v})\, f_\alpha \;=\; \sum_\beta S_{\alpha\beta} \;. \tag{1.623}$$

Získaná rovnice se nazývá Boltzmannova rovnice a je základní rovnicí statistiky nerovnovážných procesů. Členy na pravé straně se nazývají Boltzmannův srážkový integrál (viz str. 208) lze je vyjádřit jako integrál přes část fázového prostoru). Podle možných způsobů vyjádření srážkového integrálu tuto rovnici nazýváme různými způsoby:

Boltzmannova rovnice

Srážky jsou zcela obecné a vyjadřují se pomocí srážkového integrálu (viz str. 208). Boltzmannova rovnice je pojmenována podle Ludwiga Boltzmanna (1844–1906), rakouského fyzika a zakladatele statistické fyziky.

Fokkerova-Planckova rovnice, Landauova rovnice

Srážkový člen započítává jen párové Coulombovy interakce, pro které je účinný průřez dobře znám. Rovnice je pojmenována podle Adriaana Daniëla Fokkera (1887–1972), holandského fyzika a muzikanta a podle Maxe Plancka (1858–1947), rakouského fyzika a jednoho ze zakladatelů kvantové teorie. Velmi příbuznou variantou Fokkerovy Planckovy rovnice je *Landauova rovnice*.

Jako dolní mez párových Coulombových srážek zvolíme záměrnou vzdálenost, při které se srážející se částice odchýlí o pravý úhel (srážky na menší vzdálenosti jsou málo pravděpodobné) a jako maximální záměrnou vzdálenost srážky Debyeovu vzdálenost

(vzdálenost přirozeného stínění bodových zdrojů). Rovnice je pojmenována podle Lva Davidoviče Landaua (1908–1968), sovětského teoretického fyzika a nositele Nobelovy ceny za fyziku pro rok 1962.

BGK rovnice

Předpokládáme, že systém není příliš daleko od lokální termodynamické rovnováhy f_{LE} a srážky způsobují jeho návrat do této rovnováhy, srážkový člen má jednoduchý tvar

$$S_\alpha \simeq (\Delta f_\alpha/\Delta t)_{\mathrm{col}} = -(f_\alpha - f_{\mathrm{LE}})/\tau_{\mathrm{c}} = -\nu_{\mathrm{c}}(f_\alpha - f_{\mathrm{LE}}) \,,$$

kde τ_{c} je střední doba mezi srážkami a ν_{c} je srážková frekvence (charakteristická konstanta). Rovnice je pojmenována podle autorů, jimiž jsou indický matematik Prabhu Lal Bhatnagar (1912–1976), americký teoretický fyzik Eugene Paul Gross (1926–1991) a americký matematik a astrofyzik Max Krook (1913–1985).

Vlasovova rovnice

Srážky nemají vliv nebo je zanedbáváme (na pravé straně je nula) a působící sílou je jen Lorentzova síla. Jde o nejméně přesnou, ale nejčastěji používanou aproximaci. Rovnice je pojmenována podle Anatolie Alexandroviče Vlasova (1908–1975), sovětského teoretického fyzika, který se po většinu života věnoval statistické fyzice.

◖ **Příklad 1.9:** Ukažte, že stacionární řešení Boltzmannovy (Vlasovovy) rovnice vede na kanonické rozdělení. Řešte v jedné dimenzi, pro jediný druh částic, které nepodléhají srážkám a pro potenciální silové pole $F = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$.

Řešení: Z Boltzmannovy rovnice v tomto případě zbude

$$v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \,.$$

Rovnici řešme substitucí $f(x,v) = A(x)\,B(v)$. Pokusíme se separovat proměnné:

$$v\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}B - \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}A\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}A}{A\,\mathrm{d}V} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}B}{B\,v\,\mathrm{d}v} \,.$$

Na levé straně rovnosti jsou všechny proměnné funkcí souřadnice, na pravé straně funkcí rychlosti. Je zřejmé, že mají-li se sobě rovnat dvě funkce různých proměnných, musí být obě konstantní:

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}V} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}A}{A} = C\,\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad A(x) = K_x \exp[C\,V(x)] \,;$$

$$\frac{1}{mB\,v}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}v} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}B}{B} = C\,mv\,\mathrm{d}v \quad \Rightarrow \quad B(v) = K_v \exp[Cmv^2/2] \,.$$

Celkové řešení je

$$f(x,v) = A(x)\cdot B(v) = K\exp\left[C\left(mv^2/2 + V(x)\right)\right] \,.$$

Řešení má skutečně charakter kanonického rozdělení. Hodnotu koeficientu C bychom zjistili porovnáním s experimentem, v našem případě s termodynamikou, stejně jako při odvození kanonického rozdělení v učebnicích statistiky, například v [2]. Vyjde

$$C = -1/k_{\mathrm{B}}T\,. \tag{1.624}$$

Poznámka (Sahova rovnice): Z rovnovážného rozdělení a kvazineutrality plyne okamžitě rovnice pro poměrné zastoupení iontů různé násobnosti v plazmatu. Tuto rovnici poprvé odvodil indický astrofyzik Mehd Nad Saha (1893–1956) v roce 1920 a nezávisle na něm v roce 1923 také americký fyzik a chemik Irving Langmuir (1881–1957). Dnes se zapisuje ve tvaru

$$\frac{n_{i+1}n_{\mathrm{e}}}{n_i} = C\frac{g_{i+1}g_{\mathrm{e}}}{g_i}\exp\left[-\frac{\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i}{k_{\mathrm{B}}T}\right];$$
$$C = \frac{\left(2\pi m_{\mathrm{e}}k_{\mathrm{B}}T\right)^{3/2}}{\left(2\pi\hbar\right)^3}, \tag{1.625}$$

kde g_i je stupeň degenerace pro ionty násobnosti i, g_{e} je stupeň degenerace elektronů, zpravidla se pokládá roven 2, ε_i je energie potřebná k vytvoření iontu násobnosti i (k odstranění i elektronů z obalu, $i = 0$ odpovídá neutrálům). Faktor $(2\pi\hbar)^3$ je velikost jednoho kvantového stavu elektronu ve fázovém prostoru, podrobněji viz [2]. *Sahova rovnice* se často používá pro určení koncentrace elektronů při jednonásobné ionizaci, kdy $n_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{e}}$:

$$\frac{n_{\mathrm{e}}^2}{n_{\mathrm{n}}} = C\frac{2g_1}{g_0}\exp\left[-\frac{I}{k_{\mathrm{B}}T}\right], \tag{1.626}$$

kde I je ionizační energie.

Boltzmannova rovnice v chaotických rychlostech

Vždy musíme rozlišovat mezi třemi rychlostmi:

$\mathbf{v}_\alpha$	fázová proměnná,	
$\mathbf{u}_\alpha(t,\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle$	rychlostní pole (průměrná, středovaná rychlost),	(1.627)
$\mathbf{w}_\alpha \equiv \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha$	chaotická (tepelná) složka rychlosti.	

Doposud jsme využívali fázový prostor se sedmi proměnnými (t, $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}_\alpha$). Fázová rychlost obsahuje část odpovídající proudění i tepelnou část ($\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha$). Někdy je výhodné pracovat s proměnnými obsahujícími jen tepelnou část pohybu, tj. provést transformaci

$$(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_\alpha) \quad \rightarrow \quad (t,\mathbf{x},\mathbf{w}_\alpha)\,.$$

V Boltzmannově rovnici potom musíme nahradit derivace a rychlosti podle schématu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \;\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial w_k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial w_k} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial u_k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial w_k},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \;\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial w_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial w_k} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial w_k},$$

$$\frac{\partial}{\partial v_j} \;\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial w_j},$$

$$v_j \;\rightarrow\; w_j+u_j(t,\mathbf{x}).$$

Výsledek je

$$\frac{\mathrm{d}f_\alpha}{\mathrm{d}t}+\left(\mathbf{w}_\alpha\cdot\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x}\right)f_\alpha+\left(\frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha}-\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_\alpha}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial\mathbf{w}_\alpha}-$$

$$-\left[\left(\mathbf{w}_\alpha\cdot\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x}\right)\mathbf{u}_\alpha\right]\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial\mathbf{w}_\alpha}=\sum_\beta S_{\alpha\beta}\,, \qquad (1.628)$$

$$\text{kde}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}_\alpha\cdot\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x}\,.$$

Relativistická Boltzmannova rovnice

Tuto podkapitolu může čtenář při studiu vynechat. Obecný přepis srážkového členu do relativity neexistuje. Leckdy ho není třeba ani znát, neboť při vysokých rychlostech účinný průřez srážek zpravidla rychle klesá a lze je zanedbat. Neplatí to ale paušálně a relativistický přepis srážkového členu by byl v některých případech velmi užitečný. S levou stranou Boltzmannovy rovnice je situace jednodušší, lze ji snadno přepsat do lorentzovsky kovariantního tvaru. Odvození provedeme pro jeden jediný typ částic, řecké indey budou v této podkapitole označovat pouze složky čtyřvektorů. Namísto rychlosti, jakožto nezávislé proměnné, musíme použít hybnost, resp. čtyřhybnost, tedy

$$f=f(x^\alpha,P^\alpha)=f(t,\mathbf{x},E,\mathbf{p})\,; \qquad (1.629)$$

Čtyřhybnost má vzájemně provázané složky (velikost čtyřhybnosti je $-m_0^2c^2$), tedy platí

$$E^2=\mathbf{p}^2c^2+m_0^2c^4\,, \qquad (1.630)$$

a tedy $E=E(\mathbf{p})$. Normování se nyní bude týkat hybnosti namísto rychlosti, takže budeme požadovat

$$\int f(x^\alpha,P^\alpha)\,\mathrm{d}^3p=n(t,\mathbf{x})\,. \qquad (1.631)$$

Takový zápis vypadá na první pohled nerelativisticky, ale musíme si uvědomit, že $E=E(\mathbf{p})$ a relativisticky lze normování zapsat přes Diracovu distribuci:

► $$\int f(t,\mathbf{x},E,\mathbf{p})\,\delta\big(E-E(\mathbf{p})\big)\,\mathrm{d}^4P=n(t,\mathbf{x})\,. \qquad (1.632)$$

Relaci (1.622) musíme relativisticky zobecnit, proto namísto souřadnicového času použijeme vlastní čas, který je invariantem Lorentzovy transformace, tj.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} = S\,; \tag{1.633}$$

Po rozepsání derivace vlevo máme

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial f}{\partial P^\alpha}\frac{\mathrm{d}P^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = S\,. \tag{1.634}$$

První člen obsahuje jak časové, tak prostorové derivace a je zobecněním prvních dvou členů na levé straně Boltzmannovy rovnice. Uvědomíme-li si význam obou časových derivací, můžeme psát

$$U^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + F^\alpha \frac{\partial f}{\partial P^\alpha} = S\,. \tag{1.635}$$

Lorentzovu čtyřsílu vyjádříme ze vztahu I.1.267, viz první dil „Vybraných kapitol“

$$U^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + QF^{\alpha\beta}U_\beta \frac{\partial f}{\partial P^\alpha} = S\,. \tag{1.636}$$

Jako poslední krok musíme čtyřrychlosti převést na čtyřhybnosti:

$$P^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + QF^{\alpha\beta}P_\beta \frac{\partial f}{\partial P^\alpha} = m_0 S\,. \tag{1.637}$$

Jedná se o hledaný relativisticky kovariantní zápis Boltzmannovy rovnice. V prvním členu můžeme čtyřhybnost přesunout k hustotě pravděpodobnosti a nic se nestane. U druhého členu ale to lze udělat také, protože

$$\frac{\partial}{\partial P^\alpha}\left(F^{\alpha\beta}P_\beta f\right) = F^{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} f + F^{\alpha\beta}P_\beta \frac{\partial f}{\partial P^\alpha} = F^{\alpha\beta}P_\beta \frac{\partial f}{\partial P^\alpha}. \tag{1.638}$$

První člen je po derivování součinu nulový, protože jde o zúžení symetrické a antisymetrické matice. Pro obecné silové pole závislé na rychlosti to ale platit nebude. Můžeme tedy psát

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(P^\alpha f\right) + \frac{\partial}{\partial P^\alpha}\left(QF^{\alpha\beta}P_\beta f\right) = m_0 S\,. \tag{1.639}$$

Tento tvar je elegantním zápisem Boltzmannovy rovnice pro případ elektromagnetického pole a Lorentzovy čtyřsíly.

Obecně relativistická varianta

Tuto podkapitolu může čtenář při studiu bez problémů vynechat. Zajímavou úlohou je přepis Boltzmannovy rovnice v obecné relativitě, kde je pohyb částic dán zakřivením časoprostoru. V tomto případě zavádíme kovariantní derivaci čtyřvektoru

$$\frac{DA^\alpha}{Dx^\nu} \equiv A^\alpha{}_{;\nu} = A^\alpha{}_{,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}A^\mu\,, \tag{1.640}$$

kde první člen je obyčejná parciální derivace a druhý člen souvisí se změnou čtyřvektoru A^α způsobenou zakřivením časoprostoru. Koeficienty Γ se nazývají Christofellovy symboly a jsou dány formulí

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta} \right). \tag{1.641}$$

Rovnice geodetiky (nejrovnější možné dráhy v zakřiveném časoprostoru) je

$$\mathrm{d}^2 x^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \mathrm{d}x^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu} = 0 . \tag{1.642}$$

Čtyřsílu v rovnici (1.635) vyjádříme z rovnice geodetiky:

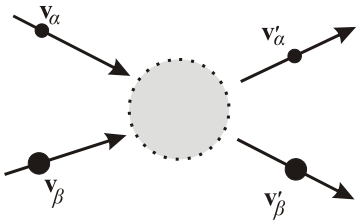
$$F^{\alpha} = \frac{\mathrm{d}P^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = m_0 \frac{\mathrm{d}U^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = m_0 \frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau^2} = -m_0 \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} = -m_0 \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu} . \tag{1.643}$$

Boltzmannova rovnice (1.635) po přepsání do čtyřhybností bude mít tvar

► $$P^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} P^{\mu} P^{\nu} \frac{\partial f}{\partial P^{\alpha}} = m_0 S . \tag{1.644}$$

Boltzmannův srážkový člen

V této kapitole se budeme zabývat pravou stranou nerelativistické Boltzmannovy rovnice, tedy srážkami. Předpokládejme pružnou srážku dvou částic α a β.



Obr. 1.107: Srážka dvou částic

Nejprve přejdeme od rychlostí částic $\mathbf{v}_{\alpha}$ a $\mathbf{v}_{\beta}$ k relativní rychlosti $\mathbf{g}$ (někdy ji označujeme $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$) a těžišťové rychlosti $\mathbf{v}_{\mathrm{T}}$ (někdy ji označujeme $\mathbf{v}_{(\alpha\beta)}$). Transformace jedním směrem má jednoduchý tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &\equiv \mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta} ; \\ \mathbf{v}_{\mathrm{T}} &\equiv \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} = \frac{m_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha} + m_{\beta}\mathbf{v}_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} . \end{aligned} \tag{1.645}$$

Determinant matice transformace je roven jedné, proto nalezneme inverzní matici tak, že ke každému prvku určíme subdeterminant, opatříme ho znaménkem a matici transponujeme:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\alpha} &= \mathbf{v}_{\mathrm{T}} + \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \mathbf{g} ; \\ \mathbf{v}_{\beta} &= \mathbf{v}_{\mathrm{T}} - \frac{m_{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \mathbf{g} . \end{aligned} \tag{1.646}$$

Zformulujme v nových proměnných zákon zachování energie a hybnosti:

$$\mathbf{p} = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta = (m_\alpha + m_\beta)\,\mathbf{v}_\mathrm{T} = \text{const},$$
$$E = \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\beta \mathbf{v}_\beta^2 = \frac{1}{2}(m_\alpha + m_\beta)\,\mathbf{v}_\mathrm{T}^2 \;+\; \frac{1}{2}\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\mathbf{g}^2 = \text{const}\,. \tag{1.647}$$

Zákon zachování hybnosti vede na zachování těžišťové rychlosti. Zákon zachování energie v kombinaci se zákonem zachování hybnosti vede na zachování velikosti vzájemné rychlosti:

- Těžišťová rychlost obou částic se při srážce nemění.
- Velikost vzájemné rychlosti dvou částic se při srážce nemění.

► $$\begin{aligned} \mathbf{v}_\mathrm{T} &= \text{const}\,, \\ |\,\mathbf{g}\,| &= \text{const}\,. \end{aligned} \tag{1.648}$$

Jediná veličina, která se při srážce mění, je směr vzájemné rychlosti. Zaveďme proto dvě nové veličiny charakterizující srážku:

$$g_{\alpha\beta} \equiv |\,\mathbf{g}\,| = |\,\mathbf{v}_{\alpha\beta}\,|\,;$$
$$\mathbf{k}_{\alpha\beta} \equiv \frac{\mathbf{g}}{|\,\mathbf{g}\,|} = \frac{\mathbf{v}_{\alpha\beta}}{|\,\mathbf{v}_{\alpha\beta}\,|}\,. \tag{1.649}$$

První veličina je velikost vzájemné rychlosti a po celou dobu srážky se nemění, tj. platí $g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta}$. Druhá veličina je směr vzájemné rychlosti a představuje 2 stupně volnosti srážky (dvě složky vektoru **k**, třetí lze dopočítat, protože jde o vektor jednotkový). V literatuře se často označuje vzájemná rychlost symbolem **g**, neboli $\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha\beta}$.

Účinný průřez srážky

Standardně se zavádí účinný průřez srážky částic druhu α nalétávajících na částice druhu β pomocí jako koeficient úměrnosti ve vztahu pro srážkovou frekvenci

$$\nu_\alpha \sim n_\beta \overline{v}_{\alpha\beta}\,; \qquad \nu_\alpha = \sum_\beta \nu_{\alpha\beta} = \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} n_\beta \overline{v}_{\alpha\beta}\,. \tag{1.650}$$

Účinný průřez je definován jako „účinná plocha“ částice β na kterou nalétává částice α. Frekvence srážek je pak samozřejmě úměrná účinnému průřezu, průměrné hodnotě vzájemné rychlosti obou druhů částic a koncentraci cílových částic. V našem případě pružné srážky dvou částic zavedeme účinný průřez zcela analogicky – půjde o podmíněnou pravděpodobnost (za podmínky konstantního $g_{\alpha\beta}$), kterou označíme

$$\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta})$$

a která je normována tak, aby

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = g_{\alpha\beta}\,\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta})\,\mathrm{d}^2\mathbf{k}'_{\alpha\beta} \tag{1.651}$$

byla časová změna podmíněné pravděpodobnosti, že jednotkový vektor ve směru relativní rychlosti bude po srážce ležet v intervalu ($\mathbf{k}'_{\alpha\beta}$, $\mathbf{k}'_{\alpha\beta} + d\mathbf{k}'_{\alpha\beta}$). Účinný průřez se nemění při:

- obrácení pohybu částic: $\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta}) \;=\; \sigma(-\mathbf{k}'_{\alpha\beta} \,|\, -\mathbf{k}_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta})\,,$
- při inverzi souř. soustavy: $\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta}) \;=\; \sigma(-\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, -\mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta})\,.$

Z obou vlastností plyne důležitý symetrický vztah

► $$\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta}) \;=\; \sigma(\mathbf{k}'_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta})\,. \tag{1.652}$$

Boltzmannův srážkový integrál

Nyní již můžeme napsat srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice jako

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} = \int\Big[f_\alpha(t,\mathbf{x},\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(t,\mathbf{x},\mathbf{v}'_\beta) - f_\alpha(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_\beta)\Big]\cdot \\ \cdot\, g_{\alpha\beta}\, \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta})\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}'_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta\,. \end{aligned} \tag{1.653}$$

Interpretace je zřejmá. Pravděpodobnost srážky dvou částic je úměrná součinu hustot pravděpodobností obou částic (tj. výskytu částic v daném místě fázového prostoru) násobené účinným průřezem srážky. První člen popisuje příznivé jevy, kdy ze všech ostatních oblastí fázového prostoru se po srážce částice dostanou do daného místa fázového prostoru. Druhý člen jsou nepříznivé případy, kdy částice z daného místa fázového prostoru po srážce uniknou. Integrace je provedena přes volné parametry srážky. Díky vlastnosti (1.652) bylo možné oba účinné průřezy zapsat jednotně a vytknout z hranaté závorky. Srážkový člen ve tvaru (1.653) znamená automatický předpoklad, že pár interagujících částic *není nijak korelovaný*. Tento předpoklad někdy nazýváme podmínkou *molekulárního chaosu*.

Srážkový invariant

Označme ψ_α nějaký sumační invariant (hmotnost, hybnost, energie), pro který platí

$$\psi_\alpha + \psi_\beta = \psi'_\alpha + \psi'_\beta\,. \tag{1.654}$$

Potom pro srážkový člen platí velmi důležitý vztah

► $$\sum_{\alpha,\beta} \int \psi_\alpha S_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \;=\; 0\,. \tag{1.655}$$

Důkaz tohoto vztahu je sice jednoduchý, ale poněkud pracný, a proto ho může čtenář z dnešní uspěchané doby, kterému nejde o detaily, vynechat.

Důkaz:

$$S = \sum_{\alpha,\beta} \int \psi_\alpha S_{\alpha\beta} \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \int \psi_\alpha \Big[f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta \Big] \cdot g_{\alpha\beta}\, \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta})\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}'_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta\,.$$

V integraci provedeme transformaci k těžišťové a relativní rychlosti podle schématu

$$\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta = \mathrm{d}^3\mathbf{v}_{(\alpha\beta)}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathrm{d}^3\mathbf{v}_{(\alpha\beta)}\, g^2_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}\, g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}_{\alpha\beta}\,,$$

kde v elementu $\mathrm{d}^2\mathbf{k}_{\alpha\beta}$ jsou zahrnuty veškeré úhlové závislosti. Výsledek bude

$$S = \sum_{\alpha\beta} \int \psi_\alpha \left[f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta \right] g^3_{\alpha\beta}\, \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta})\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}'_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_{(\alpha\beta)} \,.$$

Nyní zaměníme čárkované a nečárkované veličiny a použijeme relace

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\,; \qquad \mathbf{v}'_{(\alpha\beta)} = \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}\,; \qquad \sigma(\mathbf{k} \,|\, \mathbf{k}'; g_{\alpha\beta}) = \sigma(\mathbf{k}' \,|\, \mathbf{k}\,; g_{\alpha\beta})\,.$$

Výsledek bude

$$S = \sum_{\alpha\beta} \int \psi'_\alpha \left[f_\alpha f_\beta - f'_\alpha f'_\beta \right] g^3_{\alpha\beta}\, \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta})\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}'_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_{(\alpha\beta)} \,.$$

Jako další krok provedeme symetrizaci: napíšeme výsledek jako polovinu posledního kroku a polovinu předposledního:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int (\psi_\alpha - \psi'_\alpha) \left[f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta \right] g^3_{\alpha\beta}\, \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} \,|\, \mathbf{k}'_{\alpha\beta}\,;\, g_{\alpha\beta})\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}'_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}_{\alpha\beta} \mathrm{d}g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_{(\alpha\beta)} \,.$$

V dalším kroku zaměníme indexy α a β a opět provedeme symetrizaci:

$$S = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} \int (\psi_\alpha + \psi_\beta - \psi'_\alpha - \psi'_\beta) \left[f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta \right] g^3_{\alpha\beta}\, \sigma(\cdots)\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}'_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^2\mathbf{k}_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_{(\alpha\beta)} \,.$$

Pro sumační invarianty je ale první závorka nulová a proto $S = 0$.

■

Rovnice přenosu (momentová rovnice)

Často nepotřebujeme pravděpodobnostní informace o celém fázovém prostoru, ale postačí nám informace jen o vývoji dynamických proměnných v čase a v poloze. Přes informace o rozložení v rychlostech je možné vystředovat. Nezapomeňte, že pravděpodobnosti jsou normovány k počtu částic a proto podle (1.620) je

$$\mathbf{u}_\alpha(t, \mathbf{x}) = \frac{\int \mathbf{v}_\alpha f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha} \,.$$

Ztráta informace o proměnné $\mathbf{v}_\alpha$ způsobená středováním vede od statistiky k rovnicím kontinua. Vynásobme Boltzmannovu rovnici (1.623) libovolnou funkcí rychlosti $\phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)$ (může, ale nemusí jít o sumační invariant). Nakonec rovnici vystředujeme přes rychlostní proměnné:

$$\int \phi_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \;+\; \int \phi_\alpha\, (\mathbf{v}_\alpha \cdot \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{x})\, f_\alpha\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \;+\; \int \frac{\phi_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha \cdot \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{v})\, f_\alpha\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \;=$$

$$= \int \phi_\alpha \sum_\beta S_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \,.$$

Postupně nyní upravíme všechny tři členy na levé straně:

První člen:

$$\int \phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t}\int \phi_\alpha\, f_\alpha\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} n_\alpha(t,\mathbf{x})\langle\phi_\alpha\rangle_{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t}\langle n_\alpha\,\phi_\alpha\rangle_{\mathbf{v}}\ .$$

Druhý člen:

$$\int \phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) v_{\alpha k}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_k}\int \phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) v_{\alpha k} f_\alpha\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_k} n_\alpha(t,\mathbf{x})\langle\phi_\alpha v_{\alpha k}\rangle_{\mathbf{v}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k}\langle n_\alpha \phi_\alpha v_{\alpha k}\rangle_{\mathbf{v}}\ .$$

Třetí člen:

$$\int \frac{\phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)}{m_\alpha} F_{\alpha k}(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_\alpha)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha k}}\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \overset{\text{(p.p.)}}{=}$$

$$= \left[\frac{\phi_\alpha F_{\alpha k} f_\alpha}{m_\alpha} v_k\right]_{\partial\Omega} - \frac{1}{m_\alpha}\int \frac{\partial}{\partial v_{\alpha k}}[\phi_\alpha\, F_{\alpha k}]\, f_\alpha\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha =$$

$$= -\frac{1}{m_\alpha}\left\langle n_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}(\phi_\alpha \mathbf{F}_\alpha)\right\rangle_{\mathbf{v}}\ .$$

Při úpravě třetího členu musíme předpokládat, že silové pole může být i funkcí rychlostí (například magnetická složka Lorentzovy síly). Provedli jsme integraci per partes. První člen je nulový, protože na hranicích oblasti předpokládáme nulové hustoty pravděpodobnosti výskytu částic, symbolem v_k je označen vektor normály. Středováním přes rychlostní prostor z Boltzmannovy rovnice zůstane

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_\alpha\,\phi_\alpha\rangle_{\mathbf{v}} + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle n_\alpha\,\phi_\alpha\, v_{i\alpha}\rangle_{\mathbf{v}} - \frac{1}{m_\alpha}\left\langle n_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}(\phi_\alpha \mathbf{F}_\alpha)\right\rangle_{\mathbf{v}} =$$

$$= \int \phi_\alpha \sum_\beta S_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha\ . \qquad (1.656)$$

Jde o rovnici přenosu (neboli momentovou rovnici), která je základem *teorie kontinua*. Než si o této rovnici řekneme trochu více, napišme ji pro elektromagnetickou interakci

$$\mathbf{F}_\alpha = Q_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha\, \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}\ .$$

Při derivování třetího členu v rychlostech musíme přejít buď ke složkám, nebo využít definice vektorového součinu, který zapíšeme přes Leviho-Civitův tenzor. Postup je přímočarý s výsledkem:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_\alpha\,\phi_\alpha\rangle_{\mathbf{v}} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\langle n_\alpha\,\phi_\alpha\,\mathbf{v}_\alpha\rangle_{\mathbf{v}} - \frac{Q_\alpha}{m_\alpha}\left\langle n_\alpha\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}_\alpha\times\mathbf{B})\cdot\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\mathbf{v}_\alpha}\right\rangle_{\mathbf{v}} =$$

$$= \int \phi_\alpha \sum_\beta S_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha\ . \qquad (1.657)$$

Poznámka 1: Statistická fyzika využívá proměnné $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)$. Po středování přes rychlostní prostor ztrácíme část informace. Vystředované proměnné jsou jen funkcí $(t, \mathbf{x})$. Sama střední hodnota rychlosti $\mathbf{u}_\alpha(t, \mathbf{x})$ se ale v rovnicích kontinua samozřejmě objevuje. Ztrácíme jen statistickou informaci o rychlostní části fázového prostoru.

Poznámka 2: Celá rovnice přenosu má tvar rovnice kontinuity. První člen je časová derivace hustoty aditivní veličiny, pak následuje divergence toku veličiny. Třetí člen odpovídá zdrojovým členům od polí a pravá strana zdrojovým členům od srážek. Proto se rovnici říká *rovnice přenosu* – popisuje, jak tečou (přenáší se) různé veličiny.

Poznámka 3: V rovnici přenosu je volná funkce rychlosti ϕ_α. Za ní se dosazují různé mocniny rychlosti a tím získáváme tzv. momenty Boltzmannovy rovnice. Proto se rovnici přenosu říká *momentová rovnice*.

Poznámka 4: Pokud byla funkce ϕ_α sumačním invariantem, bude po sečtení všech rovnic (1.657) pravá strana nulová, tj. členy od srážek se vyruší. Plyne to okamžitě ze vztahu (1.655):

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\left\langle n_\alpha \phi_\alpha \right\rangle_{\mathbf{v}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left\langle n_\alpha \phi_\alpha \, \mathbf{v}_\alpha \right\rangle_{\mathbf{v}} - \frac{Q_\alpha n_\alpha}{m_\alpha} \left\langle (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right\rangle_{\mathbf{v}} = 0 .$$

Tomuto přiblížení říkáme *jednotekutinový model* a velmi často se používá.

Poznámka 5: Pro nultý moment můžeme položit ϕ_α rovno m_α a v jednotekutinovém přiblížení dostaneme rovnici kontinuity:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_k} j_k = 0 ; \qquad \rho \equiv \sum_\alpha \rho_\alpha , \qquad \mathbf{j} \equiv \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha .$$

Z rovnice kontinuity počítáme časový vývoj hustoty (nultého momentu Boltzmannovy rovnice). Ve druhém členu se ale objevila nová veličina – tok hmoty $\mathbf{j}$ obsahující střední hodnotu rychlosti proudění. Proto musíme mít i rovnici pro časový vývoj toku hmoty (hustoty hybnosti) neboli pohybovou rovnici. Získáme ji jako první moment Boltzmannovy rovnice položením $\phi_\alpha = m_\alpha v_{i\alpha}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} j_k + \frac{\partial}{\partial x_l} P_{kl} = 0 .$$

V pohybové rovnici se objevuje další nová veličina – tenzor tlaku. Obsahuje dynamický tlak (tok hybnosti), běžný tlak látky (skalární složka odpovídající chaotickému pohybu), viskozitu (tenzorová část tlaku) a u elektromagnetické interakce Maxwellův tenzor pnutí (tlak způsobený přítomností elektromagnetických polí. Jako další moment Boltzmannovy rovnice získáme rovnici pro časový vývoj tenzoru tlaku (odpovídá rovnici pro přenos energie, jde o kvadráty rychlostí):

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{kl} + \frac{\partial}{\partial x_n} Q_{kln} = 0 .$$

V druhém členu se opět objevuje nová veličina popisující tepelný tok. V této proceduře bychom mohli pokračovat libovolně daleko a získáme tak nekonečnou posloupnost momentových rovnic pro kontinuum. V praxi se soustava uzavírá nějakým algebraickým vztahem (například Fourierovým zákonem pro tepelný tok) po konečném počtu momentů.

Poznámka 6: V teorii plazmatu se často využívá i vícetekutinový model (plazma se skládá z tekutiny elektronů, tekutin různých typů iontů a tekutiny neutrálních částic). V tomto přiblížení nevymizí srážkové členy a je třeba s nimi počítat.

Poznámka 7: Chceme-li úplnější informaci o systému, musíme řešit Boltzmannovu rovnici doplněnou o příslušné polní rovnice. Postačí-li nám informace na úrovni kontinua, opíráme naše výpočty o soustavu momentových rovnic.

V následující kapitole odvodíme první tři momenty Boltzmannovy rovnice a přepíšeme je pomoci střední rychlosti proudění $\mathbf{u}_\alpha \equiv \langle\, \mathbf{v}_\alpha \,\rangle$ a tepelné rychlosti $\mathbf{w}_\alpha \equiv \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha$. V momentové rovnici (1.657) dosadíme za ϕ_α postupně funkce m_α (Q_α), $m_\alpha v_{\alpha k}$ a $m_\alpha v_\alpha^2/2$ a poté rychlost rozdělíme na uspořádanou a tepelnou část $v_{\alpha k} = u_{\alpha k} + w_{\alpha k}$. Nezapomeňte, že pro tepelnou část platí $\langle\, \mathbf{w}_\alpha \,\rangle = 0$.

1.6.2 Přechod od statistiky ke kontinuu

Nultý moment (zachování náboje) – částice

Za funkci ϕ_α postupně dosadíme skaláry m_α, Q_α a 1. Tím dostaneme zákony zachování hmotnosti, náboje a počtu částic. Pro nultý moment jsou srážkové členy všech pravých stran nulové, protože funkce ϕ_α nezávisí na rychlosti a tvrzení (1.655) by platilo i bez sumaci přes α. Je to vyjádřením faktu, že se Coulombovou srážkou nemění hmotnost, náboj ani počet částic. Výsledné zákony zachování (rovnice kontinuity) jsou:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_{\mathrm{m},\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial j_k^{(\mathrm{m},\alpha)}}{\partial x_k} = 0\,, \\
&\frac{\partial \rho_{\mathrm{Q},\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial j_k^{(\mathrm{Q},\alpha)}}{\partial x_k} = 0\,, \qquad \alpha = \mathrm{e,\ i,\ ii,\ n,\ldots} \qquad (1.658) \\
&\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial n_\alpha u_{\alpha k}}{\partial x_k} = 0\,.
\end{aligned}$$

Připomeňme, že v celé této kapitole platí sčítací konvence pro indexy psané latinkou ($i, j, k,\ldots$). Neplatí však pro řecké indexy popisující druh částic. Pokud bude potřeba index napsat do horní části symbolu, umístíme ho do závorky, aby se odlišil od mocniny. Kurzívou jsou sázeny jen proměnné, do kterých lze dosadit. Někdy je namísto složkového zápisu vhodný invariantní zápis (nezávislý na zvolené souřadnicové bázi):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_{\mathrm{m},\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\mathrm{m},\alpha} = 0 \,, \\
&\frac{\partial \rho_{\mathrm{Q},\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\mathrm{Q},\alpha} = 0 \,, \qquad \alpha = \mathrm{e,\ i,\ ii,\ n,\ldots} \\
&\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \left(n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right) = 0 \,.
\end{aligned} \tag{1.659}$$

V časových derivacích vystupuje postupně hustota hmoty, hustota náboje a koncentrace částic druhu α. V prostorových derivacích je tok hmoty, tok náboje a tok počtu částic druhu α. Všechny tyto veličiny jsou již jen funkcí času a prostoru a jsou definovány vztahy (použijeme jen invariantní zápis):

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{m},\alpha} &= m_\alpha n_\alpha = \int m_\alpha f_\alpha \, \mathrm{d}^3 \mathbf{v}_\alpha \,, \\
\rho_{\mathrm{Q},\alpha} &= Q_\alpha n_\alpha = \int Q_\alpha f_\alpha \, \mathrm{d}^3 \mathbf{v}_\alpha \,, \\
\mathbf{j}_{\mathrm{m},\alpha} &= m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \int m_\alpha \mathbf{v}_\alpha f_\alpha \, \mathrm{d}^3 \mathbf{v}_\alpha \,, \\
\mathbf{j}_{\mathrm{Q},\alpha} &= Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \int Q_\alpha \mathbf{v}_\alpha f_\alpha \, \mathrm{d}^3 \mathbf{v}_\alpha \,.
\end{aligned} \tag{1.660}$$

Po sečtení momentových rovnic pro všechny druhy částic (přes α) získáme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_{\mathrm{m}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\mathrm{m}} = 0 \,, \\
&\frac{\partial \rho_{\mathrm{Q}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\mathrm{Q}} = 0 \,, \\
&\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \left(n \mathbf{u} \right) = 0 \,,
\end{aligned} \tag{1.661}$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{m}} &\equiv \sum_\alpha \rho_{\mathrm{m},\alpha} = \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \,, & \mathbf{j}_{\mathrm{m}} &\equiv \sum_\alpha \mathbf{j}_{\mathrm{m},\alpha} = \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \,, \\
\rho_{\mathrm{Q}} &\equiv \sum_\alpha \rho_{\mathrm{Q},\alpha} = \sum_\alpha Q_\alpha n_\alpha \,, & \mathbf{j}_{\mathrm{Q}} &\equiv \sum_\alpha \mathbf{j}_{\mathrm{Q},\alpha} = \sum_\alpha Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \,, \\
n &\equiv \sum_\alpha n_\alpha \,, & \mathbf{u} &\equiv \frac{\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha} \,.
\end{aligned} \tag{1.662}$$

Nultý moment (zachování náboje) – pole

Výpočet polí pro Boltzmannovu nebo momentovou rovnici vychází ze soustavy Maxwellových rovnic

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\mathrm{Q}} \,, \tag{1.663}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \,, \tag{1.664}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.665}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}_{\mathrm{Q}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{1.666}$$

Zdrojové členy jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{Q}} &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int Q_{\alpha} f_{\alpha}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_{\alpha}\,, \\ \mathbf{j}_{\mathrm{Q}} &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int Q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} f_{\alpha}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_{\alpha}\,. \end{aligned} \tag{1.667}$$

Zdrojové členy Maxwellových rovnic jsou v souladu s nultým momentem Boltzmannovy rovnice. Pokud derivujeme rovnici (1.663) podle času a sečteme ji s divergencí rovnice (1.666), obdržíme zákon zachování náboje

► $$\frac{\partial \rho_{\mathrm{Q}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\mathrm{Q}} = 0\,,$$

který jsme již odvodili jako nultý moment (1.661) Boltzmannovy rovnice. V odvození dalších momentů budeme předpokládat, že v plazmatu platí lineární závislost mezi oběma elektrickými vektory **E** a **D** *oběma magnetickými vektory* **B** a **H**.

První moment (zachování hybnosti) – částice

Do momentové rovnice nyní dosadíme za fukci rychlosti ϕ_α vztah pro k-tou složku hybnosti $\phi_\alpha = m_\alpha v_{\alpha k}$, která je sumačním invariantem. Po dosazení budou mít momentové rovnice pro jednotlivé druhy částic tvar:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_\alpha m_\alpha u_{\alpha k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(n_\alpha m_\alpha \left\langle v_{\alpha k} v_{\alpha l}\right\rangle_{\mathbf{v}}\right) = n_\alpha Q_\alpha \left(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}\right)_k + \int m_\alpha v_{\alpha k} \sum_\beta S_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha\,.$$

První člen je časovou změnou hustoty hybnosti částic druhu α. Druhý člen je prostorovou derivací toku hybnosti. Tok hybnosti je tenzorem druhého řádu, neboť každá složka hybnosti může téct ve třech nezávislých směrech. V tomto členu rozepíšeme rychlosti na chaotickou a uspořádanou část dle vztahu $v_{\alpha k} = u_{\alpha k} + w_{\alpha k}$ a roznásobíme. Členy úměrné první mocnině chaotické rychlosti mají nulovou střední hodnotu a vypadnou. Zůstanou jen dva členy. První souvisí s uspořádanou složkou rychlosti a nazýváme ho dynamický tlak D_{kl}. Druhý souvisí s chaotickým pohybem a nazýváme ho tenzor tlaku P_{kl}. Celá levá strana má tvar rovnice kontinuity a tedy tvar zákona zachování k-té složky hybnosti. Nenulové členy na pravé straně znamenají, že se hybnost nezachovává. První člen popisuje nezachování způsobené přítomností polí (elektromagnetické pole předává hybnost částicím) a druhý nezachování hybnosti způsobené srážkami. Výsledný vztah tedy je:

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma_{\alpha k} + \frac{\partial}{\partial x_l} T_{kl}^{(\alpha)} = f_{\alpha k} + \Gamma_{\alpha k}\,, \tag{1.668}$$

kde jednotlivé členy jsou definovány takto:

$$\gamma_{\alpha k} \equiv n_\alpha m_\alpha u_{\alpha k} = m_\alpha \int v_{\alpha k} f_\alpha \, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \, ;$$

$$T_{kl}^{(\alpha)} \equiv n_\alpha m_\alpha u_{\alpha k} u_{\alpha l} + n_\alpha m_\alpha \langle \, w_{\alpha k} \, w_{\alpha l} \, \rangle_{\mathbf{v}} = D_{kl}^{(\alpha)} + P_{kl}^{(\alpha)} \, ; \tag{1.669}$$

$$D_{kl}^{(\alpha)} \equiv n_\alpha m_\alpha u_{\alpha k} u_{\alpha l} \, ;$$

$$P_{kl}^{(\alpha)} \equiv n_\alpha m_\alpha \langle \, w_{\alpha k} w_{\alpha l} \, \rangle_{\mathbf{v}} = m_\alpha \int (v_{\alpha k} - u_{\alpha k})(v_{\alpha l} - u_{\alpha l}) f_\alpha \, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \, ;$$

$$f_{\alpha k} \equiv n_\alpha Q_\alpha \left(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B} \right)_k = \left(\rho_{\mathrm{Q},\alpha} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\mathrm{Q},\alpha} \times \mathbf{B} \right)_k \, ;$$

$$\Gamma_{\alpha k} \equiv m_\alpha \int v_{\alpha k} \sum_\beta S_{\alpha\beta} \, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \, .$$

Členy jsou vázány na druh částic α a postupně mají význam: hustota hybnosti, tenzor toku hybnosti, tenzor dynamického tlaku, tenzor tlaku, hustota Lorentzovy síly, časová změna hustoty hybnosti způsobená srážkami. Zapišme nyní zákon zachování hybnosti částic druhu α invariantně:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\gamma}_\alpha + \boldsymbol{\nabla} \cdot \ddot{\mathbf{T}}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha + \boldsymbol{\Gamma}_\alpha \, , \tag{1.670}$$

kde pro jednotlivé členy nyní máme

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha \equiv n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha = m_\alpha \int \mathbf{v}_\alpha f_\alpha \, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \, ;$$

$$\ddot{\mathbf{T}}_\alpha \equiv n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha + n_\alpha m_\alpha \left\langle \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha \right\rangle_{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{D}}_\alpha + \ddot{\mathbf{P}}_\alpha \, ;$$

$$\ddot{\mathbf{D}}_\alpha \equiv n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha \, ;$$

$$\ddot{\mathbf{P}}_\alpha \equiv n_\alpha m_\alpha \left\langle \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha \right\rangle_{\mathbf{v}} = m_\alpha \int (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha) \otimes (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha) f_\alpha \, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \, ; \tag{1.671}$$

$$\mathbf{f}_\alpha \equiv \rho_{\mathrm{Q},\alpha} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\mathrm{Q},\alpha} \times \mathbf{B} \, ;$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_\alpha \equiv \int m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \sum_\beta S_{\alpha\beta} \, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \, .$$

Často bývá zvykem tenzor tlaku související s chaotickou složkou rychlosti formálně rozdělit na dvě části tak, aby jedna část představovala skalární tlak a druhá (tenzorová) měla nulovou stopu. Tato část odpovídá viskozitě a viskózní tenzor se označuje záporným znaménkem (působí proti toku hybnosti):

$$\begin{aligned} P_{kl}^{(\alpha)} &\equiv p_\alpha \delta_{kl} - V_{kl}^{(\alpha)} = \frac{1}{3} n_\alpha m_\alpha \left\langle w_\alpha^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} \delta_{kl} - n_\alpha m_\alpha \left\langle \frac{1}{3} w_\alpha^2 \delta_{kl} - w_{\alpha k} w_{\alpha l} \right\rangle_{\mathbf{v}} \, ; \\ \ddot{\mathbf{P}}_\alpha &\equiv p_\alpha \ddot{\mathbf{I}} - \ddot{\mathbf{V}}_\alpha = \frac{1}{3} n_\alpha m_\alpha \left\langle w_\alpha^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} \ddot{\mathbf{I}} - n_\alpha m_\alpha \left\langle \frac{1}{3} w_\alpha^2 \ddot{\mathbf{I}} - \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha \right\rangle_{\mathbf{v}} \, . \end{aligned} \tag{1.672}$$

Pokud chceme plazma chápat jako jednu jedinou tekutinu, sečteme všechny rovnice (1.670). Vzhledem k tomu, že funkce ϕ_α byla sumačním invariantem, srážky se vyruší

a získáme jednoduchý tvar zákona zachování hybnosti, který již uvedeme jen v invariantním tvaru

► $$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{P}} + \nabla \cdot \ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{P}} = \mathbf{f}\,; \tag{1.673}$$

kde pro jednotlivé členy máme:

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{P}} \equiv \sum_{\alpha} n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha\,,$$

$$\ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{P}} \equiv \ddot{\mathbf{D}} + \ddot{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha}\left(n_\alpha m_\alpha\, \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha\right) \;+\; \sum_{\alpha}\left(n_\alpha m_\alpha \left\langle \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha \right\rangle_{\mathbf{v}}\right), \tag{1.674}$$

$$\mathbf{f} \equiv \rho_{\mathrm{Q}}\mathbf{E} + \mathbf{j}_{\mathrm{Q}} \times \mathbf{B}\,.$$

Index P znamená, že jde o částice (Particles). Obdobný zákon zachování také odvodíme pro pole. Hustota Lorentzovy síly na pravé straně je časovou změnou hustoty hybnosti, kterou pole předává částicím. Šipky nad vektory jsou v některých výrazech proto, aby nedošlo k záměně s tenzory.

První moment (zachování hybnosti) – pole

Zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole jsme již odvodili v druhém díle „Vybraných kapitol“, v sekci Elektromagnetické pole. Přesto si odvození zopakujme. Pole můžeme chápat jako soustavu fotonů s nulovou klidovou hmotností, tj

$$\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{E} = pc\,.$$

Pro hybnost pole potom máme (včetně směru)

$$\mathbf{p}_{\mathrm{EM}} = \frac{\mathcal{E}}{c}\frac{\mathbf{c}}{c}.$$

Nyní přepíšeme vztah do hustot

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{EM}} = \frac{\rho_{\mathcal{E}}\,\mathbf{c}}{c^2}.$$

V čitateli je součin hustoty energie a rychlosti šíření, tj. tok energie, který je dán Poyntingovým vektorem, proto

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{EM}} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}{c^2}.$$

Vyjádříme-li rychlost světla za pomoci permitivity a permeability ($c^2 = 1/\varepsilon\mu$), dostáváme výsledný vztah pro hustotu hybnosti pole:

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{EM}} = \mathbf{D}\times\mathbf{B}\,. \tag{1.675}$$

Naším cílem je nyní sestavit zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole, tedy najít časovou derivaci vztahu (1.675). Při úpravách využijeme soustavu Maxwellových rovnic (1.663) až (1.666):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{EM}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right) \;=\; \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\times\mathbf{B} + \mathbf{D}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \;=\; \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{j}_{\mathrm{Q}}\right)\times\mathbf{B} \;+\; \mathbf{D}\times\left(-\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right) \;=\; \cdots$$

Následují standardní úpravy, ve kterých členy s prostorovými derivacemi převedeme do tvaru divergence. Lze to provést například za pomoci přepisu vektorových součinů pomocí Levi-Civitova tenzoru. Výsledkem elementárních úprav s využitím Maxwellových rovnic je

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{EM}} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{EM}} = -\mathbf{f}\,. \tag{1.676}$$

kde pro jednotlivé členy máme:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{EM}} \equiv \mathbf{D}\times\mathbf{B}\,,\\
&\ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{EM}} \equiv \ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{E}} + \ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{M}}\,,\\
&\ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{E}} \equiv \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2}\,\ddot{\mathbf{1}} - \mathbf{E}\otimes\mathbf{D}\,; \qquad T^{(\mathrm{E})}_{kl} \equiv \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2}\delta_{kl} - E_k D_l\,,\\
&\ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{M}} \equiv \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\,\ddot{\mathbf{1}} - \mathbf{H}\otimes\mathbf{B}\,; \qquad T^{(\mathrm{M})}_{kl} \equiv \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\delta_{kl} - H_k B_l\,,\\
&\mathbf{f} \equiv \rho_{\mathrm{Q}}\mathbf{E} + \mathbf{j}_{\mathrm{Q}}\times\mathbf{B}\,.
\end{aligned} \tag{1.677}$$

Tenzor toku hybnosti pole $\ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{EM}}$ se nazývá *Maxwellův tenzor pnutí*. Vidíme, že hybnost elektromagnetického pole se nezachovává. Je to dáno předáváním hybnosti pole částicím. Teprve celkový součet hybnosti všech částic a pole má tvar zákona zachování. Získáme ho sečtením rovnic (1.673) a (1.676):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{\mathrm{m}}\,\mathbf{u} + \mathbf{D}\times\mathbf{B}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\sum_{\alpha}\ddot{\mathbf{T}}_{\alpha} + \ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{E}} + \ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{M}}\right] = 0\,. \tag{1.678}$$

Odvozená rovnice je zákonem zachování hybnosti pro soustavu částic a elektromagnetického pole. První člen v časové derivaci má význam *hustoty hybnosti látky* $\rho_{\mathrm{m}}\mathbf{u}$, což je ale současně tok hmoty z rovnice kontinuity. Druhý člen $\mathbf{D}\times\mathbf{B}$ je *hustotou hybnosti elektromagnetického pole*. V prostorových derivacích se nacházejí *tenzory toku hybnosti* částic, elektrického a magnetického pole.

Zopakujme si na závěr jednotlivé parciální zákony zachování hybnosti. Hybnost samotného pole ani částic se nezachovává:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{E}} + \ddot{\mathbf{T}}_{\mathrm{M}}\right) = -\rho_{\mathrm{Q}}\mathbf{E} - \rho_{\mathrm{Q}}\,\mathbf{u}\times\mathbf{B}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{\mathrm{m}}\,\mathbf{u}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\sum_{\alpha}\ddot{\mathbf{T}}_{\alpha}\right) = \rho_{\mathrm{Q}}\mathbf{E} + \rho_{\mathrm{Q}}\,\mathbf{u}\times\mathbf{B}\,.$$

Časovou změnou hustoty hybnosti je u částic hustota Lorentzovy síly vystupující na pravé straně. U elektromagnetického pole je na pravé straně člen s opačným znaménkem. Teprve součet obou rovnic dá na pravé straně nulu. V zákonech zachování hybnosti pro jednotlivé druhy částic (momentové rovnice nesečteme) se na pravých stranách objeví ještě nevykompenzované srážkové členy:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{\mathrm{m},\alpha}\,\mathbf{u}_\alpha\right) + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{T}}_\alpha = \rho_{\mathrm{Q},\alpha}\mathbf{E} + \rho_{\mathrm{Q},\alpha}\,\mathbf{u}_\alpha\times\mathbf{B} + \sum_\beta \int m_\alpha \mathbf{v}_\alpha S_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \ .$$

Poznámka: Platí-li zákon zachování hybnosti ve tvaru $\partial\boldsymbol{\gamma}/\partial t + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{T}}$, lze zákon zachování momentu hybnosti psát jako $\partial\mathscr{L}_{kl}/\partial t + \partial\mathscr{N}_{kln}/\partial x_n = 0$, kde hustota momentu hybnosti je $\mathscr{L}_{kl} = x_k\gamma_l - x_l\gamma_k$ a tok momentu hybnosti je $\mathscr{N}_{kln} = x_k T_{ln} - x_l T_{kn}$. Detaily odvození zákona zachování momentu hybnosti elektromagnetického pole čtenář nalezne v druhém díle „Vybraných kapitol“, v sekci Elektromagnetické pole.

Druhý moment (zachování energie) – částice

Volme nyní za ϕ_α kinetickou energii částice druhu α, tj.

$$\phi_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2/2 = m_\alpha v_{\alpha k} v_{\alpha k}/2 \ .$$

Průběh výpočtu je identický s prvním momentem. Po dosazení do momentové rovnice rozdělíme rychlost na uspořádanou a chaotickou část ($v_{\alpha k} = u_{\alpha k} + w_{\alpha k}$) a všechny členy roznásobíme. Střední hodnoty členů s první mocninou chaotické rychlosti dají nulu a zbývající dají zákon zachování energie ve tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_{\mathrm{m},\alpha}u_\alpha^2}{2} + e_\alpha\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\rho_{\mathrm{m},\alpha}u_\alpha^2}{2}\mathbf{u}_\alpha + e_\alpha\mathbf{u}_\alpha + \vec{\mathbf{P}}_\alpha\cdot\vec{\mathbf{u}}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha\right) = \mathbf{j}_{\mathrm{Q},\alpha}\cdot\mathbf{E} + \mathscr{S}_\alpha \ , \quad (1.679)$$

kde jsme označili

$$e_\alpha \equiv \rho_{\mathrm{m},\alpha}\left\langle\frac{w_\alpha^2}{2}\right\rangle; \quad \mathbf{q}_\alpha \equiv \rho_\alpha\left\langle\frac{w_\alpha^2}{2}\mathbf{w}_\alpha\right\rangle; \quad \mathscr{S}_\alpha \equiv \sum_\beta\int\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}S_{\alpha\beta}\,d^3v_\alpha \ ;$$

Symbol e_α je vnitřní energie související s chaotickým pohybem, $\mathbf{q}_\alpha$ je tepelný tok a $\mathscr{S}_\alpha$ je srážkový člen. V časové derivaci je hustota kinetické energie částic druhu α a hustota vnitřní energie částic druhu α. V prostorové derivaci jsou *toky energií*: tok kinetické energie, tok vnitřní energie, tok tlakové energie a tepelný tok. Na pravé straně (1.679) jsou členy způsobující nezachování energie: Jouleův ohřev částic (hustota Jouleova výkonu) a člen související s předáváním energie srážkami.

Pokud nám postačí jednotekutinové přiblížení, sečteme všechny rovnice (1.679). Vzhledem k tomu, že funkce ϕ_α byla sumačním invariantem, srážky se vyruší a získáme jednoduchý tvar zákona zachování energie:

► $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_{\mathrm{m}}u^2}{2} + e\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\rho_{\mathrm{m}}u^2}{2}\mathbf{u} + e\mathbf{u} + \vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{q}\right) = \mathbf{j}_{\mathrm{Q}}\cdot\mathbf{E} \ ; \quad e = \sum_\alpha e_\alpha \ ; \quad \mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}_\alpha \ . \quad (1.680)$$

Ostatní veličiny jsou definovány stejně jako u předchozích momentů. Energie plazmatu se nezachovává, plazma je ohříváno elektromagnetickými poli. Teprve celkový součet energie všech částic a pole má tvar skutečného zákona zachování.

Druhý moment (zachování energie) – pole

Zákon zachování energie elektromagnetického pole jsme již odvodili v druhém díle „Vybraných kapitol“, v sekci Elektromagnetické pole. Přesto si pro účely statistiky zákon zachování energie pole ještě jednou odvodíme. Z klasické elektrodynamiky je dobře známa hustota energie elektrického pole jako $\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}/2$, jde například o hustotu energie na kondenzátoru. Obdobně hustota energie v magnetickém poli je $\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}/2$, jde například o hustotu energie cívky. Z Maxwellových rovnic (1.663) až (1.666) vypočteme časovou změnu hustoty energie a upravíme do tvaru zákona zachování. Opět budeme uvažovat lineární vztahy mezi oběma elektrickými vektory a mezi oběma magnetickými vektory:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2}+\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\right) = \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{E}\cdot\left(\operatorname{rot}\mathbf{H}-\mathbf{j}_{\mathrm{Q}}\right) + \mathbf{H}\cdot\left(-\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) =$$
$$= \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{j}_{\mathrm{Q}}\cdot\mathbf{E} = -\operatorname{div}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)-\mathbf{j}_{\mathrm{Q}}\cdot\mathbf{E}\,.$$

Výsledný zákon zachování energie pro pole má proto tvar:

► $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2}+\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) = -\mathbf{j}_{\mathrm{Q}}\cdot\mathbf{E}\,. \tag{1.681}$$

V časové derivaci je hustota elektrické a hustota magnetické energie. V prostorové derivaci je tok energie $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$, který nazýváme Poyntingův vektor. Člen na pravé straně je hustota Jouleova výkonu odváděná z pole na ohřev částic. Celkový zákon zachování energie získáme sečtením částicové části (1.680) a polní části (1.681):

► $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2}+e+\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2}+\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\rho u^2}{2}\mathbf{u}+e\mathbf{u}+\ddot{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{u}}+\mathbf{q}+\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) = 0\,. \tag{1.682}$$

V časové derivaci jsou *hustoty energií* (kinetické, vnitřní, elektrické, magnetické); v prostorové derivaci jsou *toky energií* (kinetické, vnitřní, tlakové, tepelné, elektromagnetické). Zákon zachování energie platí jen pro soustavu všech druhů částic a pole. Oddělené zákony zachování mají nenulové pravé strany s hustotou Jouleova výkonu.

Pokud nesečteme momentové rovnice a budeme uvažovat zákony zachování energie pro každý druh částic zvlášť, objeví se na pravých stranách srážkové členy. Předpokládejme nyní polytropní chování plazmatu s částicemi, které mají f stupňů volnosti, tj.

$$p = Kn^{\gamma}\,; \qquad \gamma \equiv \frac{f+2}{f}\,. \tag{1.683}$$

Pro tlak současně platí stavová rovnice ve tvaru

$$p = nk_{\mathrm{B}}T \tag{1.684}$$

Pro hustotu vnitřní energie potom máme

$$e = \frac{f}{2}nk_{\mathrm{B}}T = \frac{p}{\gamma-1}\,. \tag{1.685}$$

Pochopitelně by bylo možné odvozovat další momenty Boltzmannovy rovnice, jejich struktura bude ale stále složitější a interpretace jednotlivých členů obtížnější. Pokud jako funkci ϕ_α použijeme obecnou mocninu rychlosti a nepůjde o sumační invariant, nedojde po sečtení rovnic pro všechny druhy částic k vyrušení srážkových členů.

Každá momentová rovnice nám přinese novou veličinu, pro kterou musíme napsat další momentovou rovnici. Získáme tak nekonečnou posloupnost momentů Boltzmannovy rovnice. Rozhodneme-li se, že nám dané přiblížení postačí, odvozování dalších momentů ukončíme nějakým empirickým vztahem, v případě druhého momentu například Fourierovým zákonem pro tepelný tok.

1.6.3 Jednoduché transportní jevy

Statistický přístup je využíván zejména při řešení tří okruhů problémů:

1. *Transportní jevy*. Jde o výpočet přenosu hmoty, hybnosti, energie a dalších veličin na základě srážkových procesů v plazmatu.
2. *Relaxační jevy*. Jde o návrat narušeného systému k termodynamické rovnováze vlivem srážek, výpočet relaxačních časů a s nimi spojených veličin.
3. *Mikronestability a Landauův útlum*. Třída jevů, pro které je podstatná rychlostní část rozdělení a které nemohou být odvozeny v rámci magnetohydrodynamiky (teorie kontinua). Jsou-li charakteristické frekvence dějů podstatně větší než frekvence srážek, je možné využít bezesrážkové přiblížení (Vlasovovu rovnici).

Uvažujme nejprve relativně jednoduché, ale účinné BGK přiblížení. Označení pochází z počátečních písmen jmen autorů (Prabhu Lal Bhatnagar, Eugene Paul Gross, Max Krook). V tomto přiblížení předpokládáme, že srážkový člen je úměrný odchylce od lokálního rovnovážného rozdělení a srážky mají vratný charakter, tj. navrací plazma z počáteční odchylky zpět do rovnováhy:

$$S_\alpha \simeq (\Delta f_\alpha/\Delta t)_{\mathrm{col}} = -(f_\alpha - f_{\mathrm{LE}})/\tau = -\nu(f_\alpha - f_{\mathrm{LE}})\,.$$

Pokud nebudeme popisovat více druhů částic naráz, budeme v dalších odvozeních index α vynechávat. BGK rovnice tedy je

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}})f + \left(\frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\right)f = -\nu\left(f - f_{\mathrm{LE}}\right); \tag{1.686}$$

$$f_{\mathrm{LE}} \equiv n(\mathbf{x})\left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T(\mathbf{x})}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m\left(\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{x})\right)^2}{2k_{\mathrm{B}}T(\mathbf{x})}\right]. \tag{1.687}$$

Funkce f_{LE} je lokální rovnovážné kanonické (Gibbsovo) rozdělení rychlostí, které nazýváme Maxwellovo rozdělení. Předpokládáme, že se může měnit místo od místa. Řešení pro hustotu pravděpodobnosti budeme hledat ve tvaru perturbační řady

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots \tag{1.688}$$

V následujících výpočtech je f_0 známé řešení a v odchylkách od něho se omezíme na členy prvního řádu a poté provedeme limitní přechod $\varepsilon \to 1$. Předpokládáme tedy malé odchylky od Maxwellova rozdělení.

Transport náboje (Ohmův zákon)

Předpokládejme homogenní rovnovážné plazma, pro které je

$$f_0 = f_{\mathrm{LE}} \equiv n\left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\,\mathbf{v}^2}{2k_{\mathrm{B}}T}\right]. \tag{1.689}$$

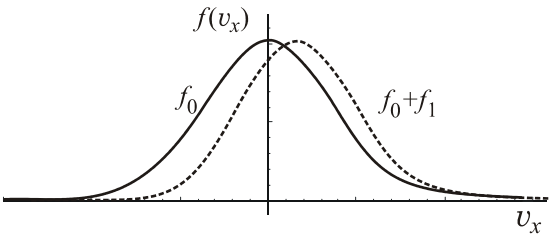
Budeme hledat ustálenou (nezávislou na t) homogenní (nezávislou na $\mathbf{x}$) poruchu f_1 rozdělení způsobenou zapnutím slabého elektrického pole $\varepsilon\mathbf{E} = -\varepsilon\nabla\phi$ (chápeme ho jako první řád poruchové teorie, v systému vznikl malý spád potenciálu ϕ). V prvním řádu poruchové teorie z (1.686) proto zůstane

$$\frac{Q\mathbf{E}}{m}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = -\nu f_1 .$$

Po dosazení za f_0 dopočteme poruchu rozdělení

$$f_1 = \frac{Q(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})}{\nu k_{\mathrm{B}}T}\, n\left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\,\mathbf{v}^2}{2k_{\mathrm{B}}T}\right]. \tag{1.690}$$

Maxwellovo rozdělení soustavy nabitých částic je elektrickým polem v prvním řádu perturbační teorie charakteristicky deformované, $f = f_0 + f_1$. Na obrázku je hustota pravděpodobnosti souboru pro složku rychlosti ve směru elektrického pole.



Obr. 1.108: Porucha Maxwellova rozdělení

Určeme nyní *tok náboje* neboli hustotu elektrického proudu tekoucího plazmatem:

$$\mathbf{j}_Q = Qn\mathbf{u} = \int Q\mathbf{v}f\,\mathrm{d}^3\mathbf{v} = \int Q\mathbf{v}(f_0 + f_1)\,\mathrm{d}^3\mathbf{v} = \int Q\mathbf{v}f_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{v} .$$

Integrál z $\mathbf{v}f_0$ je nulový (jde o lichou funkci). Do vztahu dosadíme za f_1 a integrujeme:

$$j_{Qk} = n\frac{Q^2E_l}{\nu k_{\mathrm{B}}T}\left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v_k v_l \,\exp\left[-\frac{m(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}{2k_{\mathrm{B}}T}\right]\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\mathrm{d}v_3 .$$

Všechny nediagonální integrály (ve $v_k v_l$) jsou nulové, neboť jde vždy o lichou funkci některé z rychlostí. Diagonální členy jsou všechny stejné a tak můžeme vypočítat například první:

$$j_{Qk} = n\frac{Q^2 E_l}{\nu k_\mathrm{B} T}\left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B} T}\right)^{3/2} \delta_{kl} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v_1^2 \exp\left[-\frac{m(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}{2k_\mathrm{B} T}\right] \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_3 .$$

Dvě z integrací dají Gaussův integrál I.3.576 a zbývající určíme jako dvojnásobek vztahu I.3.574 (první díl „Vybraných kapitol“). Výsledek je

► $$\mathbf{j}_Q = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \phi ; \qquad \sigma \equiv \frac{Q^2 n}{m\nu} . \tag{1.691}$$

Hnací silou toku náboje je elektrické pole (záporně vzatý gradient skalárního potenciálu). Koeficient úměrnosti σ se nazývá *diferenciální vodivost*. Vztah (1.691) je znám jako Ohmův zákon a je pojmenován podle německého fyzika George Simona Ohma (1789–1854). Stejný vztah můžeme získat i z jednoduché Drudeho teorie elementární vodivosti, kterou navrhl v roce 1900 Paul Drude (1863–1906). Představme si, že na nabitou částici v prostředí působí síla způsobená elektrickým polem a síla „tření“ způsobená srážkami, která je úměrná ztrátě hybnosti částice a koeficientem úměrnosti je srážková frekvence $\nu = 1/\tau$ (τ je střední doba mezi srážkami):

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = Q\mathbf{E} - \frac{m\mathbf{u}}{\tau} = Q\mathbf{E} - \nu m\mathbf{u} .$$

V ustáleném stavu má částice rychlost $\mathbf{u} = Q\mathbf{E}/m\nu$ a tok náboje (proudová hustota) bude

$$\mathbf{j}_Q = Qn\mathbf{u} = \frac{Q^2 n}{m\nu}\mathbf{E} ,$$

což je stejný výsledek jako (1.691). Poznamenejme, že v případě anizotropního prostředí je vodivost tenzorem a Ohmův zákon má tvar

$$j_{Q,k} = \sigma_{kl} E_l = -\sigma_{kl}\frac{\partial \phi}{\partial x_l} . \tag{1.692}$$

Transport částic (Fickův zákon)

Opět budeme předpokládat rovnovážné, původně homogenní plazma. Jako poruchu zaveďme nyní do plazmatu malý spád jeho koncentrace, který bude hnací silou přesunu částic. Lokální rovnovážné Maxwellovo rozdělení bude tyto změny sledovat:

$$f_\mathrm{LE} \equiv n(\mathbf{x})\left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B} T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_\mathrm{B} T}\right] .$$

Na plazma nebudou působit žádná silová pole. V okolí libovolného místa plazmatu bude koncentrace splňovat

$$n(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \left.\frac{\partial n}{\partial x_l}\right|_{\mathbf{x}_0} (x_l - x_{0l}) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} n \sim \varepsilon$$

a prostorovou derivaci (∇) proto musíme chápat jako operaci prvního řádu poruchové teorie (∇f_LE je prvního řádu, ∇f_1 druhého řádu, ∇f_2 třetího řádu atd.). Je to tím, že

v Maxwellově rozdělení se prostorová závislost normálně nevyskytuje. V BGK rovnici zůstane po dosazení $f = f_{\mathrm{LE}} + f_1 + \cdots$ v prvním řádu poruchové teorie:

$$(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}) f_{\mathrm{LE}} = -\nu f_1 .$$

Poruchu f_1 tedy získáme ihned ve tvaru

$$f_1 = -\frac{(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} n)}{\nu}\left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\,\mathbf{v}^2}{2k_{\mathrm{B}}T}\right]. \tag{1.693}$$

Tok částic získáme obdobně jako v minulém případě:

$$\mathbf{j}_N = n\mathbf{u} = \int \mathbf{v}(f_{\mathrm{LE}} + f_1)\,\mathrm{d}^3\mathbf{v} = \int \mathbf{v} f_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{v} .$$

Integrace se provede stejným způsobem jako v případě transportu náboje. Jednotlivé části integrálu budou nenulové jen v diagonálních členech $v_k v_l$, k jejichž integraci využijeme vztah I.3.574 (první díl „Vybraných kapitol“):

► $$\mathbf{j}_N = -D\boldsymbol{\nabla} n\,; \qquad D \equiv \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m\nu}. \tag{1.694}$$

Hnací silou toku částic je záporně vzatý gradient koncentrace. Koeficient úměrnosti se nazývá *koeficient difúze*. Vztah (1.694) je znám jako Fickův zákon difúze a je pojmenován podle německého fyziologa Adolfa Eugena Ficka (1821–1901).

Poznámka 1: Dosadíme-li do rovnice kontinuity vztah pro tok částic, dostaneme rovnici difúze

$$\left.\begin{aligned} &\partial n/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j}_{\mathrm{N}} = 0\,, \\ &\mathbf{j}_N = -D\boldsymbol{\nabla} n \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} = D\boldsymbol{\nabla}^2 n\,. \tag{1.695}$$

Z matematického hlediska jde o parciální diferenciální rovnici parabolického typu. Fyzikálně jde o prototyp rovnice popisující difúzi nějaké veličiny do okolí. Obdobnou rovnici splňuje například teplota [1] nebo magnetické pole, jak uvidíme později.

Poznámka 2: Z rozměrové analýzy lze koeficient difúze chápat jako součin kvadrátu střední volné dráhy a frekvence srážek:

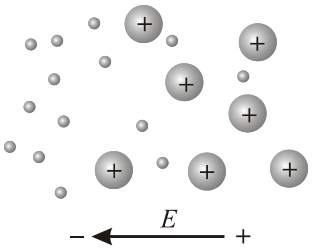
$$D \sim \lambda^2 \nu \tag{1.696}$$

Ambipolární difúze

Elektrony v plazmatu mají výrazně menší hmotnost a tak na jakékoli silové podněty reagují rychleji a mají tendenci plazma opustit. Tím ovšem vzniká elektrické pole, které působí na ionty. Toto pole přibrzdí elektrony a urychlí ionty takovým způsobem, aby obě složky zachovávaly při difúzi kvazineutralitu, tj. celkový náboj v jakémkoli makroskopickém objemu byl nulový. Takovou vázanou difúzi elektronů a iontů nazýváme *ambipolární difúze*.

Velice důležitou veličinou při ambipolární difúzi je *mobilita* neboli *pohyblivost* částic. Jde o koeficient úměrnosti mezi průměrnou rychlostí jejich pohybu a elektrickým polem, tedy

$$\mathbf{u}_\alpha = \mu_\alpha \mathbf{E} \tag{1.697}$$



Obr. 1.109: Ambipolární difúze

V této kapitole se zabýváme jak tekutinou elektronů, tak tekutinou iontů a proto musíme psát indexy α určující příslušnost k danému druhu částic. Je zřejmé, že pomocí mobility můžeme zapsat tok náboje (proudovou hustotu) i tok částic způsobený pouze elektrickým polem:

$$\mathbf{j}_{Q,\alpha} = Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = Q_\alpha n_\alpha \mu_\alpha \mathbf{E}\,, \tag{1.698}$$

$$\mathbf{j}_{N,\alpha} = n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = n_\alpha \mu_\alpha \mathbf{E}\,. \tag{1.699}$$

Výraz pro mobilitu snadno určíme ze vztahu pro proudovou hustotu (1.691):

$$\mu_\alpha = \frac{Q_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha}\,. \tag{1.700}$$

Mobilita elektronů je záporná, elektrony se pohybují proti směru elektrického pole. Pohyb elektronů a iontů při ambipolární difúzi bude ve skutečnosti způsobený jak elektrickým polem, tak gradientem koncentrace částic (difúzí):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{N,\mathrm{e}} &= n_\mathrm{e}\mu_\mathrm{e}\mathbf{E} - D_\mathrm{e}\nabla n_\mathrm{e}\,, \\ \mathbf{j}_{N,\mathrm{i}} &= n_\mathrm{i}\mu_\mathrm{i}\mathbf{E} - D_\mathrm{i}\nabla n_\mathrm{i}\,. \end{aligned} \tag{1.701}$$

Požadavek kvazineutrality a shodné rychlosti obou složek plazmatu lze pro Z-násobnou ionizaci vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} &Q_\mathrm{e} = -e\,, && Q_\mathrm{i} = Ze\,; \\ &n_\mathrm{e} \equiv n = Zn_\mathrm{i}\,, && n_\mathrm{i} = n/Z\,; \\ &\mathbf{j}_{N,\mathrm{e}} \equiv \mathbf{J}\,, && \mathbf{j}_{N,\mathrm{i}} \equiv \mathbf{J}/Z\,. \end{aligned}$$

Po dosazení koncentrací a toků do (1.701) získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= n\mu_\mathrm{e}\mathbf{E} - D_\mathrm{e}\nabla n\,, \\ \mathbf{J}/Z &= n\mu_\mathrm{i}\mathbf{E}/Z - D_\mathrm{i}\nabla n/Z\,. \end{aligned}$$

Z obou rovnic vyloučíme elektrické pole a získáme finální vztah pro ambipolární difúzi:

► $$\mathbf{J} = -D_\mathrm{a}\nabla n\,; \qquad D_\mathrm{a} \equiv \frac{\mu_\mathrm{e} D_\mathrm{i} - \mu_\mathrm{i} D_\mathrm{e}}{\mu_\mathrm{e} - \mu_\mathrm{i}}\,. \tag{1.702}$$

Ve vztahu (1.702) platí $|\mu_\mathrm{e}| \gg |\mu_\mathrm{i}|$, a proto můžeme psát

$$D_\mathrm{a} \approx D_\mathrm{i} - \frac{\mu_\mathrm{i}}{\mu_\mathrm{e}} D_\mathrm{e}\,. \tag{1.703}$$

Za pomoci mobility (1.700) lze zapsat vztah pro koeficient difúze (1.694) takto:

$$D_\alpha \equiv \frac{k_\mathrm{B} T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} = \mu_a \frac{k_\mathrm{B} T_\alpha}{Q_\alpha}\,. \tag{1.704}$$

Uvedený vztah se nazývá Einsteinův vztah a přesouvá srážkovou frekvenci ve výrazu pro koeficient difúze do mobility dané částice. Budeme-li předpokládat stejnou teplotu obou složek, můžeme z Einsteinova vztahu (1.704) odvodit $D_\mathrm{e} = -(Z\mu_\mathrm{e}/\mu_\mathrm{i})D_\mathrm{i}$ a vztah (1.703) pro ambipolární difúzi získá tvar

$$D_\mathrm{a} \approx (1+Z)\, D_\mathrm{i}\,. \tag{1.705}$$

Výslednou ambipolární difúzi určují podle očekávání hmotnější ionty.

Difúze v magnetickém poli

Předpokládejme, že v plazmatu je malý gradient koncentrace a homogenní magnetické pole $(0,0,B_0)$. Připustíme gradient koncentrace jak ve směru pole (v ose z), tak ve směru kolmém na pole (zvolíme osu x), abychom mohli prozkoumat difúzi částic podél pole a kolmo na něj, tedy $n = n(x, z)$. Magnetické pole vnáší do plazmatu anizotropii, a proto budeme předpokládat, že chaotické složky rychlosti, resp. teploty částic mohou být různé ve směru magnetického pole a ve směru na něj kolmém. Za lokální rovnovážné rozdělení proto připustíme tvar

$$f_\mathrm{LE} \equiv n(x,z)\left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B} T_\perp}\right)\left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B} T_\parallel}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2k_\mathrm{B}T_\perp} - \frac{m v_z^2}{2k_\mathrm{B}T_\parallel}\right]. \tag{1.706}$$

V BGK rovnici v prvním řádu poruchové teorie zůstanou členy (prostorové derivace se opět chovají jako první řád poruchové teorie)

$$\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial f_\mathrm{LE}}{\partial \mathbf{x}}\right) + \left(\frac{Q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0}{m}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}\right) = -\nu f_1\,;$$

Lokální rovnovážné rozdělení obsahuje poruchu v souřadnicích, a proto vystupuje jako první poruchový člen v prostorových derivacích. Neobsahuje ovšem poruchu v rychlostech, a proto je v rychlostním členu jako lineární porucha až člen f_1. Tok částic zjistíme tak, že poslední rovnici přenásobíme rychlostí a vystředujeme přes rychlosti:

$$\int \mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial f_\mathrm{LE}}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{v} + \int \mathbf{v}\left(\frac{Q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0}{m}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{v} = -\nu\int \mathbf{v} f_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}\,;$$

Integrál na pravé straně má přímo význam toku částic. První integrál nalevo je možné snadno dopočíst přímo. Druhý integrál napíšeme ve složkách a upravíme per partes. Výsledkem je

$$\frac{k_\mathrm{B}T_\perp}{m}\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{QB_0}{m} j_{N,y} = -\nu j_{N,x} ,$$

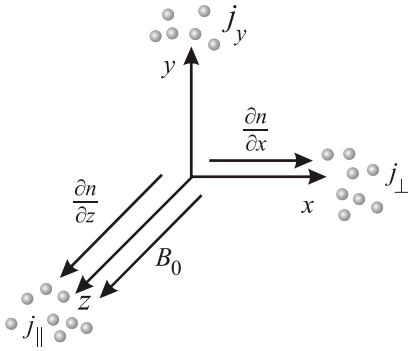
$$\frac{QB_0}{m} j_{N,x} = -\nu j_{N,y} ,$$

$$\frac{k_\mathrm{B}T_\parallel}{m}\frac{\partial n}{\partial z} = -\nu j_{N,z} .$$

Veličina QB_0/m je tzv. gyrační (cyklotronní, Larmorova) frekvence, se kterou částice krouží kolem indukčních čar. Z prvních dvou rovnic dopočteme oba hledané toky:

$$j_{N\perp} = j_{N,x} = -D_\perp \frac{\partial n}{\partial x}, \qquad j_{N\parallel} = j_{N,z} = -D_\parallel \frac{\partial n}{\partial z}, \qquad j_{N,y} = -\frac{\omega_\mathrm{c}}{\nu} j_{N\perp};$$

$$D_\perp \equiv \frac{k_\mathrm{B}T_\perp}{m\nu}\left[\frac{1}{1+(\omega_\mathrm{c}/\nu)^2}\right]; \qquad D_\parallel \equiv \frac{k_\mathrm{B}T_\parallel}{m\nu}; \qquad \omega_\mathrm{c} \equiv \frac{QB_0}{m}. \tag{1.707}$$



Obr. 1.110: Difúze v magnetickém poli

Výsledek je mimořádně zajímavý. Ve směru magnetických indukčních čar je koeficient difúze stejný, jako by pole neexistovalo. Difúze není magnetickým polem v tomto směru ovlivněna. Naopak napříč indukčním čarám probíhá difúze obtížněji a koeficient difúze je modifikován faktorem v hranaté závorce. To je důvodem existence dvou typů slunečního větru – pomalého a rychlého: v oblasti rovníku částice opouštějí Slunce napříč indukčním čarám a rychlost slunečního větru je 300÷500 km/s. V polárních směrech se částice pohybují podél indukčních čar a jejich rychlost je 700÷900 km/s.

V limitě extrémně slabých polí přechází vztah pro koeficient příčné difúze v normální difúzní koeficient. Naopak, v případě extrémně silných magnetických polí můžeme jednotku ve jmenovateli zanedbat a vztah pro koeficient příčné difúze bude

$$D_\perp \approx \frac{k_\mathrm{B}T_\perp m\nu}{Q^2B_0^2} = R_\mathrm{L}^2\nu \approx \frac{1}{B_0^2}; \qquad \omega_\mathrm{c} \gg \nu . \tag{1.708}$$

Částice je v silném poli vázána na Larmorovu orbitu a úlohu střední volné dráhy λ ve vztahu (1.696) přejímá Larmorův poloměr $R_L = mv_T/QB_0$ gyračního pohybu pro střední tepelnou rychlost $v_T = (k_B T_\perp/m)^{1/2}$. To je přirozené, neboť v plazmatu je střední volná dráha definována jako vzdálenost, na které se částice od původního směru odchýlí o 90°, což je v extrémně silném magnetickém poli právě na Larmorově poloměru.

Gyromagnetická (Bohmova) difúze

Dalším novým jevem je difúze částic ve směru kolmém jak na gradient koncentrace (hnací sílu), tak na pole samotné, tj. nenulový tok částic $j_{N,y}$ ve vztahu (1.707). Jde o obdobný jev, jako jsou drifty. Výsledný tok má tvar

► $$j_{N,y} = \frac{\omega_c k_B T_\perp}{m\nu^2}\left[\frac{1}{1+(\omega_c/\nu)^2}\right]\frac{\partial n}{\partial x}. \tag{1.709}$$

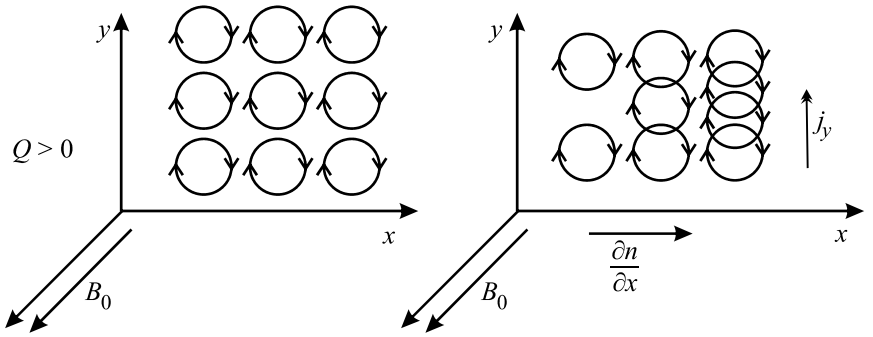
Pro silná magnetická pole můžeme zanedbat jedničku ve jmenovateli a po dosazení za cyklotronní frekvenci z (1.707) máme

$$j_{N,y} = \frac{k_B T_\perp}{QB_0}\frac{\partial n}{\partial x} \approx \frac{1}{B_0}. \tag{1.710}$$

Povšimněme si několika zajímavostí:

1. Tok částic je kolmý na magnetické pole a na gradient koncentrace, míří ve stejném směru (viz obrázek) jako drift způsobený „silou“ $-\nabla n$.
2. Na rozdíl od vztahu (1.708) je výsledný tok nepřímo úměrný jen první mocnině magnetického pole, pro silná magnetická pole bude tedy tento tok dominovat.
3. Výsledný vztah (1.710) nezávisí na srážkové frekvenci, tok částic není důsledkem srážek a nejde o difúzi v pravém slova smyslu.

Co tedy způsobuje nenulový tok? Při nulovém gradientu koncentrace se gyrační pohyby částic přesně vyruší. Při nenulové koncentraci (viz obrázek) se pohyb částic v kladném a záporném směru osy y nevyruší a vznikne tak nenulový tok částic ve směru osy y, který ale nesouvisí se srážkami. Tomuto jevu říkáme *gyromagnetická difúze* a pro silná pole je pro ni charakteristické, že tok částic je úměrný $1/B_0$.



Obr. 1.111: Gyromagnetická (Bohmova) difúze

Neoklasická a anomální difúze

Pokud je pole prostorově nehomogenní, jako například v tokamaku, dochází k dalším driftům, z nichž nejvýznamnější je grad *B* drift způsobený změnou velikosti pole nebo drift zakřivení způsobený změnou směru indukčních čar (viz kapitola 1.2.3, str. 40). Posunutí gyračního středu za jednu otočku bývá typicky větší, než je Larmorův poloměr a střední volná dráha se proto výrazně zvětšuje. V úvahu je možné vzít i tzv. banánové orbity. První možností, jak zahrnout tyto jevy, je přímý výpočet analogický předchozímu odvození. Druhou možností je pouhý odhad střední volné dráhy v přítomnosti daného driftu a následné využití vztahu (1.696). Oběma způsoby tak můžeme získat vztah pro tzv. *neoklasickou difúzi*, která uvažuje gradient či zakřivení pole. Zakřivení indukčních čar zněkolikanásobí difúzi kolmo na magnetické pole. V toroidálních zařízeních je skutečně měřená difúze ještě 10× až 100× vyšší než neoklasická. Hovoříme o tzv. *anomální difúzi*, při které do transportu nabitých částic zasahují ještě turbulentní procesy v plazmatu. Anomální difúze je často předmětem numerických simulací na výkonných počítačích a detaily všech procesů vedoucích k anomální difúzi nejsou dodnes prozkoumány.

Transport tepla (Fourierův zákon)

Předpokládejme opět původně homogenní rovnovážné plazma a jako poruchu zaveďme nyní do plazmatu malý spád jeho teploty, který bude hnací silou tepelného toku. Lokální rovnovážné Maxwellovo rozdělení bude tyto změny teploty sledovat:

$$f_{\mathrm{LE}} \equiv n(\mathbf{x})\left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T(\mathbf{x})}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\,\mathbf{v}^2}{2k_{\mathrm{B}} T(\mathbf{x})}\right].$$

V rozdělení jsme zavedli i prostorovou závislost koncentrace částic, neboť ta je provázána s prostorovým průběhem teploty. Pokud budeme počítat tepelný přenos za konstantního tlaku $p = nk_{\mathrm{B}}T$, budeme po derivování mít

$$T\,\nabla n + n\,\nabla T = 0\,. \tag{1.711}$$

Obdobně jsou obě veličiny provázány i u polytropního plazmatu ($p = Kn^{\gamma}$). Lokální rovnovážné rozdělení budeme považovat obdobně jako u toku částic za nulté řešení. Prostorový gradient se opět chová jako operace prvního řádu poruchové teorie. Po dosazení $f = f_{\mathrm{LE}} + f_1 + \cdots$ do BGK rovnice (1.686) dostaneme:

$$v_l \frac{\partial}{\partial x_l}\left[n(\mathbf{x})\left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T(\mathbf{x})}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\,\mathbf{v}^2}{2k_{\mathrm{B}} T(\mathbf{x})}\right]\right] = -\nu f_1\,.$$

Po provedení derivace součinu všech tří funkcí s využitím (1.711) získáme

$$f_1 = -n\frac{(\mathbf{v}\cdot\nabla T)}{\nu}\frac{1}{T}\left[\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_{\mathrm{B}}T} - \frac{5}{2}\right]\left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\,\mathbf{v}^2}{2k_{\mathrm{B}}T}\right]. \tag{1.712}$$

Nyní již zbývá „jen“ určit tepelný tok

$$\mathbf{q} \equiv mn\frac{1}{2}\left\langle w^2\,\mathbf{w}\right\rangle = \frac{1}{2}\int m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2(\mathbf{v}-\mathbf{u}) f_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{v} \;=\; \frac{1}{2}\int m v^2 \mathbf{v}\, f_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}\,.$$

Do výrazu dosadíme za f_1 ze vztahu (1.712) a integrujeme přes rychlosti jako v minulých případech. Integrace je přímočará, i když zdlouhavá. Nejvyšší mocnina rychlosti je šestá. K integraci je vhodné využít některý standardní program (Mathematica, MATLAB) nebo použít vztahy z prvního sílu „Vybraných kapitol“, str. 369. Výsledek je

► $$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T\,; \qquad \kappa \equiv \frac{5 n k_\mathrm{B}^2 T}{2 m \nu}\,. \tag{1.713}$$

Hnací silou tepelného toku je záporně vzatý gradient teploty. Koeficient úměrnosti se nazývá *tepelná vodivost*. Vztah (1.713) je znám jako Fourierův zákon. Je pojmenován podle francouzského fyzika a matematika Jeana Baptista Josepha Fouriera (1768–1830). Ve středoškolských učebnicích je zmiňována jednodušší varianta Fourierova zákona pro homogenní tyč průřezu ΔS a délky l popisující tok tepla tyčí nebo deskou za dobu Δt :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot \Delta t} = \kappa \frac{T_2 - T_1}{l} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta Q = \kappa \frac{\Delta S}{l} \cdot \left(T_2 - T_1\right) \Delta t\,.$$

Produkce entropie, Onsagerovy relace

V minulých kapitolách jsme se zabývali jevy, které navrací systém do termodynamické rovnováhy. Malý gradient elektrického potenciálu, koncentrace či teploty způsobil makroskopické toky

► $$\begin{aligned} \mathbf{j}_Q &= -\sigma \nabla \phi\,, \\ \mathbf{j}_N &= -D \nabla n\,, \\ \mathbf{q} &= -\kappa \nabla T\,, \end{aligned}$$

které postupně slábnou, až v termodynamické rovnováze zaniknou. Systém opět dosáhne Maxwellova rozdělení. Záporně vzaté gradienty makroskopických veličin jsou jakýmisi hnacími silami transportních jevů a nazýváme je termodynamickými silami X_k. Jedna termodynamická síla zpravidla vytvoří několik typů makroskopických toků a naopak jeden druh makroskopického toku je často způsoben několika termodynamickými silami. Gradient koncentrace i gradient teploty mohou způsobit tok částic, náboje i tepla. Například tok náboje způsobený gradientem teploty nazýváme *termoelektrickým jevem*, tok částic způsobený gradientem teploty *termodifúzí*. Obecně může být každý tok lineární kombinací všech termodynamických sil (předpokládáme, že nejsme daleko od termodynamické rovnováhy a lineární vztah je proto dobrou aproximací):

$$J_i = c_{ik} X_k\,. \tag{1.714}$$

Proces návratu systému k termodynamické rovnováze je nevratný, a proto je při něm vytvářena entropie (ta při nevratných procesech musí růst). Tento fakt má mimořádnou důležitost a podrobně se jím zabýval norsko-americký chemik a teoretický fyzik Lars Onsager (1903–1976). Zkusme například zjistit produkci entropie $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$ způsobenou tokem elektrického náboje (proudovou hustotou). Hustota Jouleova tepelného výkonu předávaná nabitým částicím je $\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$. Právě tento člen se objevil s různým znaménkem na pravých stranách zákonů zachování energie pro částice a pole. Produkce entropie v tomto jednoduchém případě je

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \int \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}}{T}\,\mathrm{d}V = \int \frac{\mathbf{j}\cdot\left(-\nabla\phi\right)}{T}\,\mathrm{d}V\,.$$

Symbolem s jsme označili hustotu entropie. V obecném případě je produkce entropie při konkrétním procesu úměrná objemovému integrálu z toku a příslušné termodynamické síly. Pro více procesů bude úměrná součtu takových členů:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \sim \int J_k X_k \,\mathrm{d}V \;>\; 0\,. \tag{1.715}$$

Spojením vztahů (1.714) a (1.715) získáme obecný tvar zákona pro produkci entropie:

► $$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \int L_{ik} X_i X_k \,\mathrm{d}V \;>\; 0\,. \tag{1.716}$$

Vidíme, že produkce entropie je pozitivně definitní kvadratickou formou termodynamických sil. Koeficienty úměrnosti L_{ik} nazýváme *kinetické koeficienty*. Lars Onsager ukázal na základě statistického výpočtu, že platí tzv. *relace reciprocity*

► $$L_{ik} = L_{ki}\,. \tag{1.717}$$

V odvození relací je třeba využít mikroskopické reverzibility, tj. invariantnosti pohybových rovnic vzhledem k časové inverzi. Relace reciprocity jsou velmi důležité vztahy mezi kinetickými koeficienty, které nelze odvodit v rámci fenomenologické termodynamiky. Proto se někdy nazývají čtvrtou větou termodynamickou a termodynamika je chápe jako nezávislý princip. Za objev relací reciprocity byla Larsu Onsagerovi udělena Nobelova cena za chemii pro rok 1968. Sylvestrovo kritérium aplikované na pozitivně definitní formu (1.716) dává

$$L_{11} > 0\,; \qquad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} > 0\,; \quad \cdots \tag{1.718}$$

Z Onsagerových relací reciprocity ihned plyne symetrie tenzoru elektrické vodivosti, neboť

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \int \frac{j_k E_k}{T}\,\mathrm{d}V = \int \frac{\sigma_{kl} E_k E_l}{T}\,\mathrm{d}V = \int L_{kl} E_k E_l \;\mathrm{d}V = \int L_{kl} X_k X_l \;\mathrm{d}V\,.$$

Obdobně musí být v anizotropním prostředí symetrický tenzor tepelné vodivosti. Uveďme na závěr obecný tvar rovnice difúze. Vyjděme z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_k = 0.$$

Předpokládejme, že

$$\mathbf{j}_k = c_{kl} \mathbf{X}_l = -c_{kl} \nabla \psi_l\,; \qquad \rho_k = a_{kl} \psi_l\,.$$

Potom má obecná rovnice difúze tvar

$$a_{kl} \frac{\partial \psi_l}{\partial t} = \nabla \cdot c_{kl} \nabla \psi_l\,. \tag{1.719}$$

1.6.4 Coulombova interakce

Debyeova stínicí vzdálenost

Předpokládejme plazma složené z několika různých druhů částic. Pokud budeme sledovat průběh potenciálu v okolí vybraného bodového zdroje (ať již konkrétní částice nebo nějaké poruchy), bude ovlivněn ostatními nabitými částicemi. Pokud není plazma daleko od termodynamické rovnováhy, přesunou se k vybranému zdroji částice opačné polarity a budou ho stínit. Výsledkem je exponenciální úbytek pole našeho zdroje s charakteristickou vzdáleností λ_D, ve které potenciál i pole poklesne na 1/e hodnoty dané Coulombovým zákonem. Tato vzdálenost se nazývá *Debyeova stínicí vzdálenost* a je pojmenována podle holandského fyzika a chemika Petera Debyeho (1884–1966). Elektrický potenciál $\phi(r)$ v okolí zdroje určíme kombinací Maxwellovy rovnice $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho_Q$ s definicí potenciálu $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, což vede na Poissonovu rovnici pro elektrický potenciál

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_Q}{\varepsilon_0}. \tag{1.720}$$

Pravou stranu určíme z definice hustoty náboje, do které za koncentraci dosadíme rovnovážné Maxwellovo rozdělení a vzhledem k tomu, že předpokládáme plazma blízké rovnovážnému, provedeme rozvoj exponenciály do prvního řádu:

$$\frac{\rho_Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_\alpha Q_\alpha n_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_\alpha Q_\alpha n_{\alpha 0}\exp\left[-\frac{Q_\alpha\phi(\mathbf{x})}{k_\mathrm{B}T_\alpha}\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum_\alpha Q_\alpha n_{\alpha 0}\right) - \left(\sum_\alpha \frac{Q_\alpha^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T_\alpha}\right)\phi(\mathbf{x}) \pm \cdots$$

První člen je nulový díky kvazineutralitě plazmatu, kterou předpokládáme přímo v definici plazmatu. Druhý člen je úměrný hledanému potenciálu, a Poissonova rovnice (1.720) má proto tvar

$$\nabla^2\phi = \alpha\phi; \qquad \alpha \equiv \sum_\alpha \frac{Q_\alpha^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}T_\alpha}.$$

Rovnici budeme řešit ve sférických souřadnicích se středem v námi vybraném zdroji:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}[r\phi(r)] = \alpha\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}r^2} = \alpha\psi; \quad \psi(r) \equiv r\phi(r) \quad \Rightarrow$$

$$\psi(r) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}\,r} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}\,r} \quad \Rightarrow \quad \phi(r) = \frac{C_1}{r}\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}\,r} + \frac{C_2}{r}\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}\,r}.$$

Vzhledem k tomu, že potenciál bodového zdroje nemůže divergovat v nekonečné vzdálenosti, je $C_1 = 0$. Konstantu C_2 určíme tak, aby potenciál v limitě malé vzdálenosti od zdroje přešel v klasický Coulombův potenciál zdroje s nábojem Q_0:

$$\phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{\lambda_\mathrm{D}}}\,; \qquad \lambda_\mathrm{D} \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}}{\sum_\alpha Q_\alpha^2 n_{\alpha 0}/T_\alpha}}\,. \tag{1.721}$$

Ve speciálním případě Z násobně ionizovaného plazmatu složeného jen z elektronů a iontů stejné teploty je $Q_\mathrm{e} = -e$, $Q_\mathrm{i} = Ze$, $n_{\mathrm{i}0} = n_{\mathrm{e}0}/Z$, $T_\mathrm{e} = T_\mathrm{i} = T$. Pro Debyeovu vzdálenost máme potom jednoduchý a často používaný vztah

$$\lambda_\mathrm{D} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_\mathrm{B} T}{(1+Z) n_{\mathrm{e}0} e^2}}\,. \tag{1.722}$$

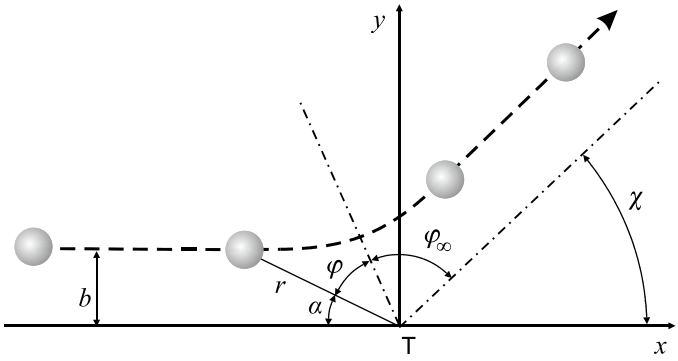
Důležitým parametrem je také počet elektronů v Debyeově sféře, což je oblast, ve které částice „vnímá“ své sousedy jako bodové částice. Nad touto hranicí je potenciál odstíněný a částice pociťují jen spojité kontinuum:

$$N_\mathrm{D} = \frac{4}{3}\pi\lambda_\mathrm{D}^3\, n_{\mathrm{e}0}\,. \tag{1.723}$$

Pokud je $N_\mathrm{D} \gg 1$, je celková průměrná síla od jednotlivých částic nulová a hovoříme o ideálním plazmatu. K jeho popisu je vhodná stavová rovnice ideálního plynu. Takové plazma má buď vysokou teplotu (a tím vodivost) nebo nízkou koncentraci.

Coulombův rozptyl (Rutherfordova formule)

Předpokládejme, že svazek nabitých částic nalétává na nepohyblivý terč. Vybereme si jednu částici ze svazku (na obrázku je šedá) a jednu z terče. V těžišťové soustavě můžeme interakci s částicí terče řešit jako pohyb v centrálním poli, pokud za kinetickou energii částice budeme brát $T = \mu\mathbf{g}^2/2$, kde $\mu \equiv m_\alpha m_\beta/(m_\alpha+m_\beta)$ je tzv. redukovaná hmotnost a $\mathbf{g}$ je relativní rychlosti obou částic, viz rozklad (1.647), ve kterém je těžišťová rychlost v těžišťové soustavě nulová. Srážka už nyní není okamžitá, proto se velikost vzájemné rychlosti bude v průběhu coulombické srážky měnit, ale nadále platí, že v limitách $t \to \pm\infty$ (před srážkou a po srážce) bude mít stejnou hodnotu g_0, tedy velikost vzájemné rychlosti před srážkou a po srážce je stejná.



Obr. 1.112: Coulombův rozptyl. Písmenem T je označeno těžiště. Polární úhel odečítáme od nejkratšího průvodiče.

Budeme se zabývat výsledným stavem po rozptylu a určíme vztah mezi úhlem rozptylu χ, záměrným parametrem b (neboli impaktním parametrem) a relativní rychlostí g_0 nalétávající částice vzhledem k částici terče. Jako poslední krok vypočteme účinný průřez pro Coulombovu interakci. Celý problém budeme chápat jako rovinný, Lagrangeovu funkci pro nalétávající částici zapíšeme ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}\mu g^2 - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Vzhledem k tomu, že Lagrangova funkce nezávisí na polárním úhlu φ, zachovává se moment hybnosti p_φ. Lagrangeova funkce dále nezávisí explicitně na čase, a proto se bude zachovávat celková energie systému. Namísto řešení pohybových rovnic můžeme využít tyto zákony zachování (α je úhel mezi vzájemnou rychlostí a radiusvektorem):

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\dot{\varphi} = \text{const} = \mu r g_\varphi = \mu r g \sin\alpha = \mu g r \sin\alpha = \mu g_0 b,$$

$$E = \frac{1}{2}\mu(g_r^2 + g_\varphi^2) + \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \text{const} = \frac{1}{2}\mu g_0^2.$$

Integrační konstanty jsme určili pro $t \to -\infty$ ($r \to \infty$), b je ramenem momentu hybnosti. Z první rovnice nalezneme časovou změnu úhlu a z druhé časovou změnu radiální vzdálenosti (za časovou změnu úhlu dosadíme z první rovnice):

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{b g_0}{r^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{g_0^2 - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{2\pi\varepsilon_0\mu r} - \frac{b^2 g_0^2}{r^2}}.$$

Vzhledem k tomu, že nám postačí zjistit stav v limitě $t \to \infty$, nemusíme počítat časový průběh trajektorie. Vydělením obou rovnic se zbavíme parametrizace a po separaci proměnných máme

$$\int \frac{\dfrac{b}{r^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{Q_\alpha Q_\beta}{2\pi\varepsilon_0\mu b g_0^2}\dfrac{b}{r} - \dfrac{b^2}{r^2}}}\,\mathrm{d}r = \int \mathrm{d}\varphi,$$

Zavedeme substituci

$$\xi = \frac{b}{r} + \xi_0; \qquad \xi_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\varepsilon_0\mu b g_0^2}$$

a po elementárních úpravách získáme

$$-\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}\,\mathrm{d}\xi = \varphi - \varphi_0; \qquad a^2 \equiv 1 + \xi_0^2.$$

Integrace je nyní přímočará a vede na

$$\arccos\left(\frac{\xi}{a}\right) = \varphi - \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \xi = a\cos(\varphi - \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{r} + \xi_0 = \sqrt{1 + \xi_0^2}\,\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Úhel budeme odečítat od nejkratšího průvodiče, jak je to běžné v laboratorní soustavě (viz obrázek 1.112). Pak musí mít vzdálenost r extrém pro $\varphi = 0$. Poslední vztah proto budeme diferencovat, následně určíme $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi$ a pro $\varphi = 0$ zapíšeme nutnou podmínku extremálnosti, tj. $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi = 0$. Z této podmínky plyne, že integrační konstanta φ_0 musí být nulová, $\varphi_0 = 0$. Dosti dlouho po rozptylu ($r \to \infty$) platí proto vztah

$$\xi_0 = \sqrt{1+\xi_0^2}\,\cos\varphi_\infty \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(1/\xi_0)^2}}\,.$$

Porovnáme-li výraz se vztahem I.3.558 (první díl „Vybraných kapitol“) mezi funkcemi cosinus a tangens, zjistíme, že

$$\mathrm{tg}\,\varphi_\infty = \frac{1}{\xi_0}\,.$$

Úhel φ_∞ souvisí s úhlem rozptylu χ vztahem (viz obrázek 1.112) $\chi + 2\varphi_\infty = \pi$, proto

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{\xi_0} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathrm{cotg}\,\frac{\chi}{2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\mu\, b\, g_0^2}{Q_\alpha Q_\beta} \qquad \Rightarrow$$

► $$b(\chi) = b_0\,\mathrm{cotg}\,\frac{\chi}{2}\,; \qquad \chi(b) = 2\,\mathrm{arccotg}\,\frac{b}{b_0}\,, \tag{1.724}$$

kde jsme označili

$$b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\varepsilon_0\mu\, g_0^2}\,; \qquad g \equiv \left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right|\,; \qquad \mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\,.$$

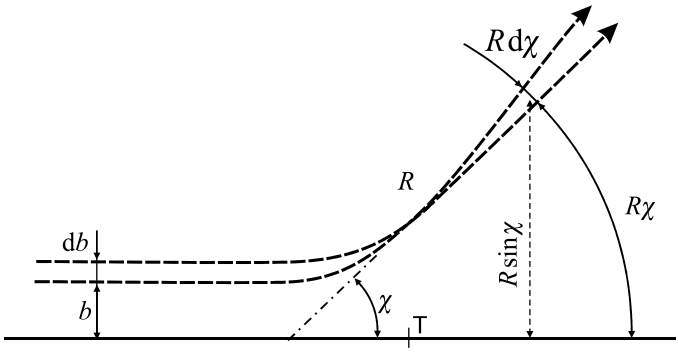
Význam parametru b_0 je zřejmý. Jde o záměrný parametr, při kterém bude úhel rozptylu 90°, tedy o spodní hranici srážek braných v úvahu v Landauově rovnici (viz kapitola 1.6.1). Parametr b_0 se nazývá *kritický záměrný parametr*. Nyní zbývá určit diferenciální účinný průřez Coulombovy interakce. Uvažujme část nalétávajícího svazku ve tvaru prstencového mezikruží se záměrným parametrem z intervalu $(b, b + \mathrm{d}b)$, která se rozptýlí do úhlu $(\chi, \chi + \mathrm{d}\chi)$. Pro účinný průřez máme:

► $$\mathrm{d}\sigma = 2\pi b\mathrm{d}b = 2\pi b\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\right|\mathrm{d}\chi = \pi b_0^2\,\frac{\cos\dfrac{\chi}{2}}{\sin^3\dfrac{\chi}{2}}\,\mathrm{d}\chi\,. \tag{1.725}$$

Absolutní hodnota je ve výrazu proto, že s rostoucí záměrnou vzdáleností úhel rozptylu klesá a derivace ve vztahu je záporná. Formuli pro diferenciální účinný průřez můžeme zapsat také pomocí elementu prostorového úhlu (viz obrázek 1.113)

$$\mathrm{d}\Omega \equiv \frac{\mathrm{d}S}{R^2} = \frac{2\pi R\sin\chi\; R\mathrm{d}\chi}{R^2} = 2\pi\sin\chi\,\mathrm{d}\chi \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}\chi = \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi\sin\chi} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi\sin\dfrac{\chi}{2}\cos\dfrac{\chi}{2}}\,.$$



Obr. 1.113: K odvození diferenciálního účinného průřezu

Výsledná formule pro diferenciální účinný průřez proto bude

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{b_0^2}{4\sin^4\frac{\chi}{2}}\,\mathrm{d}\Omega\,;$$

$$b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\varepsilon_0 \mu\, g_0^2}\,; \quad g \equiv \left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right|\,; \quad \mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\,. \tag{1.726}$$

Jde o slavnou Rutherfordovu formuli, kterou odvodil skotský fyzik a chemik Ernest Rutherford (1871–1937) při zkoumání rozptylu alfa částic na atomárních jádrech v tenké zlaté fólii. Při těchto experimentech bylo objeveno atomové jádro. Povšimněte si, že výsledná formule nezáleží na znaménku náboje srážejících se částic, je shodná pro přitažlivou i odpudivou interakci. V dřívějších pracích se Rutherfordova formule zapisovala pomocí funkce cosecans:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4} b_0^2 \,\mathrm{cosec}^4\frac{\chi}{2}\,\mathrm{d}\Omega\,.$$

Fokkerova-Planckova rovnice

Nalezněme nyní srážkový člen pro Coulombovu interakci v limitě slabých, ale mnohonásobně opakovaných srážek. Pokud to nebude nezbytně nutné, budeme vynechávat index příslušnosti k částicím druhu α. Při odvození využijeme následující předpoklady:

1. Každá částice v plazmatu prodělá za malý, ale konečný časový interval Δt velmi mnoho srážek, při nichž se směr její rychlosti mění pomalu, tj. celková změna rychlosti $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ za sledovaný malý časový interval Δt bude malá.
2. Srážky jsou pružné, tj. energie se nemění při srážce na jiné formy energie.
3. Pole u sledované částice je superpozicí polí částic v Debyeově sféře. Tyto částice vnímá sledovaná částice jako bodové. Interakci pro částice za hranicí Debyeovy sféry neuvažujeme.
4. Neuvažujeme srážky, při kterých je úhel rozptylu příliš veliký. Takové srážky jsou v plazmatu málo pravděpodobné a velká změna vektoru relativní rychlosti by byla v rozporu s prvním předpokladem. V Landauově přiblížení se uvažují

například jen srážky s úhlem rozptylu menším než 90° (záměrným parametrem b větším než b_0).

5. Srážky tvoří markovský řetězec, tj. proces srážení si nepamatuje historii, a proto pravděpodobnost $\mathscr{P}(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v})\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v})$, že částice za čas Δt změní svou rychlost z hodnoty $\mathbf{v}$ na hodnotu $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$, nezávisí na čase. Jde samozřejmě jen o jisté přiblížení realitě, které výpočetně situaci značně zjednoduší.

Za těchto předpokladů najdeme srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice, tj. změnu hustoty pravděpodobnosti danou srážkovými procesy:

$$S = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{col}} = \frac{f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - f(t-\Delta t,\mathbf{x},\mathbf{v})}{\Delta t}\,. \tag{1.727}$$

Standardně u markovských řetězců můžeme pro pravděpodobnosti psát

$$w_k = \sum_l w_l P_{lk}\,,$$

kde w_k je pravděpodobnost konfigurace k a P_{lk} je pravděpodobnost přechodu z konfigurace l do konfigurace k. Obdobně v našem případě zapíšeme výslednou hustotu pravděpodobnosti v čase t jako superpozici všech možných přechodů z času $t–\Delta t$:

$$f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = \int f(t-\Delta t,\mathbf{x},\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v})\mathscr{P}(\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v},\Delta\mathbf{v})\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v})\,. \tag{1.728}$$

Funkci $\mathscr{P}(\mathbf{v},\Delta\mathbf{v})$ přechodu ze stavu $\mathbf{v}$ do stavu $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ nalezneme pro Coulombovu interakci v příští kapitole. Její základní vlastností je normovací podmínka vyjadřující, že vždy k nějakému přechodu dojde, tj.

$$\int \mathscr{P}(\mathbf{v},\Delta\mathbf{v})\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v}) = 1\,. \tag{1.729}$$

Integrand výrazu (1.728) nyní rozvineme do druhého řádu Taylorovy řady v argumentu $\mathbf{v}$ (k tomu je podstatný první předpoklad zajišťující, že za sledovaný úsek Δt bude změna rychlosti malá):

$$f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = \int\left[f(t-\Delta t,\mathbf{x},\mathbf{v})\mathscr{P}(\mathbf{v},\Delta\mathbf{v}) - \Delta v_l\frac{\partial(f\mathscr{P})}{\partial v_l} + \frac{1}{2}\Delta v_l\Delta v_k\frac{\partial^2(f\mathscr{P})}{\partial v_l\partial v_k} \pm\cdots\right]\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v})\,.$$

Integrace prvního členu je triviální, f vytkneme před integrál a využijeme normování (1.729). Ze zbylých členů vytkneme vše, co se integrace netýká:

$$f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \equiv f(t-\Delta t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial v_l} f\int \Delta v_l\,\mathscr{P}\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v_l\partial v_k} f\int \Delta v_l\Delta v_k\mathscr{P}\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v})\,.$$

Poté převedeme první člen na levou stranu rovnosti. Oba integrály na pravé straně reprezentují střední hodnoty změny rychlosti:

$$f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - f(t-\Delta t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = -\frac{\partial}{\partial v_l}\left(f\left\langle\Delta v_l\right\rangle\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v_l\partial v_k}\left(f\left\langle\Delta v_l\Delta v_k\right\rangle\right).$$

Na pravé straně bychom nyní měli ještě Taylorovsky rozvinout hustotu pravděpodobnosti v čase jako $f(t-\Delta t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \Delta t\,\partial f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})/\partial t \pm\cdots$. Vzhledem k tomu,

že jsme požadovali, aby Δt bylo malé, postačí nám v lineárním přiblížení se omezit jen na první člen $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$. Důvodem je to, že při markovských procesech jsou obě střední hodnoty lineárně závislé na časovém úseku Δt. Je to dáno tím, že jak střední odchylka, tak střední kvadratická odchylka pro náhodné procesy roste lineárně s časem. Pokud tedy na pravé straně poslední rovnosti ponecháme oba dva členy a f uvažujeme v čase t, ponechali jsme napravo všechny členy lineární v časovém úseku Δt. Po triviální úpravě máme srážkový člen ve Fokkerově-Planckově přiblížení (pravou stranu Fokkerovy-Planckovy rovnice):

$$\frac{f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})-f(t-\Delta t,\mathbf{x},\mathbf{v})}{\Delta t}=-\frac{1}{\Delta t}\frac{\partial}{\partial v_l}\left(f\left\langle \Delta v_l\right\rangle\right)+\frac{1}{2\Delta t}\frac{\partial^2}{\partial v_l\partial v_k}\left(f\left\langle \Delta v_l\Delta v_k\right\rangle\right).$$

Zapišme nyní celkový výsledek, tj. Fokkerovu-Planckovu rovnici:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\right)f+\left(\frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\right)f=-\frac{1}{\Delta t}\frac{\partial f\left\langle \Delta v_l\right\rangle}{\partial v_l}+\frac{1}{2\Delta t}\frac{\partial^2 f\left\langle \Delta v_l\Delta v_k\right\rangle}{\partial v_l\partial v_k};$$

► $$\left\langle \Delta v_l\right\rangle\equiv\int\Delta v_l\,\mathscr{P}\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v}), \qquad (1.730)$$

$$\left\langle \Delta v_l\Delta v_k\right\rangle\equiv\int\Delta v_l\Delta v_k\mathscr{P}\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v}).$$

Častý je i zápis v invariantním tvaru:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\right)f+\left(\frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\right)f=-\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\cdot\left(f\left\langle\Delta\mathbf{v}\right\rangle\right)+\frac{1}{2\Delta t}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\otimes\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\right):\left(f\left\langle\Delta\mathbf{v}\otimes\Delta\mathbf{v}\right\rangle\right);$$

► $$\left\langle\Delta\mathbf{v}\right\rangle\equiv\int\Delta\mathbf{v}\,\mathscr{P}\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v}), \qquad (1.731)$$

$$\left\langle\Delta\mathbf{v}\otimes\Delta\mathbf{v}\right\rangle\equiv\int\Delta\mathbf{v}\otimes\Delta\mathbf{v}\,\mathscr{P}\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v}).$$

Operace dvojtečka znamená dvojí skalární součin podle předpisu (1.730). Znak tenzorového součinu se někdy vynechává. Srážkový člen Fokkerovy-Planckovy rovnice má tedy dvě části. Výraz obsahující $\langle\,\Delta\mathbf{v}\,\rangle$ se nazývá *dynamický třecí člen*, neboť vypovídá o brzdění nalétávajícího svazku částic vlivem srážek s částicemi terče. Výraz obsahující $\langle\,\Delta\mathbf{v}\otimes\Delta\mathbf{v}\,\rangle$ se nazývá *difúzní člen*, neboť vypovídá o rozptylu nalétávajícího svazku částic vlivem interakce s částicemi terče. V příští kapitole určíme oba dva členy pro Coulombovu interakci a ukážeme, že je lze zapsat pomocí tzv. Rosenbluthových potenciálů. Víme, že podle předpokladů můžeme uvažovat jen srážky s malým rozptylovým úhlem, kterých je většina. Pokud budeme záměrný parametr uvažovat v intervalu ($b_{\min}$, $b_{\max}$), kde za $b_{\min}$ zvolíme záměrný parametr b_0, při kterém dojde ke srážce s úhlem rozptylu 90° a za $b_{\max}$ Debyeovu vzdálenost, bude Fokkerova-Planckova rovnice ekvivalentní s tzv. Landauovou rovnicí.

Rosenbluthovy potenciály

Pro konkrétní výpočet hodnot $\langle\,\Delta\mathbf{v}\,\rangle$ a $\langle\,\Delta\mathbf{v}\otimes\Delta\mathbf{v}\,\rangle$ již bude nutné rozlišovat nalétávající částici a částici terče. Ve shodě s předchozími kapitolami budeme označovat nalétáva-

jící částici α a částici terče β. Rychlosti před srážkou budou $\mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{v}_\beta$ a po srážce $\mathbf{v}'_\alpha$, $\mathbf{v}'_\beta$. Vzájemnou rychlost částic označíme $\mathbf{g} \equiv \mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$. Z (1.648) víme, že při srážce se zachovává velikost vzájemné rychlosti $g = |\mathbf{g}|$, veličina g je proto pro srážku charakteristická. Směr vzájemné rychlosti $\mathbf{k} \equiv \mathbf{g}/g$ se při srážce mění. Z (1.724) známe také závislost mezi záměrným parametrem b a úhlem rozptylu χ pro Coulombovu interakci:

$$b(\chi) = b_0 \operatorname{cotg}\frac{\chi}{2}; \qquad \chi(b) = 2\operatorname{arccotg}\frac{b}{b_0},$$
$$b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}; \quad g \equiv \left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right|; \quad \mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}. \tag{1.732}$$

Ze vztahů je zřejmé, že parametr b_0 je takový záměrný parametr, při kterém je úhel rozptylu 90°, tedy dolní mez námi uvažovaného intervalu záměrných parametrů. Přistupme nyní k samotnému výpočtu třecího a difúzního členu ve Fokkerově-Planckově rovnici. K tomu budeme nejprve potřebovat rychlost nalétávající částice vyjádřenou pomocí těžišťové a relativní rychlosti, viz vztah (1.646)

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\mathrm{T} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\mathbf{g}.$$

Odečteme-li hodnoty po srážce a před srážkou a označíme-li relativní rychlost $\mathbf{g}$, dostaneme

$$\Delta\mathbf{v}_\alpha = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\Delta\mathbf{g}.$$

Těžišťová rychlost se při srážce nemění, a proto v rozdílu vymizí. Hledané výrazy jsou:

$$\left\langle \Delta\mathbf{v}_\alpha \right\rangle \equiv \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\int \Delta\mathbf{g}\,\mathscr{P}\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v}),$$

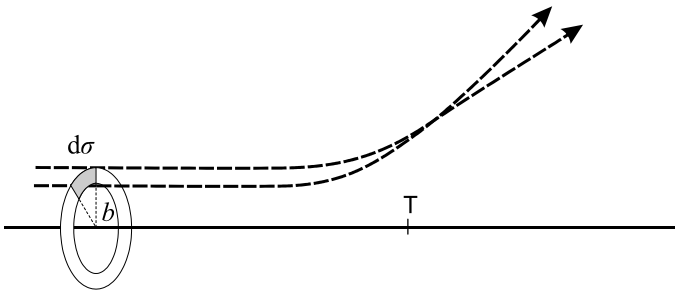
$$\left\langle \Delta\mathbf{v}_\alpha \otimes \Delta\mathbf{v}_\alpha \right\rangle \equiv \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\right)^2 \int \Delta\mathbf{g}\otimes\Delta\mathbf{g}\,\mathscr{P}\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v}).$$

Pravděpodobnostní element vyjádříme analogicky jako v (1.653), tj. bude úměrný velikosti vzájemné rychlosti nalétávajících částic a částic terče (čím je větší, tím s vyšší frekvencí bude docházet ke srážkám), hustotě pravděpodobnosti výskytu částic terče, časovému intervalu a samozřejmě účinnému průřezu Coulombovy interakce:

$$\mathscr{P}\,\mathrm{d}^3(\Delta\mathbf{v}) = g\, f_\beta \Delta t\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta,$$

$$\left\langle \Delta\mathbf{v}_\alpha \right\rangle \equiv \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\Delta t \int \Delta\mathbf{g}\, g\, \mathrm{d}\sigma\, f_\beta\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta,$$

$$\left\langle \Delta\mathbf{v}_\alpha \otimes \Delta\mathbf{v}_\alpha \right\rangle \equiv \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\right)^2 \Delta t \int \Delta\mathbf{g}\otimes\Delta\mathbf{g}\, g\, \mathrm{d}\sigma\, f_\beta\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta.$$



Obr. 1.114: K vyjádření diferenciálního účinného průřezu

Z obrázku 1.114 je zřejmé, že $\mathrm{d}\sigma = b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varphi$ a integrace přes element účinného průřezu znamená integraci přes všechny hodnoty uvažovaných záměrných parametrů a přes azimutální úhel. Tím je pokryt průřez celého nabíhajícího svazku částic. Integrace přes účinný průřez se týká jen veličin g, proto nejprve určíme koeficienty

$$\gamma_k \equiv \int \Delta g_k \, g \,\mathrm{d}\sigma = \int \Delta g_k \, g \, b \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}\varphi \,; \tag{1.733}$$

$$\xi_{kl} \equiv \int \Delta g_k \Delta g_l \, g \,\mathrm{d}\sigma = \int \Delta g_k \Delta g_l \, g \, b \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}\varphi \,. \tag{1.734}$$

Pokud se nám podaří tyto koeficienty určit, budou třecí a dynamický člen dány výrazy

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \right\rangle &\equiv \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta t \int \boldsymbol{\gamma} \, f_\beta(\mathbf{v}_\beta) \,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta \,. \\ \left\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \otimes \Delta \mathbf{v}_\alpha \right\rangle &\equiv \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \Delta t \int \boldsymbol{\xi} \, f_\beta(\mathbf{v}_\beta) \,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta \,. \end{aligned} \tag{1.735}$$

Klíčem k určení pravé strany Fokkerovy-Planckovy rovnice tedy je výpočet koeficientů γ_k a ξ_{kl}. Ze symetrie koeficientů je zřejmé, že mohou být jen následujícími funkcemi vektoru $\mathbf{g}$:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= A \, g_k \,; \\ \xi_{kl} &= B \, \delta_{kl} + C \, g_k g_l \,. \end{aligned} \tag{1.736}$$

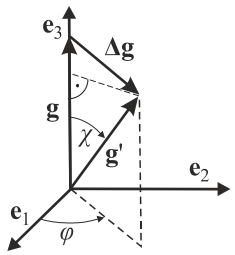
Stačí tedy určit konstanty A, B a C. Tyto konstanty mohou záviset maximálně na velikosti vzájemné rychlosti g, neboť ta se při srážce nemění. Hodnoty konstant A, B a C můžeme bez újmy na obecnosti určit v jakékoli souřadnicové soustavě. Budeme proto volit soustavu, ve které vektor $\mathbf{g} = \mathbf{v}_{\alpha\beta}$ před srážkou míří v ose $\mathbf{e}_3$:

Nezapomeňte, že vektory $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}'$ mají stejnou velikost g, jsou jen vůči sobě potočeny. Z obrázku jsou zřejmé velikosti složek vektoru $\Delta\mathbf{g}$, který vystupuje v integracích (1.733) a (1.734):

$$\Delta g_1 = g \sin\chi \cos\varphi \,;$$

$$\Delta g_2 = g \sin\chi \sin\varphi \;\;;$$

$$\Delta g_3 = -g(1 - \cos\chi) \,.$$



Obr. 1.115: Volba souřadnicové soustavy

Vzhledem k tomu, že integrace (1.733) a (1.734) budeme provádět přes záměrný parametr b, je nutné vyjádřit závislost na úhlu rozptylu χ pomocí záměrného parametru $b = b_0 \operatorname{cotg}(\chi/2)$, tedy převést funkce $\sin\chi$, $\cos\chi$: na $\operatorname{cotg}\chi/2$. K tomu využijeme vztahy I.3.562 a I.3.563 (první díl „Vybraných kapitol“:

$$\sin\chi = \frac{2\operatorname{cotg}(\chi/2)}{1+\operatorname{cotg}^2(\chi/2)} = \frac{2bb_0}{b^2+b_0^2},$$

$$\cos\chi = \frac{\operatorname{cotg}^2(\chi/2)-1}{\operatorname{cotg}^2(\chi/2)+1} = \frac{b^2-b_0^2}{b^2+b_0^2}.$$

Výsledné vztahy pro složky vektoru $\Delta\mathbf{g}$ tedy jsou:

$$\Delta g_1 = g\frac{2bb_0}{b^2+b_0^2}\cos\varphi;$$

$$\Delta g_2 = g\frac{2bb_0}{b^2+b_0^2}\sin\varphi; \qquad (1.737)$$

$$\Delta g_3 = -g\frac{2b_0^2}{b^2+b_0^2}.$$

Ve shodě s (1.736) bude mít integrál (1.733) v naší souřadnicové soustavě jedinou nenulovou složku, a to v ose $\mathbf{e}_3$, ze které určíme konstantu $A = \gamma_3/g$. Z (1.736) je patrné, že $\xi_{11} = B$, $\xi_{22} = B$ tedy B určíme pomocí ξ_{11}, ξ_{22} nebo jako $(\xi_{11} + \xi_{22})/2$. V úpravách po integraci budeme předpokládat, že $\lambda_D \gg b_0$, integraci provedeme od nuly, protože srážek se záměrným parametrem menším než b_0 je málo a jejich příspěvek k integracím je zanedbatelný:

$$A = \gamma_3/g \equiv \frac{1}{g}\int \Delta g_3\, g\, b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varphi = \int\left(-\frac{2b_0^2}{b^2+b_0^2}\right) g\, b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varphi = -2\pi b_0^2 g\int_0^{\lambda_D}\frac{2b}{b^2+b_0^2}\mathrm{d}b =$$

$$= -2\pi b_0^2 g\ln\left[b^2+b_0^2\right]_0^{\lambda_D} = -2\pi b_0^2 g\ln\frac{\lambda_D^2+b_0^2}{b_0^2} \approx -4\pi b_0^2 g\ln\frac{\lambda_D}{b_0}.$$

Obdobný postup zvolíme pro konstantu B (v integraci substituujeme za $b^2+b_0^2$):

$$B=\frac{\xi_{11}+\xi_{22}}{2}\equiv\int\left(\Delta g_1\Delta g_1+\Delta g_2\Delta g_2\right)g\,b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int g^2\left(\frac{2bb_0}{b^2+b_0^2}\right)^2 g\,b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\pi g^3b_0^2\int_0^{\lambda_\mathrm{D}}\frac{4b^3}{\left(b^2+b_0^2\right)^2}\mathrm{d}b=2\pi g^3b_0^2\left[\frac{b_0^2}{b^2+b_0^2}+\ln\left(b^2+b_0^2\right)\right]_0^{\lambda_\mathrm{D}}\approx 4\pi g^3b_0^2\ln\frac{\lambda_\mathrm{D}}{b_0}.$$

Nyní zbývá určit poslední konstantu C. V námi zvolené souřadnicové soustavě z rozkladu (1.736) vidíme, že $\xi_{33}=B+Cg^2$:

$$B+Cg^2=\xi_{33}=\int\Delta g_3\Delta g_3\,g\,b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varphi=\int\left(-g\frac{2b_0^2}{b^2+b_0^2}\right)^2 g\,b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\pi g^3 4b_0^4\int_0^{\lambda_\mathrm{D}}\frac{2b}{\left(b^2+b_0^2\right)^2}\mathrm{d}b=\pi g^3 4b_0^4\left[-\frac{1}{b^2+b_0^2}\right]_0^{\lambda_\mathrm{D}}\approx 0.$$

Poslední integrál neobsahuje podstatný logaritmický člen a je tedy řádově $\ln(\lambda_\mathrm{D}/b_0)$ krát menší než A a B. Proto bude v našem přiblížení platit $C=-B/g^2$. Celkový výsledek celého výpočtu tedy je

$$A\approx-4\pi b_0^2 g\ln\left(\frac{\lambda_\mathrm{D}}{b_0}\right);\quad B\approx 4\pi b_0^2 g^3\ln\left(\frac{\lambda_\mathrm{D}}{b_0}\right);\quad C\approx-4\pi b_0^2 g\ln\left(\frac{\lambda_\mathrm{D}}{b_0}\right).\qquad(1.738)$$

Poznamenejme ještě, že příspěvek k integracím od 0 do b_0 je nepodstatný, a proto bylo možné integrace provádět od nuly. Naopak oříznutí integrálu shora Debyeovou vzdáleností je podstatné, integrál by bez oříznutí shora divergoval. Nyní máme vše potřebné pro určení třecího a dynamického členu (1.735). Konstanty A, B, C dosadíme do rozkladu (1.736) a ten do vztahu pro třecí a dynamický člen (1.735). Výsledný výraz upravíme pomocí definice záměrného parametru b_0:

$$\gamma_k\approx C_{\alpha\beta}\ln\Lambda_{\alpha\beta}\left(-\frac{g_k}{g^3}\right);$$
$$\xi_{kl}\approx C_{\alpha\beta}\ln\Lambda_{\alpha\beta}\left(\frac{g^2\delta_{kl}-g_kg_l}{g^3}\right),\qquad(1.739)$$

kde jsme označili

$$C_{\alpha\beta}\equiv\frac{\left(Q_\alpha Q_\beta\right)^2}{4\pi\varepsilon_0^2\mu^2};\qquad\ln\Lambda_{\alpha\beta}\equiv\ln\left(\frac{\lambda_\mathrm{D}}{b_0}\right);\qquad\mu\equiv\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha+m_\beta}.\qquad(1.740)$$

Pomalu se měnící funkce $\ln\Lambda$ se nazývá Coulombův logaritmus a budeme ji nadále považovat vzhledem k derivacím i integracím za konstantní. (Pro rovnovážné plazma je

$g^2 = k_B T/m$ a argument Coulombova logaritmu je až na faktor 3 roven počtu částic v Debyeově sféře.) Jako integrand zde vystupují složky relativní rychlosti g_{kl} a konstantní velikost relativní rychlosti $g = (g_k g_k)^{1/2}$. Integrandy lze upravit za pomoci relací

$$\frac{\partial g}{\partial g_k} = \frac{g_k}{g}; \qquad \frac{\partial}{\partial g_k}\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{g_k}{g^3}; \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial g_k \partial g_l} = \frac{g^2\delta_{kl} - g_k g_l}{g^3}. \tag{1.741}$$

Vzhledem k tomu, že $g_k = v_{\alpha k} - v_{\beta k}$, platí $\partial/\partial g_k = \partial/\partial v_{\alpha k}$ a třecí a difúzní člen můžeme přepsat do podoby

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_{\alpha k} \rangle &\approx \Delta t \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} C_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha k}} \int \frac{f_\beta(\mathbf{v}_\beta)}{g} \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta . \\ \langle \Delta v_{\alpha k} \Delta v_{\alpha l} \rangle &\approx \Delta t \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\right)^2 C_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial v_{\alpha k} \partial v_{\alpha l}} \int g\, f_\beta(\mathbf{v}_\beta) \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta . \end{aligned} \tag{1.742}$$

Zaveďme Rosenbluthovy potenciály H a G za pomoci předpisů

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) &\equiv \int \frac{f_\beta}{g} \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta ; \\ G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) &\equiv \int g\, f_\beta \, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta \end{aligned} . \tag{1.743}$$

Tyto potenciály jsou pojmenovány po významném americkém plazmovém fyzikovi Marshallu Nicholasi Rosenbluthovi (1927–2003) a vyjadřují vliv rozptylového centra β na rozptylovanou částici α. Upravme nyní srážkový člen na pravé straně Fokkerovy-Planckovy rovnice (1.730) za pomoci výrazů (1.742) a (1.743)

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha l}} \left(f_\alpha \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial v_{\alpha l}} \right) + D_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial v_{\alpha l} \partial v_{\alpha k}} \left(f_\alpha \frac{\partial^2 G_{\alpha\beta}}{\partial v_{\alpha k} \partial v_{\alpha l}} \right); \\ S_{\alpha\beta} &= -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left(f_\alpha \nabla_{\mathbf{v}} H_{\alpha\beta} \right) + D_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \left(\nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}} \right) : \left(f_\alpha \, \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}} G_{\alpha\beta} \right); \\ K_{\alpha\beta} &\equiv C_{\alpha\beta} \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{Q_\alpha Q_\beta}{\varepsilon_0 m_\alpha} \right)^2 \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta}; \\ D_{\alpha\beta} &\equiv \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{Q_\alpha Q_\beta}{\varepsilon_0 m_\alpha} \right)^2 . \end{aligned} \tag{1.744}$$

První zápis je ve složkách, druhý je invariantní. Tenzorové (diadické) součiny nejsou v zápisu pro přehlednost značeny, způsob zúžení tenzorů je patrný ze složkového zápisu. Rychlostní gradienty působí na rychlost nalétávající částice, přes rychlosti terče je v Rosenbluthových potenciálech již integrováno. Rosenbluthovy potenciály se ve fyzice plazmatu často využívají. Známe-li hustotu pravděpodobnosti částic terče, lze pro Rosenbluthovy potenciály odvodit rovnice, které jsou analogií známé Poissonovy rovnice. Proto je lze snadno rozvinout do kulových funkcí a řešit pomocí nich sféricky symetrické problémy. Porovnejme elektrický potenciál dvou nábojů v elektrostatice s definicí Rosenbluthova potenciálu H:

$$\phi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_\beta}{\left|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta\right|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}_\beta \,;$$

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{f_\beta}{\left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right|}\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta \,.$$

Elektrický potenciál splňuje Poissonovu rovnici

$$\nabla^2\phi_{\alpha\beta} = -\frac{\rho_\beta}{\varepsilon_0}.$$

Z analogie je jasné, že bude platit

$$\nabla^2{}_{\mathbf{v}} H_{\alpha\beta} = -4\pi f_\beta . \tag{1.745}$$

Přímo z definice lze ukázat, že $\nabla^2_{\mathbf{v}} G_{\alpha\beta} = 2H_{\alpha\beta}$. Druhý potenciál proto bude splňovat rovnici

$$\nabla^2{}_{\mathbf{v}}\nabla^2{}_{\mathbf{v}} G_{\alpha\beta} = -8\pi f_\beta . \tag{1.746}$$

Známe-li tedy hustotu pravděpodobnosti částic v terči, můžeme z posledních dvou rovnic určit Rosenbluthovy potenciály interakce nalétávajícího svazku s terčem. Napišme na závěr přehledně výsledek této kapitoly – Fokkerovu Planckovu rovnici pro svazek částic α nalétávajících na terč β za pomoci Rosenbluthových potenciálů:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_\alpha \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\right) f_\alpha + \left(\frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\right) f_\alpha = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \,;$$

$$\blacktriangleright \qquad S_{\alpha\beta} \equiv K_{\alpha\beta}\ln\Lambda_{\alpha\beta}\left[\begin{array}{c} -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\cdot\left(f_\alpha \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}} H_{\alpha\beta}\right) + \\ +\frac{1}{2}\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\right) : \left(f_\alpha\, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}} G_{\alpha\beta}\right) \end{array}\right]; \tag{1.747}$$

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{1}{g} f_\beta \,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta \,,$$

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int g\, f_\beta \,\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta \,.$$

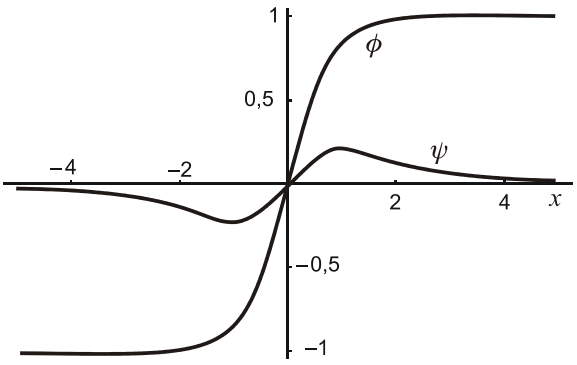
V následujícím textu se nejprve seznámíme s chybovou a Chandrasekharovou funkcí. Obě budou velmi důležité při výpočtu Rosenbluthových potenciálů pro maxwellovský terč. K příslušné integraci budeme potřebovat rozvoj do Legendreových polynomů. Vše podstatné naleznete v prvním díle „Vybraných kapitol“, v části I.3.7.2 věnované speciálním funkcím. Komu nezáleží na detailním výpočtu, může následující text vynechat a jen akceptovat výsledné vztahy pro Rosenbluthovy potenciály.

Chybová funkce a Chandrasekharova funkce

K výpočtu Rosenbluthových potenciálů se nám hodí chybová funkce ϕ a jí příbuznmá Chandrasekharova funkce ψ:

► $$\phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi\,; \tag{1.748}$$

► $$\psi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}\, x^2} \int_0^x \xi^2\, \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi\,. \tag{1.749}$$



Obr. 1.116: Chybová a Chandrasekharova funkce

Nalezněme limity obou dvou funkcí pro malé a velké argumenty:

$$\begin{aligned} &x \ll 1: \quad \psi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}\, x^2} \int_0^x \xi^2 (1 \pm \cdots)\, \mathrm{d}\xi \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\, x, \quad \phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (1 \pm \cdots)\, \mathrm{d}\xi \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x, \\ &x \gg 1: \quad \psi(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}\, x^2} \int_0^\infty \xi^2\, \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2x^2}, \qquad \phi(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi = 1\,. \end{aligned} \tag{1.750}$$

Průběh obou funkcí je na předchozím obrázku. Chandrasekharova funkce je pojmenována podle indického fyzika Subrahmanyana Chandrasekhara (1910–1995). Funkce ϕ, ψ spolu souvisí jednoduchým vztahem

► $$\psi(x) = \frac{\phi - x\phi'}{2x^2}\,. \tag{1.751}$$

Důkaz je jednoduchý. Dosaďme do levé strany definici Chandrasekharovy funkce a do pravé strany definici chybové funkce a na obou stranách vynecháme jmenovatel x^2:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \xi^2\, \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi \overset{?}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi - x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Na obou stranách zkrátíme číselné koeficienty a výrazy budeme derivovat podle x:

$$2x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} \stackrel{?}{=} \mathrm{e}^{-x^2} - \left(\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\right).$$

Obě strany jsou si rovny, a tak se původní funkce mohly lišit jen o konstantu. Snadno zjistíme, že je nulová. Přepis Chandrasekharovy funkce (1.751) za pomoci chybové funkce je tedy správný. Využijeme-li, že

$$\phi' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}, \tag{1.752}$$

můžeme vztah (1.751) mezi Chandrasekharovou a chybovou funkcí obrátit:

► $$\phi = 2x^2\psi + \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}. \tag{1.753}$$

Rosenbluthovy potenciály pro maxwellovský terč

Předpokládejme Maxwellovo rozdělení částic terče:

$$f_\beta = n_\beta\left(\frac{m_\beta}{2\pi k_\mathrm{B}T_\beta}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{m v_\beta^2}{2k_\mathrm{B}T_\beta}}. \tag{1.754}$$

Výpočet potenciálu *H*

Z izotropie terče (funkce f_β) plyne, že výsledný potenciál může záviset jen na velikosti rychlosti $\mathbf{v}_\alpha$. Jmenovatel integrandu rozvineme do Legendreových polynomů podle vztahu I.3.456 (viz první díl „Vybraných kapitol“):

$$H(v_\alpha) \equiv \int \frac{f_\beta}{\left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right|}\mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\iiint f_\beta(v_\beta)\frac{\min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)}P_l(\cos\theta)\,v_\beta^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}v_\beta.$$

Integrace přes azimutální úhel φ je triviální a dá 2π. Integrace přes úhel θ mezi vektory $\mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{v}_\beta$ je také jednoduchá. Budeme substituovat $\cos\theta = x$:

$$H(v_\alpha) = 2\pi\sum_{l=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \frac{v_\beta^2\min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)}\left(\int_{-1}^{1}P_l(x)\,\mathrm{d}x\right)f_\beta(v_\beta)\,\mathrm{d}v_\beta\right].$$

Pro integrály z Legendreových polynomů platí jednoduchý vztah daný jejich symetrií:

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)\,\mathrm{d}x = 2\delta_{0l} \tag{1.755}$$

Integrál z Legendreova polynomu je nenulový jen pro $l = 0$ a má hodnotu 2. Z celé řady tedy zůstane jen nultý člen:

$$H(v_\alpha) = 4\pi \int_0^\infty \frac{v_\beta^2 f_\beta(v_\beta)}{\max(v_\alpha, v_\beta)}\, \mathrm{d}v_\beta \qquad \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \qquad H(v_\alpha) = 4\pi \left[\frac{1}{v_\alpha} \int_0^{v_\alpha} v_\beta^2 f_\beta(v_\beta)\, \mathrm{d}v_\beta \; + \; \int_{v_\alpha}^\infty v_\beta f_\beta(v_\beta)\, \mathrm{d}v_\beta \right]. \tag{1.756}$$

Pól v původním integrálu tak rozdělil integraci na dvě části. Jde o obecný vztah, do kterého lze nyní dosadit jakékoli rozdělení f_β, tedy například Maxwellovo nebo Fermiho-Diracovo rozdělení. V našem případě dosadíme Maxwellovo rozdělení (1.754) a snadno získáme

$$H(v_\alpha) = n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2k_\mathrm{B}T_\beta}}\, \frac{4}{\sqrt{\pi}}\, \frac{1}{x} \int_0^x \xi^2 \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi \; + \; n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2k_\mathrm{B}T_\beta}}\, \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2} \; ;$$

$$x \equiv \frac{v_\alpha}{\sqrt{2k_\mathrm{B}T_\beta/m_\beta}}\,.$$

Tento výsledek lze přepsat pomocí definice Chandrasekharovy funkce (1.749) do tvaru

$$H(v_\alpha) = n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2k_\mathrm{B}T_\beta}} \left[\frac{2}{x} \psi(x) \; + \; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2} \right].$$

Pomocí vztahu (1.753) máme ihned výsledný výraz pro potenciál H:

$$\blacktriangleright \qquad H(v_\alpha) = \left(\frac{2k_\mathrm{B}T_\beta}{m_\beta} \right)^{-1/2} n_\beta\, \frac{\phi(x)}{x}\,; \qquad x \equiv \frac{v_\alpha}{\sqrt{2k_\mathrm{B}T_\beta/m_\beta}}. \tag{1.757}$$

Výpočet potenciálu G

Postup je obdobný, jen využijeme vztahu

$$\left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right| = \frac{\left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right|^2}{\left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right|} = \frac{v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta \cos\theta + v_\beta^2}{\left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right|}\,.$$

Jmenovatele opět rozvineme do řady Legendreových polynomů a postupujeme analogicky jako u potenciálu H:

$$G(v_\alpha) \equiv \int \left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right| f_\beta\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta = \int \frac{v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta \cos\theta + v_\beta^2}{\left|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta\right|} f_\beta\, \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\beta =$$

$$= \sum_{l=0}^\infty \iiint f_\beta(v_\beta) \left(v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta \cos\theta + v_\beta^2 \right) \frac{\min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)} P_l(\cos\theta)\, v_\beta^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}v_\beta =$$

$$= 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{\min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)} v_\beta^2 f_\beta(v_\beta) \left(\int_{-1}^{1} \left(v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta x + v_\beta^2 \right) P_l(x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}v_\beta \right].$$

Každá z integrací přes Legendreův polynom ponechá podle vztahu (1.755) jediný nenulový člen z celé řady. Obdobným postupem jako pro potenciál H získáme

$$G(v_\alpha) = \frac{4\pi v_\alpha}{3} \left[\int_0^{v_\alpha} \left(3v_\beta^2 + \frac{v_\beta^4}{v_\alpha^2} \right) f_\beta(v_\beta)\, \mathrm{d}v_\beta + \int_{v_\alpha}^{\infty} \left(\frac{3v_\beta^3}{v_\alpha} + v_\alpha v_\beta \right) f_\beta(v_\beta)\, \mathrm{d}v_\beta \right]. \quad (1.758)$$

Opět jde o obecný výraz pro jakékoli rozdělení f_β. Pro Maxwellovo rozdělení lze provést výpočet analogicky, jako pro potenciál H. Výsledek lze opět zapsat za pomoci chybové funkce a její derivace:

► $$G(v_\alpha) = \left(\frac{2k_\mathrm{B}T_\beta}{m_\beta} \right)^{+1/2} n_\beta \left[x\phi(x) + \frac{\phi(x)}{2x} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2} \right]; \quad x \equiv \frac{v_\alpha}{\sqrt{2k_\mathrm{B}T_\beta / m_\beta}}. \quad (1.759)$$

Jednoduše zapsatelná je první derivace tohoto potenciálu podle rychlosti:

$$\frac{\partial G(v_\alpha)}{\partial v_\alpha} = n_\beta \left[\phi(x) - \psi(x) \right]. \quad (1.760)$$

Brzděná a ubíhající testovací částice

Uvažujme nyní jednoduchou situaci, kdy monochromatický svazek α (částice mají stejnou rychlost a konstantní koncentraci) nalétává do homogenního izotropního maxwellovského plazmatu a je v něm brzděn na rychlost $\mathbf{v}(t)$. V plazmatu nepůsobí žádné vnější silové pole. Hustota pravděpodobnosti částic svazku bude dána Diracovou distribucí a hustota pravděpodobnosti terče Maxwellovým rozdělením:

$$f_\alpha = n_\alpha\, \delta\left(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t) \right);$$

$$f_\beta = n_\beta \left(\frac{m_\beta}{2\pi k_\mathrm{B} T_\beta} \right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{m v_\beta^2}{2k_\mathrm{B}T_\beta}}. \quad (1.761)$$

Uvažujme nyní Fokkerovu-Planckovu rovnici ve tvaru (1.747). Monochromatický svazek je ekvivalentní jedné vyslané částici a nejeví proto difúzi. Stačí tedy určit vliv potenciálu H (třecího členu) na pohyb svazku. Vynásobme nyní Fokkerovu-Planckovu rovnici rychlostí $\mathbf{v}_\alpha$ a integrujme ji přes $\mathbf{v}_\alpha$, tedy nalezněme první moment FP rovnice. Hustota pravděpodobnosti f_α nezávisí na $\mathbf{x}$, a proto na levé straně zmizí druhý člen. Díky nepřítomnosti polí je nulový i člen třetí. Na pravé straně budeme zkoumat jen vliv prvního Rosenbluthova potenciálu (příspěvek druhého potenciálu je vzhledem k izotropii nulový):

$$\int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha = -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \mathbf{v}_\alpha \, \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{v} \cdot \left(f_\alpha \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{v} H \right) \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \tag{1.762}$$

Za hustotu pravděpodobnosti nalétávající částice nyní dosadíme Diracovu distribuci $n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t))$ a provedeme středování přes rychlost nalétávající částice. Upravme nejprve levou stranu rovnice (1.762):

$$\mathbf{LS} = \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha = n_\alpha \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial \delta\left(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)\right)}{\partial t} \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha =$$

$$= n_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v}_\alpha \delta\left(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)\right) \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha = n_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Nyní zbývá nalézt pravou stranu FP rovnice:

$$\mathbf{PS} = -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \left(n_\alpha \delta\left(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)\right) \frac{\partial H(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha \overset{(1)}{=}$$

$$= n_\alpha K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \left(\delta\left(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)\right) \frac{\partial H(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{v}_\alpha =$$

$$= n_\alpha K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial H(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}.$$

Operace (1) označuje integraci per partes. Pokud bychom na pravé straně ponechali i druhý Rosenbluthův potenciál, provedla by se integrace per partes dvakrát, výsledek bude vzhledem k izotropii nulový. První moment FP rovnice pro testovací částici dá

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial H(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}; \qquad H(\mathbf{v}) \equiv n_\beta \frac{1}{v} \phi\left(\frac{v}{v_{0\beta}} \right). \tag{1.763}$$

Vidíme, že potenciál H je zodpovědný za změnu rychlosti částice a označení tohoto členu jako dynamické tření bylo oprávněné. Proveďme nyní derivaci na pravé straně

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{1}{v} \phi\left(v/v_{0\beta}\right) \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} \phi\left(v/v_{0\beta}\right) \right) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\phi' \dfrac{v}{v_{0\beta}} - \phi}{v^2} \frac{\mathbf{v}}{v} = -2 v_{0\beta}^{-2} \psi\left(v/v_{0\beta}\right) \frac{\mathbf{v}}{v},$$

kde jsme využili vztah (1.751) pro Chandrasekharovu funkci. Středovanou FP rovnici (1.763) lze nyní přepsat do jednoduchého tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} 2 n_\beta v_{0\beta}^{-2} \frac{\psi\left(v/v_{0\beta}\right)}{v} \mathbf{v}. \tag{1.764}$$

Výsledek jsme záměrně upravili do tvaru $\partial \mathbf{v}/\partial t = -\nu_{\alpha\beta} \mathbf{v}$ ze kterého lze odečíst srážkovou frekvenci částice prolétávající plazmatem s Maxwellovým rozdělením:

$$\nu_{\alpha\beta} \equiv 2 K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} n_\beta v_{0\beta}^{-2} \frac{\psi\left(v/v_{0\beta}\right)}{v}. \tag{1.765}$$

Poznámka 1: Uvedený postup je zcela obecným postupem ke zjištění srážkové frekvence pro určitý děj. Převrácená hodnota této frekvence je relaxačním časem daného děje. Do plazmatu vyšleme testovací částici a středujeme FP rovnici přes určitý moment rychlosti (při sledování přenosu hybnosti přes první, při sledování přenosu energie přes druhý). Poté FP upravíme na tvar $\partial A/\partial t = -\nu A$, kde A je sledovaná veličina. Z pravé strany zjistíme frekvenci ν, její převrácená hodnota je relaxační čas pro příslušný děj.

Poznámka 2: Relaxační časy a příslušné frekvence samozřejmě závisí na ději. Jinou rychlostí systém vyrovnává hybnost s okolím a jinou svou energii.

Poznámka 3: Obecně dá příspěvek i druhý Rosenbluthův potenciál, který souvisí s difúzí nalétávajícího svazku. Tenzor difúze má tvar $D_{kl} = A\partial^2 G/\partial v_k \partial v_l$.

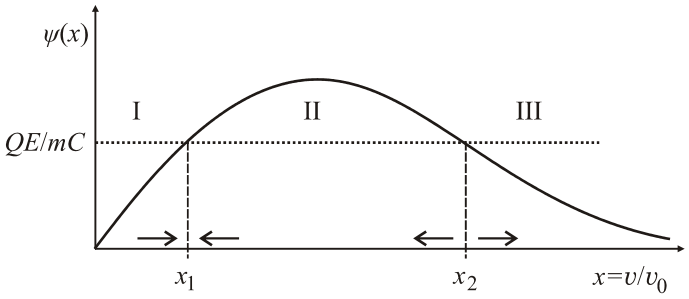
Poznámka 4: V našem případě závisí srážková frekvence na rychlosti částice jako $\psi(v/v_0)/v$. Pro malé rychlosti (například tečení elektrického proudu) je závislost dána vztahem $\psi(x) \approx 2x/3\pi^{1/2}$ a srážková frekvence na rychlosti nezávisí. Naopak pro velmi vysoké (relativistické) rychlosti je $\psi(x) \approx 1/2x^2$ a srážková frekvence s rostoucí rychlostí prudce klesá jako $1/v^3$.

Poznámka 5: Obecně se srážkové frekvence počítají numericky, zejména v přítomnosti polí a v plazmatu, které nemá Maxwellovo rozdělení.

Je-li v plazmatu přítomné slabé elektrické pole urychlující částici, lze pro ni napsat pohybovou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{QE}{m} - \nu(v)v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{QE}{m} - C\psi(v/v_0)\,. \tag{1.766}$$

Zda bude částice urychlována nebo brzděna záleží na tom, který člen vpravo převládne.



Obr. 1.117: Brzděné a ubíhající částice

Pro malé rychlosti v oblasti I dochází k urychlování částic polem (tečkovaná polopřímka je nad Chandrasekharovou funkcí). V oblasti II jsou částice naopak brzděny. Rovnováha v bodě x_1 je stabilní. Zde je vliv urychlení polem vyrovnán brzděním třecím členem. Částice se pohybují konstantní rychlostí, prostředí vede elektrický proud. Naopak pro rychlosti vyšší, než odpovídá průsečíku x_2, (oblast III) dojde k nekontrolovatelnému urychlování částic. Interakce s prostředím klesá na zanedbatelnou míru a částice je urychlována polem na stále vyšší a vyšší rychlosti. Takové částice se nazývají *ubíhající* (runaway). Podrobněji se s nimi seznámíme v kaptilole 1.7.2. Rovnováha

v bodě x_2 je nestabilní. K tomu, aby částice byla nekontrolovatelně urychlována, postačí, aby v daném poli byla její rychlost vyšší než hodnota daná průsečíkem x_2. Například elektrony vzniklé interakcí kosmického záření s atmosférou mohou mít počáteční rychlost vyšší, než je mez pro nekontrolovatelné urychlení v elektrickém poli mraků. Takové elektrony získávají snadno relativistické rychlosti, jsou zodpovědné za gama záblesky pozorované v atmosféře při bouřkách a mohou pronikat do Van Allenových pásů, kde je nazýváme *zabijácké elektrony*, neboť jsou nebezpečné pro přístroje kosmických lodí i pro jejich posádky.

Relaxační časy a srážkové frekvence

Relaxační časy či srážkové frekvence se počítají způsobem naznačeným v minulé kapitole, většinou numericky. Analytická řešení jsou vždy jen určitým přiblížením, zpravidla pro malé rychlosti nebo malé předané energie, kdy lze Chandrasekharovu nebo jinou obdobnou funkci nahradit rozvojem pro malý argument. Vždy jde o výpočet momentů Fokkerovy-Planckovy rovnice pro určitý typ přenosu. Zpravidla se počítají čtyři typy srážkových frekvencí:

1) brzdění testovací částice o okolní prostředí,
2) difúze testovací částice kolmo na magnetické pole,
3) difúze testovací částice podél magnetického pole,
4) energetické ztráty testovací částice.

Získané hodnoty se uvádějí v limitě pomalých nebo v limitě vysokých rychlostí a čtenář je nalezne v každoročně aktualizované publikaci NRL Plasma Formulary [36]. Uveďme zde pro ilustraci výsledek srážkové frekvence pro brzdění částice α o prostředí částic β. Při výpočtu typu 1) se počítá přenos kolmé složky rychlosti, neboť je doba mezi srážkami definována časovým intervalem, při kterém se změnil směr rychlosti částice o 90°. Výsledkem je výraz

$$\nu_{\alpha\beta} = n_\beta \frac{Q_\alpha^2 Q_\beta^2 \ln \Lambda_{\alpha\beta}}{2\pi\varepsilon_0^2 m_\alpha^2 v_{0\alpha}^3} \left[\phi(v_{0\alpha}/v_{0\beta}) - \psi(v_{0\alpha}/v_{0\beta}) \right] . \tag{1.767}$$

Je zřejmé, že $\nu_{\mathrm{ei}} \sim Z\nu_{\mathrm{ee}} \gg \nu_{\mathrm{ii}} \gg \nu_{\mathrm{ie}}$. Je to především dáno různými hmotnostmi a různými tepelnými rychlostmi elektronů a iontů. Ve vztahu je rychlost $v_{0\alpha}$ nejpravděpodobnější rychlostí nalétávající částice při dané teplotě, $v_{0\beta}$ nejpravděpodobnější rychlostí částic prostředí. Mezi základními frekvencemi platí poměry:

$$\begin{array}{ccccccc} \nu_{\mathrm{ei}} & : & \nu_{\mathrm{ee}} & : & \nu_{\mathrm{ii}} & : & \nu_{\mathrm{ie}} \\ Z & : & 1 & : & \sqrt{m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i}} & : & m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i} \end{array} \tag{1.768}$$

◖ **Příklad 1.10:** Určete vztah pro elektronovou vodivost pro malé rychlosti elektronů. Vyjdeme ze vztahu pro vodivost (1.691), do kterého dosadíme výraz (1.767):

$$\sigma_{\mathrm{ee}} \approx \frac{2m_\mathrm{e}\pi\varepsilon_0^2}{e^2 \ln \Lambda \ [\phi(1) - \psi(1)]} \left(\frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}} \right)^{3/2} ; \qquad \phi(1) - \psi(1) \approx 0,6 \qquad \Rightarrow$$

$$\sigma_{\mathrm{ee}} \approx \frac{10\pi}{3}\frac{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0^2}{e^2 \ln \Lambda}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}}\right)^{3/2} \propto T_{\mathrm{e}}^{3/2} \,. \tag{1.769}$$

Elektronová vodivost plazmatu nezávisí na koncentraci. S rostoucí koncentrací roste počet nosičů elektrického proudu a tak by se měla vodivost zvětšovat. Roste ovšem i srážková frekvence, což vodivost plazmatu zmenšuje. Oba faktory se právě vyrovnají. Proto vodivost plazmatu závisí jen na teplotě plazmatu. Formule (1.769) se nazývá Spitzerova formule a je pojmenována podle amerického teoretického fyzika Lymana Spitzera (1914–1997). Někdy má plazma podstatně vyšší vodivost – tzv. *anomální rezistivitu* způsobenou driftu, turbulencemi nebo interakcí vln s částicemi.

1.6.5 Mikronestability

Základní vztahy

Při přechodu od statistického popisu plazmatu ke kontinuu (například k magnetohydrodynamice) ztrácíme informace o statistickém rozdělení v rychlostní části fázového prostoru. Přicházíme tak i o celou třídu nestabilit, jejichž původ je právě v přerozdělování pravděpodobnosti výskytu částic v rychlostní části fázového prostoru. V této kapitole se zaměříme na lineární nestability ve statistickém přístupu v bezesrážkovém plazmatu. Jde do jisté míry o druhý extrém. Kontinuum je dominantně srážkové, my se budeme v této kapitole zabývat plazmatem, v němž lze srážky zcela zanedbat, tedy výhradně nestabilitami způsobenými interakcí částic s poli. Za výchozí rovnici budeme považovat Boltzmannovu rovnici pro hustotu pravděpodobnosti výskytu částic druhu α

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}) f_\alpha + \frac{Q_\alpha}{m_\alpha}\left[(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\right] f_\alpha = 0 \,, \tag{1.770}$$

doplněnou Maxwellovými rovnicemi pro pole

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\mathrm{Q}} \,, \tag{1.771}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \,, \tag{1.772}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \,, \tag{1.773}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\mathrm{Q}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \,. \tag{1.774}$$

Částicová a polní část je provázána zdrojovými členy

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{Q}} &= \sum_\alpha Q_\alpha n_\alpha = \sum_\alpha \int Q_\alpha f_\alpha \, \mathrm{d}^3 \mathbf{v}_\alpha \,, \\ \mathbf{j}_{\mathrm{Q}} &= \sum_\alpha Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \sum_\alpha \int Q_\alpha \mathbf{v}_\alpha f_\alpha \, \mathrm{d}^3 \mathbf{v}_\alpha \,. \end{aligned} \tag{1.775}$$

S touto sadou rovnic budeme provádět lineární perturbační analýzu stejným způsobem jako v teorii kontinua. Obdobně můžeme rozčlenit i jednotlivé typy jevů:

- *Vysokofrekvenční děje bez magnetického pole.* Jde o zobecnění plazmových vln o Landauův útlum na elektronech.
- *Nízkofrekvenční děje bez magnetického pole.* Jde o zobecnění iontových vln o Landauův útlum na iontech.
- *Vysokofrekvenční děje s magnetickým polem.* Jde o vzájemnou interakci částic a elektromagnetického komplexu vln.
- *Nízkofrekvenční děje s magnetickým polem.* Jde o vzájemnou interakci částic a magnetoakustického komplexu vln.

Landauův útlum na elektronech

V kapitole 1.4.3 *Plazmové vlny a oscilace* jsme se zabývali plazmovými vlnami, které souvisí s pohyby elektronů na plazmové frekvenci. Vlny a oscilace byly tvořeny elektrickým polem a k jejich vzniku nebylo třeba žádné klidové magnetické pole. Podle disperzní relace, kterou jsme získali z tekutinového modelu, se vlny s frekvencí vyšší než plazmovou šířily bez útlumu.

Ve skutečnosti i v lineární teorii dochází k útlumu vln, který souvisí se statistickým chováním částic. Tento útlum se nazývá *Landauův útlum* (Lev Davidovič Landau, 1946) a není možné ho odvodit z tekutinového modelu, kdy je Boltzmannova rovnice vystředována přes momenty rychlosti a část informace se ztrácí. K odvození musí být použita Boltzmannova rovnice pro rozdělovací funkci elektronů. Samotný útlum se projevuje i bez přítomnosti srážek a proto lze využít Vlasovovu rovnici (bez srážkového členu).

Uvažujme tedy bezesrážkové plazma a zkoumejme interakci elektronů s plazmovou vlnou v okolí plazmové frekvence elektronů v neomezeném prostředí. Předpokládáme dále, že interakce je zprostředkována jen elektrickým polem, tj. rot $\mathbf{E} = 0$ a jde tedy o podélné vlnění s $\delta\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$. Souřadnicovou soustavu budeme volit s osou x ve směru šíření vlnění, tj.

$$\mathbf{k} = (k, 0, 0)\,; \qquad \delta\mathbf{E} = (\delta E, 0, 0)\,. \tag{1.776}$$

Obecná porucha bude mít tvar

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi = \psi_0 + \psi_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[kx - \omega t]}\,. \tag{1.777}$$

Budeme sledovat jen pohyby elektronů, pohyby iontů v okolí plazmové frekvence elektronů zanedbáme. Proto bude mít výchozí soustava rovnic tvar ($Q_\mathrm{e} = -e$, $m = m_\mathrm{e}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_\mathrm{e}}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= 0\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= -\frac{en}{\varepsilon_0}\,, \\ n(t,\mathbf{x}) &= \int f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}\,, \end{aligned} \tag{1.778}$$

kde f je rozdělovací funkce elektronů. Poznamenejme, že rychlost $\mathbf{v}$ zde nemá význam vystředované rychlosti proudění, ale význam fázové proměnné, $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. Z celé sady Maxwellových rovnic postačí rovnice pro elektrické pole ve tvaru divergence. Je to dáno tím, že neuvažujeme magnetické pole, porucha elektrického pole je rovnoběžná se

směrem šíření a jde vlastně o jednorozměrný problém. V přítomnosti magnetického pole bychom samozřejmě museli využít rovnici rot $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$. Jako první krok provedeme linearizaci výchozích rovnic (1.778) pomocí perturbací

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \delta f\,; \\ \mathbf{E} &= \delta\mathbf{E}\,; \\ n &= n_0 + \delta n\,. \end{aligned} \tag{1.779}$$

Nulové řešení budeme předpokládat klidové homogenní (nezávislé na t, $\mathbf{x}$), rozdělovací funkci f_0 za Gaussovu

$$f_0(\mathbf{v}) \equiv n_0 \left(\frac{m_\mathrm{e}}{2\pi k_\mathrm{B} T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m_\mathrm{e}\mathbf{v}^2}{2k_\mathrm{B}T}\right], \tag{1.780}$$

kterou můžeme rozložit na parciální funkce

$$f_0(\mathbf{v}) \equiv n_0 f_{0x}(v_x) f_{0y}(v_y) f_{0z}(v_z)\,, \tag{1.781}$$

kde

$$f_{0l}(v_l) \equiv \left(\frac{m_\mathrm{e}}{2\pi k_\mathrm{B} T}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{m_\mathrm{e} v_l^2}{2k_\mathrm{B}T}\right]. \tag{1.782}$$

Výsledek linearizace výchozích rovnic (1.778) je v prvním řádu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_\mathrm{e}}\delta\mathbf{E}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} &= 0\,, \\ \operatorname{div}\delta\mathbf{E} &= -\frac{e\,\delta n}{\varepsilon_0}\,, \\ \delta n(t,\mathbf{x}) &= \int \delta f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}\,. \end{aligned} \tag{1.783}$$

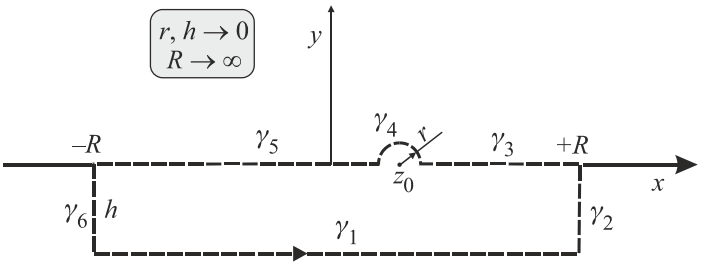
Předpokládejme nyní existenci perturbací ve tvaru rovinné vlny ve směru osy x, tj. budeme psát $\delta\psi = \psi_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t}$:

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\omega\delta f + \mathrm{i}v_x k\,\delta f - \frac{e}{m_\mathrm{e}}\delta E_x\cdot\frac{\partial f_0}{\partial v_x} &= 0\,, \\ \mathrm{i}k\delta E_x &= -\frac{e\,\delta n}{\varepsilon_0}\,, \\ \delta n(t,x) &= \int \delta f\;\mathrm{d}^3\mathbf{v}\,. \end{aligned} \tag{1.784}$$

Do poslední rovnice dosadíme za δn z druhé rovnice a za δf z první rovnice a provedeme integraci přes proměnné v_y a v_z. Výsledkem je disperzní relace:

► $$k = -\omega_\mathrm{p}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f_{0x}/\mathrm{d}v_x}{\omega - kv_x}\,\mathrm{d}v_x\,; \qquad \omega_\mathrm{p}^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\varepsilon_0}\,. \tag{1.785}$$

Všechny veličiny se týkají elektronové složky. Hlavním problémem je pól prvního řádu v hodnotě $v_x = \omega/k$. Integrály tohoto typu se řeší v komplexní analýze za pomoci reziduové věty (viz viz kapitola I.3.2.7 v prním díle „Vybraných kapitol“, kde naleznete i vysvětlení pojmu hlavní hodnota integrálu V.P.). Integrační cestu ale v tomto případě nelze uzavřít kružnicí v horní ani dolní komplexní polorovině, protože integrand v nekonečnu nekonverguje na imaginární ose k nule (jde o Boltzmannovo rozdělení $\exp[-\alpha v^2]$). Integrační cestu proto použijeme dle následujícího obrázku:



Obr. 1.118: Integrační cesta

Pro holomorfní funkci $g(z)$ (tou čitatel hledaného integrálu je) můžeme psát

$$\oint_{\gamma} \frac{g(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Rez}\left(\frac{g(z)}{z-z_0}; z_0\right) \;=\; 2\pi\mathrm{i}g(z_0) = 2\pi\mathrm{i}g(x_0)\,.$$

Integrál na levé straně napíšeme jako součet integrálů po jednotlivých křivkách

$$\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \;+\; \int_{\gamma_2+\gamma_6} \frac{g(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \;+\; \int_{\gamma_3+\gamma_5} \frac{g(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \;+\; \int_{\gamma_4} \frac{g(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}g(x_0)\,.$$

Vzhledem k $h \to 0$ budou integrály přes γ_2 a γ_6 nulové. Po provedení limit $R \to \infty$ a $r \to 0$ dají jednotlivé integrály postupně:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \;+0+\; \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \left(\int_{R}^{x_0+r} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{x_0-r}^{-R} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \right) + \int_{\gamma_4} \frac{g(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \;= 2\pi\mathrm{i}g(x_0)\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \;-\; \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \left(\int_{-R}^{x_0-r} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{x_0+r}^{R} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \right) + \int_{\gamma_4} \frac{g(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}g(x_0)\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \;-\; \mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \;+\; \lim_{r\to 0} \int_{0}^{\pi} \frac{g(z_0+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{i}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\mathrm{i}g(x_0)\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \;-\; \mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \;+\; \mathrm{i}\int_{0}^{\pi} g(x_0)\,\mathrm{d}\varphi \;= 2\pi\mathrm{i}g(x_0)\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = \text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0}\,\mathrm{d}x \;+\; \pi \mathrm{i} g(x_0) = I_1 + I_2 \,. \tag{1.786}$$

První část je tzv. hlavní Cauchyova hodnota (V.P., viz kapitola I.3.2.7 v prním díle „Vybraných kapitol“) a počítá se tak, jako by funkce byla reálná a pól neexistoval, tedy integruje se v limitě, kdy obě meze jdou k nekonečnu. Výsledný integrál I_1 není analyticky řešitelný. Integrand obsahuje Gaussovu funkci, a proto přispějí k integraci jen malé argumenty ze jmenovatele a je možné využít první členy rozvoje:

$$I_1 \equiv \text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f_{0x}/\mathrm{d}v_x}{\omega - k v_x}\,\mathrm{d}v_x = \frac{1}{\omega}\,\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f_{0x}/\mathrm{d}v_x}{1-\dfrac{k v_x}{\omega}}\,\mathrm{d}v_x =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1+\left(\frac{k v_x}{\omega}\right)+\left(\frac{k v_x}{\omega}\right)^2+\left(\frac{k v_x}{\omega}\right)^3+\cdots\right]\frac{\mathrm{d}f_{0x}}{\mathrm{d}v_x}\,\mathrm{d}v_x \,.$$

Nyní provedeme integraci per partes, na hranicích integračního oboru je rozdělovací funkce f_{0x} nulová:

$$I_1 = -\frac{k}{\omega^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1+2\left(\frac{k v_x}{\omega}\right)^1+3\left(\frac{k v_x}{\omega}\right)^2+\cdots\right] f_{0x}\,\mathrm{d}v_x =$$

$$= -\frac{k}{\omega^2}\left[1+2\left(\frac{k}{\omega}\right)\left\langle v_x\right\rangle+3\left(\frac{k}{\omega}\right)^2\left\langle v_x^2\right\rangle\;+\;\cdots\right] = -\frac{k}{\omega^2}\left[1+3\frac{k^2}{\omega^2}\frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}\;+\;\cdots\right].$$

Integrály tohoto typu z Boltzmannova rozdělení se řeší ve statistické fyzice [2]. Nyní je třeba najít druhou část, která je πi násobkem rezidua integrované funkce v singularitě. Postup hledání reziduí naleznete v prvním díle „Vybraných kapitol“ [1], v sekci Matematika pro fyziku, konkrétně v kapitole I.3.2.6.

$$I_2 = \pi\,\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{d}f_{0x}/\mathrm{d}v_x}{\omega-k v_x}\right) = -\frac{\pi\,\mathrm{i}}{k}\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{d}f_{0x}/\mathrm{d}v_x}{v_x-\omega/k}\right) =$$

$$= -\mathrm{i}\frac{\pi}{k}\left.\frac{\mathrm{d}f_{0x}}{\mathrm{d}v_x}\right|_{\frac{\omega}{k}} = \mathrm{i}\frac{\pi}{k}\frac{m}{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}\frac{\omega}{k}f_{0x}(\omega/k)\,.$$

V posledním výrazu jsme provedli derivaci Boltzmannova rozdělení. Nyní obě vypočtené části integrálu dosadíme do disperzní relace (1.785):

$$k \;=\; -\omega_\mathrm{p}^2\left[I_1+I_2\right] \;=\; -\omega_\mathrm{p}^2\left[-\frac{k}{\omega^2}\left(1+3\frac{k^2}{\omega^2}\frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}+\cdots\right)+\mathrm{i}\frac{\pi m_\mathrm{e}\omega}{k^2 k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}f_{0x}(\omega/k)\right].$$

Po triviální úpravě (rovnici násobíme ω^2/k) získáme disperzní relaci ve tvaru

$$\omega^2 \;=\; \omega_\mathrm{p}^2+\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}v_\mathrm{t}^2k^2 \;+\;\cdots\;-\mathrm{i}\frac{3\pi\omega_\mathrm{p}^2}{v_\mathrm{t}^2}\frac{\omega^3}{k^3}f_{0x}(\omega/k)\,, \tag{1.787}$$

kde jsme označili kvadrát plazmové frekvence a kvadrát tepelné rychlosti

$$\omega_\mathrm{p}^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_\mathrm{e}\varepsilon_0}; \qquad v_\mathrm{t}^2 \equiv \frac{3k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}.$$

Plazmová frekvence i tepelná rychlost se týká elektronů. První člen disperzní relace představuje nám již známé plazmové oscilace. Druhý člen je způsoben tepelnými procesy a je-li malý oproti prvnímu, lze v něm psát $\omega \sim \omega_\mathrm{p}$ a přejde ve známý druhý člen disperzní relace plazmových vln. Poslední člen je zcela nový a reprezentuje Landauův útlum, zpravidla je oproti oběma prvním členům velmi malý.
Toho můžeme využít při odmocnění výrazu (1.787):

$$\omega^2 = a + \mathrm{i}\,b; \qquad b \ll a; \qquad \Rightarrow$$

$$\omega^2 = A\exp[\mathrm{i}\,\varphi]; \qquad A = \sqrt{a^2+b^2} \sim a; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}(b/a) \approx \frac{b}{a} \qquad \Rightarrow$$

$$\omega^2 \approx a\exp\left[\mathrm{i}\frac{b}{a}\right] \qquad \Rightarrow$$

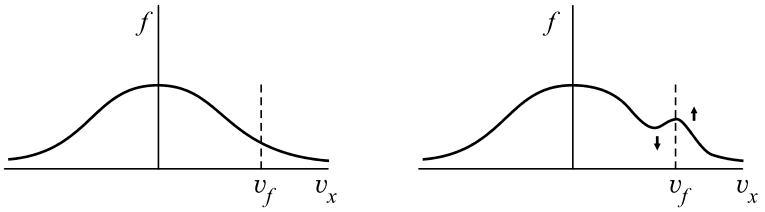
$$\omega \approx \sqrt{a}\cos\left(\frac{b}{2a}\right) + \mathrm{i}\sqrt{a}\sin\left(\frac{b}{2a}\right) \approx \sqrt{a} + \mathrm{i}\frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

Výsledná frekvence bude (imaginární část odpovídající b ve výrazu (1.787) je záporná)

► $$\omega \approx \omega_0 - \mathrm{i}\frac{3\pi\omega_\mathrm{p}^2}{2v_\mathrm{t}^2\omega_0}\frac{\omega^3}{k^3}f_{0x}(\omega/k); \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{\omega_\mathrm{p}^2 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}v_\mathrm{t}^2k^2 + \cdots}. \qquad (1.788)$$

Fyzikální interpretace Landauova útlumu

Ze vztahu (1.788) je zřejmé, že imaginární část frekvence je záporná a jedná se skutečně o útlum. Odvození útlumu Landauem v *bezesrážkovém* plazmatu za pomoci integrace funkce komplexní proměnné bylo velkým překvapením. Později byl útlum nalezen experimentálně. Plazmová vlna je tlumena, aniž by docházelo ke srážkám částic. Podobně jako surfař surfuje na vodní hladině, můžeme si zjednodušeně představit elektrony surfující na podélné plazmové vlně elektrického pole. Elektrony s příliš malou rychlostí se na vlně pohupují a nevyměňují si s ní energii. Také elektrony s příliš velkou rychlostí si nevyměňují s vlnou energii. Jen elektrony s rychlostí blízkou fázové rychlosti plazmové vlny (oblast pólu při integraci) intenzivně s vlnou vyměňují energii. Obdobně jako surfař jsou elektrony vlnou neseny. Pokud jejich rychlost byla nepatrně nižší než fázová, získávají elektrony energii na úkor vlny. Pokud je jejich rychlost vyšší než fázová, jsou brzděné, svou energii ztrácí, a předávají ji vlně.

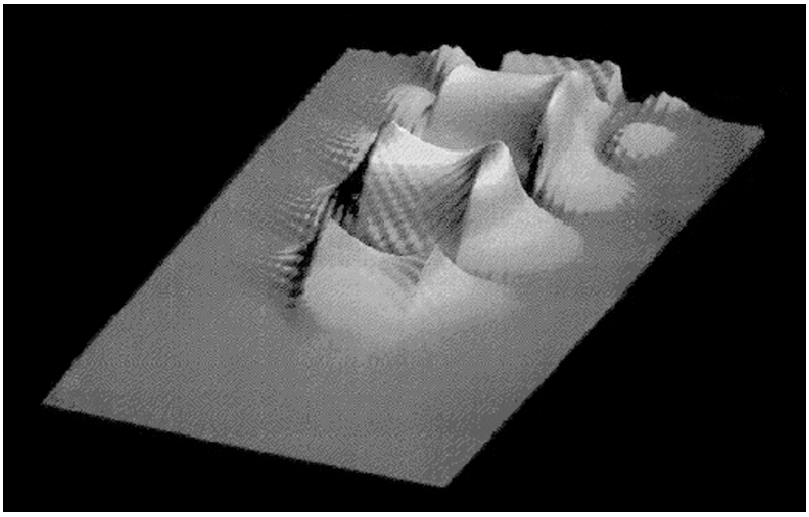


Obr. 1.119. Landauův útlum

Podle Boltzmannova rozdělení je statisticky více elektronů s nižší rychlostí než elektronů s vyšší rychlostí. Tím převládá proces tlumení vlny, sání energie z ní. To je přibližná podstata Landauova útlumu. Boltzmannovo rozdělení je deformováno, vzniká perturbace způsobující sekundární pík (právě ten jsme počítali jako δf). Na rozdělení rychlostí se objevují dvě maxima, což ve výsledku vede k dvojsvazkové (Bunemanově nestabilitě). Pro velmi nízké fázové rychlosti plazmové vlny je možný i Landauův útlum způsobený ionty.

Urychlovače LWFA (Laser Wake Field Accelerator)

Elektrony jsou pro výzkumné i praktické účely většinou urychlovány buď na kruhových drahách v betatronu, nebo v synchrotronu. K největším urychlovačům tohoto typu patří americký Tevatron s obvodem 6,3 km. Další možností jsou lineární urychlovače s proměnným elektrickým polem na radiových frekvencích. Typické urychlovací pole těchto zařízení nemůže výrazně přesáhnout 100 MV/m. Již v roce 1979 navrhli T. Tajima a D. Dawson zcela nový typ urychlovače, ve kterém by elektrony byly urychleny na plazmové vlně podobně jako surfař na vlně v oceánu. Tato zajímavá myšlenka čekala na praktickou realizaci více než čtvrt století. Dnes se zdá, že nic nestojí v cestě urychlovat elektrony v urychlovači nové generace přímo na pracovním stole.



Obr. 1.120: Brázdové pole (wakefield). Za laserovým pulzem vzniká při průchodu prostředím typické zvlněné podélné pole. Na obrázku je různým odstínem znázorněna velikost pole.

Plazmová vlna může vzniknout při průchodu intenzivního laserového pulzu plynným prostředím. Pulz ionizuje plyn na plazma a s sebou strhává lehké elektrony. Za pulzem vzniká brázda zvlněné koncentrace elektronů a podélného elektrického pole – plazmová vlna. V angličtině se toto pole nazývá „wakefield“, což by snad šlo přeložit jako brázdové pole, případně pole v brázdě.

Toto pole může při vhodné hybnosti a energii urychlovat elektron, který je nesený na vlně elektrického pole podobně jako výše zmíněný surfař na vodní vlně. Vlnou jsou ovšem zachyceny jen některé z elektronů a ty vytvoří shluky urychlených částic. To je základní princip urychlovače LWFA (Laser Wake Field Accelerator). V praktických

zařízeních se většinou využívají lasery s krátkým pulsem (≤ 1 ps) a velkou intenzitou (≥10^{18} W/cm^2). Vzniklé brázdové pole má typicky intenzitu 100 GV/m, což je o tři řády více než v konvenčních urychlovačích. Shluky elektronů o velikosti 10^9 elektronů (stovky pikocoulombů) mohou být urychleny na energie až 60 MeV. Jde ovšem jen o malý zlomek přítomných elektronů a parametry plazmatu a brázdového pole lze jen obtížně ovlivnit. To je hlavní nevýhodou dosud postavených zařízení, která měla spíše studijní charakter, a nebylo je možné prakticky využít.

Situace se změnila po roce 2004, kdy byly navrženy urychlovače LWFA s více laserovými pulzy. Kromě základního pulzu, který generuje laserové plazma s brázdovým polem, lze dvěma dalšími pomocnými pulzy vytvořit za pulzem stojatou vlnu (rázy). Podélná složka elektrického pole může předurychlit elektron, příčná složka může fokusovat shluk elektronů. Pomocnými pulzy můžeme ovlivňovat parametry plazmatu v brázdě za základním laserovým pulzem. Urychlování je v této konfiguraci dvoustupňové. Elektrony jsou nejprve urychleny v pomalu se pohybující ($\Delta\omega/2k_0$) stojaté vlně generované pomocnými pulzy a teprve poté v rychlé ($\sim c$) brázdové vlně za hlavním pulzem. V současných systémech je brázdové pole až 270 GV/m a bylo dosaženo energií až 250 MeV na pouhých dvou milimetrech dráhy. Spektrum urychlených elektronů je monoenergetické.

Urychlovače LWFA znamenají revoluci v možnostech urychlování nabitých částic. Hlavní výhodou jsou především malé rozměry urychlovačů tohoto typu, některé mohou být postaveny přímo na pracovním stole. Předurychlení pomocnými pulzy umožňuje ovlivňování parametrů urychlení, bez kterého nejsou možné praktické aplikace. Vývoj probíhá na Coloradské univerzitě, UCB, UCLA, LLNL a dalších pracovištích.

Maximální podélné pole δE

Z rovnice $\operatorname{div}\mathbf{E} = -e\delta n/\varepsilon_0$ můžeme odhadnout maximální možnou velikost generovaného pole:

$$\mathrm{i}\,k\delta E = -e\delta n/\varepsilon_0 \qquad \Rightarrow$$

$$(\delta E)_{\max} < \left|\mathrm{i}\frac{e\delta n}{k\varepsilon_0}\right| < \frac{en_0}{k\varepsilon_0} = \frac{m_\mathrm{e}\omega_\mathrm{p}^2}{ke} = \frac{\omega_\mathrm{p}}{k}\frac{m_\mathrm{e}\omega_\mathrm{p}}{e} < \frac{cm_\mathrm{e}\omega_\mathrm{p}}{e}.$$

Pro maximální dosažitelné pole tedy platí relace

► $$(\delta E)_{\max} < \frac{cm_\mathrm{e}\omega_\mathrm{p}}{e}. \tag{1.789}$$

Landauův útlum na iontech

Obdobou surfování elektronů na plazmových vlnách je surfování iontů na iontových vlnách (jsou analogií zvukových vln v plazmatu, proto jim někdy říkáme iontově-akustické vlny). Boltzmannovo rozdělení pro elektrony a ionty je vzhledem k různým hmotnostem velmi rozdílné, viz obrázek 1.121.

U iontově-akustických vln není hlavní „návratovou“ silou elektrostatické pole, ale tepelný tlak a setrvačnost iontů. Disperzní relaci iontově-akustických vln jsme odvodili v kapitole 1.4.3, viz vztah (1.387):

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pi}}^2 \left[1 + c_{\mathrm{i}}^2 k^2 / \omega_{\mathrm{pi}}^2 - \frac{1}{1 + c_{\mathrm{e}}^2 k^2 / \omega_{\mathrm{pe}}^2} \right]. \tag{1.790}$$

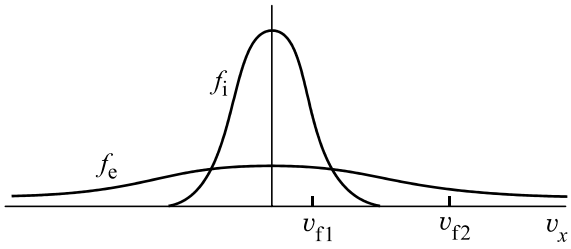
V limitě dlouhých vln lze tuto relaci přepsat do tvaru (viz kapitola 1.4.3):

$$\omega = c_{\mathrm{i}} k \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}}}{\gamma_{\mathrm{i}} T_{\mathrm{i}}}}\,.$$

Fázová rychlost dlouhých iontově-akustických vln proto bude

$$v_{\mathrm{f}} = c_{\mathrm{i}} \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}}}{\gamma_{\mathrm{i}} T_{\mathrm{i}}}}\,. \tag{1.791}$$

Ze vztahu je patrné, že pro vyrovnanou teplotu obou složek ($T_{\mathrm{e}} \approx T_{\mathrm{i}}$) bude mít fázová rychlost iontově-akustické vlny hodnotu v oblasti v_{f1} na obrázku 1.121, tj. v oblasti nejprudšího poklesu Boltzmannova rozdělení iontů a podstatná část iontů bude schopná surfovat na iontově-akustické vlně. Vlně budou odnímat energii ionty s nižší rychlostí než fázovou a naopak dodávat energii ionty s vyšší rychlostí než fázovou. Iontů s nižší rychlostí je výrazně větší počet, proto bude iontová akustická vlna silně tlumená Landauovým útlumem na iontech. Naopak, v situaci kdy $T_{\mathrm{e}} >> T_{\mathrm{i}}$, bude mít fázová rychlost iontově-akustické vlny hodnotu v oblasti v_{f2} na obrázku 1.121, kde má hustota pravděpodobnosti minimální spád a navíc je zde počet iontů malý. Landauův útlum bude zanedbatelný a iontově-akustická vlna se bude v takovémto plazmatu šířit téměř volně bez útlumu. Vysoká teplota elektronů vzhledem k iontům tedy zajistí průchod iontově-akustické vlny dlouhých vlnových délek.



Obr. 1.121: Boltzmannovo rozdělení elektronů a iontů

V limitě krátkých vln lze relaci (1.790) přepsat do tvaru (viz kapitola 1.4.3) $\omega \approx c_{\mathrm{i}} k$ a fázová rychlost krátkých iontových vln bude

$$v_{\mathrm{f}} \approx c_{\mathrm{i}}. \tag{1.792}$$

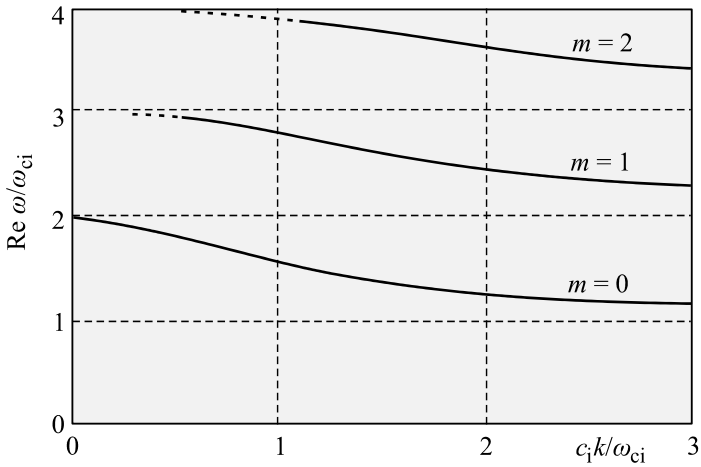
Pro krátké vlny bude mít fázová rychlost iontově-akustické vlny hodnotu v oblasti v_{f1} na obrázku 1.121 a Landauův útlum na iontech bude vždy podstatný.

Bernsteinovy módy

V přítomnosti magnetického pole je interakce částic s vlnovými módy značně komplikovaná. Poprvé tuto problematiku řešil americký fyzik Ira Bernstein (1924) v roce 1958. Uvažujme nejprve iontově-akustické vlny v přítomnosti externího magnetického pole. Z podrobné analýzy plyne, že šíření vln silně závisí na úhlu a frekvenci. Vlny jsou tlumeny jednak cyklotronní iontovou rezonancí a jednak Landauovým útlumem na iontech. Kolmo na pole je útlum výrazně nižší než podél pole a vlna prochází, pokud není v blízkosti násobků iontové cyklotronní frekvence (tj. jejích harmonických). Tyto vlny se nazývají Bernsteinovy módy, jejich reálná část frekvence leží mezi dvěma sousedními násobky cyklotronní frekvence iontů:

$$m\,\omega_{\mathrm{ci}} < \left|\mathrm{Re}(\omega)\right| < (m+1)\omega_{\mathrm{ci}}\,; \qquad m = 1,2,3,\ldots \tag{1.793}$$

Imaginární část frekvence, která je zodpovědná za útlum, razantně roste, pokud se vlny nešíří kolmo na magnetické pole. Útlum také roste s číslem módu m, jen několik nejnižších Bernsteinových módů se šíří téměř bez útlumu. Elektrické pole Bernsteinových módů míří přibližně ve směru vlnového vektoru.



Obr. 1.122: První tři Bernsteinovy iontové módy. Na vodorovné ose je bezrozměrný vlnový vektor a na svislé ose reálná část bezrozměrné frekvence.

Obdobná sada Bernsteinových módů existuje i pro elektrony. Tyto módy plazmových vln se opět šíří kolmo na magnetické pole (v tomto směru je jejich útlum minimální) a mají frekvenci mezi jednotlivými harmonickými elektronové cyklotronní frekvence.

1.7 Některé nelineární jevy

V následující části se zaměříme na několik zajímavých nelineárních jevů – popis zářící částice, jejíž pohyb ovlivní ztráta hybnosti způsobená vlastním vyzařováním, na problematiku ubíhajících elektronů, jež mohou snadno poškodit různá zařízení, na solitonová řešení v podobě osamocených vln putujících prostorem, a na některé aspekty turbulentního chování plazmatu.

1.7.1 Pohybová rovnice zářící částice

Nabitá částice vyzařuje při svém pohybu elektromagnetický signál. Ztráta hybnosti a energie způsobená vlastním zářením ovlivní pohyb částice. Problém reakce nabité částice na vlastní vyzařování není dodnes uspokojivě konzistentně vyřešen.

Potenciály generované částicí v její blízkosti

Uvažujme retardované a advanceované potenciály generované nabitou částicí:

$$A^{\alpha}_{\mathrm{ret}}(t,\mathbf{r}) = A^{\alpha}_{-}(t,\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J^{\alpha}(t-\Delta t,\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{1.794}$$

$$A^{\alpha}_{\mathrm{adv}}(t,\mathbf{r}) = A^{\alpha}_{+}(t,\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J^{\alpha}(t+\Delta t,\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{1.795}$$

Souhrnně budeme oba potenciály psát

$$A^{\alpha}_{\mp}(t,\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J^{\alpha}(t\mp\Delta t,\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,. \tag{1.796}$$

Pokud se nacházíme v těsném okolí částice, lze předpokládat, že bude rozdíl času pozorovatele a času vyslání signálu malý, a proto provedeme Taylorův rozvoj čtyřtoku v Δt:

$$A^{\alpha}_{\mp}(t,\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mp\Delta t)^k}{k!}\frac{\partial^k J^{\alpha}(t,\mathbf{r}')}{\partial t^k}\right)\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,. \tag{1.797}$$

Po dosazení za retardovaný čas ze vztahu

$$\Delta t = |\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|\,/c \tag{1.798}$$

získáme pro čtyřpotenciál vztah (předpokládáme, že pořadí sumace a integrace lze zaměnit)

$$A^{\alpha}_{\mp}(t,\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(\mp 1)^k}{c^k k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int |\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|^{k-1}\,J^{\alpha}(t,\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\right], \tag{1.799}$$

Výraz rozdělíme na sudé a liché členy:

$$A^{\alpha}_{\mp}(t,\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=0,2,4}^{\infty}\left[\frac{1}{c^k k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{k-1}\, J^{\alpha}(t,\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\right] \mp$$
$$\mp\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\left[\frac{1}{c^k k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{k-1}\, J^{\alpha}(t,\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\right], \tag{1.800}$$

První část je shodná pro retardované i advanceované řešení a má pro $k = 0$ část divergující na světočáře částice, jde například o Coulombická pole, která sice divergují, ale odpovídající síla je symetrická vůči částici, a výslednice je proto nulová a na částici nepůsobí. Druhá část má jiné znaménko pro retardovaný a jiné pro advanceovaný potenciál, řešení se liší pro vlnu přicházející k částici a pro vlnu od ní odcházející. Tato část na světočáře nediverguje, výslednice je na ní nenulová a odpovídá reakci částice na vlastní pole. Fyzikálním řešením je retardovaný potenciál, ten lze ale formálně rozložit na symetrickou a antisymetrickou část

$$A^{\alpha} = A^{\alpha}_{\mathrm{ret}} = \frac{1}{2}\left(A^{\alpha}_{\mathrm{ret}} + A^{\alpha}_{\mathrm{adv}}\right) + \frac{1}{2}\left(A^{\alpha}_{\mathrm{ret}} - A^{\alpha}_{\mathrm{adv}}\right). \tag{1.801}$$

U symetrické části vymizí všechny liché členy a je dána první částí výrazu (1.800):

$$A^{\alpha}_{\mathrm{sym}} \equiv \frac{1}{2}\left(A^{\alpha}_{\mathrm{ret}} + A^{\alpha}_{\mathrm{adv}}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=0,2,4\ldots}\left[\frac{1}{c^k k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{k-1}\, J^{\alpha}(t,\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\right]. \tag{1.802}$$

Antisymetrická část potenciálu odpovídá lichým členům rozvoje (1.800):

$$A^{\alpha}_{\mathrm{ant}} \equiv \frac{1}{2}\left(A^{\alpha}_{\mathrm{ret}} - A^{\alpha}_{\mathrm{adv}}\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=1,3,5\ldots}\left[\frac{1}{c^k k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{k-1}\, J^{\alpha}(t,\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\right]. \tag{1.803}$$

Na světočáře částice nediverguje a výslednice odpovídajících sil působících na částici je nenulová. Tato síla představuje reakci částice na svá vlastní pole. Najdeme ji v lokálně inerciální soustavě, která v některé počáteční fázi pohybu spojená s částicí (Lorentzově lokální souřadnicové soustavě. V takové soustavě lze vše řešit nerelativisticky a navíc postačí vzít jen první nenulový člen (samozřejmě budeme muset nakonec řešení transformovat do obecné inerciální souřadnicové soustavy, tj. upravit do kovariantního tvaru). U skalárního potenciálu je člen $k = 1$ nulový, protože integrál vpravo dá celkový náboj a jeho derivace je nulová. První nenulový člen proto bude až pro $k = 3$:

$$\frac{\phi}{c} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{c^3 3!}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2\, \rho_Q(t,\mathbf{r}')\, c\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{1.804}$$

První nenulový člen pro vektorový potenciál bude pro $k = 1$:

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}_Q(t,\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{1.805}$$

Pro bodovou částici se světočárou $x_0^{\alpha}(\tau)$ bude

$$\rho_Q(t,\mathbf{r}) = Q\,\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0),$$
$$\mathbf{j}_Q(t,\mathbf{r}) = Q\,\mathbf{v}\,\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0). \tag{1.806}$$

Odpovídající potenciály (v blízkosti částice) jsou po integraci

$$\phi = -\frac{\mu_0 Q}{24\pi c}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)\right)^2,$$
$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(t). \tag{1.807}$$

Abrahamova-Lorentzova pohybová rovnice

Odpovídající pole jsou:

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0,$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 Q}{24\pi c}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\nabla\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0 Q}{4\pi c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(t) =$$
$$= \frac{\mu_0 Q}{24\pi c}\frac{\partial^3}{\partial t^3}2\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right) + \frac{\mu_0 Q}{4\pi c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = \tag{1.808}$$
$$= -\frac{\mu_0 Q}{12\pi c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mu_0 Q}{4\pi c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 Q}{6\pi c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}.$$

Síla od reakce na vlastní pole má proto tvar:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{rad}} = Q\,\mathbf{E} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c}\dot{\mathbf{a}} \tag{1.809}$$

Tato síla se nazývá Abrahamova-Lorentzova síla, je pojmenována podle německého fyzika Maxe Abrahama (1875–1922), který její tvar odvodil v roce 1905 [52]. Příslušná pohybová rovnice se nazývá Abrahamova-Lorentzova (AL) pohybová rovnice:

$$m_0\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} + \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c}\dot{\mathbf{a}} \tag{1.810}$$

V lokální Lorentzově soustavě částice není třeba rozlišovat klidovou a pohybovou hmotnost a pohybovou rovnici lze přepsat do tvaru

$$m_0\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} + m_0\,\tau_0\dddot{\mathbf{r}}\,; \qquad \tau_0 \equiv \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c m_0}. \tag{1.811}$$

Konstanta τ_0 má rozměr času, o její interpretaci se zmíníme zanedlouho. Pro elektron je její hodnota přibližně 10^{-24} s. Tři základní problémy rovnice jsou zjevné:

I. Třetí derivace polohy vyžaduje nejasnou dodatečnou počáteční podmínku
Klasická fyzika definuje stav pomocí polohy a rychlosti (hybnosti). Počáteční poloha a rychlost (hybnost) umožní výpočet integračních konstant, které se objeví při řešení pohybové rovnice. Přítomnost třetí derivace v pohybové rovnici ale znamená další

integrační konstanty, jejichž význam je při nejmenším nejasný a z hlediska klasické fyziky se jeví jako nadbytečné.

II. Při nulové externí síle existují nefyzikální řešení rostoucí exponenciálně s časem
Jedno takové řešení najdeme snadno – zvolíme nulovou externí sílu a rovnici (1.811) budeme integrovat třikrát po sobě, přičemž první a druhou integrační konstantu zvolíme nulovou:

$$\begin{aligned} \dddot{\mathbf{r}} &= \tau_0 \ddot{\mathbf{r}}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \tau_0 \dot{\mathbf{r}}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \tau_0 \mathbf{r}, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 \, \mathrm{e}^{t/\tau_0}. \end{aligned} \tag{1.812}$$

Nalezené řešení je tzv. ubíhající (*runaway*) řešení. Takové řešení není fyzikální, není totiž možné, aby bez působení jakýchkoli sil docházelo k exponenciálnímu urychlování částice. Abrahamova-Lorentzova rovnice tedy poskytuje i řešení, která nekorespondují s přírodou. Obecné řešení pro pohyb volné částice (bez externí síly) lze napsat jako

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}_0 \, \mathrm{e}^{t/\tau_0} + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2. \tag{1.813}$$

Je jasné, že volbou $\mathbf{c}_0 = 0$ lze nefyzikální řešení v tomto případě odstranit a dokonce tak zredukovat počet integračních konstant na přijatelný počet.

III. Abrahamova-Lorentzova rovnice poskytuje řešení narušující kauzalitu
Pro sílu, která je nenulová od času t_0 (byť konstantní), závisí řešení v čase $t < t_0$ na hodnotě síly v budoucnosti, což je pro fyziku nepřijatelné. Taková nekauzální řešení existují i pro jakoukoli externí sílu, která je pouhou funkcí času. Jedním z nich je výraz

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m_0 \tau_0} \int_t^\infty \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t') \, \mathrm{e}^{-\frac{(t'-t)}{\tau_0}} \, \mathrm{d}t'. \tag{1.814}$$

Snadno ukážeme, že (1.814) je řešením AL rovnice. Levou i pravou stranu (1.814) zderivujeme podle času. U derivace pravé strany budeme derivovat každý výskyt proměnné t zvlášť, tj. využijeme větu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_C^t f(t,t') \, \mathrm{d}t' = f(t,t) + \int_C^t \frac{\partial f(t,t')}{\partial t} \, \mathrm{d}t'. \tag{1.815}$$

Výsledek je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{m_0 \tau_0} \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t) + \frac{1}{m_0 \tau_0^2} \int_t^\infty \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t') \, \mathrm{e}^{-\frac{(t'-t)}{\tau_0}} \, \mathrm{d}t' \tag{1.816}$$

Minus v prvním členu vzniklo záměnou integračních mezí tak, abychom derivovali podle horní proměnné meze. Integrál napravo vyjádříme z (1.814):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{m_0 \tau_0} \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t) + \frac{1}{\tau_0} \mathbf{a} \quad \Rightarrow \tag{1.817}$$

$$m_0 \mathbf{a} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t) + m_0 \tau_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.818}$$

což je AL rovnice. Zrychlení (1.814) je tedy opravdu řešení AL rovnice. Hodnota zrychlení se ale počítá z hodnoty síly $\mathbf{F}_{\text{ext}}(t)$ v budoucnosti a řešení je zjevně nekauzální. Budoucí síla se integruje s exponenciálně klesající vahou, podstatné pro zrychlení jsou hodnoty síly v nejbližší budoucnosti. Charakteristickou časovou konstantou je právě čas τ_0, proto se mu říká *předakcelerační čas* (*preacceleration time*). Pro elektron jde o hodnotu přibližně 10^{-24} s.

* * *

Výkon souvisící s generováním vlastních polí je

$$P = \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} = m_0 \tau_0 \, \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{v} = m_0 \tau_0 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{a}^2 \right]. \tag{1.819}$$

Pro částici s konstantní rychlostí je výkon nulový, při periodickém pohybu částice září. Střední hodnota první části bude v tomto případě nulová, proto platí

$$\langle P \rangle = -\frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \langle a^2 \rangle \tag{1.820}$$

a částice ztrácí, jak jsme očekávali, zářením energii, tedy alespoň něco je v AL rovnici v pořádku. Po dosazení za zrychlení kmitavého pohybu dokonce dostaneme správnou Larmorovu formuli pro dipólové záření (vit druhý díl „Vybraných kapitol“).

Lorentzova-Diracova pohybová rovnice

Pokud nebudeme v Lorentzově souřadnicové soustavě lokálně spojené s částicí, je přímé kovariantní zobecnění pohybové rovnice (1.811) na libovolnou soustavu

► $$m_0 \frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = F^\alpha_{\text{ext}} + m_0 \tau_0 \left(\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\tau} - \frac{a^2}{c^2} U^\alpha \right); \qquad a^2 \equiv a^\beta a_\beta \,. \tag{1.821}$$

Druhý člen v kulaté závorce zajišťuje správnou velikost čtyřvektorů. Zkuste si rovnici s externí Lorentzovou silou vynásobit U_α:

$$m_0 \frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} U_\alpha = Q F^{\alpha\beta} U_\beta U_\alpha + m_0 \tau_0 \left(\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\tau} U_\alpha - \frac{a^2}{c^2} U^\alpha U_\alpha \right)$$

Člen nalevo je nulový, protože čtyřzrychlení je vždy kolmé na čtyřrychlost, viz druhý díl „Vybraných kapitol, vztah (II.3.99)“. První člen napravo je také nulový, protože jde o zúžení symetrického a antisymetrického tenzoru. Třetí člen upravíme pomocí derivace součinu a ve čtvrtém vyjádříme velikost čtyřrychlosti ze vztahu $U_\alpha \mathrm{U}^\alpha = -c^2$:

$$0 = 0 + m_0 \tau_0 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(a^\alpha U_\alpha \right) - a^\alpha a_\alpha - \frac{a^2}{c^2} (-c^2) \right)$$

První člen v kulaté závorce je opět díky kolmosti čtyřrychlosti na čtyřzrychlení nulový a zbylé členy se přesně odečtou:

$$0 = 0 + m_0 \tau_0 \left(0 - a^2 + a^2 \right)$$

Bez posledního kompenzujícího členu by Lorentzova-Diracova rovnice (1.821) nebyla kovariantní. Rovnici odvodil anglický fyzik Paul A. M. Dirac (1902–1984) za pomoci úvah o zachování čtyřhybnosti soustavy pole a částice v roce 1938 [53]. Naše odvození vychází z přehledového článku [55]. Kompenzující člen můžeme upravit do nejčastěji používaného tvaru (využijeme, že čtyřzrychlení je vždy kolmé na čtyřrychlost, tj. platí $a_\beta U^\beta = 0$):

$$a^2 U^\alpha = a^\beta a_\beta U^\alpha = a^\beta \frac{\mathrm{d}U_\beta}{\mathrm{d}\tau} U^\alpha = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(a^\beta U_\beta\right) - \frac{\mathrm{d}a^\beta}{\mathrm{d}\tau} U_\beta \right) U^\alpha = -\frac{\mathrm{d}a^\beta}{\mathrm{d}\tau} U^\alpha U_\beta$$

a Lorentzovu-Diracovu rovnici psát v alternativním tvaru, v němž je radiační síla úměrná časové derivaci zrychlení (obdobně tomu je u AL rovnice)

► $$m_0 \frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = F^\alpha_{\mathrm{ext}} \; + \; m_0 \tau_0 \left(g^\alpha{}_\beta + \frac{U^\alpha U_\beta}{c^2} \right) \frac{\mathrm{d}a^\beta}{\mathrm{d}\tau}. \qquad (1.822)$$

Pauliho zápis radiační reakce

V obecné Lorentzově Diracově rovnici (1.821) má radiační reakce na částici tvar

$$F^\alpha_{\mathrm{rad}} = m_0 \tau_0 \left(\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\tau} - \frac{a^2}{c^2} U^\alpha \right). \qquad (1.823)$$

Od vlastního času nyní přejdeme k souřadnicovému času, pro přechod využijeme vyjádření intervalu ve vlastní soustavě částice a v laboratorní soustavě:

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2 \mathrm{d}\tau^2 = -c^2 \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \qquad \Rightarrow \qquad (1.824)$$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}\,, \qquad (1.825)$$

a proto můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \gamma \dot{f}\,. \qquad (1.826)$$

Tečkou budeme označovat, jak je obvyklé, derivace podle souřadnicového času. Namísto rychlosti budeme používat bezrozměrnou rychlost $\boldsymbol{\beta}$, která má tu výhodu, že její hodnota nezávisí na volbě jednotek

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{v}/c \qquad (1.827)$$

Nejprve určíme časovou změnu Lorentzova kontrakčního faktoru γ:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \mathbf{v}^2/c^2\right)^{-1/2} = \frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{c^2}\left(1 - \mathbf{v}^2/c^2\right)^{-3/2} = \gamma^3\, \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\,. \qquad (1.828)$$

Nyní si napočteme jednotlivé členy potřebné pro sestavení radiační reakce (1.823):

$$x^\alpha = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; \tag{1.829}$$

$$U^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \gamma c \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}; \tag{1.830}$$

$$a^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}t} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma c \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \cdots = c \begin{pmatrix} \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \\ \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + \gamma^2 \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}. \tag{1.831}$$

Povšimněte si, že odvozený výraz má skutečně rozměr zrychlení. Rychlost světla před výrazem přináší rozměr [c] = m/s, další 1/s vnáší časová derivace (tečka). Vnímavý student si ještě může zkontrolovat, že platí $a^\alpha U_\alpha = 0$. Dále potřebujeme a^2:

$$a^2 = a^\alpha a_\alpha = -(a^0)^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \cdots = c^2 \left[\gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^4 \dot{\beta}^2 \right], \tag{1.832}$$

Poslední člen, který se vyskytuje v radiační reakci, je $\mathrm{d}a^\alpha/\mathrm{d}\tau$. Výpočet je přímočarý, i když poněkud zdlouhavý a vede na celkem jednoduchý výraz

$$\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}t} = \cdots = c \begin{pmatrix} 4\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^5 \left[\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\beta}^2 \right] \\ 4\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^5 \left[(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + 3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\beta}^2 \boldsymbol{\beta} \right] + \gamma^3 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} \tag{1.833}$$

Jednoduchým zkombinováním posledních výrazů získáme radiační část pravé strany Lorentzovy Diracovy rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\tau} - \frac{a^2}{c^2} U^\alpha = c \begin{pmatrix} 3\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^5 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \\ 3\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^5 \left[(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + 3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}} \right] + \gamma^3 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} \tag{1.834}$$

Pohybová rovnice (1.821) má nyní tvar

$$\frac{\mathrm{d}p^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = F^\alpha_{\mathrm{ext}} + m_0 c \tau_0 \begin{pmatrix} 3\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^5 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \\ 3\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^5 \left[(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + 3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}} \right] + \gamma^3 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}; \tag{1.835}$$

kde p^α je čtyřhybnost částice. Po převedení levé strany do souřadnicového času máme pro radiační část

► $$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{rad}}}{\mathrm{d}t} = m_0 c^2 \tau_0 \left[3\gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \right]; \tag{1.836}$$

► $$\mathbf{F}_{\mathrm{rad}} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{rad}}}{\mathrm{d}t} = m_0 c \tau_0 \left[3\gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + 3\gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + \gamma^2 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \right]. \tag{1.837}$$

Poslední dva výrazy představují úbytek energie (vyjde záporný) a hybnosti z částice způsobený vlastním zářením. Výraz (1.837) odvodil v roce 1958 Wolfgang Pauli [54] a je velmi často citován komunitou zabývající se ubíhajícími elektrony. Pro ultrarelativistické částice s $\gamma > 1$ jsou členy v hranaté závorce seřazeny dle klesající mocniny Lorentzova faktoru γ.

Iterační řešení problémů – Landauova-Lifšitzova rovnice

Zajímavým řešením problémů je předpoklad, že radiační člen v (1.811) je malý, což umožňuje odhadnout zrychlení iteračně:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{m_0} \tag{1.838}$$

a tuto první iteraci dosadit do pravé strany rovnice (1.811):

$$m\,\mathbf{a}_1 \approx \mathbf{F}_{\text{ext}} + \tau_0 \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}}. \tag{1.839}$$

Tato rovnice nemá problémy se třetími derivacemi, ale někdy není zcela jasné, za jakých podmínek je první iterace dostačující a kdy je třeba iterace opakovat. Iterační řešení opět funguje jen pro sílu explicitně závisící na čase (například elektron v poli laserového impulzu). Relativistické zobecnění iterační náhražky (1.839) je přímočaré:

$$m_0 \frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = F^\alpha_{\text{ext}} \;+\; \tau_0 \left(g^\alpha{}_\beta + U_\beta U^\alpha \right) F^\beta_{\text{ext},\,\gamma} U^\gamma. \tag{1.840}$$

Pro sílu rovnou Lorentzově síle se výsledná rovnice nazývá *Landauova-Lifšicova rovnice*:

► $$m_0 \frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = QF^{\alpha\beta} U_\beta \;+\; \tau_0 \left(g^\alpha{}_\beta + U_\beta U^\alpha \right) QF^{\beta\alpha}{}_{,\gamma} U_\alpha U^\gamma. \tag{1.841}$$

Existují různé ekvivalentní přepisy této rovnice. Základní podmínkou pro její použití je, aby radiační síla byla podstatně menší než elektromagnetické síly. Čas, za který prolétne signál oblast interakce, by měl navíc být podstatně menší než typická doba změn silového pole. Zpravidla se tyto podmínky vyjadřují ve tvaru [58]

$$E \ll E_{\text{S}}/\alpha\,; \qquad \lambda \gg \alpha\,\lambda_{\text{C}}, \tag{1.842}$$

kde jsme označili E_{S} Schwingerovo pole (prahové pole pro tvorbu elektron-pozitronových párů z vakua), λ_{C} Comptonovu vlnovou délku (typická změna vlnové délky fotonu při jeho interakci s elektronem) a α konstantu jemné struktury (popisuje intenzitu elektromagnetické interakce). Tyto tři klíčové veličiny jsou dány vztahy:

$$E_{\text{S}} \equiv \frac{m_{\text{e}}^2 c^3}{e\hbar} \approx 1.3\times10^{18}\ \text{V/m}, \tag{1.843}$$

$$\lambda_{\text{C}} \equiv \frac{2\pi\hbar}{m_{\text{e}} c} \approx 2.4\times10^{-12}\ \text{m}, \tag{1.844}$$

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \tag{1.845}$$

Snahy o řešení problémů

Řešení rovnice (1.811) lze zapsat ve tvaru, který zcela eliminuje nefyzikální exponenciálně narůstající řešení. Získáme ho z (1.816) substitucí

$$s = (t' - t)/\tau_0\,, \tag{1.846}$$

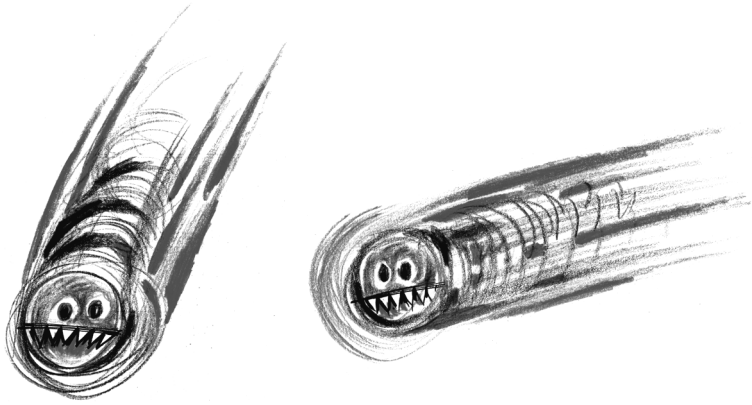
která vede na řešení

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \mathbf{F}_{\text{ext}}(t + s\tau_0)\, \mathrm{e}^{-s}\, \mathrm{d}s \tag{1.847}$$

Problém narušení kauzality ale přetrvává. Obecné řešení rovnice (1.811) pro sílu závisící pouze na čase lze zapsat v dalším alternativním tvaru

$$\mathbf{a}(t) = \mathrm{e}^{t/\tau_0} \left[\mathbf{C} - \frac{1}{m_0 \tau_0} \int_{-\infty}^{t} \mathbf{F}_{\text{ext}}(t')\, \mathrm{e}^{-t'/\tau_0}\, \mathrm{d}t' \right] \tag{1.848}$$

Pro konstantní sílu vynořivší se v čase t_0 lze zvolit **C** tak, aby nefyzikální exponenciální řešení vymizelo, řešení v časech $t < t_0$ ale bude závislé na hodnotě síly v $t > t_0$, což je opět těžko přijatelné. Nejasnosti a nezodpovězené otázky stále přetrvávají. Může to být způsobené i tím, že vyzařování je ve skutečnosti kvantový proces a jeho popis klasickou mechanikou není vůbec možný.

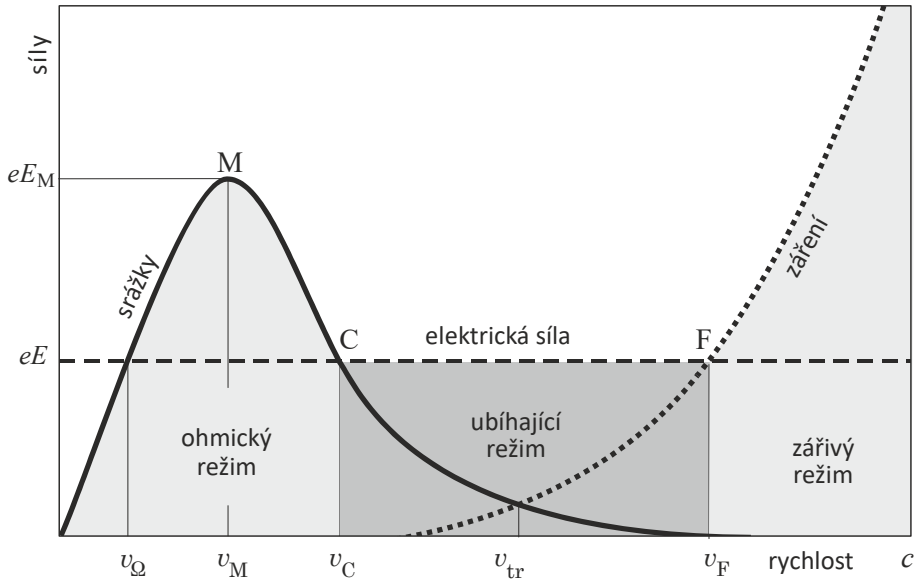


1.7.2 Ubíhající elektrony

Na elektron pohybující se plazmatem působí třecí síla, za níž jsou odpovědné srážky elektronu s ostatními elektrony a ionty. Příslušné srážkové frekvence (1.765) jsme odvodili v kapitole 1.6.4 *Coulombova interakce*. Průběh srážkové (třecí) síly je znázorněn na obrázku 1.124. S rostoucí rychlostí elektronu zpočátku srážková síla roste úměrně rychlosti elektronu. Při rychlostech výrazně vyšších, než je tepelná rychlost iontů, začne třecí síla působící na elektron naopak klesat s druhou mocninou jeho rychlosti. Srážky jsou při vysokých rychlostech málo efektivní. Oblast maxima srážkové síly se nachází v okolí tepelné rychlosti iontů. Detailní průběh třecí síly si odvodíme dále v textu.

Představme si, že na elektron působí elektrické pole, které se ho snaží urychlit. Srážky tento elektron naopak brzdí a snaží se ho zastavit. V intervalu rychlostí (v_Ω, v_C), který je označen na obrázku 1.124 jako ohmický režim, je výsledkem obou procesů finální rychlost v_Ω elektronu. Při nižších rychlostech je elektron urychlen elektrickým polem, při vyšších ho naopak přibrzdí srážky. Jedinou výjimkou je elektrické pole, které je vyšší, než odpovídá poli E_M maxima srážkové síly. Pro takové pole urychlování vždy převládne nad srážkami a elektron bude urychlován na stále vyšší a vyšší rychlosti.

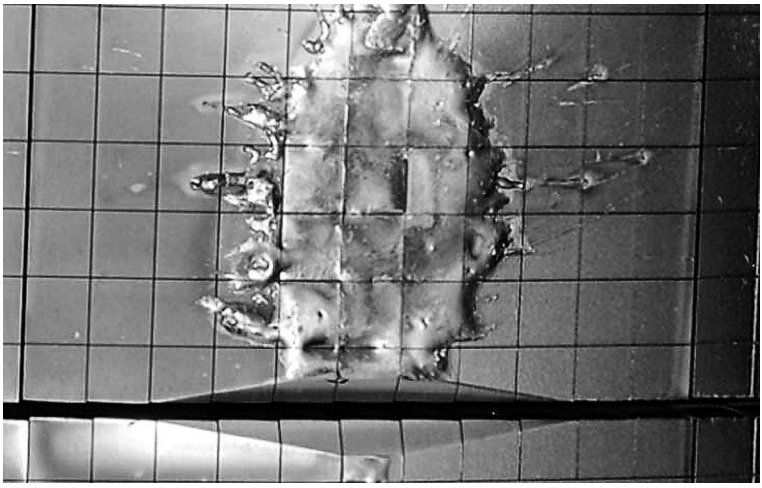
Pokud bude mít elektron větší rychlost, než odpovídá průsečíku C elektrické a srážkové síly, dostane se do ubíhajícího režimu, v němž srážky nejsou schopné kompenzovat urychlování elektrickým polem a elektron může získat značnou energii a stát se nebezpečným pro nejrůznější zařízení a přístroje. Jak je patrné z obrázku, ubíhající režim (v angličtině se používá označení *Runaway Regime*, *Runaway Electrons*, ve zkratce REs) může být ukončen vlastním vyzařováním elektronu (existují ale i jiné mechanizmy ukončení ubíhajícího režimu elektronu). Ztráta hybnosti způsobená zářením rychle letícího elektronu (při nenulovém zrychlení) má na elektron podobný brzdící účinek, jako mají při malých rychlostech srážky.



Obr. 1.124: Síly působící na letící elektron (bez magnetické části síly)

Historické pozadí

Ubíhající režim elektronů nastává v oblasti, kde elektrické urychlování převyšuje srážkové procesy i ztrátu hybnosti vlastním vyzařováním. Při dané rychlosti musí mít elektrické pole určitou nadkritickou hodnotu, při níž se elektron ocitne v ubíhajícím režimu, kde dochází k jeho urychlování. O možnosti vzniku ubíhajících elektronů poprvé uvažoval už v roce 1925 vynálezce mlžné komory Charles Thomas Rees Wilson [77]. Podrobnější teoretickou analýzu udělal australský fyzik s italskými kořeny Ronald Gordon Giovanelli v roce 1949 [75]. V roce 1959 spočetl kritické pole pro bezpodmínečný vznik ubíhajících elektronů německo-americký fyzik Harry Dreicer [73]. V roce 1992 navrhl sovětsko-ruský fyzik Alexandr Viktorovič Gurevič lavinový mechanizmus průrazu blesku za bouřkové aktivity [74], který je odstartován relativistickými elektrony ze sprškek kosmického záření. V roce 2003 ukázal americký fyzik Joseph Dwyer, že ke vzniku laviny postačí jeden jediný megaelektronvoltový elektron [78]. Rozsáhlejší výzkum ubíhajících elektronů se dostal do popředí zájmu fyziků až v souvislosti s častým vznikem jejich populace v komorách velkých tokamaků, pro něž je shluk ubíhajících elektronů velkým nebezpečím.



Obr. 1.125: Legendární snímek poškození komory tokamaku JET způsobené ubíhajícími elektrony. Eurofusion 2015.

Někdy mohou elektrony získávat energii i v kombinaci s dalšími procesy. Například v zemské magnetosféře elektrony obíhají po šroubovicích kolem magnetických indukčních čar. V přítomnosti R vln, u nichž se elektrický vektor stáčí ve stejném směru jako obíhající elektrony, může dojít k rezonančnímu předávání energie – postačí, aby frekvence oběhu elektronů byla shodná s frekvencí elektromagnetické vlny. Přitom vznikají tzv. zabijácké elektrony s extrémními energiemi, které jsou schopné poškodit přístroje na družicích.

Ubíhající elektrony se mohou vyskytnout v různých druzích plazmatu. Hrají důležitou roli při bouřkové aktivitě, při vzniku pozemských gama záblesků nebo ve výtryscích z kompaktních objektů. Ubíhající elektrony v tokamakovém plazmatu určenému k uskutečnění termojaderné fúze nejsou vítanými návštěvníky. Známé jsou případy poškození stěny komory oblakem dopadlých ubíhajících elektronů. Jejich chování se proto dostalo

se stavbou největšího tokamaku ITER do popředí zájmu většiny výzkumných týmů. Ubíhající elektrony mohou vzniknout v mnoha situacích. Postačí, aby elektrické pole bylo vyšší než tzv. Dreicerovo pole nebo aby počáteční rychlost elektronu překročila určitou kritickou mez. Nadkritickou rychlost mají například některé elektrony z chvostu Maxwellova rozdělení. Není jich sice mnoho, ale za vhodných podmínek může dojít k lavinovému procesu, kdy při srážkách vytvářejí ubíhající elektrony další populace takových jedinců. V tokamacích vznikají ubíhající elektrony například ve fázi disrupce (při zhasnutí plazmatu). V průběhu disrupce prudce klesá teplota plazmatu, to s sebou nese pokles vodivosti plazmatu a snížení proudu tekoucího plazmatem. V důsledku toho velmi rychle slábne poloidální magnetické pole. A právě rychlá časová změna magnetického pole s sebou přináší podle Faradayova indukčního zákona genezi silného elektrického pole, které způsobí vznik populace ubíhajících elektronů.
Ubíhající elektrony ztrácejí energii mnoha různými kanály – při srážkách s těžkými ionty, v turbulentních procesech, díky kinetickým nestabilitám, rozptylem na elektrických a magnetických polích, tvorbou elektronových pozitronových párů, vlastním vyzařováním i dalšími procesy.

Třecí (srážková) síla

Elektrony pohybující se plazmatem se sráží jak s ostatními elektrony, tak s ionty. Výsledná srážková síla působící na elektrony bude

$$\mathbf{F}_{\mathrm{col}} = -m_{\mathrm{e}}\mathbf{v}_{\mathrm{e}}\left(\nu_{\mathrm{ee}} + \nu_{\mathrm{ei}}\right) \tag{1.849}$$

Srážkové frekvence jsou dány vztahem (1.765). Po dosazení za obě srážkové frekvence dostaneme jednoduchý výraz

$$\mathbf{F}_{\mathrm{col}} = -\frac{n_{\mathrm{e}}e^4 \ln\Lambda}{2\pi\varepsilon_0^2 m_{\mathrm{e}}}\left[\frac{Z_{\mathrm{eff}}}{v_{\mathrm{Ti}}^2}\psi(v/v_{\mathrm{Ti}}) + \frac{2}{v_{\mathrm{Te}}^2}\psi(v/v_{\mathrm{Te}})\right]\frac{\mathbf{v}}{v}, \tag{1.850}$$

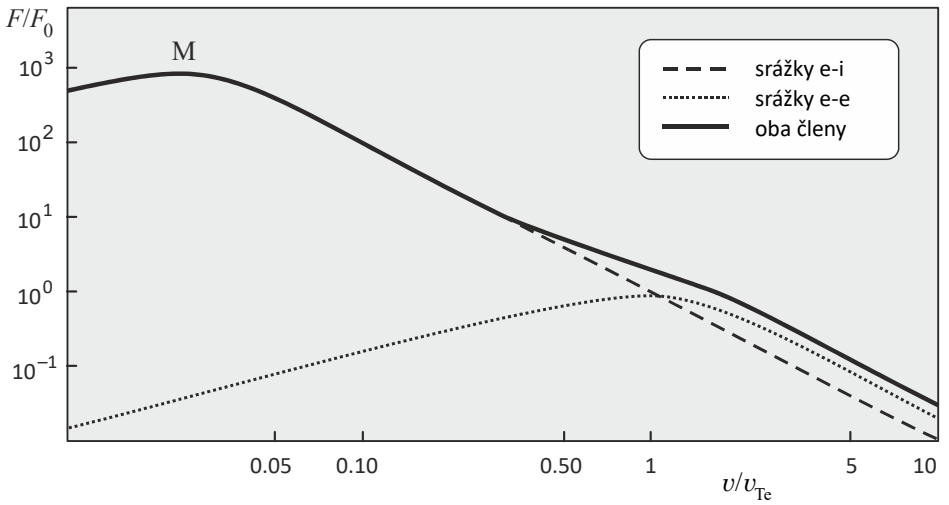
kde ψ je Chandrasekharova funkce a Z_{eff} je efektivní stupeň ionizace daný součtem přes všechny druhy iontů

$$Z_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{n_{\mathrm{e}}}\sum_k Z_k^2 n_k\,. \tag{1.851}$$

Výraz pro srážkovou sílu lze přepsat do tvaru

► $$\mathbf{F}_{\mathrm{col}} = -2F_0\left[Z_{\mathrm{eff}}\frac{m_i}{m_e}\psi(v/v_{\mathrm{Ti}}) + 2\psi(v/v_{\mathrm{Te}})\right]\frac{\mathbf{v}}{v}; \qquad F_0 \equiv \frac{n_{\mathrm{e}}e^4\ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_0^2 m_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{Te}}^2}, \tag{1.852}$$

První Chandrasekharova funkce má maximum v okolí tepelné rychlosti iontů, druhá v okolí tepelné rychlosti elektronů (poloha vodorovné souřadnice maxima numericky vychází $x \approx 0{,}967$). Vodorovné souřadnice maxim jsou v poměru $(m_{\mathrm{i}}/m_{\mathrm{e}})^{1/2}$. Navíc je maximum pro ionty vyšší, koeficienty před oběma členy jsou v poměru $m_{\mathrm{i}}/m_{\mathrm{e}}$, tj. maximum srážek e-i je o tři řády vyšší než srážek e-e, viz obrázek 1.126. Součet obou členů má maximum shodné s iontovou části srážek, elektronové maximum se projeví na výsledné křivce jen jako malé zvlnění. Z průběhu na obrázku je zjevné, že až do 50 % tepelné rychlosti elektronů zcela dominují srážky elektronů s ionty a srážky elektronů s elektrony lze zanedbat. Pro rychlosti srovnatelné s tepelnými rychlostmi elektronů a vyšší je třeba uvažovat oba srážkové členy.



Obr. 1.126: Závislost srážkové síly na rychlosti elektronů v logaritmické škále, kde je patrná poloha obou maxim. Pro nízké rychlosti jsou srážky e-i výrazně dominantní a srážky e-e lze zanedbat. Pro vyšší rychlost nelze zanedbat ani jeden z druhů srážek.

Limitní chování Chandrasekharovy funkce ψ je dáno vztahy

$$\psi(x) = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\, x\,; \qquad x \ll 1\,, \tag{1.853}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2x^2}\,; \qquad x \gg 1\,. \tag{1.854}$$

Před maximem lze tedy formuli (1.852) nahradit lineární závislostí. Pro rychlosti vyšší, než je tepelná rychlost elektronů, lze využít aproximaci (1.854). Vztah pro srážkovou sílu potom získá výrazně jednodušší podobu

► $$\mathbf{F}_{\mathrm{col}} = -\frac{n_{\mathrm{e}} e^4 \ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_0^2 m_{\mathrm{e}} v^2}\left(Z_{\mathrm{eff}} + 2\right)\frac{\mathbf{v}}{v}\,; \qquad v_{\mathrm{Te}} < v \ll c\,. \tag{1.855}$$

Výraz (1.852) je nerelativistický, což by nemělo pro velké rychlosti příliš vadit, neboť jsou srážky tak jako tak zanedbatelné. Nicméně pokud by to bylo třeba, je pro extrémně velké rychlosti možné použít relativistickou formuli [72]

► $$\mathbf{F}_{\mathrm{col}} = -\frac{n_{\mathrm{e}} e^4 \ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_0^2 m_{\mathrm{e}} c^2}\left(\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} Z_{\mathrm{eff}} + \frac{1}{\gamma - 1}\right)\frac{\mathbf{v}}{v}\,; \qquad v > v_{\mathrm{Te}}\,. \tag{1.856}$$

Pokud provedete rozvoj Lorentzova faktoru γ v rychlosti, přejde v nejnižším řádu formule (1.856) v předchozí výraz (1.855). Vyzkoušejte si to. Chandrasekharovu funkci lze pro některé orientační výpočty nahradit jednodušší racionální lomenou funkcí

$$\psi(x) \approx G(x) = \frac{2x}{3\pi^{1/2} + 4x^3}\,. \tag{1.857}$$

Funkce $G(x)$ má shodné limitní chování s $\psi(x)$ pro malá i velká x. K největší odchylce dochází pouze v okolí maxima (do 10 %) a ta je pro základní odhady akceptovatelná.

Radiační reakce

Urychlovaný elektron bude vyzařovat jak díky podélnému urychlování, tak díky gyračnímu pohybu v magnetickém poli. Vlastní záření elektronu vede ke ztrátě jeho hybnosti a energie. Ztráta hybnosti se projeví jako síla, která elektron brzdí a nakonec ubíhající režim ukončí (neuvažujeme jiné procesy, jako je např. tvorba elektronových-pozitronových párů). Radiační reakce elektronu je dána vztahem Pauliho vztahem (1.837)

$$\mathbf{F}_{\mathrm{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^2}\left[3\gamma^6\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2\boldsymbol{\beta} + \gamma^4\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\ddot{\boldsymbol{\beta}}\right)\boldsymbol{\beta} + 3\gamma^4\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\dot{\boldsymbol{\beta}} + \gamma^2\ddot{\boldsymbol{\beta}}\right], \tag{1.858}$$

kde tečka označuje derivaci podle souřadnicového času d/dt. Pokud se vypočet provede se čtyřvektory, získáme navíc ještě vztah pro ztrátu energie

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{rad}}}{\mathrm{d}t} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c}\left[3\gamma^6(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^4(\boldsymbol{\beta}\cdot\ddot{\boldsymbol{\beta}})\right]. \tag{1.859}$$

Symbol β označuje bezrozměrnou rychlost v/c a γ je opět Lorentzův kontrakční faktor. Dvěma limitními případy jsou: 1) záření spojené se změnou velikosti rychlosti; 2) záření spojené se změnou směru rychlosti. Změna velikosti rychlosti popisuje například brzdné záření, změna směru rychlosti cyklotronnní či synchrotronní záření.

Záření elektronu v tokamaku

Elektrony gyrující v toroidálním poli B_{tor} emitují synchrotronní záření, dále při oběhu kolem komory tokamaku emitují betatronové záření a v neposlední řadě mohou emitovat brzdné záření spojené se změnou rychlosti podél trajektorie. Brzdné záření silně závisí na přítomnosti iontů a různých nečistot, může být podstatné při disrupci (zhášení) výboje. Odhad tohoto zářivého výkonu nelze udělat bez konkrétní znalosti situace v daném výboji. Pro záření způsobené gyračním pohybem elektronů v toroidálním poli plynou z výše uvedených formulí (1.858) a (1.859) vztahy:

$$\left|\mathbf{F}_{\mathrm{T,\,rad}}\right| = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{B_{\mathrm{tor}}^2}{m_{\mathrm{e}}^2}\frac{\beta_\perp}{1-\beta_\perp^2}; \tag{1.860}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{T,\,rad}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0 c}\frac{B_{\mathrm{tor}}^2}{m_{\mathrm{e}}^2}\frac{\beta_\perp}{1-\beta_\perp^2}. \tag{1.861}$$

kde $\beta_\perp$ je složka bezrozměrné rychlosti elektronu kolmá na lokální magnetickou indukční čáru. Z formulí (1.858) a (1.859) můžeme odvodit i vztahy pro betatronové záření vznikající oběhem elektronů podél komory tokamaku:

$$\left|\mathbf{F}_{\mathrm{b,\,rad}}\right| = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 R_{\mathrm{maj}}^2}\frac{\beta_\parallel^3}{1-\beta_\parallel^2}; \tag{1.862}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{b,\,rad}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e^2 c}{6\pi\varepsilon_0 R_{\mathrm{maj}}^2}\frac{\beta_\parallel^4}{1-\beta_\parallel^2}. \tag{1.863}$$

kde $\beta_{||}$ je projekce bezrozměrné rychlosti elektronu do směru magnetické indukční čáry a R_{maj} je velký poloměr tokamaku. Například pro tokamak COMPASS, rychlost elektronů rovnou tepelné rychlosti a odklon částice od siločáry 10° je betatronové záření o osm řádů nižší než záření způsobené gyračním pohybem. Je to dané především různou křivostí obou drah. V naprosté většině situací lze betatronové záření zanedbat.

Klíčové parametry ubíhajícího režimu

Klíčovými parametry ubíhajícího režimu, viz obrázek 1.124, jsou: maximum srážkové síly M a s ním spojené pole E_M, souřadnice bodu C pro vstup do ubíhajícího režimu a souřadnice bodu F, který reprezentuje ukončení ubíhajícího režimu vlastním vyzařováním elektronů.

Bod M (maximum srážkové síly)

Vzhledem k tomu, že v oblasti maxima srážkové síly je vliv srážek e-e zanedbatelný, využijeme pro hledání bodu M jen iontovou část. Chandrasekharova funkce má extrém pro $x \approx 0{,}968$, $\psi \approx 0{,}214$, tedy bude platit

$$eE_M \approx \frac{n_e e^4 \ln\Lambda}{2\pi\varepsilon_0^2 m_e} \frac{Z_{eff}}{v_{Ti}^2} \psi(v_M / v_{Ti}) ;$$

$$v_M / v_{Ti} \approx 0{,}968 ; \tag{1.864}$$

$$\psi(v_M / v_{Ti}) \approx 0{,}214 .$$

Odsud ihned plyne rychlost a pole odpovídající souřadnicím bodu M (obrázek 1.124):

$$v_M \approx 0{,}968\, v_{Ti} \approx 0{,}968 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\, v_{Te} ,$$

$$E_M \approx 0{,}107 \frac{n_e e^3 \ln\Lambda}{\pi\varepsilon_0^2 m_e} \frac{Z_{eff}}{v_{Ti}^2} \approx 0{,}107 \frac{m_i}{m_e^2} \frac{n_e e^3 \ln\Lambda}{\pi\varepsilon_0^2} \frac{Z_{eff}}{v_{Te}^2} . \tag{1.865}$$

Převod tepelné rychlosti iontů na tepelnou rychlost elektronů platí jen pro termalizované plazma. Při dané tepelné rychlosti elektronů má maximum srážkové frekvence na vodorovné ose cca čtyřicetkrát nižší hodnotu – v poměru $(m_i/m_e)^{1/2}$ – než je tepelná rychlost elektronů. Vodorovná souřadnice extrému M odpovídá přibližně tepelné rychlosti iontů. Svislá souřadnice definuje pole E_M, nad nímž se elektron dostane do ubíhajícího režimu vždy, a to bez ohledu na jeho počáteční rychlost (viz obrázek 1.124).

Bod C (počátek ubíhajícího režimu, kritická rychlost, Dreicerovo pole)

Výpočet souřadnic bodu C, tj. rychlosti a jí odpovídajícímu poli pro nástup ubíhajícího režimu, se pro různé rychlosti elektronů liší a lze ho rozdělit do tří oblastí. Extrém iontové části je na 0,968 tepelné rychlosti iontů, elektronové části na 0,968 tepelné rychlosti elektronů. Vodorovné souřadnice extrémů (rychlosti) se liší v poměru $(m_i/m_e)^{1/2}$, svislé souřadnice extrémů (srážková síla) se liší v poměru m_i/m_e, tj. extrém iontové části je pro vodík 1800× vyšší než extrém elektronové části.

V oblasti mezi oběma extrémy, tj. do tepelné rychlosti elektronů, je příspěvek elektronové části malý a lze ho zanedbat. Iontová část je v sestupné oblasti a lze ji aproxi-

movat vztahem (1.854). Mezi oběma maximy, tj. pro vyšší rychlosti než tepelné rychlosti elektronů, už nelze zanedbat příspěvek elektronů. Obě části srážkové síly lze v této oblasti aproximovat vztahem (1.854). V oblasti tepelné rychlosti elektronů je iontová část opět aproximovatelná vztahem (1.854), zatímco elektronová část je nahraditelná maximem Chandrasekharovy funkce:

$$E_{\mathrm{C}} = \frac{n_{\mathrm{e}} e^3 \ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_0^2 m_{\mathrm{e}} v^2} \times \begin{cases} Z_{\mathrm{eff}}; & v_{\mathrm{M}} < v \ll v_{\mathrm{Te}}, \\ Z_{\mathrm{eff}} + 0.856; & v \approx v_{\mathrm{Te}}, \\ Z_{\mathrm{eff}} + 2; & v_{\mathrm{Te}} \ll v \ll c. \end{cases} \tag{1.866}$$

První vztah je výraz, který se objevil v původním Dreicerově článku z roku 1959 [73]. Druhý vztah je to, co dnes nazýváme Dreicerovým polem, tj. pole, pro něhož se tepelné elektrony dostanou do ubíhajícího režimu. Přítomnost elektronové části, kterou nelze v oblasti tepelné rychlosti zanedbat, hodnotu potřebného pole zvýší oproti původnímu Dreicerovu vztahu. Všechny tři větve vztahu (1.866) lze jednotně zapsat formulí

► $$E_{\mathrm{C}} = E_0 \left(Z_{\mathrm{eff}} + \alpha \right); \qquad E_0 = \frac{n_{\mathrm{e}} e^3 \ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_0^2 m_{\mathrm{e}} v^2}; \qquad \alpha = \begin{cases} 0; & v_{\mathrm{M}} < v \ll v_{\mathrm{Te}}, \\ 0.856; & v \approx v_{\mathrm{Te}}, \\ 2; & v_{\mathrm{Te}} \ll v \ll c. \end{cases} \tag{1.867}$$

Ze vztahů (1.866), (1.867) lze pro danou rychlost elektronu dopočítat pole potřebné pro jeho vstup do ubíhajícího režimu.

Bod F (ukončení ubíhajícího režimu)

Elektron v ubíhajícím režimu získává energii, jeho rychlost roste a s ní klesá účinný průřez srážek, a tím i srážková síla. Při ukončení ubíhajícího režimu je radiační síla rovna síle elektrického urychlování (srážky už nemusíme uvažovat)

$$eE_{\mathrm{C}} = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{B_{\mathrm{tor}}^2}{m_{\mathrm{e}}^2} \frac{\beta_\perp}{1-\beta_\perp^2}. \tag{1.868}$$

Pokud pro danou vstupní rychlost určíme ze vztahu (1.866) pole E_{C} potřebné pro vstup do ubíhajícího režimu, je možné ze vztahu (1.868) pro danou geometrii problému určit rychlost, při níž elektron ubíhající režim opustí. Úloha vede na kvadratickou rovnici.

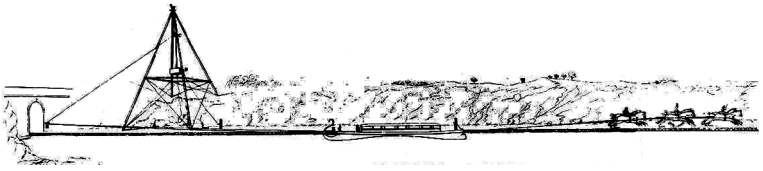
1.7.3 Solitonová řešení

Od kanálu Union k solitonům

V některých situacích poskytují nelineární rovnice velmi zajímavá řešení: osamocené vlny, které nepodléhají disperzi a šíří se beze změny tvaru prostředím. Takovou vlnu nazýváme soliton. Z matematického hlediska jsou solitony v nelineárních teoriích stejně důležité jako harmonický oscilátor v teoriích lineárních. Experimentálně byl soliton poprvé pozorován na úzkém vodním kanále (Union Canal v Hermistonu, poblíž Edinburghu) skotským vědcem Johnem Scottem Russelem (1808–1882) v roce 1834.

Počátky solitonové fyziky jsou s Russelovým jménem jednou provždy spojeny. Russell byl nejen vynikajícím fyzikem, ale i konstruktérem lodí, parních automobilů a vynálezcem. Vystudoval Univerzitu v St. Andrews a měl natolik hluboké znalosti, že se ve svých 24 letech stal profesorem na Univerzitě v Edinburghu. O dva roky později, v roce 1834, zavedl dopravu parními automobily mezi Glasgowem a Paisley. Jeho počáteční úspěch těžko nesli ostatní dopravci, a proto zosnovali dopravní nehodu, při které zemřeli 4 pasažéři. Pravděpodobně šlo o vůbec první automobilovou dopravní nehodu v historii. Russell proto přivítal nabídku společnosti *Union Canal Company*, v rámci které měl za úkol testovat a konstruovat čluny na kanálu Union. Tento velmi úzký kanál byl postaven v letech 1818 až 1822, spojoval města Edinburgh a Glasgow. Sloužil především pro dopravu uhlí a osob na člunech, jež musely být taženy koňmi klusajícími po břehu kanálu. Kanál má délku 50 kilometrů, většinou vede po vrstevnici a terénní nerovnosti překonává po akvaduktech nebo v tunelech (nejdelší tunel má délku 631 metrů). V srpnu 1834 učinil Russell mimořádný objev, který sám popisuje takto:

„*Díval jsem se na člun, který byl podél úzkého kanálu rychle tažen párem koní. Člun se náhle zastavil, ale nikoliv tak voda, která byla tlačena před přídí loďky. Voda pokračovala v samostatném pohybu a valila se kanálem velkou rychlostí. Zformovala se do osamocené vzedmuté vlny s hladkým kulatým tvarem. Při pohybu se neměnil ani tvar vlny, ani její rychlost. Sledoval jsem vlnu na koňském hřbetu a předjel ji. Stále se valila rychlostí osm až devět mil za hodinu, neměnila svůj tvar – byla dlouhá kolem třiceti stop a vysoká asi jeden a půl stopy. Výška se postupně snižovala, až jsem vlnu ztratil v záhybu kanálu po jedné nebo dvou mílích. S tímto neobyčejným a krásným úkazem, který jsem nazval translační vlnou, jsem se poprvé setkal v srpnu 1834.*“



Obr. 1.127: Russelova kresba loďky tažené koňmi na kanálu Union

Russell si byl plně vědom výjimečnosti jevu. Jím objevená *translační vlna* (*Great wave of translation*) odporovala zákonitostem hydrodynamiky, které ve svých pracích popisovali Newton a Bernoulli. Russell vybudoval u svého domku v edinburgské čtvrti New Town rybník a tři roky prováděl různé experimenty – jak doma, tak na kanálu Union. Zjistil, že *translační vlna* má velmi zvláštní a nečekané vlastnosti:

- Rychlost závisí na velikosti vlny a šířka na hloubce vody. Translační vlna je mimořádně stabilní a může svůj tvar udržet i několik mil.
- Na rozdíl od normálních vln se translační vlny nikdy nespojí. Rychlejší vlna projde skrze pomalejší a předběhne ji.

Pokud je translační vlna příliš veliká vzhledem k hloubce kanálu, rozdělí se na dvě vlny, jednu velkou a jednu malou. Russellův výzkum se nesetkal s ohlasem u ostatních vědců. Učenci nebyli na takový objev připraveni a nechtěli uvěřit, že by existovaly jevy, jež jsou v rozporu s pracemi Newtona a Bernoulliho. Skutečný význam byl doceněn až v 60. letech 20. století, kdy se fyzikové začali zabývat nelineárními jevy v přírodě. Dnes se nikdo nediví, že při komunikaci po optických vláknech urazí světelné pulzy beze ztráty tvaru tisíce kilometrů.

V roce 1895 odvodili holandští matematici Diederik Korteweg (1848–1941) a Gustav de Vries (1866–1934) rovnici pro šíření vln na mělké vodě. Rovnice je nelineární a disperze vlny může být přesně kompenzována nelineárními jevy. Šedesát let po Russellových pozorováních byl problém vyřešen. Na vodním kanálu se skutečně mohou šířit vlny beze změny tvaru a velikosti a jejich existenci lze teoreticky vysvětlit za pomoci nelineárních jevů. Rovnice popisující tuto vlnu se dnes nazývá KdV (Kortewegova-de Vriesova) rovnice. V současnosti je známa řada dalších rovnic z různých oblastí vědy, které poskytují solitonová řešení.

Jaká je matematická podstata existence solitonů? V lineárních rovnicích můžeme skládat výsledné řešení z rovinných vlnoploch. Složený vlnový balík však téměř vždy podléhá *disperzi*. Různé vlnové délky se šíří různou rychlostí a balík se rozplývá. V nelineárních teoriích některé nelineární členy způsobují tzv. *modulární nestabilitu*, při které je grupová rychlost závislá na amplitudě balíku. Části s menší amplitudou jsou potlačovány a dochází ke kolapsu balíku. V některých případech může dojít ke vzájemné kompenzaci obou jevů – disperze (rozplývání) a modulární nestability (kolapsu). Výsledkem je *soliton*, vlna stálého tvaru a velikosti šířící se prostředím. Solitony se jako řešení nelineárních rovnic vyskytují v nejrůznějších matematických modelech z mnoha oblastí – od hydrodynamiky přes nelineární elektrodynamiku, fyziku plazmatu, biofyziku, fyziku elementárních částic, fyziku pevných látek až po ekonomické modely fungování trhu.

Tři příklady

1. Nejprve zkoumejme disperzní relaci obyčejné vlnové rovnice

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=0 \quad \Rightarrow \quad \omega=ck \quad \Rightarrow \quad v_f=v_g=c. \tag{1.869}$$

   Úhlová frekvence je lineárně závislá na vlnovém vektoru, fázová a grupová rychlost jsou si rovny a jsou konstantní. Všechny vlnové délky se šíří stejnou rychlostí a vlnový balík nepodléhá disperzi.

2. Nyní uvažujme Kleinovu Gordonovu rovnici, která má navíc lineární člen (s koeficientem úměrným druhé mocnině hmotnosti částice)

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\mu^2\right)\phi=0 \quad \Rightarrow \quad \omega=c\sqrt{k^2+\mu^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} v_f=c\sqrt{1+(\mu/k)^2}\,, \\ v_g=c/\sqrt{1+(\mu/k)^2}\,. \end{array} \tag{1.870}$$

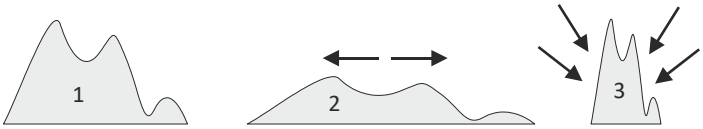
Fázová i grupová rychlost je závislá na vlnovém vektoru, tj. i na vlnové délce ($k = 2\pi/\lambda$) a vlna podléhá disperzi. Vlnový balík se postupně rozplývá. Je-li jeho lineární rozměr L, mění se podle vztahu

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t \approx \Delta v_g \Delta t = \frac{\partial v_g}{\partial k}\Delta k \Delta t \approx \frac{\partial v_g}{\partial k}\frac{2\pi}{L}\Delta t\,. \tag{1.871}$$

3. Doplňme nyní naopak k vlnové rovnici nelineární člen

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi + \gamma\phi^3 = 0\,. \tag{1.872}$$

Rovnice je nelineární a jejím řešením již není rovinná vlna, ani nelze řešení z rovinných vln skládat. Z numerického řešení je známo, že rovnice podléhá *modulační nestabilitě*, části balíku kolabují v závislosti na amplitudě (modulu, odtud název modulační).



Obr. 1.128: Tvar řešení pro výše uvedené příklady 1, 2 a 3

Právě nelinearity mohou vyrovnat disperzi a rovnice, která obsahuje oba členy, poskytuje solitonová řešení, tj. osamocené vlny šířící se beze změny tvaru daným prostředím:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi - \kappa^2\phi + \gamma\phi^3 = 0\,, \tag{1.873}$$

Přidané členy jsou hustoty „síly“ odpovídající hustotě potenciálu „dna koňakové lahve“ $\mathscr{V}(\phi) = a\phi^2 - b\phi^4$, který se hojně využívá v teorii elementárních částic, při popisu fázových přechodů druhého druhu nebo při popisu bifurkací (větvení řešení).

Soliton a solitonová vlna

Pro spojité prostředí je třeba používat namísto Lagrangeovy funkce L hustotu Lagrangeovy funkce $\mathscr{L}$, obdobně hustotu energie $\mathscr{E}$ a hustotu hybnosti $\mathscr{P}$. Všechny veličiny jsou namísto funkcí času t funkcemi události $(t, \mathbf{x})$. Pro naše potřeby bude nejdůležitější hustota energie

► $$\mathscr{E}(t,\mathbf{x}) \equiv \pm\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{k,t}}\phi_{k,t} - \mathscr{L}\right). \tag{1.874}$$

Pokud nepožadujeme po energii nic jiného než zákon zachování při symetrii vzhledem k časovému posunutí, je znaménko nepodstatné. Pokud chceme, aby síly směřovaly k minimu energie a pro kompaktní tělesa tato definice přešla v klasickou definici energie, musíme volit znaménko tak, aby kinetická část (druhé mocniny derivací pole) byla nezáporná (výsledek ovlivní použitá znaménková konvence v metrickém tenzoru, v našem případě musíme u energie volit minus). Pro ukázky z minulé kapitoly (pro

jednoduchost v jedné prostorové dimenzi) můžeme pro hustotu lagranžiánu, hustotu energie a Lagrangeovu polní rovnici psát:

Vlnová rovnice

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \phi\right)\left(\partial^\alpha \phi\right) = -\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2, \tag{1.875}$$

$$\mathscr{E} = -\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{k,t}}\phi_{k,t} - \mathscr{L}\right) = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2, \tag{1.876}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = 0\,. \tag{1.877}$$

Kleinova Gordonova rovnice

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \phi\right)\left(\partial^\alpha \phi\right) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2\,, \tag{1.878}$$

$$\mathscr{E} = -\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{k,t}}\phi_{k,t} - \mathscr{L}\right) = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2\,, \tag{1.879}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2\right)\phi = 0\,. \tag{1.880}$$

Kleinova-Gordonova rovnice s nelineárním členem

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \phi\right)\left(\partial^\alpha \phi\right) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\delta\phi^4\,, \tag{1.881}$$

$$\mathscr{E} = -\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{k,t}}\phi_{k,t} - \mathscr{L}\right) = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\delta\phi^4\,, \tag{1.882}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2\right)\phi + \delta\phi^3 = 0\,. \tag{1.883}$$

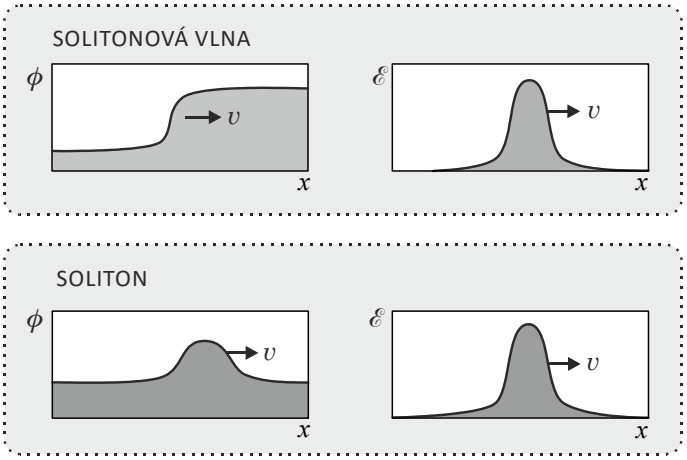
U Kleinovy-Gordonovy rovnice s nelineárním členem ϕ^3 je známo řešení ve tvaru šířícího se schodu. Nejde o soliton v pravém slova smyslu, řešení není lokalizované, tj. dosti daleko od vlny není pole nulové. Průběh hustoty energie ale již lokalizovaný je. Hustota energie je soustředěna v oblasti schodu a přesouvá se jako balík prostorem. Tomuto typu řešení se říká *solitonová vlna*. Řešení, které je opravdu lokalizované v prostoru, pohybuje se nějakou rychlostí, nemění svůj tvar a při srážce s jinými obdobnými řešeními dojde maximálně ke změně fáze, se nazývá *soliton*. Soliton má samozřejmě lokalizovanou i hustotu energie.

Definice: Soliton je lokalizované řešení parciální diferenciální rovnice, které se přesouvá nějakou rychlostí a nemění svůj tvar. Má-li před srážkou N solitonů hustotu energie

$$\mathscr{E}(t,x)=\sum_{k=1}^{N}\mathscr{E}_0(x-x_{0k}-vt)\,, \tag{1.884}$$

potom se po srážce nemění ani počet solitonů, ani jejich tvar. Změnit se může jedině fáze jednotlivých balíků, tj. po srážce musí platit:

$$\mathscr{E}_{\mathrm{fin}}(t,x)=\sum_{k=1}^{N}\mathscr{E}_0(x-x_{0k}-vt+\delta_k)\,. \tag{1.885}$$



Obr. 1.129: Soliton a solitonová vlna

Při hledání solitonového řešení můžeme využít faktu, že soliton při pohybu nemění svůj tvar. V souřadnicové soustavě spojené se solitonem jde tedy o stacionární (v čase neproměnné) řešení. Sledujeme-li navíc pohyb jen v jedné prostorové dimenzi, přejde parciální diferenciální rovnice na obyčejnou diferenciální rovnici (neobsahuje čas), která může být v některých případech řešitelná. Po nalezení řešení v soustavě pohybující se spolu se solitonem musíme řešení přetransformovat do souřadnicové soustavy, v níž se soliton pohybuje.

Sin-Gordonova solitonová vlna

V této a dalších kapitolách si ukážeme typická solitonová řešení, na které vedou fyzikální problémy. Při úpravách parciálních diferenciálních rovnic v mnoha případech dojdeme k jedné ze čtyř typických rovnic: sin-Gordonově rovnici, KdV, NLS nebo Burgersově rovnici. Věnujme se nyní první z nich.

Kleinova-Gordonova rovnice s nelineárním členem (1.881) až (1.883) má v energetickém i Lagrangeově předpisu potenciální část

$$\mathscr{V}=\frac{1}{2}\mu^2\phi^2-\frac{1}{4}\delta\phi^4\,. \tag{1.886}$$

První člen potenciální energie vede na disperzi, druhý na nelineární člen zajišťující modulární nestabilitu, a tím kompenzaci disperze. Prohlédneme-li si hustotu potenciální

energie pozorněji, zjistíme, že pro určité hodnoty konstant jde o první dva nekonstantní členy rozvoje funkce kosinus (nultý konstantní člen je samozřejmě nepodstatný a v pohybových rovnicích se neprojeví). Uvážíme-li, že díky použité znaménkové konvenci používáme hustotu Lagrangeovy funkce ve tvaru

$$\mathscr{L} = -\mathscr{T} + \mathscr{V}, \tag{1.887}$$

můžeme zavést periodický potenciál

$$\mathscr{V} = -\mu^2 \cos\phi, \tag{1.888}$$

který bude užitečný pro popis jevů v okolí periodických struktur a pro malé hodnoty pole ϕ splyne s potenciálem (1.886) nelineární Kleinovy-Gordonovy rovnice. Snadno určíme odpovídající hustotu lagranžiánu, hustotu energie a polní Lagrangeovu rovnici:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\partial^\alpha\phi\right) - \mu^2\cos\phi, \tag{1.889}$$

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\partial^\alpha\phi\right) - \mu^2\cos\phi, \tag{1.890}$$

$$\Box\phi - \mu^2\sin\phi = 0. \tag{1.891}$$

V polní rovnici je před druhým členem minus z Lagrangeovy funkce, minus z derivace kosinu a minus z Lagrangeových rovnic – výsledkem je proto minus. Sinus v polní rovnici jí dal název: *sin-Gordonova rovnice*. Zapišme poslední vztahy pro jednu prostorovou dimenzi:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \mu^2\cos\phi, \tag{1.892}$$

$$\mathscr{E} = +\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \mu^2\cos\phi, \tag{1.893}$$

► $$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \mu^2\sin\phi. \tag{1.894}$$

Na analogickou úlohu vede v mechanice pohyb částice v periodickém kosinovém potenciálu, síla na pravé straně pohybové rovnice je dána sinem polohy částice. Provedeme-li rozvoj pravé strany do prvního řádu ($\sin\phi \sim \phi$), dostaneme přesně Kleinovu-Gordonovu rovnici. Proto je koeficient na pravé straně označen μ^2. Rozvoj do třetího řádu ($\sin\phi \sim \phi - \phi^3/3!$) dá Kleinovu-Gordonovu rovnici s nelineárním členem ϕ^3, která odpovídá potenciálu koňakové lahve. Nyní budeme hledat řešení celé sin-Gordonovy rovnice s funkcí sinus na pravé straně. Ukážeme, že lze najít řešení ve tvaru solitonové vlny. Najděme řešení nejprve v souřadnicové soustavě spojené se solitonovou vlnou. Vzhledem k tomu, že vlna nemění tvar a pohybuje se konstantní rychlostí, bude řešení stacionární a stačí řešit obyčejnou diferenciální rovnici

► $$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = \mu^2\sin\phi. \tag{1.895}$$

Ukažme, že jedním z jejích řešení je

► $$\phi_{\pm}(x) = 4\,\mathrm{atg}\left[\mathrm{e}^{\pm\mu x}\right]. \tag{1.896}$$

Je velmi pěkným logickým cvičením dokázat, že uvedená funkce je řešením sin-Gordonovy rovnice. Můžeme buď přímo dvakrát derivovat uvedené řešení nebo derivovat z něho plynoucí vztah $\mathrm{tg}(\phi/4) = \exp(\pm\mu x)$, vypočíst první derivaci a tu opět derivovat. Kdekoli se vyskytne výraz $\exp(\pm\mu x)$, nahradíme ho vztahem $\mathrm{tg}(\phi/4)$. Z důvodu přehlednosti použijeme řešení se znaménkem +, obdobně bychom postupovali pro druhé znaménko:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tg}(\phi/4) = \exp(\mu x) && \left|\ \mathrm{d}/\mathrm{d}x\,,\right.\\
&\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\cos^2(\phi/4)} = \mu\exp(\mu x) && \left|\ \exp(\mu x) = \mathrm{tg}(\phi/4),\right.\\
&\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = 4\mu\cos^2(\phi/4)\ \mathrm{tg}(\phi/4) && \left|\ \mathrm{tg}(\phi/4) = \sin(\phi/4)/\cos(\phi/4),\right.\\
&\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = 2\mu\sin(\phi/2) && \left|\ \mathrm{d}/\mathrm{d}x\,,\right.\\
&\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = \mu\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\cos(\phi/2) && \left|\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = 2\mu\sin(\phi/2),\right.\\
&\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = \mu^2\sin\phi\,. &&
\end{aligned}$$

Uvedený vztah je tedy řešením původní rovnice. Nyní ho ze soustavy spojené se solitonem přetransformujeme do obecné laboratorní soustavy. Celá rovnice je relativisticky kovariantní, proto můžeme použít Lorentzovu transformaci

$$x_{\mathrm{sol}} = \frac{x_{\mathrm{lab}} - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{1.897}$$

V laboratorní soustavě bude mít proto pohybující se solitonová vlna tvar

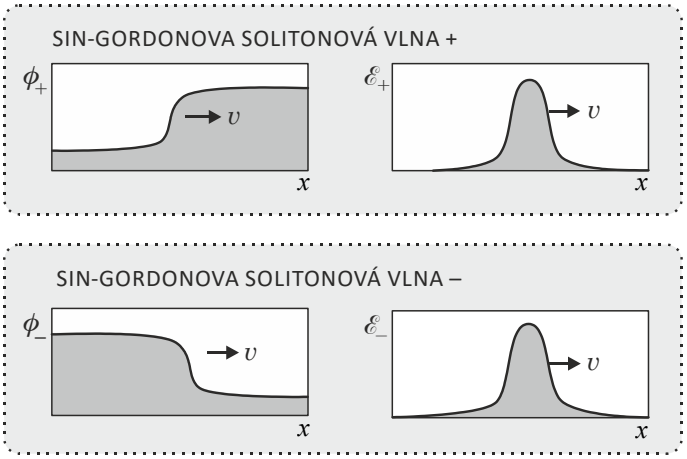
► $$\phi_{\pm}(t,x) = 4\ \mathrm{atg}\left[\mathrm{e}^{\left[\pm\mu\gamma(x-x_0-vt)\right]}\right]\ ; \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{1.898}$$

Pokud čtenář není zcela vyčerpán derivováním, může si zkusit dokázat, že nalezený výraz řeší původní sin-Gordonovu rovnici (1.894). Zbývá nalézt hustotu energie dle vztahu (1.893):

► $$\mathscr{E}_{\pm}(t,x) = \frac{8\kappa^2\gamma^2(1+v^2/c^2)\,\mathrm{e}^{\left[\pm2\mu\gamma(x-x_0-vt)\right]}}{\left\{1+\exp[\pm2\mu\gamma(x-x_0-vt)]\right\}^2} - \kappa^2\cos\left\{4\ \mathrm{atg}\left[\mathrm{e}^{\left[\pm\mu\gamma(x-x_0-vt)\right]}\right]\right\}. \tag{1.899}$$

Řešením je pohybující se schod, z hlediska klasifikace tedy nejde o soliton, ale o solitonovou vlnu, u níž je sice polní řešení nelokální, ale energie lokalizována je, a to v místě schodu. Amplituda solitonové vlny nezávisí na rychlosti ani na žádných jiných parametrech výpočtu. U energie tomu tak není, její amplituda je na rychlosti solitonové vlny

samozřejmě závislá. (představte si vlnu tsunami, její ničivá energie nepochybně závisí na její rychlosti). Na následujícím obrázku jsou řešení $\phi_{\pm}$, $\mathscr{E}_{\pm}$ vykreslena:



Obr. 1.130: Řešení sin-Gordonovy rovnice

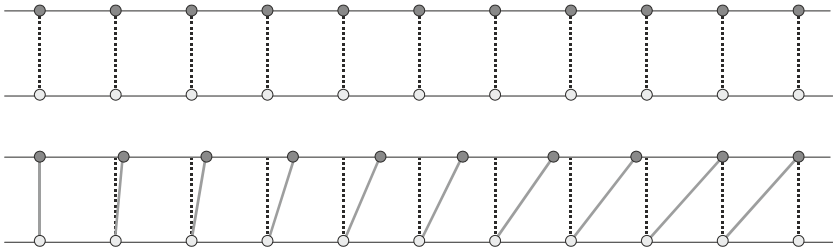
Pojďme si nyní ukázat, jaké jevy vedou na sin-Gordonovu solitonovou vlnu. Je jich celá řada, krátce se zmíníme o padajících kostkách domina, elektrické dvojvrstvě, dislokaci v krystalech, Josephsonově jevu a šíření laserového pulzu dvojhladinovým prostředím.

Padající kostky domina. Tahle videa asi viděl každý. Kostky domina jsou vyskládané na stole na užší hraně. Poté do nich někdo strčí. Kostky postupně jedna za druhou padají a vzniká zajímavý jev. Vypadá to, jakoby řadou kostek cosi běželo, co je shazuje. Pokud si jako naše pole označíme výšku horní hrany kostek nad stolem, tj. $\phi = h(t, x)$, kde x je vodorovná poloha dolní hrany kostek, bude jejich řízený pád vypadat jako řešení ϕ_- na obrázku. Sin-Gordonova rovnice je dobrou volbou pro popis pádu kostek. Periodicita potenciálu odráží periodické rozmístění kostek a běžící „cosi“ podél řady kostek je ve skutečnosti lokalizovanou energií $\mathscr{E}_-$, kterou můžeme považovat za kvazičástici (přesouvající se balíček energie). Povšimněte si, že amplitudu solitonové vlny nelze ovlivnit, je dána pouze výškou kostek domina a nezávisí na rychlosti posunu oblasti pádu.

Elektrická dvojvrstva. V plazmatu se často vyskytnou pohybující se oblasti, v nichž se elektrický potenciál mění z jedné hodnoty na druhou. V takové vrstvě je nenulové elektrické pole, které přerozdělí náboje okolního plazmatu do charakteristické elektrické dvojvrstvy s kladným nábojem na jedné straně vrstvy a záporným na opačné (detaily viz kapitola *Dvojvrstva* na straně 108). Elektrická dvojvrstva ve skutečnosti není ničím jiným než sin-Gordonovou solitonovou vlnou elektrického potenciálu. Energie lokalizovaná v dvojvrstvě (musí být větší než průměrná tepelná energie okolí) může urychlovat okolní částice i na značné energie. S elektrickými dvojvrstvami se setkáváme jak v laboratorním, tak ve vesmírném plazmatu.

Dislokace v krystalech. Představme si krystal složený ze dvou řetězců atomů, jeden je pevně dán (na obrázku dolní) a druhý (na obrázku horní) je pohyblivý v periodickém poli prvního řetězce s potenciálem $V(x) = A[1-\cos(2\pi x/a)]$, a je mřížková konstanta. Problém vede na sin-Gordonovu rovnici pro odchylku od rovnovážné polohy. Řešení (1.898) odpovídá dislokaci pohybující se podél krystalu. Řešení se postupně mění

z nulové odchylky od rovnovážné polohy na odchylku o právě jednu mřížkovou konstantu a. Energie dislokace je lokalizována v oblasti změny. Opět jde o klasický příklad sin-Gordonovy solitonové vlny.



Obr. 1.131: Šíření dislokace v krystalu

Josephsonův jev. Při průchodu proudu tenkou vrstvou oddělující dva supravodiče tunelují Cooperovy páry skrze izolant. Rozhraním teče elektrický proud, jehož velikost závisí na vnějším magnetickém poli a teplotě, což lze využít například pro senzory magnetického pole SQUID (*Superconducting Quantum Interference Device*). Magnetický indukční tok prochází Josephsonovým spojem po kvantech, která jsou kvazičásticemi, jimž říkáme *magnony*. A právě průchod magnetického indukčního toku ϕ z jedné strany spoje na druhou stranu se řídí sin-Gordonovou rovnicí a má charakter sin-Gordonovy solitonové vlny. Magnon je kvazičásticí popisující pohyb balíčku energie lokalizovaného v místě „schodu“ toku magnetického pole.

Šíření laserového pulsu dvouhladinovým prostředím. Představme si prostředí tvořené atomy, které mají dvě energetické hladiny. Vyšleme-li do tohoto prostředí laserový impulz o frekvenci odpovídající rozdílu obou hladin, je intenzita laserového pulzu opět popsána sin-Gordonovu rovnici a má charakter solitonové vlny. Řešení ϕ_+ odpovídá stimulované emisi při inverzním obsazení hladin a popisuje zesílení pulzu v takovém prostředí, řešení ϕ_- popisuje rezonanční absorpci světla a koresponduje se zeslabením laserového pulzu.

Solitony KdV a NLS

Kortewegův-de Vriesův soliton. K nejběžnějším typům solitonů patří KdV soliton splňující Kortewegovu de Vriesovu rovnici a NLS soliton splňující nelineární Schrödingerovu rovnici. KdV rovnice je první objevenou rovnicí, u které bylo nalezeno solitonové řešení. Diederik Korteweg (1848–1941) a Gustav de Vries (1866–1934) rovnici odvodili při hydrodynamickém popisu vln na mělké vodě. Její nejjednodušší podoba má tvar (jednoduché odvození rovnice ukážeme v závěru kapitoly)

► $$\frac{\partial \phi}{c\,\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0\,. \tag{1.900}$$

Konstanta c je materiálová konstanta, která určuje fázovou rychlost šíření rozruchů v daném prostředí. Konstanta α řídí velikost nelineárního členu, který je podobný jako substancionální derivace rychlostního pole a skutečně souvisí s přesunem popisované kapaliny. Poslední konstanta δ řídí velikost disperzního členu, který je úměrný třetí derivaci hledaného pole. Solitonové řešení existuje pro jakékoli hodnoty těchto konstant. Vždy lze nalézt vlnu takové rychlosti a výšky, pro niž je disperze kompenzována

nelineární kompresí vlny. Po přenásobení konstantou c dostaneme jen dvě nezávislé konstanty KdV rovnice

► $$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} + D\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0\,; \tag{1.901}$$

$$A \equiv c\alpha; \qquad D \equiv c\delta. \tag{1.902}$$

Nyní řídí disperzi konstanta D a nelineární jevy konstanta A. Vhodnou substitucí za x a ϕ bychom tyto konstanty mohli „absorbovat“ do proměnných x a ϕ. Ponechme ale KdV rovnici v obecném tvaru (1.901), ze kterého je dobře patrný význam konstant A a D. Hledané řešení bude mít dvě základní vlastnosti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \phi = 0\,, \tag{1.903}$$

$$\phi = \phi(\eta)\,; \qquad \eta \equiv x - x_0 \pm vt. \tag{1.904}$$

První vlastnost (1.903) vyjadřuje lokalizovanost řešení, tj. dosti daleko od solitonu je funkce ϕ nulová. Druhá vlastnost (1.904) popisuje šíření vlny napravo (−), nebo nalevo (+) beze změny tvaru. Pro určitost budeme hledat řešení pohybující se vpravo, tj. se znaménkem minus. Po dosazení (1.904) do (1.901) získáme obyčejnou diferenciální rovnici

$$-v\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta} + A\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta} + D\frac{\mathrm{d}^3\phi}{\mathrm{d}\eta^3} = 0\,. \tag{1.905}$$

Prostřední člen rovnice upravíme dle vztahu $\phi\phi' = (\phi^2/2)'$ a celou rovnici integrujeme přes proměnnou η. Dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$-v\phi + \frac{A}{2}\phi^2 + D\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2} = C_1\,. \tag{1.906}$$

Integrační konstanta C_1 je díky lokalizovanosti hledaného řešení (1.903) nulová. Výslednou rovnici přenásobíme první derivací funkce ϕ:

$$-v\phi\,\mathrm{d}\phi + \frac{A}{2}\phi^2\mathrm{d}\phi + D\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2}\mathrm{d}\phi = 0 \tag{1.907}$$

a poslední člen upravíme takto (čárka značí derivaci podle η):

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2}\mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\eta = \phi''\phi'\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\phi')^2}{\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(\phi')^2\,. \tag{1.908}$$

Po dosazení do rovnice (1.907) a integraci dostaneme

$$-v\frac{\phi^2}{2} + \frac{A}{6}\phi^3 + \frac{D}{2}(\phi')^2 = C_2 \tag{1.909}$$

Vzhledem k tomu, že hledáme lokalizované řešení, je druhá integrační konstanta opět nulová a KdV rovnice přešla na obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 = \frac{1}{D}\,\phi^2\left(v - \frac{A}{3}\phi\right), \tag{1.910}$$

která je snadno separovatelná. Po separaci je možné za pomoci vhodných substitucí provést přímou integraci této rovnice. Výsledkem je řešení

$$\phi(\eta) = \frac{3v}{A}\mathrm{ch}^{-2}\left[\sqrt{\frac{v}{4D}}\ \eta\right] \tag{1.911}$$

Skutečně tedy pro libovolné konstanty existuje řešení KdV rovnice ve tvaru solitonu:

► $$\phi(t,x) = \frac{3v}{A}\mathrm{ch}^{-2}\left[\sqrt{\frac{v}{4D}}\ \left(x - x_0 - vt\right)\right]. \tag{1.912}$$

Řešením je „kopeček“ podobný řezu horou Říp přesouvající se napravo rychlostí v. Výška solitonu je provázána s rychlostí jeho přesunu:

► $$\phi_{\max} = \frac{3v}{A}. \tag{1.913}$$

Různě vysoké solitony se pohybují různou rychlostí, což je pro KdV soliton typické. Poslední vztah bylo možné získat již z rovnosti (1.910). V maximální výšce je totiž první derivace (levá strana) nulová a z pravé strany máme okamžitě hledaný vztah.

Poznámka 1: KdV rovnice se často uvádí v bezrozměrném tvaru s konstantami zahrnutými do proměnných. Navíc jsou derivace psány jako indexy, takže se čtenář může setkat s tvarem:

$$\phi_t + 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0. \tag{1.914}$$

Koeficient 6 je volen záměrně tak, aby řešení vyšlo co nejjednodušší. V našem řešení pro soustavu měr a vah SI postačí položit $A = 6$, $D = 1$ a ihned máme řešení normované KdV rovnice:

$$\phi(t,x) = \frac{v}{2}\mathrm{ch}^{-2}\left[\frac{\sqrt{v}}{2}\ \left(x - x_0 - vt\right)\right]. \tag{1.915}$$

Poznámka 2: KdV rovnice je nejjednodušším zobecněním vlnové rovnice typu

$$\frac{\partial\phi}{c\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0. \tag{1.916}$$

Tato jednoduchá vlnová rovnice vede na disperzní relaci

$$\omega = ck \tag{1.917}$$

Připusťme nyní, že disperze není takto jednoduchá a nalezněme první nejjednodušší zobecnění:

$$\omega = c(k)k \approx (c_0 - c_1k^2)k = c_0k - c_1k^3 \tag{1.918}$$

Druhý člen rozvoje vede na disipaci energie (komplexní k), proto musí být u solitonových řešení nulový. Třetí člen rozvoje musí být záporný, jedině tak má k reálné řešení. Pokud připustíme jako nejjednodušší zobecnění disperzní relace tvar (1.918), musíme vlnovou rovnici upravit do tvaru

$$\frac{\partial \phi}{c_0 \partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + c_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \tag{1.919}$$

Tuto vlnovou rovnici snadno přepíšeme do tvaru rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[c_0 \phi + c_0 c_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] = 0 \,. \tag{1.920}$$

Výraz v hranaté závorce představuje tok veličiny ϕ. Jeho první přímočaré zobecnění vedoucí na nelineární jevy je

$$j = c_0 \phi + \alpha \phi^2 + c_0 c_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \,, \tag{1.921}$$

což vede na parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2\alpha\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + c_0 c_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \,. \tag{1.922}$$

Pokud posuneme nezávislou proměnnou $x \to x - c_{0t}$, eliminujeme druhý člen a ze zobecněné vlnové rovnice dostaneme KdV rovnici ve tvaru (1.901):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + D \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \,; \qquad A = 2\alpha \,; \quad D = c_0 c_1 \,. \tag{1.923}$$

KdV rovnice byla původně odvozena pro vlny na mělké vodě a stala se první teorií vysvětlující pozorování solitonu na plavebním kanálu poblíž Edinburghu (John Scott Russel, 1834). Řešením je typická osamocená vlna, která neinteraguje s jinými podobnými vlnami a jejíž rychlost je závislá na výšce vlny.

NLS soliton (Non Linear Schrödinger soliton). Řada problémů z kvantové teorie, ale i z jiných fyzikálních oborů (fyzika plazmatu, Langmuirovy oscilace, nelineární optika) vede na nelineární Schrödingerovu rovnici, kterou uvedeme pouze v bezrozměrném tvaru:

► $$\mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sigma_\mathrm{D} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2\sigma_\mathrm{N} \phi^2 \phi^* = 0. \tag{1.924}$$

Koeficient σ_D určuje typ disperze NLS, podle hodnoty dělíme NLS solitony na tři typy:

- $\sigma_\mathrm{D} = +1$: eliptická NLS,
- $\sigma_\mathrm{D} = -1$: hyperbolická NLS,
- $\sigma_\mathrm{D} = 0$: (1+1)D NLS.

Poslední člen reprezentuje nelinearitu, v uvedeném případě kubickou, může být však i složitější. Hodnota koeficientu σ_N určuje typ modulační nestability:

- $\sigma_\mathrm{N} = +1$: fokusující,
- $\sigma_\mathrm{N} = -1$: defokusující.

Uveďme řešení pro fokusující (1+1)D NLS, kdy vzniká tzv. Davydovův soliton tvaru

► $$\phi(t,x) = \sqrt{\omega}\,\mathrm{ch}^{-1}\left[\sqrt{\omega}\,(x-x_0-vt)\right]\exp\left[\mathrm{i}\frac{vx}{2}-\mathrm{i}\left(\frac{v}{2}\right)^2 t + \mathrm{i}\,\omega t+\mathrm{i}\,\delta\right]. \quad (1.925)$$

V řešení se objevuje volný parametr ω – NLS soliton má část připomínající rovinnou vlnu, která je modulována (násobena) obálkou ch^{-1}. Amplituda není provázána s rychlostí solitonu, ale s frekvencí v solitonu „uvězněné“ vlny. Porovnejme oba dva základní typy solitonů:

- KdV soliton je pouze vyboulením hledané funkce v místě vlny (například vzedmutí vodní hladiny), NLS soliton může vypadat jako vlnový balík, tj. může být obálkou vlny určité frekvence.
- Rychlost pohybu KdV solitonu závisí na amplitudě, rychlost pohybu NLS solitonu nikoli.
- U KdV solitonu je součin výšky vlny a druhé mocniny šířky konstantní, u NLS solitonu takovéto pravidlo neplatí.
- KdV solitony mají po srážce přesně stejný tvar jako před srážkou, maximálně jsou fázově posunuty. NLS solitony si sice ponechají při srážce svou identitu, ale jejich tvar se přece jen poněkud změní.

Na závěr si ukažme, jak lze pravděpodobně nejjednodušším způsobem získat rovnici, která vede na solitonová řešení. Upravme 1D Navierovu-Stokesovu rovnici

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\cdot\nabla u=\eta\,\Delta u \quad (1.926)$$

do jednoduchého tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \quad (1.927)$$

Typově jde o tzv. **Burgersovu rovnici**

► $$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right)-D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (1.928)$$

s nelineárním a disperzním členem. Burgersova rovnice opět poskytuje solitonová řešení. Postup jejich nalezení je zcela analogický tomu, jak jsme řešili KdV rovnici, tedy nejprve proměnné t, x nahradíme proměnnou $\eta = x - vt$, čímž převedeme rovnici na obyčejnou diferenciální rovnici, která je snadno integrovatelná. Zbylou rovnici prvního řádu pak řešíme separací.

Někdy solitony vytvoří skupinu, která se prostředím pohybuje ve formaci, potom hovoříme o *solitonovém vláčku*. V některých případech soliton jakoby dýchá: pravidelně mění svůj tvar a periodicky se vrací do výchozího tvaru. Nejde o soliton v pravém slova smyslu (mění tvar), ale o solitonům velmi příbuzný jev, v angličtině označovaný *breath* (dýchání).

Solitony v plazmatu

Langmuirův soliton. Magnetohydrodynamické rovnice lze přepsat za určitých předpokladů jak na KdV rovnici, tak na NLS rovnici. Zajímavým jevem je nelineární modifikace plazmových (Langmuirových) oscilací na plazmové frekvenci elektronů, které se lokalizují v oblasti izolované od okolí. Vzniká tak hustotní dutina zaplněná vysokofrekvenčním polem, ve které je koncentrace plazmatu snížena podle vztahu

$$\frac{\delta n}{n} \approx \frac{p_{\mathrm{E}}}{p_{\mathrm{T}}} \approx \frac{\varepsilon E^2/2}{2nk_{\mathrm{B}}T}. \tag{1.929}$$

Proto se někdy říká Langmuirovu solitonu *well* (dutina, studna). Samo elektrické pole (obálka) splňuje vztah

$$E(x) \approx E_0 \,\mathrm{ch}^{-1}(k_0 x)$$

a hustota energie je KdV solitonem:

$$\mathscr{E}(x) = \varepsilon E^2/2 \approx E_0^2 \,\mathrm{ch}^{-2}(k_0 x)$$

Jde ovšem jen o limitní jednoduchý případ. Langmuirovy solitony mohou být značně složité a chovat se v určitých situacích i jako NLS soliton. Langmuirův soliton může totiž oscilovat a generovat nízkofrekvenční iontově akustické vlny. Naopak, Langmuirův soliton může na dlouhých vlnových délkách nasávat energii z iontově akustických vln pomocí tzv. parametrické nestability. Na krátkých vlnových délkách ztrácí energii Landauovým útlumem. Může tak dojít ke stacionárnímu toku energie v k prostoru. Soliton komunikující energeticky s okolím se nazývá disipativní soliton. Langmuirovy solitony zpravidla vznikají při rozpadu Langmuirových (plazmových) oscilací, odsud získaly své jméno. Langmuirovy solitony je možné uměle generovat v laboratoři, například na aparatuře *Double Plasma* vyvinuté v sedmdesátých letech 20. století (popis následuje v dalším textu).

Davydovův soliton. Toto řešení opět souvisí s Langmuirovými vlnami a je popsáno *Sacharovovou-Kuzněcovovou soustavou* parciálních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \phi\psi\,; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 (\phi^2)}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{1.930}$$

►

Na obdobnou soustavu vedou problémy v chemii a v kvantové teorii. Ve fyzice plazmatu je tato soustava vhodná pro popis nestabilit v elektronovém svazku či popis Langmuirových vln v plazmatu. Veličina ϕ odpovídá elektrickému poli a veličina ψ odchylce koncentrace iontů od rovnovážné polohy. Elektrické pole splňuje Schrödingerovu rovnici s nelineárním zdrojovým členem daným poruchou koncentrace iontů. Ta naopak splňuje vlnovou rovnici s ponderomotorickým zdrojovým členem (druhou derivací kvadrátu elektrického pole, tj. elektrického tlaku) na pravé straně. Soustava má známé solitonové řešení (Davydovův soliton)

$$\phi(t,x) = \sqrt{2(1-v^2)\omega}\ \mathrm{ch}^{-1}\left[\sqrt{\omega}(x-vt)\right]\exp\left[\mathrm{i}\frac{vx}{2}-\mathrm{i}\left(\frac{v}{2}\right)^2 t+\mathrm{i}\,\omega t+\mathrm{i}\,\delta\right];$$
$$\psi(t,x) = -2\omega\mathrm{ch}^{-2}\left[\sqrt{\omega}(x-vt)\right]. \qquad (1.931)$$

Parametry řešení jsou rychlost pohybu solitonu v, fázový posun δ a škálovací parametr ω. Sacharovovy-Kuzněcovovy rovnice lze za jistých předpokladů zjednodušit buď na NLS rovnici nebo na KdV rovnici, kdy Davydovův soliton přechází v obyčejný Langmuirův soliton.

Trivelpiecův-Gouldův soliton. Tento soliton souvisí opět s elektronovými plazmovými vlnami, ale v ohraničeném prostoru. Vzniká jako komprese plazmatu šířící se podle pravidel KdV solitonu. Nejsnáze se tyto solitony generují v Q aparatuře, což je válcová trubice s rovinnými kovovými deskami na obou koncích, které jsou pokryté alkalickým kovem (cesiem nebo draslíkem). Desky jsou zahřáté na vysokou teplotu a do prostoru komory se z nich odpařují ionty a elektrony. Trubice je v silném magnetickém poli, které snižuje difúzi elektronů kolmo na osu trubice. Plazma vznikající v trubici má vyrovnanou teplotu elektronů a iontů, což je jistou nevýhodou tohoto uspořádání. Pokud mají ionty teplotu shodnou s elektrony, je fázová rychlost iontově akustické vlny srovnatelná s tepelnou rychlostí iontů, a ionty proto snadno surfují na iontově akustické vlně a odnímají jí energii Landauovým útlumem. Ideální je, když mají ionty teplotu výrazně nižší než elektrony, pak je Landauův útlum na iontech zanedbatelný. Soliton lze v trubici vybudit například napěťovým pulzem.

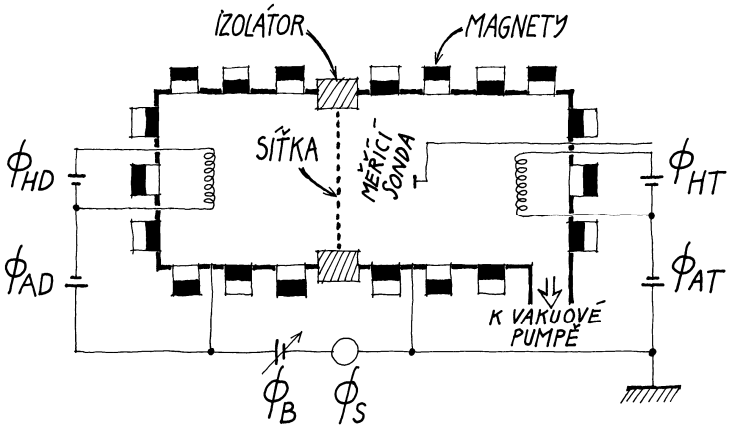
Experimentálně bylo ověřeno, že součin výšky a druhé mocniny šířky je konstantní a že rychlost solitonu závisí jen na jeho amplitudě. Za prošlým solitonem bylo pozorováno lehké zvlnění plazmatu. Vlny spojené s tímto solitonem poprvé popsali v roce 1959 Alvin W. Trivelpiece a Roy W. Gould z Kalifornského institutu technologií.

Iontově-akustický soliton. Soliton tohoto druhu se může vytvořit ze zvukových vln šířících se plazmatem. Tyto vlny jsou, na rozdíl od plynu, neseny ionty, které spolu interagují také prostřednictvím elektrického pole. Jde o nejlépe prozkoumané solitony v plazmatu, snadno se generují v *Double Plasma* (DP) aparatuře napěťovým pulzem vhodné frekvence. Bez problémů lze vytvořit rovinné solitony, válcové solitony nebo kulové solitony. Iontově-akustické solitony jsou popsány KdV rovnicí a v experimentech se podle ní chovají.

DP aparatura je nejvýznamnějším zařízením, které přispělo k výzkumu solitonů, a proto si ho popíšeme podrobněji. Jedna z mnoha používaných variant je na obrázku 1.132. První zařízení tohoto typu sestrojili Rudolf Limpaecher a K. R. MacKenzie již v roce 1973. Jde o dvojitou plazmovou komoru (anglicky *Double Plasma*, odsud název DP), obě části jsou oddělené kovovou síťkou. Ta není elektricky spojena s žádným prvkem aparatury, samovolně se nabije na záporný potenciál (několika desítek voltů) a brání průchodu elektronů z jednoho objemu do druhého. Napětí ϕ_{HD} a ϕ_{HT} zajišťují žhavení elektrod, ze kterých do komor unikají elektrony. Napětí ϕ_{AD} a ϕ_{AT} tyto elektrony urychlují. Urychlené elektrony ionizují pracovní plyn. Aby elektrony neunikaly z komor, jsou na obvodu řady permanentních dipólových magnetů (sousední řady mají opačnou polaritu), podle velikosti komor jich může být jeden až dva tisíce. Vhodně zvolené napětí ϕ_{B} brání průchodu iontů mezi komorami.

V první variantě zařízení bylo možné vytvořit přibližně 1 m^3 bezesrážkového plazmatu (střední volná dráha částic byla větší než rozměry aparatury) s koncentrací elektro-

nů 10^7 až 10^{10} částic v centimetru krychlovém, teplotou elektronů 1 až 3 eV a teplotou iontů nižší než desetina teploty elektronů (nízká teplota iontů zajišťuje, že generované iontově akustické vlny nejsou tlumeny Landauovým útlumem na iontech). Permanentní magnety měly indukci 0,2 T a jejich řady od sebe byly vzdálené 10 cm. Soliton bylo možné vyvolat mnoha způsoby, jedním z nich bylo přivedení napěťového pulzu ϕ_S, který měl za následek velkou poruchu hustoty iontů šířící se z přípravné do cílové komory (komora s měřící sondou). Jsou ale i jiné způsoby: přivedení napětí na mřížku, přivedení napětí na kovový předmět ponořený do levé přípravné komory (válcový předmět vytvořil válcový soliton) nebo fotoionizace světlem fokusovaným do určité roviny (vznikl rovinný soliton) či napětí přivedené na pole drátků. Zařízení tohoto typu jsou standardem pro tvorbu a výzkum solitonů spojených s iontově akustickými vlnami a dnes se vyrábějí i s válcovými nebo kulovými komorami.



Obr. 1.132: Double Plasma (DP) aparatura

1.7.4 Turbulence

Poslední kapitolu teorie plazmatu budeme věnovat turbulenci. Turbulentní pohyby jsou jedněmi z nejčastějších pohybů v přírodě a současně je turbulence jevem, který dodnes není uspokojivě vyřešen. Můžeme k němu přistupovat za pomoci rozměrové analýzy, magnetohydrodynamicky, statisticky, nebo jevy numericky simulovat. Následující text je jen základním přehledem některých vztahů, rozhodně není plnohodnotným učebním textem. Detailnější informace získáte ve specializovaných učebnicích.

Turbuletní struktury

K turbulenci nejčastěji dochází při vysokých rychlostech proudění tekutin. Nadbytek kinetické energie způsobí přechod z laminárního proudění do turbulentního. Energie je nelineárními jevy ukládána do rotačního pohybu vírů nejrůznějších velikostí. S turbulencemi se ale setkáme i při obtékání překážek, například za lodí či mostními pilíři. Turbulentní víry jsou typické pro atmosféru i pro dopad vody do hrnce na vaření. V plazmatu se setkáváme s turbulentními pohyby velmi často. Turbulence jsou přítomné ve slunečním větru i ostatním astrofyzikálním plazmatu, vyskytují se v technologickém i fúzním plazmatu. V plazmatu vznikají turbulence nejčastěji v důsledku rozvoje nejrůznějších nestabilit.

Pro turbulence je na první pohled typický chaos, zdánlivě náhodné fluktuace rychlostního i tlakového pole způsobené přechodem do stavu s velkým množstvím vírů. Pro turbulenci je ale nejcharakterističtějším jevem tzv. *energetická kaskáda*. Při proudění vznikají víry nejrůznějších velikostí. Ty největší mají rozměry srovnatelné s nejmenším rozměrem proudící oblasti. Velké víry se protahují a rozpadají na víry menší. Víry určité velikosti předávají energii nelineárními jevy vírům menším, ty ještě menším atd. Energie je proudícím médiem transformována od největších struktur k těm nejmenším. Velikost vírů má i svou dolní hranici – říkáme ji Kolmogorovova škála. U malých vírů energetická kaskáda končí a začínají převládat disipativní jevy způsobené viskozitou tekutiny. Energie vírů se nakonec přemění na chaotickou tepelnou energii. Turbulentní procesy vedou také k difúzi látky, hovoříme o tzv. turbulentní difúzi.

Rychlostní pole můžeme standardním způsobem rozložit do jednotlivých Fourierových módů daných vztahem

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \int \mathcal{U}(\omega,\mathbf{k})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t]}\, \mathrm{d}^3\,\mathbf{k}\ , \tag{1.932}$$

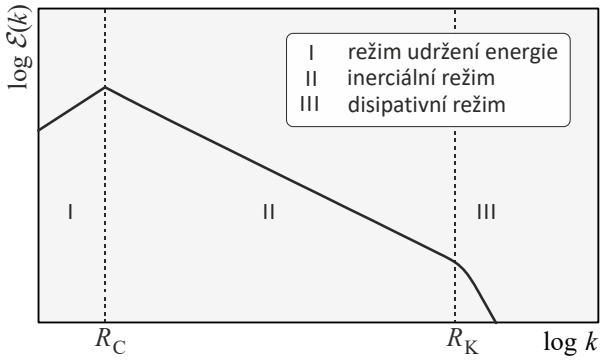
kde čtyři čísla ω, $\mathbf{k}$ popisující Fourierovy komponenty jsou provázána disperzní relací. Velikost vektoru $\mathbf{k}$ popisuje rozměry struktur odpovídajících danému módu:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \sim \frac{2\pi}{R} \tag{1.933}$$

Největší víry mají rozměr R_C srovnatelný s popisovanou oblastí, nejmenší Kolmogorovovu škálu R_K. V plazmatu je nejzazší dolní hranicí velikosti vírů Larmorův poloměr iontů R_Li. Pro turbulenci je důležité tzv. energetické spektrum. Kinetickou energii vírů vztaženou na jednotku hmotnosti složíme z energií jednotlivých Fourierových módů:

$$\langle\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}/2\,\rangle = \int_0^\infty \mathcal{E}(k)\, \mathrm{d}k\ . \tag{1.934}$$

Veličinu $\mathcal{E}(k)$ nazýváme energetické spektrum. V turbulenci rozlišujeme tři oblasti (podle velikosti vírů), viz obrázek 1.133, které se liší průběhem energetického spektra:



Obr. 1.133. Tři základní turbulentní oblasti

Největší víry patří do oblasti I, tzv. režimu udržení energie. Viskózní procesy jsou zanedbatelné, víry jen málo předávají energii menším strukturám. Velké víry nejsou rozloženy ani homogenně, ani izotropně. Pro energetický přenos je tato oblast nevýznamná. Pro turbulenci je typická oblast II, kterou označujeme jako inerciální režim. Probíhá zde turbulentní energetická kaskáda popsaná výše. Víry větších velikostí předávají energii vírům menších velikostí. Viskozita tekutiny je pro tyto jevy podstatná, ale nedominuje. Pro běžné tekutiny je rozložení vírů homogenní a izotropní a energetické spektrum je úměrné $k^{-5/3}$ (tzv. Kolmogorovo spektrum). Existence této oblasti a energetické kaskády odlišuje turbulenci od ostatních chaotických jevů. V plazmatu jsou víry ovlivněny magnetickým polem, které způsobuje anizotropii jejich rozložení a jinou závislost energetického spektra na podélné složce vlnového vektoru a jinou na kolmé (vzhledem k magnetickému poli). Poslední oblastí je disipativní režim III, v němž dominují viskózní jevy a malé víry zanikají. Jejich energie se mění na teplo.

Kolmogorova turbulence

První úspěšný model turbulence předložil sovětský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987) v roce 1941. Tento model turbulence se většinou označuje K41. Kolmogorov předpokládal, že všechny víry turbulentní energetické kaskády jsou prostorově i časově malé ve srovnání s rozměry oblasti, tj. jejich velikost splňuje $r \ll L$ a doba jejich změn je $\delta t \ll L/u$. Tyto víry nemají preferovanou orientaci, tj. jsou rozloženy homogenně a izotropně. Veškeré směrové závislosti jsou v průběhu energetické kaskády ztraceny, výsledná statistika vírů má univerzální charakter a závisí jen na míře disipace energie $\varepsilon \equiv \mathrm{d}(u^2/2)/\mathrm{d}t$ dané viskózními procesy a na velikosti vírů daných vlnovým číslem k. Výsledné Kolmogorovovy vztahy lze snadno odvodit z pouhé rozměrové analýzy problému. Energii vztahujeme na jednotku hmotnosti, tedy kinetická energie vírů je $u^2/2$. Uveďme rozměry klíčových veličin ze vztahu (1.934) a míry disipace energie ε:

$$\left[u^2/2\right] = \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}; \qquad [k] = \mathrm{m}^{-1}; \qquad [\mathcal{E}] = \mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}; \qquad [\varepsilon] = \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-3}. \quad (1.935)$$

Jednoduchá rozměrová analýza snadno ukáže, že z těchto vztahů není pro energetické spektrum možná jiná závislost než

► $$\mathcal{E} = K_0 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \tag{1.936}$$

kde K_0 je nějaká univerzální bezrozměrná konstanta. Touto závislostí se řídí mnoho tekutin v oblasti II, v níž probíhá turbulentní energetická kaskáda. Pro plazma mohou být podstatné fluktuace elektrického potenciálu, jejichž spektrum je dáno vztahem

$$\langle (\delta\phi)^2 \rangle = \int_0^\infty S(k)\,\mathrm{d}k. \tag{1.937}$$

Rozměrová analýza zde vede na závislost

$$S(k) \sim k^{-5}. \tag{1.938}$$

Uvedený vztah ale platí jen za předpokladu, že fluktuace elektrického potenciálu nezávisí na Larmorově poloměru iontů. Larmorův poloměr by vnesl do rozměrové analýzy další veličinu s rozměrem metru, a proto by rozměrová analýza už nedala jednoznačný výsledek. Vztah (1.938) je tedy třeba brát jen s velkou rezervou.

Další veličinou, kterou je možné odhadnout z rozměrové analýzy je Kolmogorovova škála R_K. Z kinematické viskozity ν a míry disipace energie ε lze složit jedinou veličinu s rozměrem délky. Proto lze odhadnout, že je Kolmogorova délka dána tímto vztahem

$$R_\mathrm{K} \cong \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \tag{1.939}$$

Vztah opět platí jen pro procesy, v nichž nehrají hlavní roli gyrační pohyby iontů. Lze ho tedy použít pro turbulence běžných tekutin bez přítomnosti magnetických polí.

Turbulence v magnetohydrodynamice

Předpokládejme nejjednodušší variantu magnetohydrodynamiky s viskózními procesy. Tekutinu budeme považovat za nestlačitelnou. Výchozími rovnicemi budou

► $$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \eta_\mathrm{L}\Delta\mathbf{u} - \nabla p_\mathrm{L} + \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\times\mathbf{B}, \tag{1.940}$$

► $$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu}\Delta\mathbf{B} + \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\times\mathbf{B}. \tag{1.941}$$

První rovnice je pohybovou rovnicí plazmatu, napravo jsou postupně: hustota viskózní síly, hustota tlakové síly a hustota Lorentzovy síly. Druhá rovnice je rovnicí pro časový vývoj magnetického pole, první člen popisuje difúzi pole, druhý zamrzání pole. Obě rovnice musíme doplnit rovnicemi pro divergence polí. Pro nestlačitelnou kapalinu máme jednoduché vztahy

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \tag{1.942}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0. \tag{1.943}$$

Vztah (1.943) říká, že plazma je nestlačitelné, tedy je jeho hustota konstantní. Rovnici (1.940) proto vydělíme hustotou a i s permeabilitou ji budeme integrovat do magnetického pole a získáme vztahy

► $$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = \nu_{\mathrm{L}}\Delta\mathbf{u} - \nabla P_{\mathrm{L}} + \mathrm{rot}\,\mathbf{b}\times\mathbf{b}\,, \tag{1.944}$$

► $$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nu_{\mathrm{M}}\Delta\mathbf{b} + \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\times\mathbf{b}\,, \tag{1.945}$$

kde jsme označili

$$\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu\rho}}\,; \qquad P_{\mathrm{L}} \equiv \frac{p_{\mathrm{L}}}{\rho}\,; \qquad \nu_{\mathrm{M}} \equiv \frac{1}{\sigma\mu} \tag{1.946}$$

Přeškálované magnetické pole **b** má rozměr rychlosti – nejde totiž o nic jiného, než o Alfvénovu rychlost příslušící danému poli. Rovnice pro rychlostní i pro magnetické pole tak mají nyní stejný rozměr. Porovnáním různých členů můžeme získat bezrozměrné charakteristiky proudění:

$$\#_{\mathrm{Re}} \equiv \frac{|\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\,|}{|\,\nu_{\mathrm{L}}\Delta\mathbf{u}\,|} \approx \frac{Lu}{\nu_{\mathrm{L}}}\,; \tag{1.947}$$

$$\#_{\mathrm{ReM}} \equiv \frac{|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}\times\mathbf{b}\,|}{|\,\nu_{\mathrm{M}}\Delta\mathbf{b}\,|} \approx \frac{Lu}{\nu_{\mathrm{M}}}\,; \tag{1.948}$$

$$\#_{\mathrm{Pr}} \equiv \frac{\#_{\mathrm{ReM}}}{\#_{\mathrm{Re}}} \approx \frac{\nu_{\mathrm{M}}}{\nu_{\mathrm{L}}}\,; \tag{1.949}$$

Reynoldsovo číslo $\#_{\mathrm{Re}}$ vyjadřuje podíl kinetického členu k viskóznímu. Při velkých Reynoldsových číslech je při proudění nadbytek kinetické energie a dochází k rozvoji turbulentního proudění. Hodnota Reynoldsova čísla je tedy pro samovolný vznik turbulence rozhodující. V plazmatu tomu může samozřejmě napomoci vývoj různých nestabilit. Reynoldsovo magnetické číslo $\#_{\mathrm{ReM}}$ je podílem členu zamrzání a členu difúze v rovnici pro časový vývoj magnetického pole a už jsme se s ním setkali. Ve většině typů plazmatu je velmi vysoké a zamrzání pole převládá nad jeho difúzí. Velikost Reynoldsova magnetického čísla nijak nerozhoduje o turbulenci. Poslední, Prandtlovo číslo, dává do podílu oba typy viskózních procesů – je podílem magnetické difúze a kinematické viskozity. V astrofyzikálním plazmatu může mít nejrůznější hodnoty, od 10^{29} v mezigalaktickém prostoru přes 1 ve slunečním větru až po hodnotu $\ll 1$ ve sluneční konvektivní zóně. Pro turbulentní procesy vyjadřuje podíl vlivu magnetické (ohmické) a viskózní disipace energie.

Elsässerova pole

Rovnice (1.944) a (1.945) pro rychlostní a magnetické pole ještě upravíme do symetrického tvaru. V obou rovnicích rozepíšeme dvojné vektorové součiny na pravé straně. U první rovnice úprava povede na rozdělení hustoty Lorentzovy síly na příspěvek magnetického tlaku a příspěvek zakřivení magnetických siločar. U rovnice pro magnetické pole dojde k převedení rovnice na rovnici s úplnou časovou derivací na levé straně. Obě úpravy jsme již dříve prováděli, proto uvedeme jen výsledek:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = \nu_{\mathrm{L}}\Delta\mathbf{u} - \nabla\left(P_{\mathrm{L}} + P_{\mathrm{M}}\right) + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\,\mathbf{b}\,, \tag{1.950}$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{b} = \nu_{\mathrm{M}}\Delta\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\,. \tag{1.951}$$

Magnetický tlak je v rovnici pro rychlostní pole popsán veličinou

$$P_{\mathrm{M}} \equiv \frac{p_{\mathrm{M}}}{\rho} = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu\rho} = \frac{\mathbf{b}^2}{2} \tag{1.952}$$

Obě rovnice (1.950), (1.951) mají stejný rozměr, proto je můžeme vhodně kombinovat. V soustavě spojené s proudícím plazmatem budou mít obě pole tvar

$$\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}\,, \tag{1.953}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \delta\mathbf{b}\,. \tag{1.954}$$

Rychlostní pole má jen fluktuační část, magnetické pole je dáno základním a fluktuačním polem. V roce 1950 zavedl americký fyzik Walter M. Elsässer nové proměnné

$$\mathbf{z} = \delta\mathbf{u} - \delta\mathbf{b}\,, \tag{1.955}$$

$$\mathbf{w} = \delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{b}\,. \tag{1.956}$$

Někdy se Elsässerova pole označují jen symboly $\mathbf{z}_{\pm}$. Abychom získali rovnice pro nová pole, sečteme a odečteme rovnice (1.950), (1.951) pro rychlostí a magnetické pole:

► $$\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial t} + (\mathbf{b}_0\cdot\nabla)\mathbf{z} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{z} = \Delta\left[\frac{\nu_{\mathrm{L}} - \nu_{\mathrm{M}}}{2}\mathbf{w} + \frac{\nu_{\mathrm{L}} + \nu_{\mathrm{M}}}{2}\mathbf{z}\right] - \nabla\left(P_{\mathrm{L}} + P_{\mathrm{M}}\right), \tag{1.957}$$

► $$\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} - (\mathbf{b}_0\cdot\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{w} = \Delta\left[\frac{\nu_{\mathrm{L}} + \nu_{\mathrm{M}}}{2}\mathbf{w} + \frac{\nu_{\mathrm{L}} - \nu_{\mathrm{M}}}{2}\mathbf{z}\right] - \nabla\left(P_{\mathrm{L}} + P_{\mathrm{M}}\right). \tag{1.958}$$

Rovnice pro Elsässerova pole jsou výchozími rovnicemi pro zkoumání magnetohydrodynamické turbulence, ať už analyticky, rozměrovou analýzou či numerickými simulacemi. Pokud buď zanedbáme magnetické pole, nebo budeme předpokládat, že fluktuace jsou homogenní a izotropní a typická časová škála je dána jen nelineárními jevy, tj.

$$\tau_{\mathrm{NL}} \simeq (kw)^{-1} \simeq (kz)^{-1}\,, \tag{1.959}$$

získáme (ať už analyticky či rozměrovou analýzou) Kolmogorovovo spektrum

► $$\mathcal{E}_{\mathrm{K}} \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}\,. \tag{1.960}$$

Nás ale bude především zajímat vliv magnetického pole na pozadí, kde je typická časová škála dána Alfvénovým časem

$$\tau_{\mathrm{A}} \simeq \frac{L}{v_{\mathrm{A}}} = \frac{L}{b_0}\,. \tag{1.961},$$

Budeme-li i v tomto případě udržovat předpoklad izotropie fluktuací (je to oprávněné pro slabé pole a malé víry), dostaneme tzv. IK nebo IK64 model pojmenovaný podle sovětského fyzika P. S Irošnikova a amerického teoretika Roberta Henry Kraichnana. Irošnikov tímto způsobem popsal turbulenci v roce 1964 a Kraichnan nezávisle na něm v roce 1965. Výsledkem je spektrální závislost

► $$\mathcal{E}_{\mathrm{IK}}(k) \sim \left(v_{\mathrm{A}}\varepsilon\right)^{1/2} k^{-3/2}\,. \tag{1.962}$$

Spektrum IK modelu tedy závisí na magnetickém poli na pozadí.



Obr. 1.134: Turbulentní struktury v Jupiterově oblačnosti na severní polokouli.
Fotografie: sonda JUNO, 23. 5. 2018, NASA/JPL.

Silná anizotropní turbulence

Silné magnetické pole vnáší do plazmatu anizotropii a předpoklad o homogenní a izotropní turbulenci je v takovém případě neudržitelný. Energetické spektrum je třeba, na rozdíl od Kolmogorovy turbulence (1.934), definovat třírozměrně:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2 \rangle = \int_0^\infty \mathcal{E}(k_{\|}, k_{\perp}) \, \mathrm{d}^3 \mathbf{k} \, . \tag{1.963}$$

Rozměr energetického spektra je tedy ve třech dimenzích jiný než u jednorozměrného Kolmogorovova popisu. Anizotropní modely můžeme rozdělit na slabě a silně turbulentní. Při slabé turbulenci jsou obě Elsässerova pole podstatně menší než magnetické pole na pozadí, u silné turbulence takový předpoklad už neplatí. Pro slabou turbulenci (WT, *Weak Turbulence*) lze odvodit energetické spektrum

► $$\mathcal{E}_{\mathrm{WT}}(k) \sim k_{\|}^{1/2} k_{\perp}^{-2} \, . \tag{1.964}$$

Podmínky slabé turbulence jsou ale v plazmatu splněny jen zřídka, pokud se turbulence už rozvine, bývá zpravidla silná. Podmínky silné magnetohydrodynamické turbulence zkoumali americký astrofyzik Peter Goldreich a indický fyzik Seshadri Sridhar. Jejich výsledky z roku 1995 se označují jako GS nebo GS95 model. Energetické spektrum je velmi zajímavé. Pokud jsou fluktuace izotropní alespoň v kolmé rovině na magnetické pole, stává se spektrum jednorozměrným a vede na Kolmogorovův tvar:

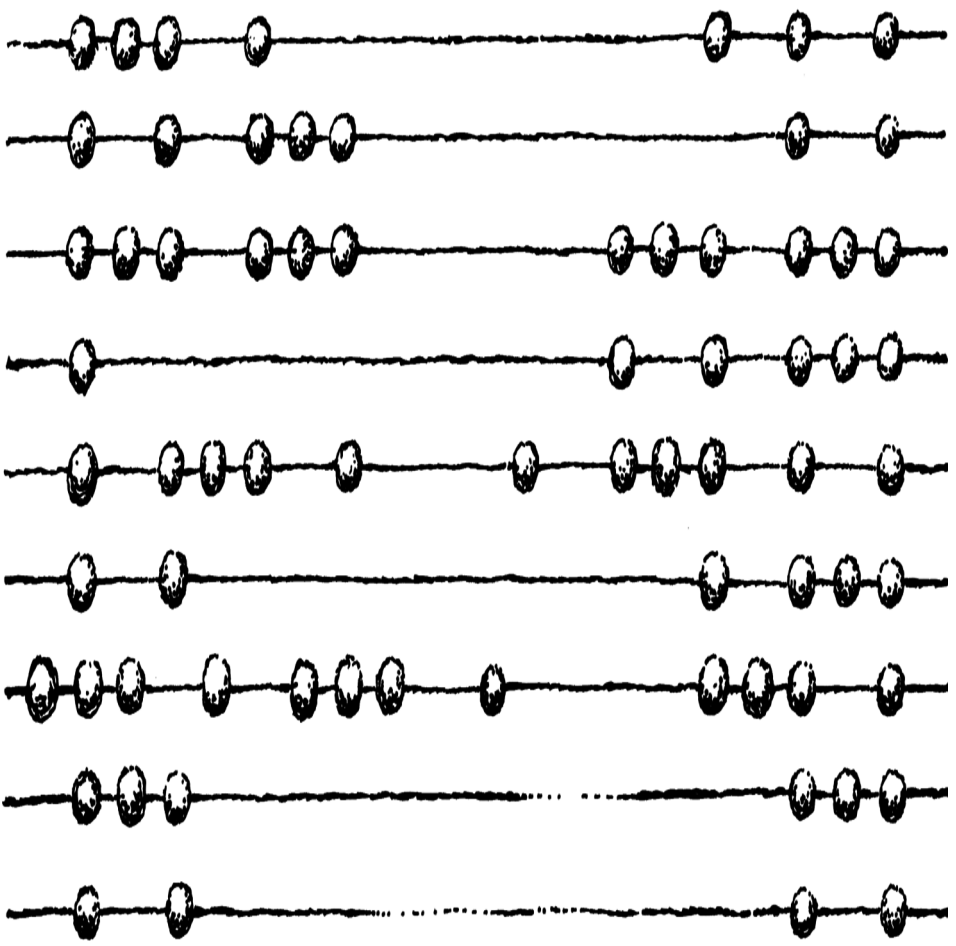
► $$\mathcal{E}_{\mathrm{GS}}(k) \sim \varepsilon^{2/3} k_{\perp}^{-5/3} \, . \tag{1.965}$$

Pro rovnoběžnou složku se vytvoří mezi oběma komponentami vlnového vektoru rovnováha daná vztahem

► $$k_{\|} \sim k_{\perp}^{2/3} \, . \tag{1.966}$$

Koeficienty úměrnosti jsou ale v GS95 modelu funkcí Alfvénovy rychlosti a dalších parametrů, takže je experimentální ověřování poněkud obtížné. Z numerických simulací plyne, že v případě silně rozvinuté turbulence s magnetickým polem na pozadí jsou výsledky pro slabá pole blízké GS modelu, zatímco pro silná pole naopak korespondují s IK modelem. Problematika turbulencí je stále otevřenou disciplínou s mnoha nezodpovězenými otázkami.

2. Numerické simulace



2.1 Numerické simulace pohybu částic

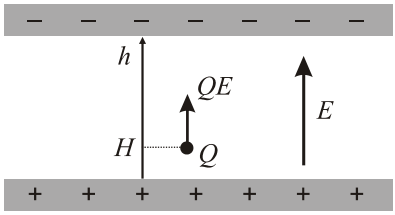
V předchozích kapitolách jsme nalezli analytické výrazy pro trajektorii nabité částice v homogenním elektrickém nebo magnetickém poli. V obecnějším případě je nalezení analytického vyjádření trajektorie buď velmi obtížné, nebo zhola nemožné. Soustavy diferenciálních rovnic, na které vedou pohybové rovnice, jsou nelineární a málokdy analyticky řešitelné. Můžeme si pomoci rozvojem řešení do nějaké nekonečné řady a ve finále se omezit na několik prvních členů, můžeme provést nějaká zanedbání, která rovnice zjednoduší nebo se můžeme omezit jen na určité přiblížení k problému, například adiabatické (přiblížení málo se měnících polí); většinou jsme ale odkázáni na numerické simulace.Kdysi se říkalo, že fyzika má dvě neoddělitelné součásti – experiment a teorii. S razantním nástupem výpočetní techniky v posledních desetiletích můžeme dnes bez nadsázky říci, že veškerá fyzikální odvětví mají tři propojené a nezastupitelné součásti – experiment, teorii a numerické simulace. Numerické simulace pomáhají ověřit teorie bez nákladných experimentů, získat informace o chování sledovaného subjektu a připravit experimenty tak, aby s co nejmenšími prostředky přinesly největší výsledky. Numerické simulace jsou užitečné i při zpracování velkého množství dat z experimentů. Současnou fyziku plazmatu si bez numerických simulací již nedokážeme představit.

Tato učebnice není zaměřena na numerické metody ve fyzice plazmatu. Přesto chceme, aby měl hloubavější čtenář, který zvládne jednoduché programování, možnost si vyzkoušet probírané jevy nasimulovat na svém počítači. Za každou kapitolou je proto přidána jakási „kuchařka“ vybraných algoritmů, která to umožní. Jde ale vždy o pouhý výběr jednoho nebo několika algoritmů z mnoha bez podrobnějšího vysvětlení. Pokud čtenáře numerické metody zaujmou, musí sáhnout po specializovaných publikacích věnovaných numerickým simulacím ve fyzice plazmatu.

2.1.1 Newtonovo-Eulerovo schéma (NE)

Nejjednodušším způsobem řešení diferenciálních rovnic je jejich převedení na diferenční rovnice (namísto derivací napíšeme jen rozdíly veličin, tzv. diference). Ukažme si tento postup na jednoduché úloze pohybu nabité částice v kondenzátoru.

◖ **Příklad 2.1:** Nalezněte diferenční schéma pro urychlení nabité částice mezi deskami kondenzátoru. Elektrické pole považujte za homogenní a pohyb za nerelativistický.



Obr. 2.1: Částice v kondenzátoru

Řešení: Pohybová rovnice vyplývá z druhého Newtonova zákona

$$m\ddot{h} = QE\,. \tag{2.1}$$

Výsledná diferenciální rovnice $\mathrm{d}^2h/\mathrm{d}t^2 = QE/m$ je mimořádně jednoduchá a její řešení bychom snadno mohli najít analyticky. Tvorbu diferenčního schématu si záměrně ukážeme na takto jednoduché rovnici. Stejný postup můžete aplikovat i na složitější rovnice, které již nemají analytické řešení.

Nejprve převedeme diferenciální rovnici druhého řádu na soustavu dvou rovnic prvního řádu (ve fyzice k tomu využijeme definice rychlosti jako první derivace hledané proměnné podle času):

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{QE}{m}\,.$$

Řešení nebudeme hledat v každém čase (diferenciální rovnice), ale jen v některých časech (diferenční rovnice). V praxi to znamená nahrazení skutečného řešení lomenou čarou. Budou nás tedy zajímat jen hodnoty

$$h_n = h(t_n)\,,$$
$$v_n = v(t_n)\,,$$
$$t_n = t_0 + n\,\Delta t\,; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Skutečné derivace nahradíme konečnými rozdíly:

$$\frac{h_{n+1} - h_n}{\Delta t} \cong v_n\,,$$
$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \cong \frac{QE}{m}\,. \tag{2.2}$$

Nyní vypočteme hodnoty v čase t_{n+1} pomocí hodnot v čase t_n:

$$h_{n+1} = h_n + v_n \Delta t\,,$$
$$v_{n+1} = v_n + \frac{QE}{m}\Delta t\,. \tag{2.3}$$

Získali jsme tak diferenční schéma, podle kterého počítáme postupně jednotlivé hodnoty

$$h_0, v_0 \quad \Rightarrow \quad h_1, v_1 \quad \Rightarrow \quad h_2, v_2 \quad \Rightarrow \quad \cdots\,.$$

Je zřejmé, že k numerické konstrukci řešení postačí znát počáteční výšku a počáteční rychlost (tzv. počáteční podmínky), například:

$$h_0 = H, \quad v_0 = 0\,.$$

◗

Uvedený postup se zdá být jednoduchý a přímočarý, nicméně má svá úskalí. Počítačem generovaná trajektorie se bude po určité době poněkud lišit od skutečné trajektorie. Důvodem jsou jednak zaokrouhlovací chyby a jednak nahrazení derivací diferencemi.

Zaokrouhlovací chyby můžeme částečně eliminovat vhodnou volbou bezrozměrných proměnných. Chybu danou použitím diferencí namísto derivací můžeme snížit volbou menšího časového kroku. Vždy jde ale o kompromis mezi počtem provedených operací a dosaženou přesností. Časový krok nemusíme mít v průběhu celého výpočtu stejný. V oblastech, kde jsou velké gradienty polí a částice prudce mění svou polohu a rychlost, můžeme volit časový krok jemnější než v oblastech, kde se částice příliš nepohybuje.

Odvozené schéma se nazývá Newtonovo-Eulerovo a z matematického hlediska patří do skupiny tzv. *explicitních schémat*. Důvodem je to, že jsme po nahrazení derivací diferencemi vyjádřili pravou stranu rovnice (2.2) za pomoci dřívějšího času t_n. To nám umožnilo explicitní vyjádření (2.3) veličin v novém čase t_{n+1}. Kdybychom pravé strany (2.2) vyjádřili v novějším čase t_{n+1}, dostali bychom algebraickou soustavu rovnic pro h_{n+1} a v_{n+1}. Teprve po vyřešení této soustavy bychom z hodnot h_n, v_n získali nové hodnoty h_{n+1}, v_{n+1}. Takovému schématu se říká *implicitní*. Obecně je stabilnější a přesnější než explicitní schéma, na druhou stranu jsme ale nuceni v každém časovém kroku řešit soustavu algebraických rovnic.

Řád schématu

U diferenčních schémat tedy rozlišujeme, zda jde o schéma explicitní nebo implicitní. Dalšími důležitou charakteristikou je *řád schématu*. Při nahrazení derivace diferencemi jsme se dopustili určité chyby, kterou můžeme označit R (označení pochází ze slova reziduum):

$$f'(t_n) = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{\Delta t} + R(\Delta t)\,. \tag{2.4}$$

Cílem každé numerické metody samozřejmě je, aby byl zbytek R co možná nejmenší. Pokud je jeho závislost na časovém kroku lineární, hovoříme o metodě prvního řádu. Pokud se zbytek chová jako $(\Delta t)^n$, hovoříme o metodě n-tého řádu. Čím vyšší je řád metody, tím kvalitnější je diferenční schéma a poskytuje lepší výsledky. Námi odvozené Newtonovo-Eulerovo schéma je explicitním schématem pouze prvního řádu. Pokud bychom s ním například popisovali harmonické oscilace, bude nám postupně numericky (nefyzikálně) narůstat amplituda oscilací. Newtonovo-Eulerovo schéma můžeme proto použít jen pro krátkodobou simulaci.

Stabilita schématu

Pro numerické simulace můžeme využívat jen *stabilní schémata*. To jsou taková schémata, ve kterých numerická chyba způsobená v jednom časovém kroku není příčinou nárůstu chyby v následujícím časovém kroku.

◖ **Příklad 2.2:** Navrhněte Newtonovo-Eulerovo diferenční schéma pro pohyb nabité částice v homogenním magnetickém poli.

Řešení: z Hamiltonových rovnic (1.13) až (1.18) snadno získáme příslušné diferenční schéma:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{p_x^{(n)}}{m}\Delta t\,,$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{p_y^{(n)} - QB\,x_n}{m}\Delta t\,,$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{p_z^{(n)}}{m}\Delta t\,,$$

$$p_x^{(n+1)} = p_x^{(n)} + \frac{QB\,(p_y^{(n)} - QB\,x_n)}{m}\Delta t\,,$$

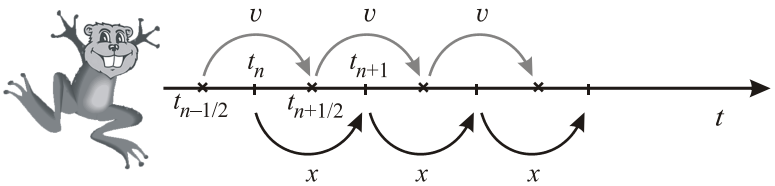
$$p_y^{(n+1)} = p_y^{(n)}\,,$$

$$p_z^{(n+1)} = p_z^{(n)}\,.$$

Vlivem numerických chyb bude Larmorův poloměr částice pohybující se v homogenním magnetickém poli pomalu narůstat. K dosažení lepších výsledků bychom museli zjemnit časový krok, což povede na zvýšení počtu provedených operací a následný nárůst zaokrouhlovací chyby.

2.1.2 Skákající žába aneb Leap-Frog schéma (LF)

Neduhy Newtonova-Eulerova schématu lze celkem snadno napravit. Pokud nebudeme počítat polohu a rychlost ve stejném čase, můžeme řád schématu zvýšit o jedničku. Při výpočtu nové rychlosti můžeme využít hodnotu polohy v „mezičase“, stejně tak při výpočtu nové polohy využijeme hodnotu rychlosti v „mezičase“. V příkladu 2.1 by na pravé straně rovnic nebyly ani staré hodnoty (explicitní schéma), ani nové hodnoty (implicitní schéma), ale mezihodnoty. Schéma je explicitní a stejně rychlé jako Newtonovo-Eulerovo schéma, ale bude druhého řádu. Při simulaci harmonického pohybu zůstane u metody Leap-Frog sinusovka skutečně sinusovkou.



Obr. 2.2: Princip skákající žáby (leap-frog)

Uvedený postup má jedinou komplikaci. Na počátku musíme spočítat rychlost v čase $t_0 - \Delta t/2$ a poté již počítáme nové hodnoty obdobně jako v Newtonově-Eulerově schématu. Uveďme, jak probíhá výpočet v jednodimenzionálním případě. Předpokládejme, že máme diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v\,, \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{F(x,v)}{m}\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nejprve spočítáme standardním způsobem hodnotu rychlosti v čase $t_0 - \Delta t/2$. Využijeme Newtonovo-Eulerovo schéma a posuneme se zpět o záporný časový krok $-\Delta t/2$:

$$v_{-1/2} = v_0 - \frac{F(x_0, v_0)}{m}\frac{\Delta t}{2}. \tag{2.6}$$

A poté již rozběhneme stále se opakující výpočetní cyklus

$$\begin{aligned} v_{n+1/2} &= v_{n-1/2} + \frac{F(x_n, v_{n-1/2})}{m}\Delta t\,, \\ x_{n+1} &= x_n + v_{n+1/2}\Delta t\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Postupně určujeme hodnoty

$$v_{-1/2}, x_0 \;\rightarrow\; v_{1/2}, x_1 \;\rightarrow\; v_{3/2}, x_2 \;\rightarrow\; v_{5/2}, x_3 \;\rightarrow\; \cdots$$

Schéma Leap-frog je ve fyzice plazmatu velmi oblíbené. Ponechává si „dobré“ vlastnosti Newtonova-Eulerova schématu – je explicitní a velmi rychlé. Jeho přesnost je ale, na rozdíl od Newtonova-Eulerova schématu, druhého řádu.

2.1.3 Přesnější schémata (RK, BB)

Rungeovo-Kuttovo (RK) schéma

Pokud máme vyšší požadavky na kvalitu simulace, musíme využít některé z numerických schémat s vyšším řádem přesnosti. K nejoblíbenějším patří Rungeova–Kuttova metoda 4. řádu. Předpokládejme, že jsme soustavu pohybových rovnic převedli na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\xi_k}{\mathrm{d}t} = f_k(t, \xi_1, \cdots, \xi_N)\,. \tag{2.8}$$

Nejprve určíme v čase t pro každou proměnnou ξ_k čtveřici konstant

$$\begin{aligned} K_{1,k} &= f_k\left(t, \xi_1(t), \cdots, \xi_N(t)\right), \\ K_{2,k} &= f_k\left(t + \frac{1}{2}\Delta t, \xi_1(t) + \frac{1}{2}K_{1,1}\Delta t, \cdots, \xi_N(t) + \frac{1}{2}K_{1,N}\Delta t\right), \\ K_{3,k} &= f_k\left(t + \frac{1}{2}\Delta t, \xi_1(t) + \frac{1}{2}K_{2,1}\Delta t, \cdots, \xi_N(t) + \frac{1}{2}K_{2,N}\Delta t\right), \\ K_{4,k} &= f_k\left(t + \Delta t, \xi_1(t) + K_{3,1}\Delta t, \cdots, \xi_N(t) + K_{3,N}\Delta t\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Členy čtveřice musíme počítat v uvedeném pořadí, neboť každá následující konstanta využívá hodnotu předchozí konstanty. Tyto čtveřice napočítáme pro každou z N hledaných proměnných. Numerické řešení v čase $t + \Delta t$ dostaneme ze vztahů

$$\xi_k(t + \Delta t) \cong \xi_k(t) + \frac{1}{6}(K_{1,k} + 2K_{2,k} + 2K_{3,k} + K_{4,k}) \cdot \Delta t\,; \quad k = 1, \ldots, N\,. \tag{2.10}$$

Tím známe řešení v čase $t + \Delta t$ a postup můžeme opakovat. Aplikujeme-li toto schéma na Lorentzovu pohybovou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\,. \tag{2.11}$$

Nejprve vypočteme pomocná „pole“ v místě polohy částice

$$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \frac{Q}{m}\frac{\Delta t}{2}\mathbf{E}(\mathbf{x}_n)\,,$$
$$\tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q}{m}\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}(\mathbf{x}_n)\,. \tag{2.12}$$

V dalším kroku určíme vektorové konstanty **K** (pro polohu) a **L** (pro rychlost)

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \mathbf{v}_n\,, & \mathbf{L}_1 &= \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v}_n\times\tilde{\mathbf{B}}\,;\\
\mathbf{K}_2 &= \mathbf{v}_n + \mathbf{L}_1\,, & \mathbf{L}_2 &= \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_2\times\tilde{\mathbf{B}}\,;\\
\mathbf{K}_3 &= \mathbf{v}_n + \mathbf{L}_2\,, & \mathbf{L}_3 &= \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_3\times\tilde{\mathbf{B}}\,;\\
\mathbf{K}_4 &= \mathbf{v}_n + 2\mathbf{L}_3, & \mathbf{L}_4 &= \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_4\times\tilde{\mathbf{B}}\,.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Nové hodnoty poloh a rychlostí určíme na závěr ze vztahů

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4)\Delta t/6\,,$$
$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + (2\mathbf{L}_1 + 2\mathbf{L}_2 + 2\mathbf{L}_3 + 2\mathbf{L}_4)/6\,. \tag{2.14}$$

Borisovo-Bunemanovo schéma (BB)

Borisovo-Bunemanovo schéma je „šité na míru“ pro výpočty trajektorií nabitých částic v elektrickém a magnetickém poli. Nejprve je spočtena polovina urychlení v elektrickém poli (2.16), následuje rotace částice v magnetickém poli (2.17) a v posledním kroku je uskutečněna zbývající část urychlení v elektrickém poli (2.18). BB schéma je velmi účinným a rychlým diferenčním schématem čtvrtého řádu:

$$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \frac{Q}{m}\frac{\Delta t}{2}\mathbf{E},$$
$$\tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q}{m}\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}\,; \tag{2.15}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_n + \tilde{\mathbf{E}}\,, \tag{2.16}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{v}}} = \tilde{\mathbf{v}} + 2\frac{\left(\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}\times\tilde{\mathbf{B}}\right)\times\tilde{\mathbf{B}}}{1+\tilde{\mathbf{B}}^2}\,, \tag{2.17}$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\tilde{\mathbf{v}}} + \tilde{\mathbf{E}}\,, \tag{2.18}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_{n+1}\Delta t\,. \tag{2.19}$$

2.1.4 Relativistická schémata

Při velkých rychlostech musíme použít relativistickou Lorentzovu pohybovou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma\mathbf{v}) = \frac{Q}{m_0}\left[\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right];$$
$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.20}$$

Hlavním problémem je, že se rychlost vyskytuje na levé i pravé straně této diferenciální rovnice. Pokud použijeme substituci

$$\mathbf{u} \equiv \gamma\mathbf{v}, \tag{2.21}$$

můžeme Lorentzovu pohybovou rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{m_0}\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{\gamma}\times\mathbf{B}\right];$$
$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}, \tag{2.22}$$

který je výchozím vztahem pro tvorbu relativistických numerických schémat:

Newton-Euler	**Leap-frog**
$\gamma_n = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}_n^2/c^2}$;	$\gamma_n = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}_n^2/c^2}$;
$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{Q\Delta t}{m_0}\mathbf{E}$; $\quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{Q\Delta t}{m_0\,\gamma_n}\mathbf{B}$;	$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \frac{Q\Delta t}{m_0}\mathbf{E}$, $\quad \tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q}{m_0}\frac{\Delta t}{2\gamma_n}\mathbf{B}$;
$\mathbf{u}_n = \gamma_n\mathbf{v}_n$;	$\mathbf{u}_{n-1/2} = \frac{\mathbf{v}_{n-1/2}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_{n-1/2}^2/c^2}}$;
$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{u}_n\times\tilde{\mathbf{B}}$;	$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_{n-1/2} + \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{u}}_{n-1/2}\times\tilde{\mathbf{B}}$;
$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{n+1}}{\sqrt{1 + \mathbf{u}_{n+1}^2/c^2}}$;	$\mathbf{u}_{n+1/2} = \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\left[\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}\times\tilde{\mathbf{B}}\right]\times\tilde{\mathbf{B}}}{1 + \tilde{\mathbf{B}}^2}$;
$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n}{2}\Delta t$.	$\mathbf{v}_{n+1/2} = \frac{\mathbf{u}_{n+1/2}}{\sqrt{1 + \mathbf{u}_{n+1/2}^2/c^2}}$;
	$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{u}_{n+1/2}}{\gamma_{n+1/2}}\Delta t$.

Runge-Kutta	Boris-Buneman
$\gamma_n = 1/\sqrt{1-\mathbf{v}_n^2/c^2}$;	$\gamma_n = 1/\sqrt{1-\mathbf{v}_n^2/c^2}$;
$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \frac{Q}{m}\frac{\Delta t}{2}\mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q}{m}\frac{\Delta t}{2}\mathbf{B}$,	$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \frac{Q}{m_0}\frac{\Delta t}{2}\mathbf{E}$, $\quad \tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q}{m_0}\frac{\Delta t}{2\gamma_n}\mathbf{B}$;
$\mathbf{u}_n = \gamma_n \mathbf{v}_n$;	$\mathbf{u}_n = \gamma_n \mathbf{v}_n$;
$\mathbf{K}_1 = \frac{\mathbf{u}_n}{\gamma_n}$, $\quad \mathbf{L}_1 = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_1 \times \tilde{\mathbf{B}}$,	$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_n + \tilde{\mathbf{E}}$;
$\mathbf{K}_2 = \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{L}_1}{\gamma_{K_2}}$, $\quad \mathbf{L}_2 = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_2 \times \tilde{\mathbf{B}}$,	$\tilde{\tilde{\mathbf{u}}} = \tilde{\mathbf{u}} + 2\frac{(\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}}{1+\tilde{\mathbf{B}}^2}$;
$\mathbf{K}_3 = \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{L}_2}{\gamma_{K_3}}$, $\quad \mathbf{L}_3 = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_3 \times \tilde{\mathbf{B}}$,	$\mathbf{u}_{n+1} = \tilde{\tilde{\mathbf{u}}} + \tilde{\mathbf{E}}$;
$\mathbf{K}_4 = \frac{\mathbf{u}_n + 2\mathbf{L}_3}{\gamma_{K_4}}$, $\quad \mathbf{L}_4 = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_4 \times \tilde{\mathbf{B}}$,	$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{n+1}}{\sqrt{1+\mathbf{u}_{n+1}^2/c^2}}$;
$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{1}{6}\Delta t\left(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4\right)$,	$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_{n+1}\Delta t$.
$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{1}{3}\left(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_4\right)$,	
$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{n+1}}{\sqrt{1+\mathbf{u}_{n+1}^2/c^2}}$.	

2.2 Diferenční schémata v magnetohydrodynamice

Magnetohydrodynamika je založena na parciálních diferenciálních rovnicích. Analytická řešení je možné nacházet jen v ojedinělých případech, většinou jsme odkázáni na numerické metody, kterých existuje veliké množství. Řešení je možné rozvíjet do řad, hledat na základě variačních metod, za pomoci konvoluce počátečních a okrajových podmínek s Greenovou funkcí, metodou charakteristik, metodou konečných prvků atd. Velmi často se parciální diferenciální rovnice řeší za pomoci diferenčních schémat na pravoúhlé či jiné síti, podobně jako jsme řešili obyčejné diferenciální rovnice v předchozí kapitole 2.1 Na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic musíme v magnetohydrodynamice provádět diskretizaci nejen v čase, ale i v prostoru. V každém časovém okamžiku t_n je prostor nahrazen diskrétní sítí a hodnoty hledané veličiny zjišťujeme jen ve vrcholech sítě. Tato kniha není v žádném případě učebnicí numerických metod, a proto čtenáře seznámíme jen se základy tvorby diferenčních schémat. Cílem je, aby si hloubavější čtenář mohl vyzkoušet nalezení jednoduchých řešení na počítači.

2.2.1 Parciální diferenciální rovnice

Dělení rovnic

Ve fyzice plazmatu se nejčastěji setkáme s parciálními diferenciálními rovnicemi druhého řádu. Předpokládejme obecnou rovnici ve tvaru

$$F\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k \partial x_l}, \frac{\partial\psi}{\partial x_k}, \psi, x_k\right) = 0\,; \qquad k,l = 1,2,\ldots,N\,, \tag{2.23}$$

neznámou je funkce N proměnných, zpravidla jde o jednu časovou a tři prostorové proměnné. Rovnici nazveme *kvazilineární*, pokud je lineární vzhledem k druhým derivacím, tj. má tvar

$$\sum_{k,l} A_{kl}(\mathbf{x},\psi,\nabla\psi)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k \partial x_l} + B(\mathbf{x},\psi,\nabla\psi) = 0\,, \tag{2.24}$$

kde koeficienty A_{kl} a B závisí na x_k, ψ, $\partial_k\psi$. Rovnici nazveme *lineární*, pokud má tvar

$$\sum_{k,l} A_{kl}(\mathbf{x})\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_k B_k(\mathbf{x})\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + C(\mathbf{x})\psi = f(\mathbf{x})\,. \tag{2.25}$$

Funkci $f(\mathbf{x})$ nazýváme pravou stranou rovnice. Pokud je $f = 0$, hovoříme o tzv. *homogenní* rovnici. Rovnici nazveme *lineární s konstantními koeficienty*, pokud jsou koeficienty A_{kl}, B_k a C konstantní.

Vhodnou transformací proměnných lze rovnici (2.24) převézt na jednodušší tvar. Lineární rovnice dělíme do tří skupin podle tvaru koeficientů u druhých derivací. Řekneme, že rovnice je *eliptická* v bodě $\mathbf{x}_0$, pokud existuje transformace, která ji v tomto bodě převede na tvar

$$\sum_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} + \sum_k B_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + C(\mathbf{x})\psi = f(\mathbf{x}) \,. \tag{2.26}$$

Příkladem eliptické rovnice je Laplaceova nebo Poissonova rovnice. Řekneme, že rovnice je *hyperbolická* v bodě $\mathbf{x}_0$, pokud existuje transformace, která ji v tomto bodě převede na tvar

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_N^2} + \sum_k B_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + C(\mathbf{x})\psi = f(\mathbf{x}) \,. \tag{2.27}$$

Jedna z druhých derivací má tedy opačné znaménko než ostatní. Takovou rovnicí je například vlnová rovnice. Pokud se znaménka minus a plus vyskytují u druhých derivací více než jednou, hovoříme o *ultrahyperbolické* rovnici. Řekneme, že rovnice je *parabolická* v bodě $\mathbf{x}_0$, pokud existuje transformace, která ji v tomto bodě převede na

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} + \sum_k B_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + C(\mathbf{x})\psi + D(\mathbf{x}) = 0 \,, \tag{2.28}$$

tj. jedna z druhých derivací (zpravidla časová) se v rovnici nevyskytuje. Příkladem může být rovnice vedení tepla, rovnice difúze magnetického pole nebo Schrödingerova časová rovnice. Pokud „schází“ více druhých derivací, hovoříme o *parabolické rovnici v širším smyslu*. Rovnice je většinou parabolická, hyperbolická nebo eliptická na nějaké oblasti v R^N, tedy nemusí nutně jít jen o vlastnost v jednom jediném bodě.

◖ **Příklad 2.3:** V následující tabulce jsou ukázky některých typických rovnic

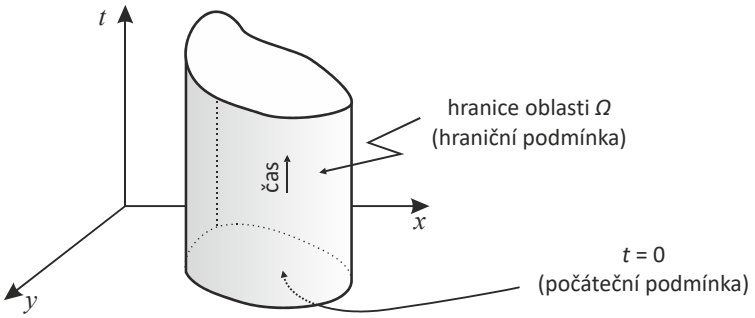
rovnice	název	typ
$\nabla^2 \phi = 0$	Laplaceova rovnice	eliptická
$\nabla^2 \phi = f(\mathbf{x})$	Poissonova rovnice	eliptická
$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$	vlnová rovnice	hyperbolická
$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$	vedení tepla	parabolická
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} = 0$		ultrahyperbolická
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$		parabolická v širším smyslu
$y\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$		$y = 0$ parabolická, $y > 0$ hyperbolická, $y < 0$ eliptická

◗

Počáteční a okrajové podmínky

Obdobně jako u obyčejných diferenciálních rovnic musíme zadat počáteční podmínky, je třeba pro řešení parciálních diferenciálních rovnic obsahujících čas znát hodnotu hledané funkce na počátku (tzv. počáteční podmínku). Tyto počáteční podmínky ale k úspěšnému nalezení řešení nestačí. Úlohu řešíme na nějaké prostorové oblasti Ω a bez znalosti chování hledané funkce na hranici oblasti nelze řešení nalézt. Budeme-li třeba hledat kmity kruhové membrány, záleží řešení na tom, zda je na okraji membrána volná (může volně „plandat“) nebo zda je k něčemu připevněná.

Je tedy zjevné, že před řešením parciální diferenciální rovnice nebo soustav parciálních diferenciálních rovnic musíme správně formulovat počáteční a okrajové podmínky kladené na rovnici (rovnice).



Obr. 2.3: Počáteční a okrajové (hraniční) podmínky úlohy

Předpokládejme, že hledáme funkci $\psi(t, \mathbf{x})$, která je řešením parciální diferenciální rovnice. Ve většině případů musíme k jednoznačnému řešení znát počáteční podmínku

$$\psi(0, \mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}), \tag{2.29}$$

a okrajovou podmínku – k nejčastějším patří:

Dirichletova okrajová podmínka – na hranici oblasti zadáváme hodnotu hledané funkce:

$$\psi(t, \mathbf{x}_0) = G_0(t, \mathbf{x}_0) \text{ pro } \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega . \tag{2.30}$$

Symbol $\partial\Omega$ označuje hranici oblasti Ω. Dirichletovu okrajovou podmínku využijeme například v rovnici pro vedení tepla, pokud je okraj tyče či oblasti udržován na konstantní teplotě, u Laplaceovy rovnice, pokud má okraj oblasti zadaný potenciál nebo u vlnové rovnice, pokud je okraj vlnící se oblasti pevně uchycen.

Neumannova okrajová podmínka – na hranici oblasti (například volný konec vlnící se membrány) zadáváme normálovou derivaci hledané funkce:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla)\psi(t, \mathbf{x}_0) = G_1(t, \mathbf{x}_0) \text{ pro } \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega . \tag{2.31}$$

Smíšená okrajová podmínka – na hranici oblasti zadáváme lineární kombinaci funkce a jejích derivací:

$$\alpha\psi(t, \mathbf{x}_0) + \sum_k \beta_k \partial_k \psi(t, \mathbf{x}_0) = G_2(t, \mathbf{x}_0) \text{ pro } \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega . \tag{2.32}$$

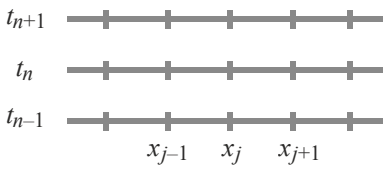
Cauchyova úloha – u parciální diferenciální rovnice N-tého řádu zadáváme počáteční podmínky pro prvních $N-1$ derivací hledané funkce, na hranici nezadáváme nic.

2.2.2 Tvorba diferenčních schémat

U hledané funkce provedeme časovou i prostorovou diskretizaci, tj. hodnoty budeme znát jen v časech t_n a ve vrcholech prostorové sítě x_j, y_k, z_l:

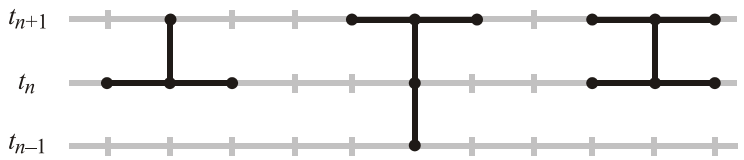
$$\psi^n_{j,k,l} = \psi(t_n, x_j, y_k, z_l); \qquad n = 0,1,2,\ldots; \qquad j,k,l = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$
$$t_n = t_0 + n\Delta t, \qquad x_j = j\Delta x, \qquad y_k = k\Delta y, \qquad z_l = l\Delta z. \tag{2.33}$$

Horní index bude tedy představovat diskrétní čas a dolní indexy diskrétní prostorovou závislost. Základní princip tvorby diferenčního schématu si ukážeme nejprve v jedné prostorové dimenzi.



Obr. 2.4: Časoprostorová diskretizace

Ze znalosti prostorových hodnost v časové vrstvě t_n, případně t_{n-1}, je třeba určit prostorové hodnoty na nové časové vrstvě t_{n+1}. Obdobně jako u obyčejných diferenciálních rovnic mohou být schémata explicitní nebo implicitní.



Obr. 2.5: Různá diferenční schémata

Na obrázku 2.5 je nalevo znázorněno explicitní schéma. Hodnotu na nové časové hladině předpovídáme ze tří známých hodnot z aktuální časové hladiny. Uprostřed je implicitní schéma. Z hodnot na dvou předchozích časových hladinách získáme vztah mezi třemi hodnotami na nové hladině. U implicitního schématu se nevyhneme řešení soustavy algebraických rovnic pro hodnoty na nové hladině. Napravo je implicitní schéma, ve kterém získáme provázanou informaci o třech hodnotách na nové hladině ze tří hodnot na aktuální časové hladině. Explicitní schémata jsou snadná pro výpočet, ale oblast jejich stability je obecně výrazně menší než u schémat implicitních. Pojďme se nyní seznámit s tvorbou schémat. Zaveďme prostorové diference

► $$D^+\psi = \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\Delta x}, \qquad D^-\psi = \frac{\psi_j - \psi_{j-1}}{\Delta x},$$
$$D^c\psi = \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2\Delta x}, \qquad D^0\psi = \frac{\psi_{j+1/2} - \psi_{j-1/2}}{\Delta x}. \tag{2.34}$$

Všemi čtyřmi výrazy můžeme nahradit $\partial\psi/\partial x$ v parciální diferenciální rovnici. Postupně jde o tzv. dopřednou diferenci, zpětnou diferenci, centrovanou diferenci a dvoubodovou centrovanou diferenci. V některých případech je možné použít i složitější tříbodovou náhradu prostorové derivace, například typu

► $$D\psi = \frac{(\alpha+1)\psi_{j+1} - 2\alpha\psi_j + (\alpha-1)\psi_{j-1}}{2\Delta x}. \tag{2.35}$$

Pro $\alpha = -1$ dostaneme výraz D^-, pro $\alpha = 0$ dostaneme D^c a pro $\alpha = +1$ získáme D^+. Druhé derivace můžeme nahradit různým skládáním těchto diferencí, například

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \rightarrow D^+D^-\psi = D^+\frac{\psi_j - \psi_{j-1}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{(\psi_{j+1} - \psi_j) - (\psi_j - \psi_{j-1})}{(\Delta x)^2} = \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Zcela stejný výsledek získáme za pomoci dvou centrovaných diferencí:

► $$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \rightarrow D^+D^-\psi = D^cD^c\psi = \cdots = \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{(\Delta x)^2}. \tag{2.36}$$

Využitím jiných kombinací z (2.34) získáme další náhrady druhé derivace, nicméně výraz (2.36) se používá nejvíce. Zbývá nám nalézt diference časových derivací, postup je stejný jako u obyčejných diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} &\rightarrow \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}; \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} &\rightarrow \frac{f_j^n - f_j^{n-1}}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

První varianta vede na explicitní schéma, druhá na implicitní schéma. U sestaveného schématu je samozřejmě nutné zjistit řád přesnosti, podmínky konvergence ke skutečnému řešení a podmínky stability navrženého schématu (aby získané veličiny například neoscilovaly nebo se exponenciálně nevzdalovaly od skutečného řešení). Uveďme nyní některá často využívaná schémata.

Jednoduché explicitní schéma pro rovnici difúze

Uvažujme rovnici difúze ve tvaru

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \tag{2.38}$$

Proveďme nyní diskretizaci vedoucí na explicitní schéma

$$\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} = \eta\frac{\psi_{j-1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}, \tag{2.39}$$

odkud plyne

► $$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n + \eta \frac{\psi_{j-1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \Delta t \,. \tag{2.40}$$

Ze znalosti hodnot v časové vrstvě t_n můžeme určit hodnoty ve vrstvě t_{n+1}, pokud známe okrajové podmínky pro výpočet hodnot v krajních bodech. Na obrázku 2.5 odpovídá tomuto schématu grafický symbol nalevo. Schéma je velmi rychlé a pohodlné, nicméně je stabilní jen, pokud je splněna podmínka (viz příklad 2.4, str. 319)

► $$\frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \le \frac{1}{2} \,. \tag{2.41}$$

Du Fortovo-Frankelovo schéma pro rovnici difúze

Jednoduchým trikem můžeme zařídit, aby diferenční schéma pro rovnici difúze (2.38) bylo bezpodmínečně stabilní. Volme diskretizaci ve tvaru analogickém k (2.39)

$$\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^{n-1}}{2\Delta t} = \eta \frac{\psi_{j-1}^n - (\psi_j^n + \psi_j^{n+1}) + \psi_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \,, \tag{2.42}$$

Nalevo je nyní centrální časová diference a prostřední člen u prostorové derivace byl nahrazen aritmetickým průměrem aktuální a nové hodnoty. Takovéto schéma je implicitní (nová hodnota je na levé i pravé straně) v prostorové hodnotě x_j. V tomto případě nejde ale o žádnou numerickou komplikaci, neboť můžeme ze vztahu (2.42) hledané hodnoty na nové časové hladině snadno vypočítat:

► $$\psi_j^{n+1} = \left(\frac{1-K}{1+K}\right)\psi_j^{n-1} + \left(\frac{K}{1+K}\right)\psi_{j-1}^n + \left(\frac{K}{1+K}\right)\psi_{j+1}^n \,; \qquad K \equiv \frac{2\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \,. \tag{2.43}$$

Uvedené schéma se nazývá Du Fortovo-Frankelovo a je bezpodmínečně stabilní. Lze ho dokonce využít i pro rovnici difúze doplněnou o konvektivní člen (proudění)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + C \frac{\partial \psi}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \,. \tag{2.44}$$

Při tvorbě schématu postupujeme stejně, první derivaci podle x v druhém členu nahradíme centrální diferencí $D^c\psi$ a poté opět vypočteme hledanou hodnotu na nové časové hladině.

Laxovo-Wendrofovo schéma

Řešme nyní numericky průběh toků nějakých veličin. Předpokládejme, že příslušné rovnice máme zapsány v konzervativním tvaru

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \,. \tag{2.45}$$

Veličiny popisující tok představují uspořádané n-tice

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_N \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

Řešme nejprve prostorovou diskretizaci posledního členu na levé straně:

$$\frac{\partial}{\partial x}A\frac{\partial H}{\partial x} \;\to\; D^0 A D^0 H \;=\; D^0 A_j\left(\frac{H_{j+1/2}-H_{j-1/2})}{\Delta x}\right) =$$

$$= \frac{1}{(\Delta x)^2}\Big[A_{j+1/2}\left(H_{j+1}-H_j\right)-A_{j-1/2}\left(H_j-H_{j-1}\right)\Big].$$

Vzhledem k tomu, že $A = A(F)$, jsou hodnoty v polovičních argumentech dány vztahy

$$A_{j+1/2} \equiv A\left(\frac{F_{j+1}+F_j}{2}\right); \qquad A_{j-1/2} \equiv A\left(\frac{F_j+F_{j-1}}{2}\right).$$

Relativně kvalitním explicitním schématem k rovnicím (2.45) je

► $$\frac{F_j^{n+1}-F_j^n}{\Delta t}+\frac{G_{j+1}^n-G_{j-1}^n}{2\Delta x}+\frac{A_{j+1/2}^n\left(H_{j+1}^n-H_j^n\right)-A_{j-1/2}^n\left(H_j^n-H_{j-1}^n\right)}{(\Delta x)^2}=0\,. \qquad (2.47)$$

Z výrazu již snadno určíme hodnoty F_j na nové časové vrstvě. Laxovo-Wendrofovo schéma lze zobecnit i na případ dvou nebo tří prostorových dimenzí.

Crankovo-Nicolsonové schéma

Velmi stabilním schématem je implicitní schéma, ve kterém za prostorové derivace využíváme aritmetický průměr z aktuální a nové časové vrstvy (pro rovnici difúze je schéma bezpodmínečně stabilní):

► $$\frac{\partial\psi}{\partial x} \;\to\; \frac{1}{2}\,\frac{\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\psi_{j+1}^{n}-\psi_{j-1}^{n}}{2\Delta x}\,,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \;\to\; \frac{1}{2}\,\frac{\psi_{j-1}^{n+1}-2\psi_j^{n+1}+\psi_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\psi_{j-1}^{n}-2\psi_j^{n}+\psi_{j+1}^{n}}{(\Delta x)^2}\,. \qquad (2.48)$$

Na obrázku 2.5 odpovídá tomuto schématu situace zcela napravo.

Richtmyerovo-Mortonovo schéma

Dalším oblíbeným schématem je implicitní schéma se standardním vyjádřením prostorových derivací a vyjádřením časové derivace za pomoci volitelného parametru:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \;\to\; \frac{\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}\,,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \;\to\; \frac{\psi_{j-1}^{n+1}-2\psi_j^{n+1}+\psi_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\,, \qquad (2.49)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \;\to\; \frac{(\alpha+1)\psi^{n+1}-2\alpha\psi^n+(\alpha-1)\psi^{n-1}}{2\Delta t}\,.$$

Pro $\alpha = 2$ získáme pro časovou derivaci často používaný asymetrický vztah

► $$\frac{\partial \psi}{\partial t} \rightarrow \frac{3\psi^{n+1} - 4\psi^{n} + \psi^{n-1}}{2\Delta t}. \tag{2.50}$$

Více prostorových dimenzí

Ve více prostorových dimenzích tvoříme diferenční schémata obdobně. Někdy je výhodné predikovat řešení prováděním diferenčních operací jen v jednom určitém prostorovém směru a získaný odhad pak korigovat pomocí diferenčních operací v dalším směru a tyto směry predikcí a korekcí cyklicky měnit. Algoritmus se nazývá ADI (Alternating Direction Implicit method, metoda střídavých směrů) a jeho popis nalezne čtenář ve specializované literatuře.

Tridiagonální matice

U implicitních schémat se často setkáme s rovnicemi typu

$$-A_j\psi_{j+1}^{n+1} + B_j\psi_j^{n+1} - C_j\psi_{j-1}^{n+1} = D_j^n . \tag{2.51}$$

Nové hodnoty v sousedních bodech jsou po trojicích provázány obdobně jako na obrázku 2.5 uprostřed. K jejich nalezení je třeba řešit soustavu mnoha rovnic s řídkou tridiagonální maticí:

$$\begin{pmatrix} B_1 & -A_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_2 & B_2 & -A_2 & 0 & 0 \\ 0 & -C_3 & B_3 & -A_3 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1^{n+1} \\ \psi_2^{n+1} \\ \vdots \\ \psi_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Krajní hodnoty ψ_1 a ψ_N známe v libovolném čase z okrajových podmínek. Řešení budeme hledat ve tvaru

$$\psi_j^{n+1} = E_j\psi_{j-1}^{n+1} + F_j . \tag{2.53}$$

Po dosazení tohoto vyjádření do (2.51) získáme vztahy

$$\begin{aligned} E_j &= \frac{C_j}{B_j - A_jE_{j+1}}, \\ F_j &= \frac{D_j + A_jF_{j+1}}{B_j - A_jE_{j+1}}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Dosaďme do výrazu (2.53) poslední bod sítě $j = N$, ve kterém je hodnota hledané funkce dána ve všech časech pravou okrajovou podmínkou:

$$\psi_N = E_N\psi_{N-1}^{n+1} + F_N .$$

Pravá okrajová podmínka je předem dána a nemůže být funkcí hledaného řešení, proto je $E_N = 0$. Konstanta F_N musí být rovna ψ_N, tj.

$$E_N = 0 , \qquad F_N = \psi_N . \tag{2.55}$$

V tuto chvíli známe hodnoty obou konstant E a F na pravém okraji a můžeme odstartovat výpočet. Z rovnic (2.54) postupně určíme

$$E_N, F_N \rightarrow E_{N-1}, F_{N-1} \rightarrow \cdots \rightarrow E_1, F_1 \,. \tag{2.56}$$

Nyní známe všechny konstanty E_j, F_j a z rovnice (2.53) postupně určíme hledané řešení

$$\psi_1 \rightarrow \psi_2^{n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \psi_{N-1}^{n+1} \,. \tag{2.57}$$

Od pravé okrajové podmínky tedy postupně proběhneme síť zprava doleva a určíme koeficienty E a F. Od levé okrajové podmínky poté proběhneme síť opačným směrem (zleva doprava) a určíme hledané řešení.

2.2.3 Posuzování stability schématu

Popišme si nakonec John von Neumannovu metodu posuzování stability numerického schématu. Pro jednoduchost ji opět odvodíme v jedné časové a jedné prostorové dimenzi. Zobecnění je přímočaré. Při numerickém výpočtu se vždy nacházíme na konečné síti, byť jakkoli veliké. Pokud označíme vlnový vektor $\boldsymbol{\kappa}$, můžeme provést Fourierův rozklad hledaného řešení do parciálních vln

$$\psi_{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x}) \equiv F(\boldsymbol{\kappa})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}} \,. \tag{2.58}$$

V jedné dimenzi máme

$$\psi_{\kappa}(x) \equiv F(\kappa)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\kappa x} \,. \tag{2.59}$$

Na konečné mříži bude diskrétní jak prostor, tak vlnový vektor (ten bude násobky základní prostorové „frekvence“ $\kappa_0 = \partial\varphi/\partial x = 2\pi/\Delta x$):

$$x_j = j\Delta x \,; \qquad \kappa_k = k\frac{2\pi}{\Delta x} \,; \qquad j,k = 1,2,\ldots \tag{2.60}$$

Číslo j indexuje prostorovou mříž, číslo k vlnový vektor a číslo n časové hladiny. Parciální vlna, ze které budeme superponovat řešení tedy je

► $$\psi_k(x_j) \equiv F_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi k\, j} \,;. \tag{2.61}$$

a celkové složené řešení

$$\psi(x_j) = \sum_k F_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi k\, j} \,. \tag{2.62}$$

Zvolené diferenční schéma je stabilní, pokud jednotlivé parciální vlny s časem nenarůstají, tj. platí

► $$|g| \;\le\; 1 \,; \qquad g \equiv \frac{F_k^{n+1}}{F_k^n} \,. \tag{2.63}$$

Tato podmínka se nazývá *John von Neumannova podmínka stability*. Ve skutečnosti ke stabilitě schématu postačí méně silná podmínka ve tvaru

$$|g| \le 1 + \mathcal{O}(\Delta t)\,. \tag{2.64}$$

A jak zjistíme, zda je námi navržené schéma stabilní? Postup je velmi jednoduchý. Do schématu dosadíme jednu konkrétní parciální vlnu (2.61), nalezneme g faktor a zjistíme, za jakých podmínek je v absolutní hodnotě menší nebo roven jedné.

◖ **Příklad 2.4:** Prozkoumejte stabilitu schématu (2.40) pro řešení rovnice difúze.

Řešení: Posuzované diferenční schéma má tvar

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n + \eta \frac{\psi_{j-1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \Delta t\,.$$

Do schématu dosadíme parciální vlnu (2.61):

$$F_k^{n+1}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k j} = F_k^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k j} + \eta \frac{F_k^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k (j-1)} - 2F_k^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k j} + F_k^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k (j+1)}}{(\Delta x)^2} \Delta t \quad \Rightarrow$$

$$F_k^{n+1}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k j} = F_k^n \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k j} + \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k (j-1)} - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k j} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k (j+1)} \right) \right] \quad \Rightarrow$$

$$g_k \equiv \frac{F_k^{n+1}}{F_k^n} = \left[1 + \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k} - 2 + \mathrm{e}^{+\mathrm{i}2\pi k} \right) \right] \quad \Rightarrow$$

$$g_k = 1 + \frac{2\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \left[\cos(2\pi k) - 1 \right].$$

Nejmenší možná hodnota funkce cosinus je −1 a největší +1, odsud plyne

$$g_k \in \left\langle 1 - 4\eta \Delta t/(\Delta x)^2, 1 \right\rangle.$$

Podmínka (2.63) je v pravé části intervalu zjevně splněna, v levé nesmí hodnota „podtéct“ pod −1, tj.

$$1 - 4\eta \Delta t/(\Delta x)^2 \ge -1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \le \frac{1}{2},$$

což je kritérium (2.41).

◗

◖ **Příklad 2.5:** Prozkoumejte stabilitu explicitního schématu z centrálních diferencí pro vlnovou rovnici.

Řešení: Uvažujme vlnovou rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0\,.$$

Odpovídající diferenční schéma bude

$$\frac{\psi_{j+1}^{n}-2\psi_{j}^{n}+\psi_{j-1}^{n}}{(\Delta x)^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\psi_{j}^{n+1}-2\psi_{j}^{n}+\psi_{j}^{n-1}}{(\Delta t)^2}=0\,.$$

Schéma je druhého řádu přesnosti v Δx i Δt a je zjevně explicitní (hodnota ψ na nové časové hladině se vyskytuje jen jednou). Po dosazení parciální vlny dostaneme pro g faktor rovnici

$$g-2+g^{-1}=-4c^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(\pi k)\qquad\Rightarrow$$

$$\left(g^{1/2}-g^{-1/2}\right)^2=-4c^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(\pi k)\qquad\Rightarrow$$

$$g^{1/2}-g^{-1/2}=\pm 2\,\mathrm{i}\,c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(\pi k)\qquad\Rightarrow$$

$$g\mp 2\,\mathrm{i}\,c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(\pi k)g^{1/2}-1=0\,,$$

což je kvadratická rovnice pro $g^{1/2}$. Snadno nalezneme řešení

$$g^{1/2}=\pm\,\mathrm{i}\,c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(\pi k)\pm\sqrt{1-c^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(\pi k)}\,.$$

Je zřejmé, že $|g|$ resp. $|g^{1/2}|$ bude omezena jednotkou, pokud platí tzv. *CFL podmínka* (Courantova-Friedrichsova-Levyho):

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x}\le 1\,. \tag{2.65}$$

Jde o obecnou podmínku pro explicitní schémata, která vyjadřuje, že rychlost šíření informace daná diskretizací musí být vyšší než všechny fyzikální rychlosti sledované schématem, v tomto případě $\Delta x/\Delta t \ge c$.



2.3 Numerické hledání kořenů polynomiální rovnice

Při hledání vlastností disperzní relace jsme často postaveni před úlohu nalézt kořeny polynomiální rovnice v komplexním oboru

$$P(z) \equiv \sum_{k=0}^{N} c_k z^k = 0 . \tag{2.66}$$

Koeficienty polynomu c_k jsou reálné. Existuje řada vhodných algoritmů, v tomto stručném přehledu zmíníme tři z nich, které stojí za vyzkoušení.

2.3.1 Weylův algoritmus

Tento účinný numerický algoritmus je čistě geometrický a jeho autorem je německý matematik Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955). V komplexní rovině nejprve zkonstruujeme tak velký čtverec, aby obsahoval všechny kořeny rovnice (2.66). Poté čtverec rozdělíme na čtyři menší čtverce a z množiny čtverců vyřadíme ty, v jejichž blízkosti žádný kořen není. „Podezřelé“ čtverce dále dělíme a nadále vynecháváme ty, v jejichž okolí žádný kořen není. Po dostatečně dlouhé době víme, že kořeny se nacházejí v blízkosti zbylých čtverců. Celý algoritmus je možné rozdělit do čtyř kroků:

1. Vstup

Zadáme stupeň polynomu, koeficienty polynomu a přesnost ε, se kterou chceme nalézt kořeny rovnice (2.66).

2. Přeškálování polynomu

Kořeny z_k polynomiální rovnice (2.66) jsou obecně komplexní, maximální absolutní velikost všech kořenů nepřesáhne hodnotu, kterou explicitně odhadl americký odborník na numerické výpočty Donald Erwin Knuth (*1938) výrazem

► $$A_{\max} = 2 \cdot \max_k \left\{ \left| c_k / c_N \right| \right\} . \tag{2.67}$$

Jiným podobným odhadem je

► $$A_{\max} = 1 + \max_k \left\{ \left| c_k / c_N \right| \right\} . \tag{2.68}$$

Polynom $P(A_{\max} z)$ má kořeny $z_k / A_{\max}$. Proto přeškálujeme původní polynom na

$$Q(\bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^{N} \bar{c}_k \bar{z}^k ; \qquad \bar{z} \equiv \frac{z}{A_{\max}} , \qquad \bar{c}_k \equiv c_k A_{\max}^k . \tag{2.69}$$

Pro kořeny nového polynomu platí

$$Q(\bar{z}_k) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad |\bar{z}_k| < 1\,, \tag{2.70}$$

tj. všechny kořeny leží v komplexní rovině uvnitř jednotkového kruhu. Po jejich nalezení se budeme muset vrátit k původním proměnným.

3. Generování a testování soustavy čtverců

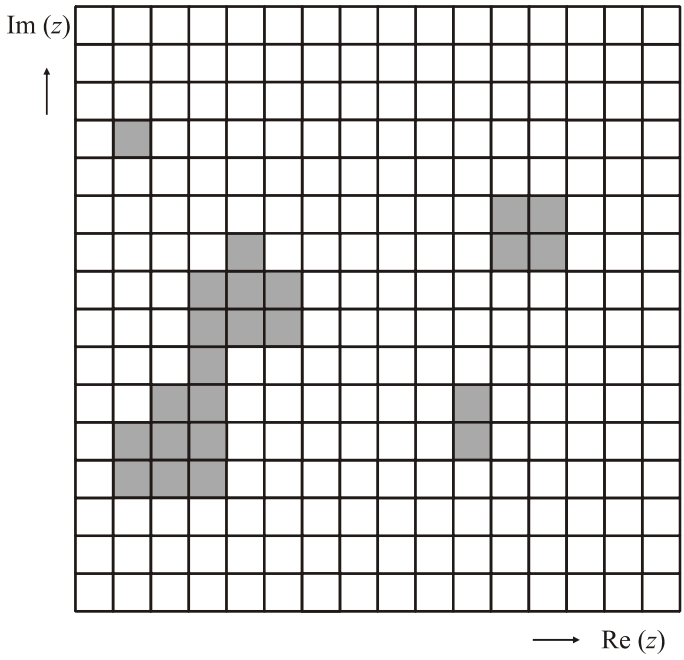
Nyní zkonstruujeme soustavu „podezřelých" čtverců. V prvním kroku jde o jediný čtverec centrovaný v počátku s hranou $a = 2$. Jeho rohy mají souřadnice (+1,+i), (+1,−i), (−1,−i), (−1,+i) a z (2.70) máme zaručeno, že všechny hledané kořeny leží uvnitř tohoto čtverce. V dalších kroku každý existující čtverec rozdělíme na čtyři menší čtverce a testujeme, zda nějaký kořen leží uvnitř opsané kružnice (koeficienty c_k přepočteme vzhledem ke středu čtverce). Ponecháme jen čtverce splňující test

► $$|\bar{c}_0| < \sum_{k=1}^{N} |\bar{c}_k| r^k \ , \tag{2.71}$$

kde r je poloměr kružnice opsané čtverci o hraně a, tj.

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,. \tag{2.72}$$

Jen u prvního čtverce máme zajištěno, že všechny kořeny jsou uvnitř. U dalších čtverců víme z testu (2.71) jen to, že kořen je buď uvnitř podezřelého čtverce, nebo v jeho těsné blízkosti. Z počátku počet čtverců exponenciálně roste, později lineárně klesá.



Obr. 2.6: Weylův algoritmus po čtyřech krocích. Podezřelé čtverce jsou šedivé, v jejich blízkosti se nacházejí kořeny polynomiální rovnice. Oblast vlevo dole se po dalším zjemnění pravděpodobně rozpadne na dvě.

4. Odhad kořenů

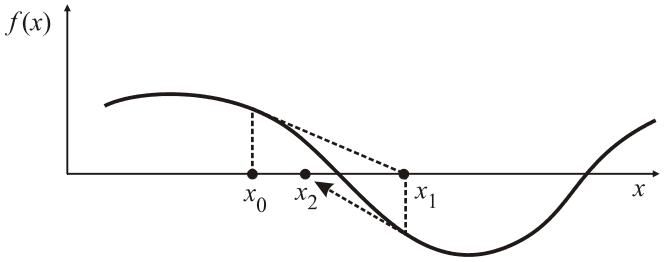
Soustavu čtverců rozdělíme do skupin. Skupinu tvoří každá množina vzájemně se dotýkajících čtverců. U každé skupiny nalezneme její střed $\overline{z}_k$ (můžeme například nalézt těžiště skupiny). Tento střed je odhadem kořenu přeškálované polynomiální rovnice. Nepřeškálovaný kořen bude mít hodnotu

$$z_k = A_{\max} \overline{z}_k \,. \tag{2.73}$$

Kroky 3 a 4 neustále opakujeme až do získání požadované přesnosti. Výpočet můžeme například ukončit, pokud rozměr čtverce (nebo největší skupiny) dosáhne předem zadané hodnoty ε. Popsaným algoritmem nezjistíme násobnosti nalezených kořenů, nicméně existují jednoduché metody, jak násobnost kořenu odhadnout.

2.3.2 Newtonův algoritmus

Newtonův algoritmus je nejjednodušším algoritmem pro nalezení řešení rovnice $f(x) = 0$. Začněme dle obrázku 2.7 z libovolného bodu x_0 na ose x. Další bod v řadě získáme jako průsečík tečny grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$ s osou x. Pokud byl počáteční bod vhodně zvolen, posloupnost takto konstruovaných bodů konverguje k průsečíku grafu funkce s osou x, tj. k řešení rovnice $f(x) = 0$.



Obr. 2.7: Newtonův algoritmus

Matematický předpis algoritmu je velmi jednoduchý. Napišme rovnici tečny v bodě x_n:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \tag{2.74}$$

Nový bod je průsečíkem s osou x, proto pro něho platí

$$x = x_{n+1}\,; \quad y = 0\,. \tag{2.75}$$

Dosazením podmínky (2.75) do rovnice tečny (2.74) máme ihned základní předpis Newtonova algoritmu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,. \tag{2.76}$$

Zcela obdobně můžeme hledat komplexní i reálné kořeny polynomiální rovnice (2.66):

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}\,. \tag{2.77}$$

Newtonův algoritmus je sice rychlý, ale má jeden základní nedostatek – volbu počátečního bodu. Z různých počátečních oblastí metoda konverguje k různým kořenům polynomiální rovnice, existují ale i oblasti, ze kterých metoda nekonverguje k žádnému kořenu. Můžeme samozřejmě náhodně zkoušet různé počáteční body a zjišťovat, zda konvergují k některému z kořenů, nicméně u polynomiálních rovnic vysokého stupně je tato metoda zdlouhavá a nezaručuje nám objevení všech kořenů. Pokud se rozhodneme využít Newtonův algoritmus, je klíčové umět zvolit určitou sadu počátečních bodů tak, aby posloupnosti z nich generované konvergovaly ke všem kořenům dané polynomiální rovnice.

2.3.3 Zobecněný Newtonův algoritmus

John Hubbard, Dierk Schleicher a Scott Sutherland [41] doplnili Newtonovu metodu o účinný algoritmus volby počáteční sítě bodů, který zajišťuje konvergenci Newtonovy metody ke všem řešením polynomiální rovnice (k některým řešením bude konvergovat více bodů sítě, ale žádné řešení neztratíme). Základní algoritmus má pět kroků:

1. Vstup

Zadáme stupeň polynomu, koeficienty polynomu a přesnost ε, se kterou chceme nalézt kořeny rovnice (2.66).

2. Přeškálování polynomu

Pro úspěšnost metody je třeba zajistit, aby všechny kořeny ležely uvnitř jednotkového kruhu. Provedeme proto přeškálování stejné jako ve Weylově algoritmu, tj. nalezneme

► $$A_{\max} = 1 + \max_k \left\{ \left| c_k / c_N \right| \right\} \tag{2.78}$$

a budeme pracovat s polynomem

$$Q(\bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^{N} \bar{c}_k \bar{z}^k \; ; \qquad \bar{z} \equiv \frac{z}{A_{\max}} , \qquad \bar{c}_k \equiv c_k A_{\max}^k , \tag{2.79}$$

jehož kořeny leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině.

3. Volba počáteční sítě bodů

Počáteční síť bodů zajistí, že se v síti naleznou body, které konvergují ke všem kořenům polynomu při výpočtu Newtonovou metodou. Odvození volby této sítě je v [41]. Nejprve určíme síť vhodných poloměrů a úhlů počátečních bodů v komplexní rovině:

$$r_l \equiv \left(1+\sqrt{2}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)^{\frac{2l-1}{4L}} \; ; \qquad l = 1,\ldots,L \; ; \qquad L \equiv \lceil 0,26632 \ln N \rceil , \tag{2.80}$$

$$\varphi_m \equiv \frac{2\pi m}{M} ; \qquad m = 0,\ldots,M-1 ; \qquad M \equiv \lceil 8,32547\, N \ln N \rceil . \tag{2.81}$$

Hledaná počáteční síť bodů potom je

$$\bar{z}_{lm} = r_l \exp(\mathrm{i}\varphi_m) ; \qquad l = 1,\ldots,L ; \qquad m = 0,\ldots,M-1 . \tag{2.82}$$

Počáteční síť má *LM* bodů. Závorka $\lceil x \rceil$ označuje nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno *x*, v programovacích jazycích se tato funkce označuje CEILING nebo CEIL.

4. Iterace

Iterace, která zajistí, že *K*-tý člen iterační posloupnosti řeší rovnici $Q(z) = 0$ s přesností $|Q(\bar{z}_K)| < \varepsilon$ se provádí pomocí Newtonova schématu pro každý bod sítě (2.82), který považujeme za počáteční bod generované posloupnosti, tj $z_0 = z_{lm}$,

$$\bar{z}_{k+1} = \bar{z}_k - \frac{Q(\bar{z}_k)}{Q'(\bar{z}_k)}; \qquad k = 1 \ldots K; \qquad K \equiv \left\lceil \frac{\ln(1+\sqrt{2}) \; - \; \ln \varepsilon}{\ln N \; - \; \ln(N-1)} \right\rceil . \tag{2.83}$$

Metoda zajišťuje, že uvedené přesnosti bude dosaženo dříve než po *K* krocích. Z počáteční sítě bude mnoho kořenů získáváno duplicitně, nicméně žádný nebude vynechán. Některé iterace nepovedou k cíli, ty poznáme podle toho, že poslední člen iterace nesplňuje relaci $|Q(\bar{z}_K)| < \varepsilon$.

5. Kořeny

Aproximace hledaného kořenu je po zpětném škálování

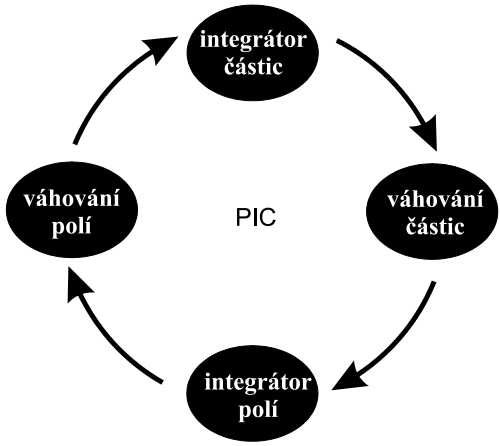
$$z_k = A_{\max} \bar{z}_k \, . \tag{2.84}$$



2.4 PIC simulace

PIC (Particle in Cell, částice v buňce) patří mezi nejoblíbenější algoritmy ve fyzice plazmatu. Jde o hybridní simulace – částice se pohybují v prostoru volně v souladu s pohybovou rovnicí, pole jsou ale známa jen ve vrcholech předem dané mříže. Částice neinteraguje se všemi ostatními částicemi, ale se středním polem generovaným celým souborem částic. Označíme-li N počet částic v simulaci, sníží tento přístup výpočetní náročnost z N^2 (pokud interaguje každá částice s každou) na $N \log N$. Každá částice v PIC kódu představuje v mnoha simulacích celý shluk skutečných částic.

PIC algoritmus je vhodný k popisu vln a nestabilit v plazmatu, přepojení magnetických indukčních čar, ohřevu plazmatu, interakce laserového paprsku s plazmatem, ke sledování vývoje turbulencí atd. Úspěšnost simulace je podmíněna vhodnou volbou časového a prostorového kroku. Obecně by časový krok integrátoru pohybové rovnice měl být výrazně kratší než perioda odpovídající plazmové frekvenci elektronů a prostorový krok mříže by měl být menší (nebo alespoň srovnatelný), než je Debyeova vzdálenost v simulovaném plazmatu. Základní cyklus PIC metody probíhá ve čtyřech stěžejních krocích:

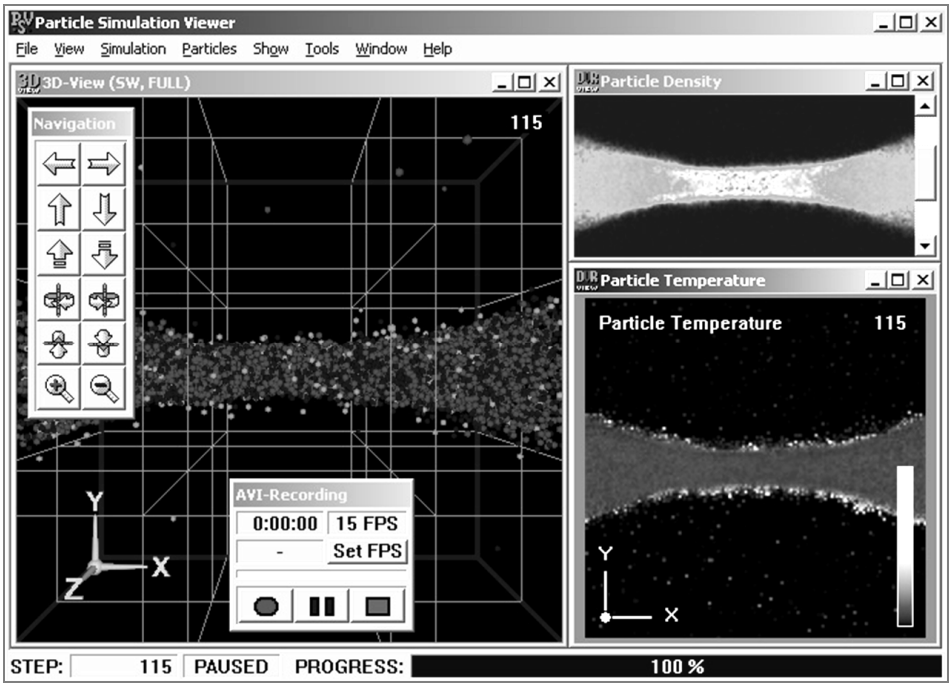


Obr. 2.8: Základní cyklus PIC algoritmu

1. *Váhování částic*. Ze známých poloh a rychlostí částic určíme hustotu náboje a proudovou hustotu ve vrcholech mříže. Částici zpravidla rozdělíme mezi nejbližší vrcholy podle nějakého pravidla, které zajistí, aby největší část částice „patřila“ do nejbližšího vrcholu. Ve vrcholech mříže po tomto kroku známe zdrojové členy Maxwellových rovnic.
2. *Integrátor polí.* Z Maxwellových rovnic určíme hodnotu elektrického a magnetického pole ve vrcholech mříže. Maxwellovy rovnice se zpravidla řeší pro potenciály a teprve poté se určují elektromagnetická pole. Lze využít veškeré dostupné metody pro řešení parciálních diferenciálních rovnic (sítě, konečné prvky, rychlou Fourierovu transformaci atd.). Po tomto kroku známe hodnoty polí ve vrcholech mříže.

3. *Váhování polí.* Po předchozím kroku jsou pole známá ve vrcholech mříže a je nutné zjistit hodnoty polí v místech, kde jsou lokalizovány částice. Pole je třeba „rozvážhovat“ do pozice konkrétní částice, jde o obrácený postup než u váhování částic. Po tomto kroku známe hodnotu pole v místě libovolně zvolené částice.
4. *Integrátor částic.* Procházíme jednotlivé částice (pole u nich již známe) a pohneme s nimi ve shodě s pohybovými rovnicemi. Integraci pohybových rovnic provádíme standardními metodami (například Runge-Kutta. Leap-Frog atd., viz kapitola 2.1).

Základní cyklus je srdcem PIC metody, nicméně k její implementaci je potřeba celá řada pomocných procedur. Důležité jsou počáteční podmínky (jakým způsobem je generováno počáteční rozdělení částic v plazmatu) a okrajové podmínky (jak se plazma má chovat na hranicích sledované oblasti). PIC výpočet není myslitelný bez zobrazování částic a polí, zde se nabízí nepřeberné množství metod – barvy částic mohou znázorňovat náboj, odstín barvy teplotu, částice za sebou mohou nechávat postupně mizející stopu nebo jsou zobrazeny jen jako pohybující se body, kuličky či mnohostěny. Pole zpravidla zobrazujeme pomocí indukčních čar, buď prostorových nebo v různých řezech. Důležitá je tzv. diagnostika plazmatu, při které v probíhající simulaci počítáme makroskopicky ověřitelné parametry plazmatu (teplotu, koncentraci, měrná tepla, susceptibilitu, permeabilitu, permitivitu atd.). Pomocí Monte Carlo metod můžeme realizovat srážky nabitých částic s neutrály. Vzhledem k tomu, že interakce nabitých částic v rámci jedné buňky sítě je PIC metodou podceněna, je možné doplnit výpočet i Monte Carlo metodou, která zahrne náhodné binární srážky nabitých částic v rámci dané buňky sítě. Částicí většinou chápeme reprezentanta celého shluku částic, proto někdy hovoříme o metodě CIC (Cloud in Cell).



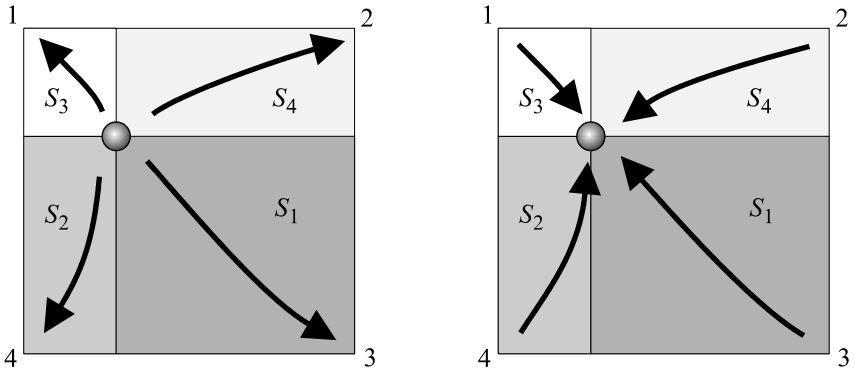
Obr. 2.9: Grafické uživatelské rozhraní programového balíku PIC vyvíjeného na pracovišti autora

2.4.1 Váhování

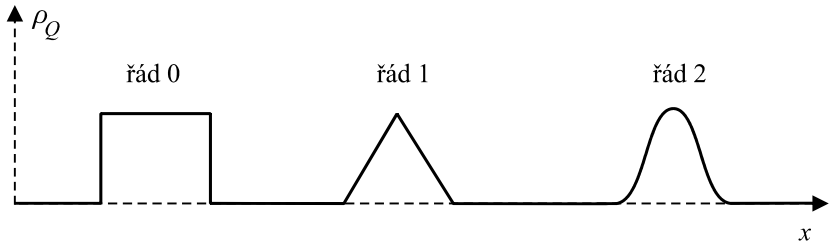
Váhování je v PIC metodě prováděno dvakrát. Jednou jsou váhovány částice do vrcholů mříže a podruhé je váhováno pole z vrcholů mříže k částicím. Oba typy váhování by měly být stejného řádu. Popišme si nyní, jak probíhá váhování částic, zpětné váhování polí je obdobné.

Nejjednodušší je tzv. váhování *nultého řádu*, při kterém předpokládáme, že částice patří celá do nejbližšího vrcholu mříže. Takové váhování je sice velmi rychlé, ale má své nevýhody. Představme si částici letící napříč mříží a sledujme například hustotu náboje v konkrétním vrcholu mříže. Hustota náboje bude nejprve nulová, jakmile se částice dostatečně ke sledovanému vrcholu přiblíží, skokem vzroste na maximální hodnotu a po odletu částice opět skokem poklesne na nulu. Takovéto skokové změny mohou zapříčinit numerické nestability metody. Většinou se proto využívá tzv. váhování prvního řádu (případně vyšších řádů), které si objasníme pro rovinný případ. Částice je rozváhována k nejbližším vrcholům (v rovině jde o 4 vrcholy) v poměru protilehlých ploch, čímž dosáhneme toho, že nejbližšímu vrcholu patří největší část částice a nejvzdálenějšímu nejmenší.

V prostorovém případě se váhování děje k nejbližším osmi sousedům v poměru protilehlých objemů. Existují i váhování vyšších řádů, která jsou kvalitnější, ale výpočetně mnohem náročnější.



Obr. 2.10: Váhování prvního řádu (nalevo je ukázáno váhování částic, napravo rozváhovíní polí). Princip je stejný.



Obr. 2.11. Průběh hustoty náboje ve vrcholu mříže způsobený prolétávající částicí při různých váhováních

2.4.2 Řešení polí

Pro řešení polí ve vrcholech mříže existuje velké množství nejrůznějších metod. Pokud se pole změní za zvolený časový krok málo, postačí řešit Poissonovy rovnice pro potenciály (ρ_Q je hustota náboje, $\mathbf{j}_Q$ je proudová hustota)

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_Q}{\varepsilon_0}; \qquad \nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}_Q\,. \tag{2.85}$$

Po nalezení potenciálů (jakoukoli numerickou metodou) určíme pole ze vztahů

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi; \qquad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,. \tag{2.86}$$

Popišme stručně metodu řešení založenou na Fourierově transformaci, která je vhodná pro oblast ve tvaru kvádru ($L_x \times L_y \times L_z$) s periodickými okrajovými podmínkami. Celý algoritmus má pět kroků:

1. Diskretizace Poissonovy rovnice.
2. Diskrétní Fourierova transformace (DFT) rovnic.
3. Algebraické řešení v **k** prostoru.
4. Provedení inverzní diskrétní Fourierovy transformace (IDFT), získání potenciálu.
5. Výpočet polí ve vrcholech mříže.

Popišme tyto kroky na Poissonově rovnici pro potenciál elektrického pole. Diskretizaci můžeme provést například přes centrální diference (hustotu náboje budeme značit ρ):

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta_x^2\varphi}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta_y^2\varphi}{(\Delta y)^2} + \frac{\Delta_z^2\varphi}{(\Delta z)^2} = -\frac{\rho_{n_1,n_2,n_3}}{\varepsilon_0};\\
&\frac{\Delta_x^2\varphi}{(\Delta x)^2} \equiv \frac{\varphi_{n_1+1,n_2,n_3} - 2\varphi_{n_1,n_2,n_3} + \varphi_{n_1-1,n_2,n_3}}{(\Delta x)^2},\\
&\frac{\Delta_y^2\varphi}{(\Delta y)^2} \equiv \frac{\varphi_{n_1,n_2+1,n_3} - 2\varphi_{n_1,n_2,n_3} + \varphi_{n_1,n_2-1,n_3}}{(\Delta y)^2},\\
&\frac{\Delta_z^2\varphi}{(\Delta z)^2} \equiv \frac{\varphi_{n_1,n_2,n_3+1} - 2\varphi_{n_1,n_2,n_3} + \varphi_{n_1,n_2,n_3-1}}{(\Delta z)^2}.
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) funkce F a inverzní diskrétní Fourierova transformace (IDFT) jsou dány vztahy:

$$\tilde{F}(k_1,k_2,k_3) = \frac{1}{N_1N_2N_3}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1} F(n_1,n_2,n_3)\exp\left[2\pi\mathrm{i}\left(\frac{k_1n_1}{N_1}+\frac{k_2n_2}{N_2}+\frac{k_3n_3}{N_3}\right)\right];$$

$$F(n_1,n_2,n_3) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{k_3=0}^{N_3-1} \tilde{F}(k_1,k_2,k_3)\exp\left[-2\pi\mathrm{i}\left(\frac{k_1n_1}{N_1}+\frac{k_2n_2}{N_2}+\frac{k_3n_3}{N_3}\right)\right].$$

Aplikace DFT převede rovnici (2.87) do **k** prostoru:

$$\left[\frac{4N_1^2}{L_x^2}\sin^2\frac{\pi k_1}{N_1}+\frac{4N_2^2}{L_y^2}\sin^2\frac{\pi k_2}{N_2}+\frac{4N_3^2}{L_z^2}\sin^2\frac{\pi k_3}{N_3}\right]\tilde{\varphi}(k_1,k_2,k_3)=\frac{\tilde{\rho}(k_1,k_2,k_3)}{\varepsilon_0}. \quad (2.88)$$

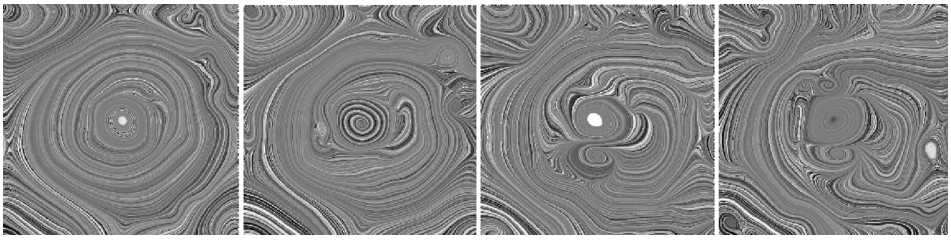
Poznamenejme, že spojitá Fourierova transformace pro spojitou proměnnou by dala $k^2\tilde{\varphi}=\tilde{\rho}/\varepsilon_0$. Kvadráty funkce sinus, které se objevily ve výsledku, jsou způsobeny vlivem mříže. Algebraické řešení rovnice je velmi jednoduché:

$$\tilde{\varphi}(k_1,k_2,k_3)=\frac{\tilde{\rho}(k_1,k_2,k_3)}{\varepsilon_0\left[\frac{4N_1^2}{L_x^2}\sin^2\frac{\pi k_1}{N_1}+\frac{4N_2^2}{L_y^2}\sin^2\frac{\pi k_2}{N_2}+\frac{4N_3^2}{L_z^2}\sin^2\frac{\pi k_3}{N_3}\right]}. \quad (2.89)$$

Hledaný potenciál získáme inverzní diskrétní Fourierovou transformací

$$\varphi=\mathrm{IDFT}(\tilde{\varphi}). \quad (2.90)$$

Z potenciálu již snadno určíme elektrické pole ve vrcholech mříže. Namísto DFT/IDFT algoritmu je možné využít algoritmus pro rychlou Fourierovu transformaci (FFT/IFFT), který je rychlejší (namísto N^2 operací je zapotřebí $N \log N$ operací) a je také implementován ve většině numerických knihoven.



Obr. 2.12: Časový vývoj magnetických indukčních čar v příčném řezu plazmového vlákna (400 000 elektronů a iontů). Jde o výsledek PIC simulace autora, pole je zobrazeno metodou LIC (Line Integral Convolution).

2.4.3 Řešení pohybu částic

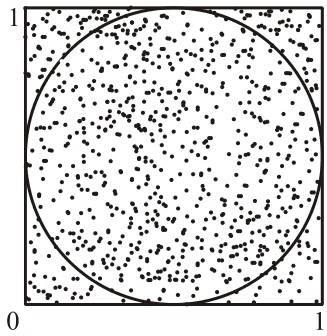
Řešení pohybu nabité částice ve známém poli jsme se podrobně věnovali v kapitole 2.1. K řešení obyčejných diferenciálních rovnic lze zvolit libovolnou z popsaných metod nebo jinou metodu popsanou v literatuře, která je vhodná pro simulaci pohybů nabitých částic v elektrických a magnetických polích.

2.5 Monte Carlo simulace

K nejvýraznější skupině numerických metod využívaných ve statistické fyzice patří *Monte Carlo metody*. Pod tímto názvem se skrývají algoritmy založené na posloupnostech náhodných čísel a ve fyzice je údajně použil poprvé Enrico Fermi ve 30. letech dvacátého století při popisu vlastností nově objeveného neutronu. Tato práce ale nebyla publikována a nedochovala se. První prokázané využití je až z konce 40. let dvacátého století, kdy byly Monte Carlo algoritmy hojně využívány v americké Národní laboratoři v Los Alamos. K jejich průkopníkům patřili Nicolas Metropolis (ten metodu údajně pojmenoval), John von Neumann, Enrico Fermi, Stanislaw Ulam, Edward Teller a Marshall Rosenbluth. Od té doby zaznamenaly Monte Carlo výpočty nebývalý rozvoj ve fyzice, matematice, chemii, ale i v ekonomii a v dalších vědních disciplinách.

Je třeba ale doplnit, že obdobné metody pod názvem *statistické vzorkování* využívali matematici k výpočtu vícerozměrných určitých integrálů již v 18. století. Náhodná čísla tenkrát nebyla generována počítačem, ale za pomoci speciálních tabulek. Dnes má téměř každý programovací jazyk implementováno několik generátorů náhodných čísel v intervalu <0, 1), jejich kvalita ale nemusí být pro Monte Carlo výpočet dostatečná. V této kapitole si ukážeme základní principy Monte Carlo metod a jejich některé využití. Začněme dvěma jednoduchými úvodními příklady.

◖ **Příklad 2.6:** K velmi názorným ukázkám použití Monte Carlo metod patří výpočet Ludolfova čísla π. K tomu postačí generovat náhodné body do jednotkového čtverce <0, 1>×<0, 1>.



Obr. 2.13: Monte Carlo výpočet čísla π

Využijeme nějaký vestavěný generátor γ_k čísel v intervalu <0, 1) a vygenerujeme mnoho bodů „padnoucích“ do plochy čtverce:

$$x_k = \gamma_{2k-1}\,,$$
$$y_k = \gamma_{2k}\quad,\qquad k = 1, 2, \ldots$$

Budeme sledovat počet bodů generovaných do jednotkového čtverce ($N_\square$) a dále počet $N_\circ$ těch z nich, které padly do jednotkového kruhu (splňují relaci $x^2 + y^2 < 1$) podle obrázku 2.13. Pro dosti velký počet bodů jsou jejich počty úměrné plochám obrazců:

$$\frac{N_{\bigcirc}}{N_{\square}} \approx \frac{S_{\bigcirc}}{S_{\square}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \pi \approx 4\frac{N_{\bigcirc}}{N_{\square}}.$$

Pouhým počítáním generovaných bodů tak můžeme při značném počtu kroků určit s vysokou přesností číslo π. ◗

◖ **Příklad 2.7:** Jako další ukázku uveďme algoritmus pro výpočet určitého integrálu

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Mnohokrát po sobě generujeme bod z definičního intervalu hledaného integrálu (a, b):

$$x_k = a + \gamma_k (b-a)\,.$$

Nyní najdeme střední hodnotu integrované funkce f na integračním intervalu (a, b):

$$\overline{f} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,.$$

Integrál je potom přibližně roven ploše obdélníka s výškou rovnou střední hodnotě f:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ \doteq\ \overline{f}\cdot(b-a)\,.$$

Pro výpočet jednorozměrného integrálu není tato metoda příliš výhodná. Integrál je roven ploše pod křivkou a mnohem rychlejší je například nahradit tuto plochu větším počtem lichoběžníků a hodnotu integrálu odhadnout pomocí součtu ploch těchto lichoběžníků. Existují ale mnohorozměrné integrály, kde jsou Monte Carlo metody mnohdy jedinou možností, jak odhadnout jejich hodnotu. ◗

2.5.1 Generátory náhodných čísel

Je zřejmé, že pro Monte Carlo výpočty je rozhodující kvalita a rychlost generátoru náhodných čísel. Ideální generátor je odvozen od skutečně náhodné veličiny, například z šumu elektronické součástky nebo nějakého kvantového jevu. Takové hardwarové generátory se využívají jen pro specializované výpočty. Jejich hlavní nevýhodou je, že již jednou provedený výpočet není možné zopakovat. Zpravidla se využívají softwarové generátory založené na posloupnosti pseudonáhodných čísel generovaných určitým matematickým algoritmem. Perioda těchto generátorů je konečná a generovaná čísla se po určité době začnou opakovat. K základním požadavkům na „dobrý“ generátor patří:

1) dostatečně dlouhá perioda generátoru,
2) vysoká rychlost generovaní pseudonáhodných čísel,
3) rovnoměrné rozložení generovaných čísel,
4) co nejmenší korelace mezi jednotlivými skupinami generovaných čísel.

K testům kvality generátoru může být využit například programový balík DIEHARD vyvinutý na Floridské státní univerzitě. K nejčastěji používaným generátorům při Monte Carlo výpočtech patří:

Lineární multiplikativní kongruenční generátor (LCG)

Generátor navrhl v roce 1949 americký matematik Derrick Henry Lehmer. Posloupnost pseudonáhodných čísel je generována za pomoci předpisu

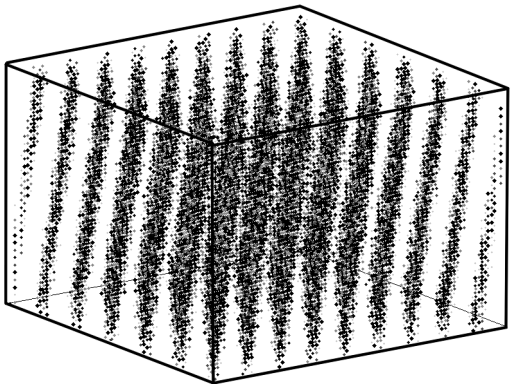
$$\gamma_k = (\lambda \cdot \gamma_{k-1} + C) \bmod P\,, \tag{2.91}$$

kde způsob generování je ovlivněn čtyřmi parametry λ, C, P a γ_0. Maximální možná perioda je $P - 1$. První číslo posloupnosti γ_0 je tzv. „semínko“. Deterministicky určuje celou následující posloupnost. Využití stejného semínka umožní opakování již provedeného výpočtu. K velmi oblíbeným generátorům 60. až 80. let 20. století patřil LCG generátor IBM RANDU s parametry

$$P = 2^{31}\,, \quad \lambda = 2^{16} + 3\,, \quad C = 0\,.$$

V takto generované posloupnosti se ale vyskytují korelace typu 2^n, které mohou některé typy výpočtů zcela znehodnotit. Body generované do 3D krychle nejsou rozmístěny rovnoměrně, ale jsou lokalizovány v patnácti rovinách, které jsou při určitém směru pohledu dobře rozeznatelné. Dnes se proto generátory LCG využívají jen jako základ kombinovaných generátorů, například dvou provázaných generátorů LCG do jediného generátoru

$$\begin{aligned} \xi_k &= (\lambda_1 \cdot \xi_{k-1} + C_1) \bmod P_1\,, \\ \eta_k &= (\lambda_2 \cdot \eta_{k-1} + C_2) \bmod P_2\,; \\ \gamma_k &= (\xi_k + \eta_k) \bmod \max(P_1, P_2)\,. \end{aligned} \tag{2.92}$$



Obr. 2.14: Příklad nevhodného generátoru náhodných čísel IBM RANDU. V 3D krychli jsou čísla generována jen v patnácti rovinách.

Fibonacciho generátory

Jde o generátory využívající ke generování i starší členy posloupnosti náhodných čísel:

$$\gamma_k = f(\gamma_{k-p}, \gamma_{k-q}) \bmod P\,. \tag{2.93}$$

Tyto generátory mají zpravidla vynikající vlastnosti, je však třeba uchovávat určitý počet vygenerovaných čísel. Funkce f může být prostým násobením, odčítáním nebo sčítáním. Ke kvalitním generátorům vhodným pro Monte Carlo výpočty patří například L‘Ecuyerův generátor

$$\begin{gathered}\gamma_k = (a_1\gamma_{k-1} + a_5\gamma_{k-5}) \bmod P\,;\\ a_1 = 107374182\,,\\ a_5 = 104480\,,\\ P = 2^{31} - 1\end{gathered} \tag{2.94}$$

nebo velmi kvalitní kombinovaný L'Ecuyerův generátor

$$\begin{gathered}\gamma_k = (\xi_k - \eta_k) \bmod P_1\,;\\ \xi_k = (a_1\xi_{k-1} + a_2\xi_{k-2} + a_3\xi_{k-3}) \bmod P_1\,;\\ \eta_k = (b_1\eta_{k-1} + b_2\eta_{k-2} + b_3\eta_{k-3}) \bmod P_2\,;\\ a_1 = 0\,,\quad a_2 = 63308\,,\quad a_3 = -183326\,,\\ b_1 = 86098\,,\quad b_2 = 0\,,\quad b_3 = -539608\,,\\ P = 2^{31} - 1\,,\quad P_2 = 2145483479\,.\end{gathered} \tag{2.95}$$

V Monte Carlo simulacích je možné využít i dalších specializovaných generátorů náhodných čísel, jejich popis ale překračuje rámec této knihy.

2.5.2 Realizace pravděpodobnostního rozdělení

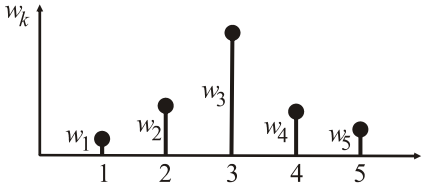
Často potřebujeme jiný generátor, než je rovnoměrný. Například můžeme chtít zkonstruovat generátor, který nám bude generovat děje ve shodě s nějakým pravděpodobnostním rozdělením. V této kapitole se naučíme některé způsoby realizace pravděpodobnostních rozdělení.

Metoda střelby (distribuční posloupnosti nebo funkce)

Představme si, že máme N dějů s pravděpodobnostmi $w_1, w_2, \ldots, w_N$. Zaveďme náhodnou veličinu ξ, v prvním řádku je pořadí děje a ve druhém řádku pravděpodobnost děje.

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N \\ w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_N \end{pmatrix} \tag{2.96}$$

Graficky můžeme pravděpodobnostní rozdělení znázornit například takto (na obrázku bylo zvoleno 5 dějů):



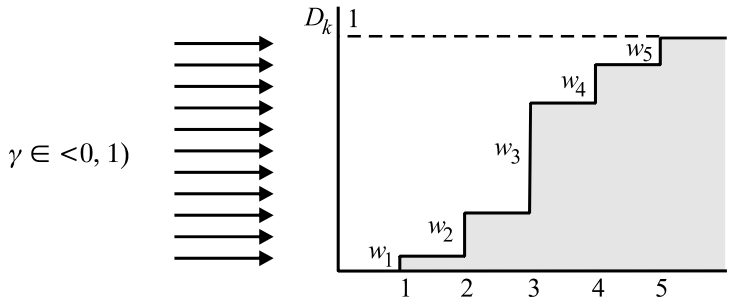
Obr. 2.15: Diskrétní pravděpodobnostní rozdělení

Vytvořme „schody", u kterých bude výška jednotlivých stupňů odpovídat velikosti pravděpodobnosti děje. V matematice se takovéto schody nazývají distribuční posloupnost (ve spojitém případě distribuční funkce). Poslední schod musí proto být ve výšce 1,

protože je součtem všech pravděpodobností. Distribuční posloupnost je definována jednoduchým předpisem

$$D_k \equiv \sum_{j=1}^{k} w_j \,. \tag{2.97}$$

Posloupnost je znázorněna na následujícím obrázku. Výška schodu vždy odpovídá dané pravděpodobnosti, celková výška schodiště je rova jedné.

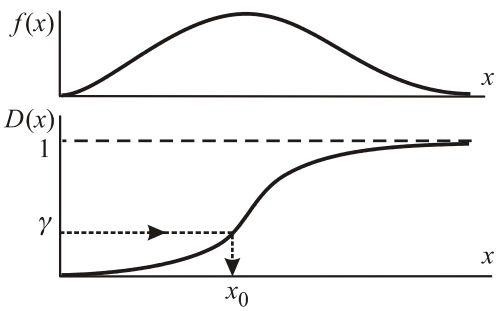


Obr. 2.16: Distribuční posloupnost (diskrétní případ)

Vždy jde o rostoucí posloupnost s hodnotami mezi 0 a 1. Právě toho se využívá při Monte Carlo realizaci děje. Mnohokrát opakovaně generujeme náhodné číslo z intervalu <0, 1) a každé si představíme jako střelu, která zleva nalétává na naše schody. Zjistíme do kterého schodu se střela trefila (viz obrázek 2.16). Padla-li do schodu k, prohlásíme, že nastal děj k. Vzhledem k tomu, že výška schodu odpovídá pravděpodobnosti děje, generujeme náhodné děje přesně ve shodě s pravděpodobnostním rozdělením. Ve spojitém případě můžeme postupovat podobně. Je-li hustota pravděpodobnosti $f(x)$, zavedeme distribuční funkci předpisem

$$D(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \,. \tag{2.98}$$

Opět jde o rostoucí funkci s limitou v pravém krajním bodě danou součtem všech pravděpodobností $\lim_{x\to\infty} D(x) = 1$.



Obr. 2.17: Hustota pravděpodobnosti a její distribuční funkce (spojitý případ)

Metodou střelby můžeme stejně jako v diskrétním případě realizovat rozdělení pomocí rovnoměrného generátoru γ z intervalu <0, 1). Řekneme, že padl děj x_0, je-li $D(x_0) = \gamma$. Pro uskutečněný děj tedy platí

$$x = D^{-1}(\gamma)\,. \tag{2.99}$$

Celý postup realizace daného rozdělení je proto ve spojitém případě následující:

1. nalezneme distribuční funkci $D(x)$,
2. nalezneme inverzní funkci k $D(x)$,
3. generujeme rovnoměrně náhodné číslo $\gamma \in$ <0, 1),
4. prohlásíme, že „padl“ děj $x = D^{-1}(\gamma)$.

◖ **Příklad 2.8:** Realizujte rovnoměrné rozdělení na intervalu (a, b) .

Řešení: Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je konstantní funkce $f(x)$. Hodnotu konstanty určíme z normovací podmínky:

$$f(x) = K\,; \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$K\,(b-a) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad .$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Nyní snadno nalezneme distribuční funkci

$$D(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x-a}{b-a}$$

a položíme ji rovnou náhodnému číslu γ z intervalu <0, 1) a provedeme inverzi:

$$D(x) = \gamma \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x-a}{b-a} = \gamma \qquad \Rightarrow \qquad x = a + \gamma(b-a)\,.$$

Výsledek je zcela přirozený: Náhodné číslo γ mezi 0 a 1 roztáhneme koeficientem $(b-a)$ na požadovaný interval a posuneme o hodnotu a do počátku intervalu.

◗

◖ **Příklad 2.9:** Realizujte rozdělení Kx^2 na intervalu $(-1, +1)$.
Řešení: Nejprve určíme normovací konstantu rozdělení K:

$$f(x) = Kx^2\,; \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \frac{3}{2}x^2\,.$$

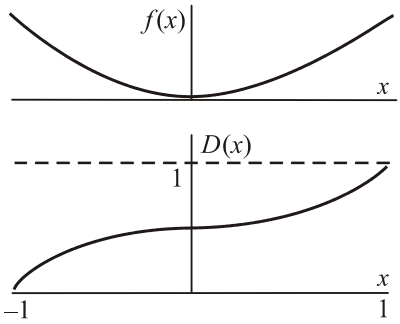
Jako další krok nalezneme distribuční funkci $D(x)$:

$$D(x) \;=\; \int_{-1}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x^3+1}{2}\,.$$

Distribuční funkci položíme rovnou náhodnému číslu γ z intervalu <0, 1) a provedeme inverzi:

$$D(x) = \gamma \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^3 + 1}{2} = \gamma \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt[3]{2\gamma - 1}\,.$$

Výsledkem je nerovnoměrný generátor na intervalu (−1, +1). Ve shodě s parabolickou hustotou pravděpodobnosti nejčastěji padají hodnoty na krajích intervalu a nejméně často uprostřed. Na distribuční funkci je dobře patrné, že „trefit se střelou letící zleva" do pozice $x = 0$ je téměř nemožné:



Obr. 2.18: Hustota pravděpodobnosti a jí odpovídající distribuční funkce

Příklad 2.10: Realizujte rozdělení exp[−x] na intervalu (0, ∞)

Řešení: Normovaná hustota pravděpodobnosti je $f(x) = \exp[-x]$, distribuční funkce po výpočtu integrálu vyjde $D(x) = 1-\exp[-x]$. Položme $D(x) = \gamma$, tedy $1-\exp[-x] = \gamma$, a po inverzi máme výsledek $x = -\ln(1-\gamma)$. Vzhledem k tomu, že γ a $1-\gamma$ mají na intervalu (0, 1) stejné rovnoměrné rozdělení, postačí volit

$$x = -\ln \gamma\,.$$

Poznámka: Pozor na názvosloví: *Hustota pravděpodobnosti* se ve fyzice někdy nazývá *rozdělovací funkce* (někdy také distribuční funkce). V matematice je vždy distribuční funkce integrálem s horní proměnnou mezí z hustoty pravděpodobnosti. Tak budeme chápat distribuční funkci i v této učebnici.

Metoda von Neumanna

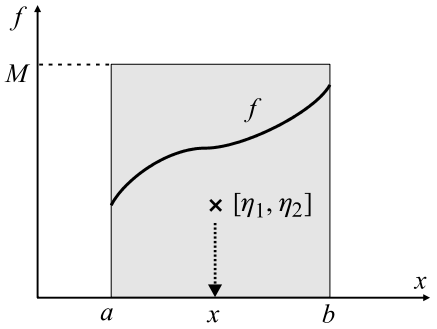
Mějme hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ definovanou na konečném intervalu (a, b). Nalezneme co nejmenší obdélník, do kterého se vejde graf křivky $f(x)$. Na volbě výšky M nezáleží, postačí $M > f(x)$ pro každé x, ale metoda je nejúčinnější pro co možná nejmenší hodnotu M. Nejprve generujeme náhodný bod v obdélníku:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a + \gamma_1 (b - a)\,, \\ \eta_2 &= M \gamma_2\,. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Pravděpodobnost, že padne děj v intervalu Δx je úměrná ploše pod křivkou, protože $\Delta P = f\Delta x$. Stačí tedy algoritmus doplnit tak, aby odpovídal úměrnosti této ploše:

$$\begin{aligned} \eta_2 < f(\eta_1) \quad &\Rightarrow \quad \text{padl děj } \; x = \eta_1 \,; \\ \eta_2 \geq f(\eta_1) \quad &\Rightarrow \quad \text{volíme nový bod } \; [\eta_1, \eta_2] \,. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Metodu von Neumanna lze aplikovat vždy, ale není tak účinná jako metoda střelby (metoda inverzní funkce, metoda distribuční funkce). Tyto metody jsou lepší, pokud se podaří nalézt inverzní funkci k distribuční funkci.



Obr. 2.19: Metoda von Neumanna

Metoda superpozice

Nechť platí následující tři podmínky

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \, f_k(x) \,; \\ \int_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{pro } \forall k; \\ \sum_{k=1}^{m} c_k = 1 \,. \end{gathered} \tag{2.102}$$

Hustota pravděpodobnosti je dána součtem (superpozicí) několika funkcí. Každá parciální hustota pravděpodobnosti je normována k jedné, stejně tak jako celková hustota pravděpodobnosti. To vede na podmínku, že součet koeficientů superpozice je roven jedné. Zaveďme součet parciálních distribučních funkcí pro jednotlivá f_k:

$$D(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k D_k(x) \,. \tag{2.103}$$

K realizaci rozdělení vede následující algoritmus:

1. Zavedeme náhodnou veličinu

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{pmatrix}$$

a generujeme rovnoměrné náhodné číslo $\gamma_1 \in <0, 1)$. Podle některé z předchozích metod (nejlépe metodou střelby). Potom zvolíme podle pravděpodobností koeficientů $c_1, c_2, \ldots, c_m$ některý z dějů $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

2. Generujeme náhodné číslo $\gamma_2 \in <0, 1)$ a realizujeme rozdělení $f_k(x)$ některou z předchozích metod (inverzní funkce, von Neumannova).

◖ **Příklad 2.11:** Realizujte rozdělení $f(x) = \frac{5}{12}\left[1 + (x-1)^4\right]$ na intervalu (0, 2).

Řešení: Metoda inverzní funkce pro celou hustotu pravděpodobnosti je principiálně možná, ale zbytečně složitá. Hustotu pravděpodobnosti rozložíme takto (určíme f_1 a f_2 s koeficienty tak, aby byly normovány k jedné, a poté nalezneme koeficienty c_1 a c_2):

$$f_1(x) = \frac{1}{2}; \quad f_2(x) = \frac{5}{2}(x-1)^4 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \frac{5}{6} f_1(x) + \frac{1}{6} f_2(x).$$

Distribuční funkce nyní bude:

$$D(x) = \frac{5}{6} D_1(x) + \frac{1}{6} D_2(x); \qquad D_1(x) = \frac{x}{2}; \quad D_2(x) = \frac{1}{2}\left[1 + (x-1)^5\right].$$

Nejprve generujeme číslo γ_1 a rozhodneme se podle předpisu:

$$\gamma_1 < \frac{5}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \text{padl děj 1};$$

$$\gamma_1 \geq \frac{5}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \text{padl děj 2}.$$

Poté použijeme metodu inverzní funkce. Generujeme γ_2 a využijeme předpis:

$$\text{pro děj 1:} \qquad x = 2\gamma_2;$$

$$\text{pro děj 2:} \qquad x = 1 + \sqrt[5]{2\gamma_2 - 1}.$$

Celou metodu můžeme shrnout takto: Generujeme dvojici náhodných čísel v intervalu (0, 1) a využijeme předpis:

$$x = \begin{cases} 2\gamma_2, & \gamma_1 < \frac{5}{6}; \\ 1 + \sqrt[5]{2\gamma_2 - 1}, & \gamma_1 \geq \frac{5}{6}. \end{cases}$$

◗

Užitečné realizace některých rozdělení

Gaussovo rozdělení:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]; \qquad x \in (-\infty, \infty). \tag{2.104}$$

generujeme dvojici γ_1, γ_2 náhodných čísel z intervalu (0, 1). Potom dvě hodnoty Gaussova rozdělení jsou:

$$x_1 = \sqrt{-2\ln\gamma_1}\,\cos(2\pi\gamma_2);$$

$$x_2 = \sqrt{-2\ln\gamma_1}\,\sin(2\pi\gamma_2). \tag{2.105}$$

Gama rozdělení:

$$f(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp[-ax]\,; \qquad x \in (0,\infty)\,; \quad ; a > 0; \quad n = 1,2,\ldots . \tag{2.106}$$

Generujeme $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ a určíme hodnoty

$$x_n = -\frac{1}{a} \ln(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n)\,. \tag{2.107}$$

Body uvnitř koule o poloměru R:

Rovnoměrně generované body v kouli poloměru R ve sférických souřadnicích (r, φ, θ):

$$r = R\sqrt[3]{\gamma_1}\,; \qquad \varphi = 2\pi\gamma_2\,; \qquad \cos\theta = 2\gamma_3 - 1\,. \tag{2.108}$$

2.5.3 Metropolisova metoda

V roce 1953 byl publikován jeden z nejúspěšnějších numerických algoritmů všech dob, který je dnes znám pod názvem *Metropolisova metoda*. Algoritmus publikovala skupina pracující na vývoji prvních jaderných reaktorů v americké Národní laboratoři v Los Alamos. K autorům algoritmu patřili především: řecko-americký fyzik Nicholas Metropolis (1915–1999), americký teoretik a „otec" vodíkové bomby Edward Teller (1908–2003) a americký plazmový fyzik Marshall Rosenbluth (1927–2003).

Metropolisův algoritmus umožňuje jednoduchým způsobem vzorkovat Boltzmannovo rozdělení. Předpokládejme, že je systém v termodynamické rovnováze odpovídající teplotě T. Příslušný statistický soubor (velké množství stejných částic, například atomů určitého druhu) podléhá rovnovážnému Boltzmannovu rozdělení

$$P_{\mathrm{eq}}(H) = C \exp[-\beta H]\,. \tag{2.109}$$

Při realizaci rozdělení je základním problémem určení konstanty C rozdělení. K jejímu zjištění by bylo nutné spočítat tzv. partiční sumu, tj. sečíst (resp. integrovat) exponenciální faktory na pravé straně přes veškeré stupně volnosti. Faktor $\exp[-\beta H]$ se může měnit o mnoho řádů a numerická integrace je komplikovaná.

Metropolisova metoda umožňuje generovat tzv. reprezentativní (vzorkovací) posloupnost stavů S_n s energiemi $H_n = H(S_n)$. Vytvoříme-li dostatečný počet členů posloupnosti, simuluje generovaná posloupnost Boltzmannovo rozdělení a střední hodnoty dynamických proměnných nemusíme počítat ze vztahu

$$\langle A \rangle = \frac{\int A(S) \exp[-\beta H(S)]\, \mathrm{d}\Gamma}{\int \exp[-\beta H(S)]\, \mathrm{d}\Gamma}\,,$$

ve kterém integrace probíhá přes fázový prostor (například přes veškeré zobecněné polohy a hybnosti), ale má-li posloupnost dosti velký počet členů, postačí určit pouhý aritmetický průměr z členů posloupnosti, neboť platí:

$$\langle A \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} A(S_n) . \tag{2.110}$$

Metropolisův algoritmus umožňuje nalezení takové reprezentativní posloupnosti bez výpočtu partiční sumy:

1) Zvolíme náhodně výchozí stav systému. Algoritmus zajišťuje, že generovaná posloupnost bude simulovat vlastnosti Boltzmannova rozdělení bez ohledu na volbu prvního členu.
2) Pomocí generátoru náhodných čísel zvolíme libovolný jiný stav systému (generátor by měl rovnoměrně pokrývat možné zobecněné souřadnice a hybnosti nebo jiné parametry systému).
3) Nový stav přijmeme s pravděpodobností

$$P_{n\to n+1} = \begin{cases} \exp[-\beta \Delta H] & \text{pro } \Delta H > 0 \\ 1 & \text{pro } \Delta H \le 0 \end{cases}; \quad \Delta H \equiv H(S_{n+1}) - H(S_n) . \tag{2.111}$$

4) Pokračujeme bodem 2).

Poznámka 1: Bod 3) lze snadno realizovat například takto: Pokud je $\Delta H \le 0$, považujeme stav S_{n+1} za následující člen reprezentativní posloupnosti. Je-li $\Delta H > 0$, generujeme náhodné číslo $\gamma \in (0, 1)$ a pro $\gamma \le \exp[-\beta \Delta H]$ považujeme S_{n+1} za nový člen posloupnosti, pro $\gamma > \exp[-\beta \Delta H]$ ponecháme původní stav. Stav s nižší energií tedy volíme za nový vždy. Pravděpodobnost volby konfigurace s vyšší energií než stávající exponenciálně klesá s rozdílem energií.

Poznámka 2: Generování reprezentativní posloupnosti probíhá při konstantní teplotě. Další výpočet můžeme odstartovat s nepatrně pozměněnou teplotou a postupně tímto způsobem simulovat teplotní průběh veličin. Při dostatečně pomalém snižování teploty můžeme vyhledat základní stav systému (tzv. metoda simulovaného ochlazování). Nalezení základního stavu je důležitou úlohou, nicméně Metropolisův algoritmus nemusí v některých případech najít skutečné minimum energie, ale jen některé z lokálních minim.

Poznámka 3: Monte Carlo metody zpravidla selhávají v blízkosti fázových přechodů, kdy se neúměrně prodlužují relaxační časy a počet potřebných členů reprezentativní posloupnosti.

Poznámka 4: Metropolisův algoritmus generování reprezentativní posloupnosti patří. k tzv. *Markovovým procesům*. Následující člen posloupnosti totiž závisí jen na předchozím členu a nikoli na historii geneze posloupnosti.

Poznámka 5: V roce 1970 zobecnil tento algoritmus pro případ libovolného statistického rozdělení kanadský matematik Keith Hastings (1930). Nechť $P_{\mathrm{eq}}(S)$ je dané rozdělení a $P_{n\to n+1}$ je navrhovaná pravděpodobnost přechodu (například Gaussovo rozdělení centrované kolem aktuálního stavu). Generujeme náhodné číslo $\gamma \in (0, 1)$ a nový stav akceptujeme jako další člen posloupnosti, pokud platí

$$\gamma < \min\left\{ \frac{P_{\mathrm{eq}}(S_{n+1}) P_{n\to n+1}}{P_{\mathrm{eq}}(S_n) P_{n+1\to n}}, 1 \right\} .$$

Vzhledem k podílu je zjevné, že pravděpodobnosti nemusí být normovány k jedné.

2.5.4 MC simulace srážky dvou nabitých částic

V plazmatu s mnoha částicemi není většinou možné počítat skutečný průběh všech srážek a proto využíváme Monte Carlo simulace srážek. Můžeme postupovat například takto:

1) Rozhodneme se, zda podle předem určeného kritéria (například když jsou částice blíže, než je Debyeova vzdálenost) dojde ke srážce dvou částic.
2) Na základě aktuálních účinných průřezů σ_k různých možných procesů (například Coulombova srážka, excitační proces, ionizační proces, nábojová výměna, atd.) sestavíme distribuční posloupnost

$$D_l = \frac{\sum_{k=1}^{l} \sigma_k}{\sigma_{\mathrm{tot}}}; \quad \sigma_{\mathrm{tot}} \equiv \sum_{k=1}^{N} \sigma_k \,. \tag{2.112}$$

   a metodou střelby se rozhodneme, ke kterému procesu dojde.
3) Za pomoci Monte Carlo algoritmu budeme generovat ze stavu před srážkou vhodný stav po srážce.

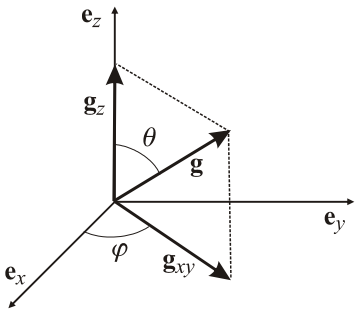
Monte Carlo odhady finálních stavů po srážce nejsou samozřejmě v pořádku pro jednu konkrétní srážku, ale pro velké množství srážek dají při popisu plazmatu statisticky korektní výsledky. Popišme nyní dnes hojně používaný Monte Carlo algoritmus Coulombovy srážky navržený T. Takizukou a H. Abem již v roce 1977.

Coulombova srážka

Předpokládejme, že v čase t dojde ke srážce dvou částic s hmotnostmi m_α, m_β a s rychlostmi $\mathbf{v}^t{}_\alpha$, $\mathbf{v}^t{}_\beta$ v laboratorní soustavě. Označme vzájemnou rychlost částic v čase t:

$$\mathbf{g}^t \equiv \mathbf{v}^t_\alpha - \mathbf{v}^t_\beta \tag{2.113}$$

Označme $\mathbf{g}_z$ *a* $\mathbf{g}_{xy}$ projekce relativní rychlosti do osy z a roviny (xy). Dále zaveďme úhly θ (odklon $\mathbf{g}$ od osy z) a φ (odklon projekce $\mathbf{g}_{xy}$ od osy x):



Obr. 2.20: Rozklad relativní rychlosti na projekce $\mathbf{g}_{xy}$ a $\mathbf{g}_z$

K popisu srážky zvolíme novou, výhodnější souřadnicovou soustavu S', která bude pootočena o úhel φ v ose z a úhel θ v ose y. Nová soustava je volena tak, aby vektor relativní rychlosti mířil ve směru třetí osy:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}_S^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}_{S'}^t . \tag{2.114}$$

Celková transformační matice má tvar

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{2.115}$$

Pro návrat k původní soustavě budeme také potřebovat inverzní matici (transformace je unitární a tak inverzní matici snadno získáme překlopením kolem diagonály):

$$\mathbb{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{2.116}$$

Při Coulombově srážce se nemění velikost relativní rychlosti (viz kap. *Boltzm. srážkový člen*, str. 206), ale pouze směr rychlosti. Proto vektor $(0, 0, g)^t$ pootočíme o úhly Θ a Φ.

Generování úhlů Θ a Φ

Z důvodu symetrie je nejjednodušší generování úhlu Φ, stačí volit rovnoměrné rozdělení, tj. generovat náhodné číslo $\gamma_1 \in (0, 1)$ a za úhel Φ zvolit

$$\Phi = 2\pi\gamma_1 . \tag{2.117}$$

Volba úhlu Θ závisí na účinném průřezu daného typu srážky. Takizuka a Abe ukázali, že korektní statistickou reprezentaci Coulombovy srážky lze získat volbou

$$\Theta = \operatorname{arctg}(2\delta) , \tag{2.118}$$

kde $\delta \in (-\infty, \infty)$ je náhodná veličina generovaná ve shodě s Gaussovým rozdělením s nulovou střední hodnotou a standardní odchylkou σ danou vztahem

$$\sigma = \sqrt{\frac{Q_\alpha^2 Q_\beta^2 \min\{n_\alpha, n_\beta\} \ln \Lambda_{\alpha\beta}}{8\pi\varepsilon_0^2 \mu^2 g^3} \Delta t} , \tag{2.119}$$

kde μ je redukovaná hmotnost, $\ln \Lambda_{\alpha\beta}$ je Coulombův logaritmus, g je velikost vzájemné rychlosti a Δt je časový krok.

Návrat k původním proměnným

Z úhlů Θ a Φ spočteme novou relativní rychlost v pootočené soustavě S'. Poté nalezneme za pomoci inverzní matice $\mathbb{R}^{-1}$ relativní rychlost v laboratorní soustavě S:

$$\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}_S^{t+\Delta t} = \mathbb{R}^{-1} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}_{S'}^{t+\Delta t} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g\sin\Theta\cos\Phi \\ g\sin\Theta\sin\Phi \\ g\cos\Theta \end{pmatrix} . \tag{2.120}$$

Důležitý je rozdíl relativní rychlosti po srážce a před srážkou definovaný vztahem

$$\Delta\mathbf{g} = \mathbf{g}^{t+\Delta t} - \mathbf{g}^{t} . \tag{2.121}$$

Po dosazení z (2.120) vychází

$$\begin{aligned}
\Delta g_x &= \frac{g_x^t}{g_{xy}^t} g_z^t \sin\Theta\cos\Phi - \frac{g_y^t}{g_{xy}^t} g \sin\Theta\sin\Phi - g_x^t\left(1-\cos\Theta\right),\\
\Delta g_y &= \frac{g_y^t}{g_{xy}^t} g_z^t \sin\Theta\cos\Phi + \frac{g_x^t}{g_{xy}^t} g \sin\Theta\sin\Phi - g_y^t\left(1-\cos\Theta\right),\\
\Delta g_z &= -g_{xy}^t \sin\Theta\cos\Phi - g_z^t\left(1-\cos\Theta\right).
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Veličina g je velikost relativní rychlosti $\mathbf{g}$, veličina g_{xy} je velikost projekce $\mathbf{g}_{xy}$:

$$g^t = \sqrt{\left(g_x^t\right)^2 + \left(g_y^t\right)^2 + \left(g_z^t\right)^2} , \qquad g_{xy}^t = \sqrt{\left(g_x^t\right)^2 + \left(g_y^t\right)^2} . \tag{2.123}$$

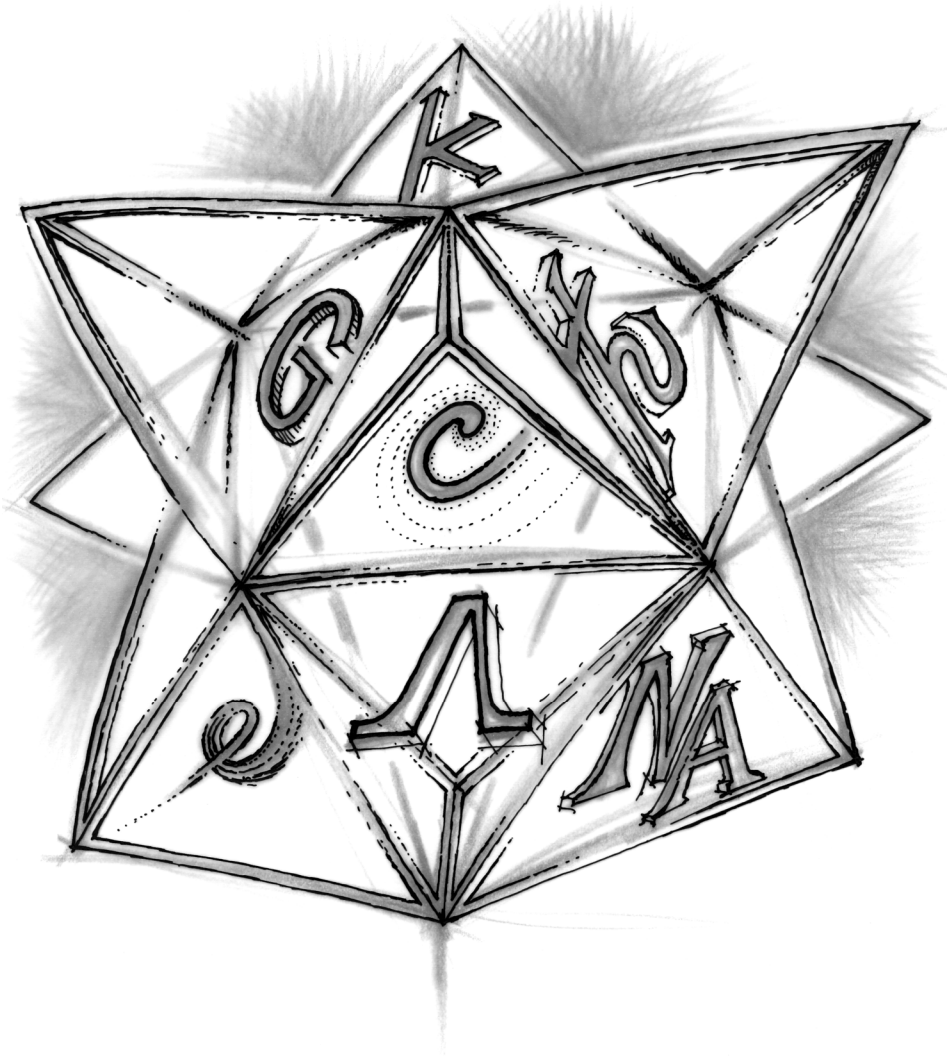
Za pomoci transformace (1.646) nyní určíme rychlosti částic po srážce:

$$\mathbf{v}_\alpha^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_\alpha^t + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\Delta\mathbf{g} , \qquad \mathbf{v}_\beta^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_\beta^t - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}\Delta\mathbf{g} . \tag{2.124}$$

Popsaný algoritmus mnohokrát opakujeme pro sledovanou soustavu částic.



Seznam symbolů



$\#_{Al}$ Alfvénovo číslo
$\#_{Bt}$ Batchelorovo číslo
$\#_{dr}$ index řízené rekonekce
$\#_{DL}$ parametr dvojvrstvy
$\#_{DL,rel}$ parametr relativistické dvojvrstvy
$\#_{GS}$ index rekonekce v modelu GS95
$\#_{Ha}$ Hartmannovo číslo
$\#_{Lu}$ Lundquistovo číslo
$\#_{M}$ Machovo číslo
$\#_{MA}$ Machovo-Alfvénovo číslo
$\#_{P}$ index rekonekce v Petschekově modelu
$\#_{Re}$ Reynoldsovo číslo
$\#_{Re,M}$ Reynoldsovo magnetické číslo
$\#_{rec}$ index rekonekce
$\#_{sp}$ index samovolné rekonekce
$\#_{St}$ Stuartovo číslo
$\mathbf{A}$ vektorový potenciál
A aditivní veličina
$\mathscr{A}$ hustota aditivní veličiny A
$\mathbf{A}$ čtyřpotenciál pole
$\mathbf{B}$ vektor magnetické indukce
B_P poloidální magnetické pole
B_T toroidální magnetické pole
b impaktní (záměrný) parametr
$\mathbf{b}$ podíl magnetické indukce a hustoty plazmatu ($\mathbf{B}/\rho$)
c rychlost šíření světla
c_s rychlost zvuku
D koeficient difúze, distribuční funkce, tloušťka hraniční vrstvy, Stixův koeficient D
D_a koeficient ambipolární difúze
D_k distribuční posloupnost
D_{kl} dynamický tlak (tenzor)
$\mathbf{D}$ indukce elektrického pole
$\mathbf{e}_k$ jednotkový vektor ve směru k-té osy
$\mathbf{e}_B$ jednotkový vektor ve směru $\mathbf{B}$
e elementární náboj, hustota vnitřní energie
$\mathscr{E}$ energie
$\mathbf{E}$ intenzita elektrického pole
f funkce, hustota pravděpodobnosti, počet stupňů volnosti
f_1 porucha hustoty pravděpodobnosti
f_{LE} lokálně rovnovážná hustota pravděpodobnosti
f_α hustota pravděpodobnosti výskytu částic druhu α
$\mathbf{f}$ hustota síly
F velikost síly
$\mathbf{F}_{ext}$ externí silové pole
g stupeň degenerace, přenos (velikost relativní rychlosti dvou částic), zesilující faktor diferenčního schématu, tíhové zrychlení
$\mathbf{g}$ vektor tíhového zrychlení
$\mathbf{g}$ relativní rychlost $\mathbf{g} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$
G gravitační konstanta
G, $\mathbf{G}$ Greenova funkce
$G_{\alpha\beta}$ druhý Rosenbluthův potenciál
h vzdálenost, výška
$\hbar$ Planckova konstanta
H Hamiltonova funkce
$H_{\alpha\beta}$ první Rosenbluthův potenciál
$\mathcal{H}$ hustota helicity
$\mathbf{H}$ intenzita magnetického pole
i elektrický proud na jednotku délky
i imaginární jednotka
I elektrický proud, ionizační potenciál, hodnota integrálu
I_m modifikovaná Besselova funkce
$\mathbf{j}$ tok, proudová hustota
$\mathbf{j}_C$ vodivostní proud
$\mathbf{j}_M$ magnetizační proud
$\mathbf{j}_N$ tok částic
$\mathbf{j}_m$ tok hmoty
$\mathbf{j}_Q$ tok náboje
$\mathbf{J}$ čtyřvektor toku
J_0, J_1 Besselovy funkce
J_2 druhý adiabatický invariant

k_B Boltzmannova konstanta
$\mathbf{k}$ vlnový vektor
$\mathbf{k}_{\alpha\beta}$ jednotkový vektor ve směru relativní rychlosti dvou částic
K konstanta, helicita
K_m modifikovaná Besselova funkce
l délka
L Lagrangeova funkce, vzdálenost, Stixův koeficient L
$\mathscr{L}$ hustota Lagrangeovy funkce
L_{kl} kinetické koeficienty
L_{elmg} Lagrangeova funkce pole
L_{int} Lagrangeova funkce interakce
L_{part} Lagrangeova funkce částice
m hmotnost, mód nestability
m_0 klidová hmotnost
$\mathbf{M}$ vektor magnetizace
$\mathscr{M}_{kl}$ hustota momentu hybnosti
n koncentrace
$\mathbf{n}$ vektor normály
N počet částic, index lomu
N_{D} počet částic v Debyeově sféře
N_{R} index lomu levotočivé vlny
N_{O} index lomu řádné vlny
N_{R} index lomu pravotočivé vlny
N_{X} index lomu mimořádné vlny
$\mathscr{N}$ koncentrace na jednotku délky
$\mathscr{N}_{klm}$ tok momentu hybnosti
p tlak, velikost hybnosti
p_{M} magnetický tlak
$\mathbf{p}$ hybnost
$\mathbf{p}_{\mathrm{E}}$ elektrický dipólový moment
$\mathbf{p}_{\mathrm{M}}$ magnetický dipólový moment
p_q zobecněná hybnost
P perioda, výkon, polynomiální funkce
P_{kl} tenzor tlaku, pravděpodobnost přechodu, Legendreův přidružený polynom
$\mathscr{P}$ hustota pravděpodobnosti přechodu, hustota výkonu
q zobecněná souřadnice, bezpečnostní faktor
$\mathbf{q}$ tepelný tok
Q náboj
r radiální vzdálenost
$\mathbf{r}$ polohový vektor
$\mathbf{R}$ polohový vektor gyračního středu
R velká poloosa v tokamaku, poloměr plazmového vlákna, poloměr hvězdy, Stixův koeficient R
R_{k} poloměr křivosti oskulační kružnice
R_{D} driftový poloměr
R_{L} Larmorův poloměr
s parametrizace křivky vlastní délkou, hustota entropie
S plocha, srážkový člen, entropie, Stixův koeficient S
t čas
T kinetická energie, perioda, teplota
T_{kl} tenzor toku hybnosti, Maxwellův tenzor pnutí
u přeškálovaná rychlost, $u = \gamma v$, velikost rychlostního pole
$\mathbf{u}$ rychlostní pole v kontinuu
U napětí
$\mathbf{v}$ vektor rychlosti
$\mathbf{v}_{\mathrm{A}}$ vektor Alfvénovy rychlosti
$\mathbf{v}_{\alpha\beta}$ relativní rychlost
$\mathbf{v}_{(\alpha\beta)}$ těžišťová rychlost
v velikost rychlosti
v_{f} fázová rychlost
v_{g} grupová rychlost
$v_{\parallel}$ složka rychlosti rovnoběžná s magnetickým polem
$v_{\perp}$ složka rychlosti kolmá na magnetické pole
v_{A} Alfvénova rychlost

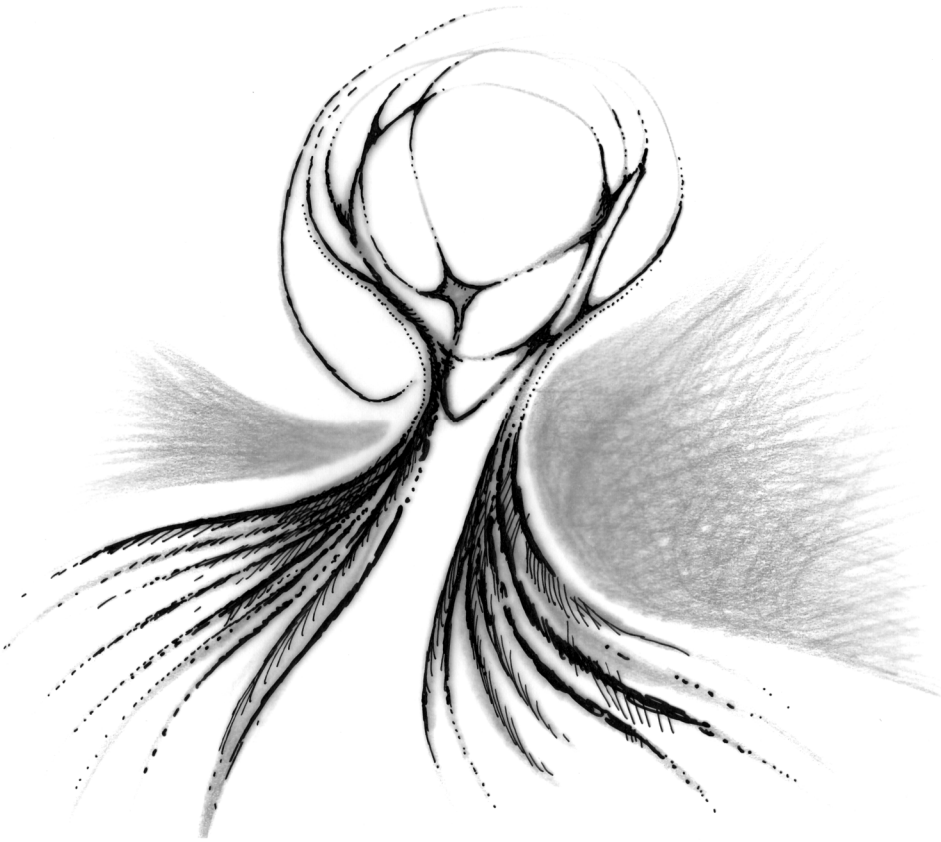
v_D driftová rychlost
v_T střední tepelná rychlost
V potenciální energie, objem
V_G gravitační potenciální energie
V_E elektrická potenciální energie
V_{kl} tenzor viskozity
$\mathbf{V}$ vektorové pole
$\mathcal{V}$ Verdetova konstanta
V.P. hlavní hodnota integrálu
w pravděpodobnost, velikost chaotické složky rychlosti
$\mathbf{w}$ chaotická složka rychlosti
$W_\perp$ kinetická energie pohybu kolmého na magnetické pole
W_I ionizační energie
W_M magnetická energie
$\mathbf{x}$ poloha
x souřadnice x
X zobecněná síla, Stixův koeficient X
y souřadnice y
Y_m Besselovy funkce druhého druhu
Y_{lm} kulové funkce
z souřadnice z, komplexní argument
Z stupeň ionizace
α úhel, konstanta
β úhel, převrácená hodnota teploty $(1/k_B T)$, beta parametr (p/p_M)
$\boldsymbol{\beta}_0$ jednotkový vektor ve směru magnetického pole
γ relativistický koeficient, polytropní koeficient, náhodné číslo, úhel, koeficient nárůstu nestability
$\boldsymbol{\gamma}$ hustota hybnosti elektromagnetického pole
δ Diracova distribuce, tloušťka difúzního regionu, skinová hloubka
δ_{kl} Kroneckerovo delta
Δ délka difúzního regionu
Δ rozdíl hodnot, Laplaceův operátor
ε parametr rozvoje v poruchové teorii, energie určitého kvantového stavu, permitivita
ε_0 permitivita vakua
ε_F Fermiho energie
ε_{klm} Levi-Civitův tenzor
ζ druhý viskózní koeficient
η první viskózní koeficient, rezistivita
η_M magnetická viskozita
κ koeficient tepelné vodivosti,
λ vlnová délka, multiplikativní konstanta, Lagrangeův multiplikátor
λ_D Debyeova vzdálenost
Λ argument Coulombova logaritmu
θ úhel, poloidální úhel
μ první adiabatický invariant, magnetický moment, pohyblivost (mobilita), redukovaná hmotnost, permeabilita, konstanta v KG rovnici
$\boldsymbol{\mu}$ první adiabatický invariant, vektor magnetického momentu
μ_0 permeabilita vakua
ν_c srážková frekvence
ξ komplexní souřadnice, substituovaná proměnná, náhodná veličina
$\boldsymbol{\xi}$ vektor posunutí
Π celkový tlak
ρ hustota, vzdálenost od centra komory v tokamaku
$\boldsymbol{\rho}$ polohový vektor částice vzhledem k gyračnímu středu
ρ_Q hustota náboje
ρ_m hustota hmoty
ρ_W hustota energie

σ	účinný průřez, diferenciální vodivost, povrchové napětí
τ	gyrační čas, doba útlumu předakcelerační čas
τ_A	Alfvénův čas
τ_c	střední doba mezi srážkami
τ_R	rezistivní čas
τ_{REC}	doba rekonekce
φ	fáze, polární/toroidální úhel
ϕ	potenciál, sumační invariant, chybová funkce disperzní relace
ϕ_E	potenciál elektrického pole
ϕ_G	potenciál gravitačního pole
χ	úhel rozptylu
ψ	sumační invariant, Chandrasekharova funkce, vlnová funkce, magnetický povrch
ψ_k	parciální vlna
ω	úhlová frekvence
ω_c	cyklotronní frekvence
ω_d	dolní hybridní frekvence
ω_h	horní hybridní frekvence
ω_L	levá mezní frekvence
ω_p	plazmová frekvence
ω_R	pravá mezní frekvence
$\boldsymbol{\omega}$	vířivost
Ω	prostorový úhel, posunutá frekvence prostorová oblast integrace

Indexy

a	pořadové číslo částice
A, Al	Alfvén
c	cyklotronní
dr	řízená rekonekce
DL	dvojvrstva
e	elektrony
E	elektrický
EM	elektromagnetický
Ha	Hartman
i	ionty
i,j, k	kartézské osy 1, 2, 3
L	levotočivý
Lu	Lundquist
M	Mach magnetický
MA	Mach-Alfvén
O	řádný
p	plazmový
P	Petschek, poloidální částicový (Particles)
R	pravotočivý
Re	Reynolds
rec	přepojení, rekonekce
s	zvuk
sp	samovolná, spontánní rekonekce
T	toroidální
X	mimořádný
α	částice druhu α
$\parallel$	rovnoběžný s magnetickým polem
$\perp$	kolmý k magnetickému poli

Rejstřík osobností



Teorie plazmatu



Abraham, Max (1875–1922), německý fyzik, který se nejvíce zabýval teorií elektromagnetického pole. Vystudoval Humboldtovu univerzitu, poté pracoval na Univerzitě v Gottingen. Jeho doktorským školitelem byl Max Planck. Na Milánské polytechnice se stal profesorem klasické mechaniky (bylo to na pozvání Tullio Levi-Civity). Nezávisle na ostatních spočetl sílu, kterou na sebe bude působit částice díky vlastnímu vyzařování elektromagnetických vln. Dnes tuto sílu nazýváme Abrahamova-Lorentzova síla. Byl nedůvěřivý k novým teoriím, vytvořil si svou vlastní alternativu k obecné relativitě, která ale nesplňovala princip ekvivalence. Také je autorem teorie elektronu, který si představoval jako kuličku s nábojem rozprostřeným na povrchu. V průběhu první světové války se z Milána vrátil zpět do Německa, kde se na Technice ve Stuttgartu podílel na výzkumu rádiové komunikace pro vojenské účely. Po smrti o něm Max Born a Max von Laue napsali: „*Miloval svůj absolutní éter, své polní rovnice, svůj neměnný elektron, stejně jako mládí miluje svůj první plamen, který nedokáže ve vzpomínkách uhasit ani žádná pozdější zkušenost*“.



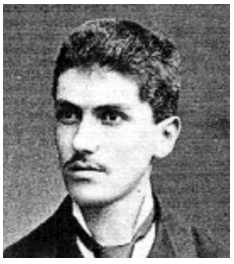
Alfvén, Hannes Olof Gösta (1908–1995), švédský fyzik a astrofyzik, jeden ze zakladatelů moderní fyziky plazmatu. Rozpracoval první varianty magnetohydrodynamiky, zavedl koncept magnetického pole zamrzlého v látce. V roce 1939 publikoval teorii magnetických bouří a polárních září, položil základy teorie magnetosféry Země. V roce 1950 vysvětlil vznik vírových struktur v polárních zářích pomocí diocotronové nestability. Ve fyzice plazmatu je po něm pojmenována Alfvénova rychlost a Alfvénovo číslo. Některé Alfvénovy domněnky se nepotvrdily. Byl odpůrcem teorie velkého třesku a věřil, že ve vesmíru je stejně hmoty i antihmoty. Alfvén vystudoval Univerzitu v Uppsale. Za svou práci získal řadu ocenění, například Lomonosovovu zlatou medaili, Diracovu medaili, medaili Williama Bowieho a stal se členem Královské společnosti. Nejvyšší ocenění, Nobelovu cenu, získal v roce 1970.



Allen, James Alfred Van (1914–2006), americký vědec zabývající se kosmonautikou, který prosadil umístění Geigerových čítačů na prvních amerických družicích Explorer I a Explorer III. Tyto družice objevily torusy energeticky nabitých částic okolo Země, které dnes nazýváme Van Allenovy radiační pásy. Většinu svého aktivního života se potom Allen zabýval magnetosférickými jevy. Van Allen byl vůdčí osobností amerického dobývání vesmíru během studené války, podílel se na přípravě sond Pioneer, Mariner a geofyzikální observatoře OGO. Allen vystudoval Iowskou univerzitu. Za svou práci získal řadu ocenění, mezi nejvýznamnější patří medaile Elliotta Cressona, medaile Williama Bowieho, zlatá medaile Královské astronomické společnosti, národní medaile za vědu, Crafoordova cena a cena Vannevara Bushe. Pojmenovány jsou po něm Van Allenovy radiační pásy a dvojice sond Van Allen Probes.



Appleton, Edward Victor, sir (1892–1965), anglický fyzik a astronom. Zabýval se atmosférou, dokázal existenci ionosféry. Obdržel Nobelovu cenu za fyziku v roce 1947. Nazývá se po něm Appletonova vrstva ionosféry odrážející radiové vlny, Appletonova-Hartreeho formule pro šíření elektromagnetických vln v plazmatu s homogenním magnetickým polem a také jedna z nejvýznamnějších anglických národních laboratoří – Rutherfordova-Appletonova laboratoř (RAL). Studoval na Edinburgské univerzitě a poté v Cambridgi. Kromě Nobelovy ceny získal i řadu dalších ocenění, například Hughesovu medaili, Faradayovu medaili, královskou medaili, Albertovu medaili královské akademie umění a Chreeovu medaili, která byla v roce 2008 přejmenována na Appletonovu medaili.



Beltrami, Eugenio (1835–1899), italský matematik a fyzik. Zabýval se neeukleidovskou geometrií, elektřinou a magnetizmem. V matematice je po něm pojmenován Beltramův teorém týkající se zobrazení zakřiveného povrchu v mapách, Beltramovo pole (jehož rotace je úměrná samotnému poli) a Laplaceův-Beltramův operátor. Ve fyzice plazmatu hrají Beltramova pole klíčovou roli pro popis helikálních struktur. Beltrami se intenzivně zabýval využitím tenzorového počtu v teoretické fyzice. Beltrami studoval Univerzitu v Pávii, ale studia mu byla ukončena z důvodu jeho politických názorů. Přesto se v roce 1862 stal profesorem Boloňské univerzity a postupně působil na univerzitách v Boloni, Římě, Pise a Pávii. V roce 1898 se z původně mladého rebela stal ctihodný senátor tehdejšího Italského království.



Bennett, Willard Harrison (1903–1987), americký vědec a vynálezce, narodil se ve Findlay ve Spojených státech. Studoval ionizaci plynů elektrickým polem, vynalezl radiofrekvenční hmotovou spektrografii, která je dnes využívána na různých sondách. Poprvé letěl jeho spektrometr do vesmíru na palubě sovětského Sputniku 3 v roce 1958. V roce 1934 nalezl řešení rovnováhy plazmového vlákna (pinče) pro konstantní proudovou hustotu, které je podle něho dnes pojmenované (tzv. Bennettovo řešení) a které má význam pro termojadernou fúzi. Bennett předpověděl existenci radiačních pásů Země šest let před jejich objevem. Bennett studoval na Carnegieho technologickém institutu a na Michiganské univerzitě.



Bhatnagar, Prabhu Lal (1912–1976), indický matematik a astrofyzik. Zabýval se astrofyzikou, bílými trpaslíky a vznikem Sluneční soustavy. V plazmatu se věnoval statistickým výpočtům a spolu s Eugenem Grossem a Maxem Krookem vytvořili v roce 1954 tzv. BGK aproximaci Boltzmannovy rovnice. V pozdějších létech se věnoval problematice nelineární hydrodynamiky. Studoval na univerzitě v Allahabadu a na Univerzitě v Ágře. Získal Fulbrightovo stipendium na Harvardově univerzitě. V roce 1950 se stal členem Indické národní akademie věd a v roce 1955 členem Indické akademie věd. V roce 1956 se stal profesorem aplikované matematiky na Indickém vědeckém institutu. Za svou práci převzal v roce 1968 řád Padma Bhushan, který mu předal prezident Indie. Jde o třetí nejvyšší státní vyznamenání.



Birkeland, Kristian (1867–1917), norský fyzik a vynálezce. Vyráběl umělá hnojiva, vyvíjel elektromagnetické dělo, věnoval se výzkumu polárních září a pohyby nabitých částic v magnetickém poli. Usoudil, že při některých jevech na Slunci se uvolňují do prostoru svazky nabitých částic, které někdy zasáhnou Zemi a vyvolají polární záře. V laboratoři vyrobil *terellu*, malou napodobeninu Země, na které zkoumal podmínky vzniku polárních září. Jsou po něm pojmenovány Birkelandovy proudy tekoucí podél magnetických indukčních čar. Pracoval na Univerzitě v Oslu. Jeho portrét se i s terrelou dostal v roce 1994 na norskou dvousetkorunovou bankovku. Jeho práce byla za jeho života nepochopena. Birkelandův odkaz pak rozvíjel Hans Alfvén. Birkelandova teorie vzniku polárních září byla potvrzena až mnohem později z družicových měření.

Boltzmann, Ludwig, viz sekce Statistická fyzika, díl II „Vybraných kapitol“

Buneman, Oscar, viz sekce Numerické simulace

Burgers, Johannes (Jan) Martinus (1895–1981),

Carlqvist, Per (1938), švédský fyzik, zabýval se vývojem hvězd, slunečním větrem, teorií dvojvrstev. Spolu s Alfvénem navrhl teorii slunečních erupcí, ve které hrají podstatnou úlohu dvojvrstvy. Zobecnil Bennettovo řešení rovnováhy pinče. Vystudoval Královský technologický institut ve Stokholmu, kde pracuje dodnes.

Coulomb, Charles, viz sekce Elektromagnetické pole, díl II „Vybraných kapitol“



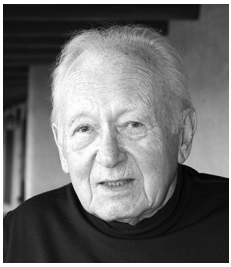
Cowling, Thomas George (1906–1990), anglický astronom, který v roce 1934 dokázal, že magnetické pole Slunce a planet nemůže vznikat jednoduchým prstencovým proudem (Cowlingův anti-dynamo teorém). Sluneční skvrny pochopil správně jako projevy tekutinového dynama v nitru Slunce. Klasifikoval neradiální oscilace hvězd, a tím položil základy helioseismologie. Jako první vytvořil model hvězdy, která má konvektivní zónu v okolí jádra a radiační zónu u povrchu (Cowlingův model). Cowling vystudoval matematiku v Oxfordu. Pracoval na univerzitách v Dundee a Manchesteru. Profesorem se stal na Waleské univerzitě a na Univerzitě v Leedsu. Za své práce byl oceněn Hughesovou medailí. V letech 165 až 1967 byl prezidentem Královské astronomické společnosti.



Davydov, Alexandr Sergejevič (1912–1993), sovětský a ukrajinský fyzik. Vystudoval Moskevskou státní univerzitu. Po několik desítek let byl ředitelem Ústavu teoretické fyziky Ukrajinské akademie věd. Zabýval se zejména molekulárními krystaly a jejich interakcí se světlem (rozptylem, absorpcí a ohybem). Objevil dělení pásů ve vibračních spektrech krystalů. Nalezl solitonová řešení pro excitace v krystalech. V roce 1973 aplikoval solitony na šíření vzruchů ve svalech zvířat. Jeho doménou tak byla nejen teoretická fyzika, ale i biofyzika. Zabýval se také atomovým jádrem a jeho kolektivními excitacemi. Za svou práci získal řadu ocenění, většinou spojených s tehdejším sovětským režimem, například Hrdina socialistické práce, Leninův řád, Ševčenkovu národní cenu, Leninovu cenu a další.



Debye, Peter Joseph William (1884–1966), holandský fyzik a chemik. Jako první popsal chování asymetrických molekul pomocí dipólového momentu a přímo je zkoumal rentgenovou difraktometrií. Dodnes se dipólový moment molekul měří v jednotkách debye. Jeho práce měla široký záběr, rozšířil Einsteinovu teorii měrného tepla o nízkofrekvenční fonony, zabýval se teorií elektrické vodivosti elektrolytů, teorií atomárních obalů, vysvětlil Comptonův jev. V roce 1936 obdržel Nobelovu cenu za chemii za příspěvek ke studiu molekulárních struktur. Ve fyzice je podle něho pojmenována Debyeova stínicí vzdálenost.

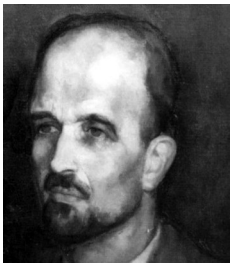


Dreicer, Harry (*1927), německo-americký plazmový fyzik zaměřený na problémy termojaderné fúze. Jeho rodiče utekli před bolševickou revolucí do Německa, kde se Dreicer narodil, poté do Itálie a nakonec v důsledku pronásledování židů emigrovali do Spojených států. Dreicer vystudoval Massachusettský institut technologií (MIT), kde obhájil doktorát na téma ubíhajících elektronů. Již ve své doktorské práci nalezl hodnotu elektrického pole, které je nutné k tomu, aby se elektrony dostaly do ubíhajícího režimu, kdy urychlování polem dominuje nad brzděním srážkami (dnes hovoříme o Dreicerově poli). Většinu aktivní kariéry (42 let) strávil v Národní laboratoři Los Alamos.



Drude, Paul Karl Ludwig (1863–1906), německý fyzik a optik. Prováděl experimenty s elektřinou a magnetismem a ověřoval Maxwellovu teorii elektromagnetického pole. Zavedl symbol *c* pro rychlost světla ve vakuu. V roce 1900 vyvinul model pro výpočet elektrických, tepelných a optických vlastností látek. Ve fyzice plazmatu se využívá Drudeho elementární teorie vodivosti. Optiku chápal jako důsledek teorie elektromagnetického pole. Drude vystudoval matematiku a fyziku na Univerzitě v Göttingenu. Drudeho jméno nese jeden z kráterů na Měsíci a Institut Paula Drudeho pro elektroniku pevné fáze v Berlíně.

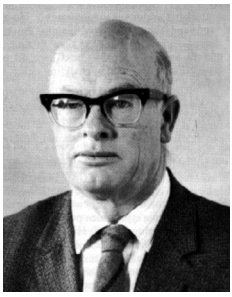
Fick, Adolf Eugen (1821–1901), německý fyziolog, který jako první vytvořil kontaktní čočky, tehdy ovšem skleněné. Jako první navrhl techniku měření průtoku krve srdcem. Formuloval zákon difúze látek, který je ve fyzice znám jako Fickův zákon.



Fokker, Adriaan Daniël (1887–1972), holandský fyzik a muzikant, byl bratrancem slavného konstruktéra letadel Anthony Fokkera. Spolu s Maxem Planckem odvodili v roce 1913 Fokkerovu-Planckovu rovnici, která je dnes standardem pro statistický popis plazmatu při Coulombových srážkách. Fokker publikoval také několik prací o speciální a obecné relativitě. Matematicky se zabýval hudebními stupnicemi, byl úspěšným konstruktérem hudebních nástrojů. Nejznámější jsou 31 tun těžké Fokkerovy varhany, které jsou umístěné v Teylerově muzeu v Haarlemu.

Fourier, Jean-Baptiste de, viz sekce Matematika pro fyziku, díl I „Vybraných kapitol“

Gibbs, Josiah, viz sekce Statistická fyzika, díl II „Vybraných kapitol“



Giovanelli, Ronald Gordon (1915–1984), australský astronom a fyzik. Zabýval se povahou slunečních erupcí a mechanizmem urychlení elektronů v proměnných magnetických polích. Jako první navrhl v roce 1946, že zdrojem ohřevu plazmatu a urychlení částic mohou být nulové body magnetického pole ve tvaru písmene X, čímž otevřel problematiku přepojení magnetických indukčních čar a předpověděl existenci tohoto jevu. V roce 1949 udělal podrobnou analýzu situace, při níž urychlování elektronů elektrickým polem převládne nad srážkami. Výsledkem je populace tzv. ubíhajících elektronů, na které upozornil Charles Wilson, objevitel mlžné komory, už v roce 1925. Je zakladatelem observatoře ve Fleurs v blízkosti Sydney. Vystudoval Univerzitu v Sydney, kde získal i doktorát. Za svou práci obdržel medaili Edgewortha Davida.



Goldreich, Peter (*1939), americký astrofyzik, autor modelu magnetohydrodynamické turbulence (spolu se Seshadri Shridarem) a jeden z autorů teorie planetární migrace. Vystudoval Cornellovu univerzitu, kde získal doktorát pod vedením Thomase Golda. V roce 1969 se stal profesorem planetárních věd na Caltechu. Od roku 2003 je také profesorem v Princetonu. Za svou práci získal několik desítek medailí a nejrůznějších ocenění. K nejvýznamnějším patří Chapmanova medaile Královské astronomické společnosti, zlatá medaile Královské astronomické společnosti, národní medaile za vědu, cena Gerarda Kuipera a Shawova cena. Je po něm pojmenována planetka 3805 Goldreich.

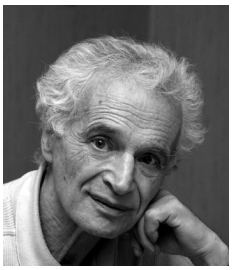


Gould, Roy Walter (1927–2022), americký elektroinženýr a fyzik se specializací na fyziku plazmatu. Spolu s Alvinem Trivelpiecem objevili v roce 1959 elektrostatické vlny pohybující se v podobě solitonu po povrchu zmagnetizovaného sloupce plazmatu. Dnes se tento jev nazývá Trivelpieceův-Gouldův soliton. Zabýval se mikrovlnami a jejich šířením v plazmatu, mj. i rádiovým šumem Slunce. Podílel se také na vývoji raketových motorů v NASA (Jet Propulsion Laboratory). V roce 1994 získal cenu Jamese Clerka Maxwella za přínos k fyzice plazmatu. Gould vystudoval Caltech (bakalář) a Stanfordovu univerzitu (magistr). Na doktorát se pak vrátil na Caltech.

Gordon, Walter, viz sekce Kvantová teorie, díl I „Vybraných kapitol“



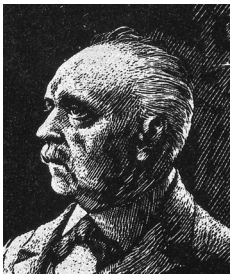
Gross, Eugene (1926–1991), americký teoretický fyzik. Zabýval se interakcí bosonů v kvantové teorii pole, bosonovými kondenzáty, kmity a vlnami v plazmatu a kinetickou teorií plazmatu. Spolu s Prabhu Lalem Bhatnagarem a Maxem Krookem odvodili tzv. BGK aproximaci Boltzmannovy rovnice, která je v některých situacích vhodnou náhradou srážkového členu. Eugene Gross vystudoval v Princetonu. Získal Fulbrightovo stipendium na Univerzitě v Římě. Působil na celé řadě univerzit, byl například hostujícím profesorem na Massachusettském institutu technologií (MIT), působil na Univerzitě v Syracuse nebo na Brandeisově univerzitě.



Gurevič, Alexandr Viktorovič (1930–2023), sovětský a ruský fyzik, který v roce 1992 navrhl, že startovacím mechanizmem pro vznik blesků jsou ubíhající elektrony, ať už urychlené v naší atmosféře či z kosmického záření. Gurevič se zabývá kinetickou teorií plazmatu, ionosférickou fyzikou, a v posledních desetiletích i magnetosférami neutronových hvězd a problematikou temné hmoty. Gurevič vystudoval Moskevskou státní univerzitu. Za svou práci získal zlatou medaili L. D. Landaua, Appletonovu cenu, Mandelstamovu cenu a Fridmanovu cenu.

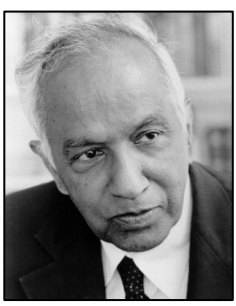
Hartmann, Julian, dánský inženýr, který v roce 1937 publikoval řešení pro tok vodivé kapaliny v homogenním magnetickém poli a navrhl elektromagnetickou pumpu kapalných kovů. Experimentálně ji na rtuti otestoval F. Lazarus. Ve fyzice plazmatu je po něm pojmenováno Hartmannovo číslo a Hartmannova vrstva.

Hartree, Douglas Rayner (1897–1958), anglický matematik a fyzik. Zabýval se především numerickou analýzou a její aplikací v kvantové teorii a atomové fyzice. Je po něm pojmenována Hartreeho-Fockova numerická metoda a Appletonova-Hartreeho formule pro šíření elektromagnetických vln v plazmatu s homogenním magnetickým polem.

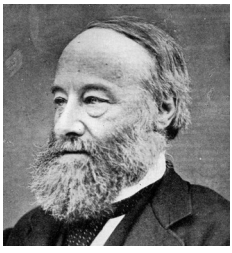


Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von (1821–1894), německý lékař a fyzik, vědec s nesmírně širokým záběrem. Zabýval se teorií elektřiny a magnetizmu, termodynamikou, mechanikou, fyzikou lidského oka, teorií barevného vidění, akustikou, estetikou… Ve fyzice plazmatu používáme Helmholtzovu rovnici, kterou splňují Beltramova helikální pole. Po Helmholtzovi je také pojmenována Kelvinova-Helmholtzova nestabilita vznikající na rozhraní dvou prostředí s různou rychlostí. Elektroinženýrům jsou ještě známé Helmholtzův rezonátor a Helmholtzova cívka, které jako první zkonstruoval.

Hugoniot, Henri Pierre (1851–1887), francouzský inženýr a vynálezce. Je spoluautorem teorie rázových vln v tekutinách. Odvodil spolu s Rankinem podmínky pro skoky veličin na rázové vlně, které se nazývají Rankinovy-Hugoniotovy podmínky. Pracoval také pro francouzské námořnictvo, kde získal hodnost kapitána.

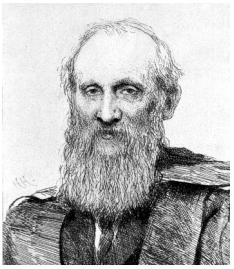


Chandrasekhar, Subrahmanyan (1910–1995), indický astrofyzik, pracoval v Anglii, později v USA. Zabýval se zejména teorií stavby hvězd, matematickou teorií černých děr a obecnou relativitou. Ze stavové rovnice odvodil maximální možnou hmotnost bílého trpaslíka (Chandrasekharovu mez). Na jeho počest byla pojmenována rentgenová družice Chandra vypuštěná do vesmíru v roce 1999. Ve statistické fyzice a ve fyzice plazmatu se používá Chandrasekharova funkce. V roce 1983 získal Nobelovu cenu za fyziku za přínos k objasnění fyzikálních procesů při vzniku a vývoji hvězd.



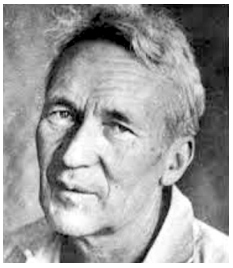
Joule, James Prescott (1818–1889), anglický fyzik a sládek, který studoval povahu tepla a jeho vztah k mechanické energii. S Kelvinem spolupracoval na zavedení absolutní teplotní stupnice. Zkoumal magnetostrikci, nalezl vztah pro teplo generované

při průchodu elektrického proudu látkou. Toto tzv. Jouleovo teplo je hlavním disipačním procesem v plazmatu. Dále je po něm pojmenována jednotka energie. Joule si sám vyráběl velmi přesné měřící přístroje. Zjistil, že teplo není tekutina, jak se v té době vědci domnívali, ale forma energie.

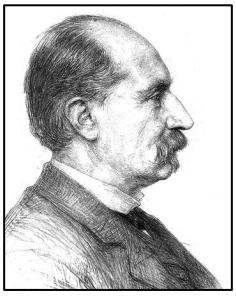


Kelvin, lord (1824–1907), vlastním jménem William Thomson, významný skotský fyzik. Zabýval se vedením tepla, kalorimetrií, sestrojil řadu přístrojů pro měření různých elektrických veličin, například Kelvinův (Thomsonův) můstek pro měření malých odporů. Podílel se na pokládání podmořských telegrafických kabelů. Je po něm pojmenována teplotní stupnice, Kelvinova-Helmholtzova nestabilita vznikající na rozhraní dvou prostředí s různou rychlostí a Jouleův-Thomsonův jev (ochlazení stlačeného plynu při prudké expanzi).

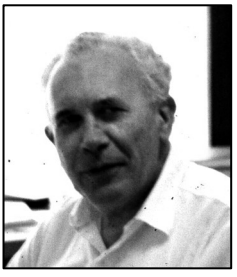
Klein, Oskar Benjamin, viz sekce Kvantová teorie, díl I „Vybraných kapitol“



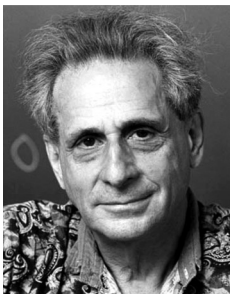
Kolmogorov, Andrej Nikolajevič (1903–1987), sovětský matematik zabývající se teorií pravděpodobnosti, topologií, logikou, algoritmickou teorií informace a výpočetní složitostí. V matematické fyzice se zaměřil na turbulenci, mechaniku kontinua a klasickou mechaniku. Jeho záběr v matematice a fyzice byl obrovský, je po něm pojmenováno přes třicet matematických pojmů a vět. Z hlediska fyziky plazmatu je nejdůležitější jeho teorie turbulence (Kolmogorovova turbulence), kterou lze aplikovat i na neplazmatické prostředí například atmosféru, kde způsobuje při pozorování oblohy tzv. seeing (fluktuace intenzity a fáze dopadajícího světla). Kolmogorov vystudoval Moskevskou státní univerzitu, kde také strávil svou vědeckou kariéru. Za svou práci dostal řadu ocenění, například Wolfovu cenu, Lobačevského cenu a Balzanovu cenu. Získal i typické ceny sovětského režimu: Stalinovu a Leninovu cenu.



Korteweg, Diederik Johannes (1848–1941), holandský matematik, který se nejvíce proslavil Kortewegovou-de Vriesovou (KdV) rovnicí popisující vznik solitonů v mělké proudící vodě. KdV rovnice je prototypem popisu solitonů, které nemění svůj tvar ani při vzájemné interakci. Korteweg se původně chtěl stát inženýrem, ale jeho vztah k matematice byl natolik silný, že ji nakonec vystudoval na Amsterodamské univerzitě. Gustav de Vries, který s ním odvodil KdV rovnici, byl jeho studentem. Korteweg byl 60 let členem Holandské královské akademie věd a umění. Je po něm pojmenována planetka 9685 Korteweg.

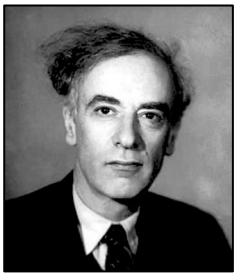


Krook, Max (1913–1985), americký matematik a astrofyzik. V matematice se zabýval teorií funkcí komplexní proměnné. Ve fyzice plazmatu spolu s Prabhu Lalem Bhatnagarem a Eugenem Grossem odvodili BGK aproximaci Boltzmannovy rovnice, ze které se dají jednoduše odvodit různé transportní jevy. Studoval na Witwatersrandské univerzitě v Jižní Africe, doktorát z matematiky získal na Cambridgi pod vedením sira Arthura Eddingtona. Od roku 1950 pobýval a pracoval v USA, kde vystřídal několik míst, až se v roce 1959 stal profesorem na Harvardu.



Kruskal, Martin David (1925–2006), americký matematik a fyzik. Zabýval se nelineární fyzikou, popisem kontinua parciálními diferenciálními rovnicemi, fyzikou plazmatu a obecnou relativitou. Při zkoumání řešení KdV rovnice zavedl do fyziky pojem solitonu (toto označení pochází od Kruskala), zavedl Kruskalovy souřadnice ve Schwarzschildově geometrii, je po něm pojmenována Kruskalova procedura v teorii Markovových procesů. Ve fyzice plazmatu zkoumal teoretické podmínky stability pinče. Popsal Rayleighovu-Taylorovu nestabilitu pro plazma s magnetickým polem. Je po něm pojmenována Kruskalova-Šafranova nestabilita. Kruskal studoval na Newyorské univerzitě a na Chicagské univerzitě. Většinu aktivního vědeckého života strávil v Princetonu. Je nositelem řady ocenění, z nichž k nejvýznamnějším patří Heinemanova cena, národní medaile za vědu, Steelova cena, Maxwellova cena a zlatá medaile Howarda Pottse.

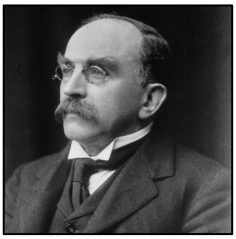
Kuzněcov, Jevgenij Alexandrovič, ruský matematik, profesor v Lebeděvově institutu fyziky, který významnou měrou přisívá k teorii solitonů. Je po něm pojmenovaná Sacharovova-Kuzněcovova soustava rovnic, která vede Davydovův soliton. Tento soliton se objevuje v chemii, kvantové teorii, při nestabilitách elektronového svazku a může se také vyvinout z Langmuirových vln.



Landau, Lev Davidovič (1908–1968), sovětský teoretický fyzik, nositel Nobelovy ceny za fyziku pro rok 1962 za teorii supratekutosti. Landau významně přispěl do všech odvětví teoretické fyziky, zejména kvantové mechaniky, kvantové elektrodynamiky, supratekutosti, supravodivosti, fázových přechodů, diamagnetismu, fyziky plazmatu a teorie neutrin. V plazmatu je po něm pojmenovaná Landauova rovnice pro hustotu pravděpodobnosti při Coulombových srážkách a Landauův útlum popisující interakci částic a vln v rychlostní části fázového prostoru.

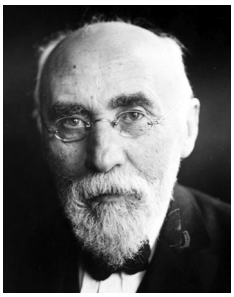


Langmuir, Irving (1881–1957), americký fyzik a chemik, získal Nobelovu cenu za chemii pro rok 1932. Zabýval se metalurgií, inertními plyny a fyzikou plazmatu. Pro ionizované prostředí jako první použil název plazma. Je po něm pojmenována Langmuirova sonda pro měření potenciálu v plazmatu a Langmuirův soliton. Nezávisle na Sahovi odvodil v roce 1923 Sahovu rovnici pro tepelnou ionizaci. Také byl prvním, kdo experimentálně detekoval dvojvrstvu. Langmuir vystudoval Kolumbijskou univerzitu a Götingenskou univerzitu. Za své práce získal řadu ocenění, například Hughesovu medaili, Perkinovu medaili, cenu Willarda Gibbse, Franklivovu medaili, Faradayovu medaili a další. Je po něm pojmenována Langmuirova laboratoř pro atmosférický výzkum v blízkosti Socorra.

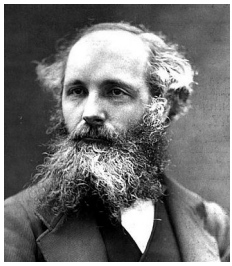


Larmor, Joseph (1857–1942), irský fyzik. Vysvětlil Fitz-Geraldovu kontrakci nezávisle na Lorentzovi. Vypočetl výkon uvolňovaný při záření urychleného náboje (Larmorova formule), vysvětlil rozštěpení spektrálních čar v magnetickém poli. Jako jeden z prvních předpokládal, že geomagnetické bouře souvisí se slunečními erupcemi a jsou způsobeny elektrony přilétajícími ze Slunce. Na jeho počest je pojmenován Larmorův

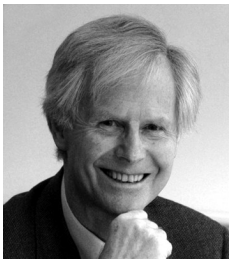
poloměr pohybu nabité částice v magnetickém poli. Larmor studoval na Královské univerzitě v Belfastu a v Cambridgi. Za své práce získal Královskou medaili, Smithsovu cenu, Adamsovu cenu, de Morganovu medaili a Copleyho medaili.



Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928), holandský fyzik, který v šestnácti letech začal studovat na Leidenské univerzitě, promoval jako dvaadvacetiletý a po dvou letech se stal vysokoškolským profesorem teoretické fyziky v Leidenu. Upustil díky Hertzovým pokusům od Helmholtzovy teorie elektromagnetického pole a chápal Maxwellovu teorii, k níž se ihned přiklonil, za velký úspěch. Čistě na základě Maxwellovy teorie elektromagnetického pole zcela přestavěl tehdejší fyziku. Jako první považoval za zdroje elektromagnetického pole oscilující nabité částice. Maxwellovy rovnice odvodil z představy látky jako soustavy oscilátorů. Předpověděl, že silné magnetické pole povede k rozštěpení spektrálních čar. Experimentálně tento fakt prokázal jeho žák Pieter Zeeman. Oba získali Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1902. Objevil transformaci proměnných, vůči které Maxwellovy rovnice nemění svůj tvar (dnes Lorentzova transformace). Po Lorentzovi je pojmenována Lorentzova síla působící na nabitou částici v elektromagnetickém poli a Lorentzova transformace ve speciální relativitě.



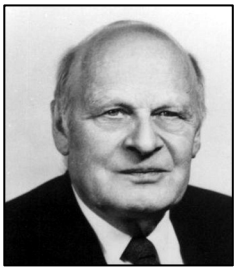
Maxwell, James Clerk (1831–1879), skotský matematik a fyzik, publikoval matematickou a fyzikální teorii elektromagnetického pole. Odvodil, že světlo je složeno z příčných modů a je způsobeno magnetickými a elektrickými jevy. Svojí teorii elektřiny a magnetizmu publikoval v roce 1873 v knize *A Treatise on Electricity and Magnetism*, ve které byly zahrnuty vztahy dnes známé jako Maxwellovy rovnice. Maxwellova teorie elektromagnetického pole přímo vede k existenci elektromagnetických vln. Jejich existenci dokázal Heinrich Hertz až po Maxwellově smrti. Maxwell správně odhadnul, že Saturnovy prstence jsou tvořeny drobným kamenitým materiálem. S Clausiem vyvinul Maxwell kinetickou teorii plynů a jeho studie kinetické teorie ho zavedla v roce 1867 k formulování paradoxu Maxwellova démona. Ukázal, že druhý termodynamický zákon je pouze statistický zákon popisující vlastnosti velkého počtu částic. V roce 1871 se stal prvním ředitelem slavné Cavendishovy laboratoře v Cambridgi. Po Maxwellovi jsou kromě Maxwellových rovnic pojmenovány: Maxwellovo rozdělení, Maxwellův démon, jednotka magnetického toku, horský masiv na Venuši, mezera mezi Saturnovými prstenci a dalekohled JCMT (James Clerk Maxwell Telescope) pro infračervený obor. Existuje také Maxwellova nadace.



Moffatt, Henry Keith (*1935), skotský astrofyzik a matematik, zabýval se dynamikou tekutin, magnetohydrodynamikou a teorií turbulence. Zabýval se zauzlenými magnetickými toky a víry. Moffatt je autorem pojmu helicita v teorii tekutin. Je spoluautorem teorie tekutinového dynama, které vysvětluje vznik a překlápění polí ve hvězdách a v planetách. Moffatt studoval na Edinburgské univezitě a v Cambridgi. Profesorem aplikované matematiky byl jmenován na Univerzitě v Bristolu, po třech letech se ale vrátil do Cambridge. Za svou práci získal Smithsovu cenu, Whiteheadovu cenu a Hughesovu medaili. Stal se také členem Královské společnosti.

Neumann, John von, viz sekce Numerické simulace

Ohm, Georg Simon, viz sekce Elektromagnetické pole, díl II „Vybraných kapitol“



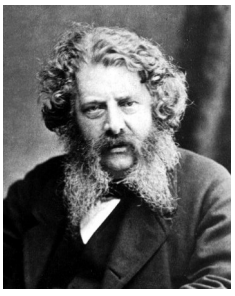
Onsager, Lars (1903–1976), norsko-americký chemik a teoretický fyzik. V roce 1968 získal Nobelovu cenu za chemii. Zabýval se teorií elektrolytů a Brownovým pohybem iontů. Uchvátila ho statistická fyzika a termodynamika. Zkoumal difúzi částic způsobenou gradientem teploty a koncentrace a produkci entropie při těchto procesech. Své poznatky zobecnil na tzv. Onsagerovy relace reciprocity, které popisují symetrie mezi toky a jejich příčinami. Onsager vystudoval Univerzitu v Yale a Norskou univerzitu věd a technologií. Působil na Brownově univerzitě, Hopkinsově univerzitě a Univerzitě v Yale. Za své práce získal řadu ocenění, kromě Nobelovy seny obdržel také Lorentzovu medaili, cenu Willarda Gibbse, cenu Petera Debyeho a národní medaili za vědu.



Parker, Eugene (1927–2022), americký teoretik a astrofyzik zabývající se teorií slunečního větru a magnetickými poli ve vesmíru a meziplanetárním prostoru. Parker jako první použil sousloví *Solar Wind*, tedy sluneční vítr, pro částice vylétávající ze Slunce a spočetl rovnici pro únik těchto částic (Parkerova rovnice). Je po něm pojmenována Parkerova plocha nulového magnetického pole Slunce (tzv. neutrální vrstva), Parkerův model přepojení magnetických indukčních čar, Pakerova teorie tekutinového dynama, Parkerova spirála, Parkerova rovnice a Parkerova mez. Sonda *Parker Solar Probe* je jedinou americkou sondou pojmenovanou po žijícím člověku. Parker byl dokonce ve svých 91 letech u jejího startu. Parker vystudoval Michiganskou státní univerzitu a Kalifornskou technologii. Za své rozsáhlé práce v oblasti výzkumu slunečního a meziplanetárního plazmatu získal přes deset cen a medailí. Jmenujme alespoň cenu George Elleryho Halea, medaili Williama Bowieho, zlatou medaili Královské astronomické společnosti, Bruceovu medaili, cenu Jamese Clerka Maxwella a Crafoordovu cenu.

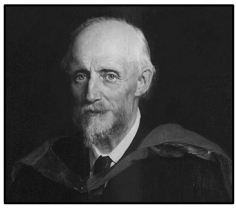
Pauli, Wolfgang, viz sekce Statistická fyzika, díl II „Vybraných kapitol“

Poynting, John, viz sekce Elektromagnetické pole, díl II „Vybraných kapitol“



Rankine, William John Macquorn (1820–1872), skotský inženýr zabývající se dynamikou tekutin a termodynamikou. Vystudoval vodní a železniční stavitelství na Edinburgské univerzitě. Pracoval na Glasgowské univerzitě. Na počátku kariéry se věnoval vlnové teorii světla. Poté se orientoval na termodynamiku a hydrodynamiku. Vytvořil kompletní teorii parního stroje. Zabýval se také botanikou a hudbou. Spolu s Henri Pierrem Hugoniotem odvodil Rankine-Hugoniotovy podmínky pro skoky veličin na rázové vlně. Zobecnění těchto podmínek se používá i ve fyzice plazmatu. Je po něm také pojmenována teplotní stupnice, kterou vytvořil, Rankinův tepelný cyklus a Rankinova metoda pokládání železničních kolejí v zatáčkách. Za své rozsáhlé práce v oblasti termodynamiky a hydrodynamiky obdržel Keithovu medaili.

Rayleigh, viz sekce Elektromagnetické pole, díl II „Vybraných kapitol“



Reynolds, Osborne (1842–1912), anglický fyzik a průkopník teorie tekutin. Zabýval se ale i termodynamikou, vylepšil tehdejší konstrukci kotle a kondenzoru u parních strojů, jako inženýr se podílel na konstrukci parníků. V teorii tekutin je po něm pojmenováno Reynoldsovo číslo a ve fyzice plazmatu Reynoldsovo magnetické číslo, které je poměrem členů popisujících zamrzání a difúzi magnetického pole. Zabýval se podmínkami, za nichž se laminární proudění mění v turbulentní. Vystudoval Queens' College v Cambridgi. Většinu profesního života strávil na dnešní Univerzitě v Manchesteru.

Richtmyer, Robert Davis, viz sekce Numerické simulace

Rosenbluth, Marshall, viz sekce Numerické simulace



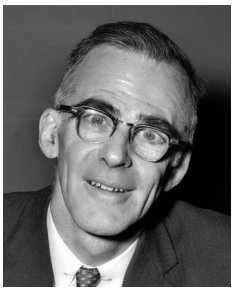
Russel, John Scott (1808–1882), skotský inženýr, který jako první pozoroval solitony na Union průplavu v Hermistonu. Na základě tohoto objevu Scott Russel vybudoval rybník na vlastní zahradě a prováděl další výzkumy v oblasti vlastností solitonů (osamocených vln). Po celou dobu života byl Russell přesvědčený, že jeho solitární vlny jsou důležité, ale v devatenáctém a počátkem dvacátého století smýšleli vědci jinak. Svoji slávu získal za jiné objevy a práce. Uznání se mu dostalo například za systém trub, který byl revoluční v námořní dopravě a za který získal vyznamenání Královské společnosti v Edinburghu v roce 1837. V roce 1834 zavedl parní dopravu mezi Glasgowem a Paisley a provedl první experimentální pozorování Dopplerova posuvu frekvence zvuku míjejícího vlaku. Založil Institut námořní architektury a v roce 1849 se stal členem správní rady Královské společnosti v Londýně. Byl autorem mnoha zajímavých návrhů a konstrukcí, například první britské obrněné válečné lodi (Warrior). Realizoval učební plány pro technické vzdělání v Britanii a v nedávné době se zjistilo, že se pokoušel o nastolení míru během americké občanské války. Russellem objevené solitony se staly nedílnou součástí moderní fyziky nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Právě nelineární jevy umožňují kompenzaci jevů disperze a jako výsledek může vzniknout osamocená vlna šířící se prostorem. Solitony našly uplatnění ve fyzice plazmatu (Langmuirův soliton), v nelineární optice, v hydrodynamice a v dalších vědních oborech.



Saha, Meghnad (1893–1956), indický astrofyzik, který v roce 1920 odvodil rovnici (Sahovu rovnici) pro tepelnou ionizaci plazmatu a otevřel cestu pro výzkum astrofyzikálního i laboratorního plazmatu. Velmi intenzivně se zajímal o kvantovou teorii záření a o speciální i obecnou relativitu. Připravoval anglické překlady Einsteinových prací. V roce 1919 zjistil, že tlak záření ve hvězdách je protiváhou gravitační kontrakce. Dnes je po něm pojmenován Sahův ústav jaderné fyziky v indické Kalkatě. Byl také architektem pro plánování říčních staveb v Indii. Vystudoval Univerzitu v Kalkatě, kde byl jeho spolužákem Satyendra Nath Bose, autor Boseho rozdělení pro částice s celočíselným spinem. Pracoval v různých institucích v Indii a v Anglii, například v Allahabadově univerzitě, Rajabazarově koleji, Kalkatské univerzitě a v Imperial College v Londýně.



Schwarzschild, Martin (1912–1997), německo-americký astronom, syn známého fyzika Karla Schwarzschilda, který nalezl řešení rovnic obecné relativity pro sférické rozložení hmoty. Martin Schwarzschild se zabýval stavbou hvězd a vývojem hvězd. Spolu s Kruskalem řešil podmínky rovnováhy a stability plazmových vláken, tzv. pinčů, a popsal Rayleighovu-Taylorovu nestabilitu pro plazma s magnetickým polem. Jeho hlavní doménou byla ale astrofyzika. Zabýval se strukturou a vývojem hvězd, změnou jejich polohy v Hertzsprungově-Russelově diagramu. Zajímaly ho fáze pulzací, héliový záblesk a vytvořil první model vývoje větve červených obrů. V 50. a 60. letech vedl projekt vypouštění výzkumných stratosférických balónů. Schwarzschild vystudoval Univerzitu v Göttingen, většinu profesního života strávil v Princetonu. Za své práce získal Newcombovu Cleveleandovu cenu, medaili Karla Schwarzschilda, medaili Henryho Drapera, Bruceovu medaili, Brouwerovu cenu, Balzanovu cenu a národní medaili za vědu. Je po něm pojmenována planetka 4463 Marschwarzschild.



Spitzer, Lyman (1914–1997), americký astrofyzik a spoluzakladatel teoretické fyziky plazmatu. Intenzivně se zabýval mezihvězdným prostředím, plyny, prachem a magnetickými poli. Na jeho počest je pojmenován vztah pro vodivost plazmatu. Spitzer byl prvním ředitelem projektu Matterhorn, který měl v Princetonu za cíl uskutečnění termojaderné fúze. Pro tyto účely vyvinul zcela nové zařízení – stelarátor. Jako první navrhl v roce 1946, ještě dávno před založením NASA, umístit dalekohled na oběžné dráze. Jeho nesmírné úsilí vedlo NASA k umístění dalekohledů Copernicus a HST (Hubblův vesmírný dalekohled) do vesmíru. Na jeho počest je pojmenován Spitzerův vesmírný dalekohled pro infračervený obor. Spitzer vystudoval Yalskou a Princetonskou univerzitu. Za své práce obdržel medaili Henryho Drapera, národní medaili za vědu a Crafoordovu cenu.

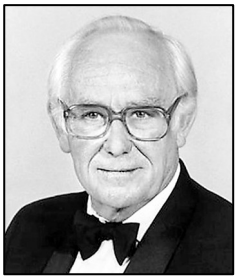


Sridhar, Seshadri, indický fyzik působící v Ramanově výzkumném institutu, aktivní člen Mezinárodní astronomické unie. Spolu s Peterem Goldreichem vytvořili model magnetohydrodynamické turbulence jako životaschopnou a experimentálně úspěšnou alternativu ke Kolmogorově teorii turbulence. →

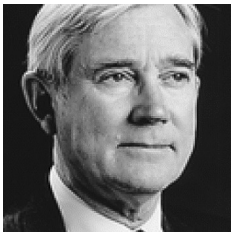


Stix, Thomas Howard (1924–2001), americký plazmový fyzik. Zabýval se ohřevem plazmatu elektromagnetickými vlnami na termojaderné teploty, studoval stochastické procesy při pohybu nabitých částic v plazmatu. Je autorem vůbec prvního matematického pojednání o vlnách v plazmatu. Za druhé světové války Stix řešil problémy rádiové komunikace. Po válce vystudoval Kalifornský institut technologií a Princetonskou univerzitu. Pracoval v projektu Matterhorn – tajném americkém projektu pro uskutečnění termojaderné fúze, který probíhal v Princetonu. Je držitelem mnoha cen, například Maxwellovy ceny (1980) – nejvyšší ceny udělované Americkou fyzikální společností za fyziku plazmatu. Na jeho počest jsou pojmenovány Stixovy koeficienty ve vztahu pro vysokofrekvenční permitivitu a Stixova cívka pro ohřev plazmatu.

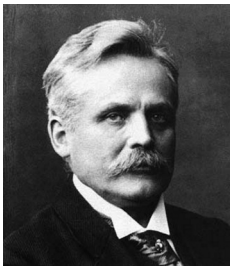
Sweet, Peter Alan (1921–2005), viz sekce Numerické simulace



Taylor, Geoffrey Ingram (1886–1975), anglický fyzik, matematik a zejména expert na dynamiku tekutin a teorii vln. Věnoval se meteorologii, vlnám v kvantové teorii (ukázal, že v dvouštěrbinovém experimentu dojde k interferenci, i když je v systému přítomen v daném čase jeden jediný foton), zabýval se turbulencemi oceánů, vznikem vírových struktur a nestabilit na rozhraní dvou prostředí. Je po něm pojmenována Rayleighova-Taylorova nestabilita, Taylorův vír, Taylorovo-Couettovo proudění, Taylorova disperze (v tekutině s nenulovou viskozitou) nebo Taylorova délka (charakteristický rozměr turbulencí). Taylor vystudoval v Cambridgi. Obdržel velké množství nejrůznějších cen, například královskou medaili, Copleyho medaili, zlatou Symonsovu medaili, medaili Wilhelma Exnera, Franklinovu medaili a další.



Trivelpiece, Alvin William (1931–2022), elektroinženýr a plazmový fyzik, po němž je pojmenován jeden ze solitonů. Trivelpiece vystudoval Kalifornský institut technologií (Caltech). Profesorem se stal na Marylandské univerzitě. Vystřídal velké množství zaměstnání, nejdéle setrval na pozici ředitele Národní laboratoře v Oak Ridge (21 let). Nebránil se ani politickým pozicím, zastával například vysokou funkci na americkém Ministerstvu energetiky (DOE), byl v nejrůznějších radách a odborným konzultantem v mnoha společnostech. Je spoluautorem dvou knih o fyzice plazmatu (*Principles of Plasma Physics*, *Slow-Wave Propagation in Plasma Wave Guides*). Za svou fyzikální práci získal cenu Alberta Nelsona Marquise. Současně obdržel několik cen za inženýrské působení v oblasti energetiky. Je autorem několika patentů.



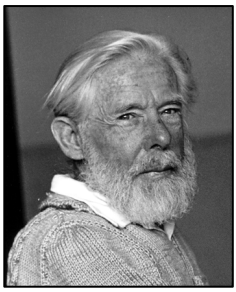
Vlasov, Anatolij Alexandrovič (1908–1975), sovětský teoretický fyzik, který se po většinu života věnoval statistické fyzice. Ve fyzice plazmatu je podle něho pojmenovaná Vlasovova rovnice pro statistický popis bezesrážkového plazmatu. Kromě fyziky plazmatu se zabýval optikou, fyzikou krystalů a teorií gravitace. Vystudoval Moskevskou státní univerzitu, kde pracoval po boku Pjotra Kapici a Lva Davidoviče Landaua. Jeho doktorská studia vedl Igor Tamm. Za své práce obdržel Leninovu cenu. V roce 1944 se stal profesorem, v letech 1944 až 1953 byl vedoucím fyzikální fakulty Moskevské státní univerzity.

Vries, Gustav de (1866–1934), holandský matematik, který je spolu s Dierikem Koortewegem, který byl školitelem jeho doktorské práce, autorem slavné KdV rovnice. Tato rovnice popsala poprvé dříve pozorovaný pohyb solitonů na vodní hladině říčního kanálu. Vries vystudoval Amsterodamskou univerzitu. Po studiích se živil jako středoškolský učitel.

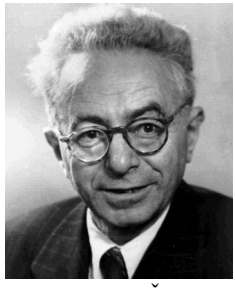


Zacharov, Vladimir Jevgeněvič (1939–2023), sovětský a ruský matematik a fyzik. Zabývá se nelineárními vlnami v plazmatu, a hydrodynamikou. Je po něm pojmenována rovnice popisující solitonová řešení. Vystudoval Novosibirskou státní univerzitu. Získal Diracovu medaili za příspěvky k teorii turbulence. →

Numerické simulace



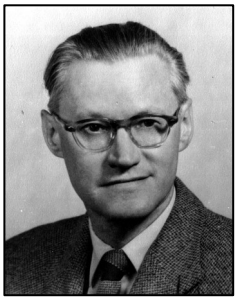
Buneman, Oscar (1914–1993), významný plazmový fyzik, zabýval se teorií elektromagnetických dějů i numerickými simulacemi. Narodil se v Itálii, vyrůstal v Německu a v roce 1935 emigroval do Anglie. Střídavě působil v Anglii a Kanadě, od roku 1960 na Stanfordské univerzitě v USA. Zabýval se rozptylem na fluktuacích plazmatu, teorií hvizdů, numerickým řešením rovnic fyziky plazmatu. Je spoluautorem kódu TRISTAN, je po něm pojmenována Bunemanova nestabilita, Bunemanovo diferenční schéma, Bunemanův potenciál a Bunemanovo-Hartreeho kritérium pro napěťový práh v magnetronu. Je považován za otce numerických simulací ve fyzice plazmatu.



Courant, Richard (1888–1972), německo-americký matematik, který se zabýval metodami matematické fyziky, diferenciálním a integrálním počtem a numerickými metodami vhodnými k popisu přírodních dějů, zejména diferenčními schématy pro parciální diferenciální rovnice. Použil také metodu konečných prvků k simulaci rovinné torze. Courant vystudoval Göttingenskou univerzitu, kde později také pracoval. Pobýval a pracoval také v Cambridgi a na Newyorské univerzitě. Je po něm pojmenováno Courantovo číslo, Courantův princip minima a maxima a Courantova-Fridrichova-Lewyho podmínka stability diferenčního schématu. Školitelem jeho doktorského studia byl David Hilbert, jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob.

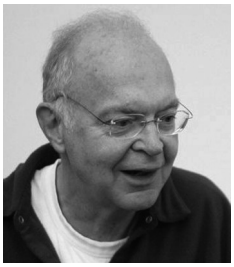


Crank, John (1916–2006), anglický matematický fyzik, který se detailně zabýval numerickými schématy pro řešení parciálních diferenciálních rovnic, zejména rovnice vedení tepla. Vystudoval Manchesterskou univerzitu, později působil na Brunelově univerzitě, kde byl vůbec prvním ředitelem matematického ústavu. Jeho doktorským školitelem byl nositel Nobelovy ceny William Bragg. Po Cranckovi je pojmenované Cranckovo-Nicolsonové diferenční schéma. Cranck se rád věnoval údržbě zahrad, proto je po něm také pojmenována zahrada Brunelovy univerzity, kterou sám vytvořil.



Fridrichs, Kurt Otto (1901–1982), německo-americký matematik, spoluzakladatel Courantova ústavu na Newyorské univerzitě. Zabýval se parciálními diferenciálními rovnicemi, numerickými metodami, diferenciálními operátory, turbulencemi za křídlem letadla, vznikem solitonových řešení, rázovými vlnami v magnetohydrodynamice, relativistickým prouděním a teorií rozptylu v kvantové teorii. Friedrichs vystudoval v Göttingen. Je po něm pojmenována Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka stability a Laxova-Friedrichsova metoda. Za svou práci získal ve Spojených státech národní medaili za vědu.

Hubbard, John Hamal (*1945), americký matematik, který přispěl zejména k teorii komplexních čísel. Podrobně se také zabýval Mandelbrotovou množinou. Je spoluautorem schématu pro nalezení kořenů algebraické rovnice. Vystudoval Cornellovu univerzitu a Harvardovu univerzitu. Je profesorem na Cornellově univerzitě.



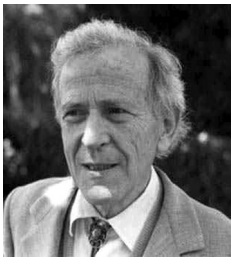
Knuth, Donald Erwin (*1938), americký počítačový expert a matematik, je považován za otce analýzy numerických algoritmů. Studoval na Caseově západní výzkumné univerzitě, doktorát získal na Kalifornském technologickém institutu. Knuth je mimo jiné autorem sazečského prostředí TeX. U algebraických rovnic nalezl způsob, jak odhadnout největší absolutní hodnotu všech kořenů, což je důležité pro všechny algoritmy hledající tyto kořeny. Za své rozsáhlé práce získal velké množství cen, z nichž nejvýznamnější je Turringova cena. Obdržel také John von Neumanovu medaili, Faradayovu medaili, národní cenu za vědu, Harveyho cenu a mnohé další. Stal se zahraničním členem Královské společnosti.



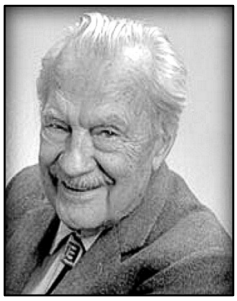
Kutta, Martin Wilhelm (1867–1944), německý matematik, který se zabýval numerickými metodami při řešení obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Je spoluautorem Rungeova-Kuttova diferenčního schématu. Zabýval se také aerodynamikou. Je spoluautorem Kuttova-Žukovského teorému, který řeší vztlakové síly na křídle. Studoval na Vratislavské univerzitě (německy Breslau) a poté na Mnichovské univerzitě. Zaměstnán byl na několika univerzitách, půl roku strávil v Cambridgi. Nakonec zakotvil na Stuttgartské univerzitě, kde se stal profesorem.



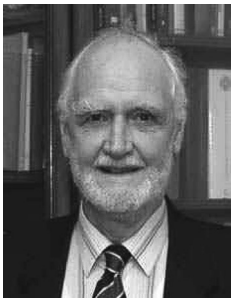
Lax, Peter David (*1926), americký matematik narozený v Maďarsku. Jeho doménou byla jak aplikovaná, tak rigorózní matematika. Zabýval se integrabilními systémy, dynamikou tekutin, rázovými vlnami a solitony. Řešil parciální diferenciální rovnice, zejména hyperbolického typu. Je autorem některých diferenčních schémat pro řešení parciálních rovnic. K nejznámějším patří Laxovo-Wendroffovo schéma. K jeho velmi významným výsledkům patří nalezení maticové reprezentace k hyperbolickým polynomům třetího řádu. Lax vystudoval Courantův institut, kde později také pracoval. Za své objevy získal řadu cen a medailí, například americkou národní medaili za vědu, Wolfovu cenu, cenu Norberta Wienera, Abelovu cenu, Chauvenetovu cenu a Lomonosovovu zlatou medaili.



Lewy, Hans (1904–1988), americký matematik narozený v Německu, který se zabýval parciálními diferenciálními rovnicemi a jejich numerickým řešením. Druhou oblastí jeho činnosti byla komplexní analýza, v níž zkoumal funkce více komplexních proměnných. Vystudoval Göttingenskou univerzitu, kde se věnoval nejen matematice, ale také fyzice. K jeho učitelům patřili Max Born, David Hilbert, Emmy Noether a Alexander Ostrowski. Školitelem jeho doktorské práce byl Richard Courant. V Americe pracoval na Brownově univerzitě a na Kalifornské univerzitě v Berkeley. Za svůj výzkum obdržel Wolfovu cenu. Je po něm pojmenována Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka stability explicitních numerických schémat.



Metropolis, Nicholas Constantine (1915–1999), řecko-americký matematik a fyzik. Vystudoval fyziku na Univerzitě v Chicagu, většinu plodného života strávil v americké Národní laboratoři v Los Alamos, kde se podílel na stavbě prvních jaderných reaktorů. Úzce spolupracoval s Enricem Fermim, Edwardem Tellerem a Marshallem Rosenbluthem. V roce 1953 se stal spoluautorem jedné z nejúspěšnějších numerických metod všech dob – Monte Carlo algoritmu, který vzorkuje určité statistické rozdělení. Metropolisův algoritmus se hojně využívá nejen ve fyzice plazmatu,a le téměř ve všech oblastech lidské činnosti, včetně ekonomie. Traduje se, že tento algoritmus objevili Rosenbluth s Metropolisem a dalšími nad ránem v baru. Odnoží je optimalizační algoritmus, který se nazývá simulované ochlazování. Za své práce Metropolis získal cenu průkopníka výpočetní techniky.



Morton, Keith William (*1930), britský matematik a fyzik zabývající se parciálními diferenciálními rovnicemi, jejich analýzou a numerickým řešením. Studoval v Cambridgi, doktorát vypracoval na Courantově institutu Newyorské univerzity na téma „Vlny konečné amplitudy v bezesrážkovém plazmatu“. Byl ovlivněn Richardem Courantem a Peterem Laxem. Ve spolupráci s Robertem Richtmyerem napsal pojednání o diferenciálních rovnicích a odvodil diferenční schéma, které nese jeho jméno. Po návratu do Anglie se stal profesorem matematiky v Oxfordu. Za svou práci získal Morganovu medaili.



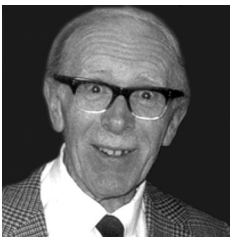
Neumann, John von (1903–1957), maďarsko-americký matematik, fyzik a počítačový specialista, který se zabýval kvantovou fyzikou, teorií množin, ekonomií, informatikou, numerickými simulacemi, hydrodynamikou, statistikou a mnoha dalšími obory. Je považován za otce digitálních počítačů, je spolutvůrcem matematické teorie her, podílel se na vývoji vodíkové bomby v Los Alamos. Podle von Neumanna je pojmenována architektura počítače a postup hledání podmínek stability diferenčních schémat. Jeho jméno nese necelá stovka dalších vět, teorémů a postupů ve fyzice, matematice a výpočetní technice. Vystudoval Univerzitu Pázmána Pétera, ETH v Curychu a Göttingenskou univerzitu. Za svou práci získal Bôcherovu cenu, medaili Enrica Fermiho, řád Za zásluhy (Modrý Max) a medaili svobody prezidenta Trumana.



Nicolsonová, Phyllis (1917–1968), britská matematička, která je spoluautorkou diferenčního schématu pro řešení parciálních diferenciálních rovnic, vyvinutého s Johnem Cranckem. Vystudovala na Manchesterské univerzitě, kde také získala doktorát. Původně se zabývala kosmickým zářením, ale s nástupem druhé světové války se skupina Douglase Hatreeho, v níž pracovala, musela zabývat obrannými problémy. Jedním z nich byl výzkum rovnice vedení tepla. Spolu s kolegou Johnem Cranckem zkoumala stabilitu různých výpočetních algoritmů. Tato práce je dovedla ke kvalitnímu schématu pro řešení rovnice vedení tepla, jenž se dnes nazývá Cranckovo-Nicolsonové schéma. Publikováno bylo až po válce.



Rosenbluth, Marshall Nicholas (1927–2003), americký plazmový fyzik. Je jedním ze tří spoluautorů Metropolisova algoritmu (Monte Carlo simulace v přírodních vědách), jednoho z nejúspěšnějších algoritmů všech dob. Zabýval se rozptylem elektronů, vlnami a nestabilitami v plazmatu, turbulencemi v tokamacích. Ve statistickém popisu plazmatu zavedl Rosenbluthovy potenciály. Do roku 1999 se podílel na přípravě projektu první experimentální termojaderné elektrárny ITER.



Sweet, Peter Alan (1921–2005), anglický astronom, profesor astronomie na Univerzitě v Glasgow. Zabýval se magnetickými poli v mezihvězdném prostředí. Je autorem jednoho z modelů magnetické rekonekce (Sweetův-Parkerův model, 1958). V době vzniku částicových simulací připravoval Peter Sweet vhodné numerické algoritmy a demonstroval je pro pouhých 8 částic na kapesní kalkulačce. Dnešní výpočetní technika umožňuje sledování miliardy nabitých částic. Sweet studoval v Cambridgi pod vedením Freda Hoyla.



Richtmyer, Robert Davis (1911–2003), americký fyzik, vystudoval v Německu. Působil v Los Alamos, ve Stanfordu, na Cornellově univerzitě, na Coloradské univerzitě a dalších pracovištích. Za druhé světové války pracoval v Los Alamos, po válce se stal vedoucím teoretického oddělení. Zabýval se numerickými metodami ve fyzice plazmatu, diferenčními schématy a nestabilitami. Je po něm pojmenována Richtmyerova-Meškovova nestabilita a Richtmyerovo-Mortonovo schéma. Působil jako nakladatel, hrál na housle ve filharmonii. Založil nadaci na podporu nadaných studentů.



Carl David Tolmé (1856–1927), německý matematik a fyzik. Je spoluautorem slavné Rungeovy-Kuttovy metody na řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Zabýval se také spektroskopií látek, detekoval čáry různých prvků a zajímal se o využití spektroskopie v astronomii. Vystudoval Berlínskou univerzitu, pracoval na Leibnizově univerzitě a na Göttingenské univerzitě. Je po něm pojmenován kráter na Měsíci a jeho jméno nesou Schumannovy-Rungeovy molekulární pásy.



Wendroff, Burton (*1930), americký matematik, který vyvíjel metody pro řešení hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic (Laxovo-Wendroffovo schéma). Jeho doménou byla aplikovaná matematika, zejména popis chování tekutin parciálními diferenciálními rovnicemi. Wendroff vystudoval Newyorskou univerzitu a MIT. Pracoval v národní laboratoři Los Alamos, na Denverské univerzitě a na Univerzitě v Novém Mexiku. Jeho doktorským školitelem byl Peter Lax. Wendroff je čestným členem společnosti pro industriální a aplikovanou matematiku.

Rejstřík pojmů

adiabatický invariant
  druhý 44
  první 34
  třetí 45
  obecně 34
Alfvénova rychlost 79, 92–95, 133–136, 179, 296, 299
algoritmus
  ADI 317
  Metropolisův 340–341
  Newtonův (hledání kořene) 323
  PIC 326
  Weylův 321
  zobecněný Newtonův 324
anomální rezistivita 96, 98, 251
banánová orbita 44, 51, 228
Beltramovo pole 80–83, 89, 104
Bernsteinovy módy 260
body O a X 94
Cauchyho
  hodnota 255
  úloha 312
CMA diagram 145–148
Coulombův logaritmus 241, 343
cykloida 23, 24
čas
  Alfvénův 297
  rezistivní 85, 92
číslo
  Alfvénovo 346
  Hartmannovo 77
  Lundquistovo 92, 94
  Machovo-Alfvénovo 94
  Prandtlovo 296
  Reynoldsovo 296
  Reynoldsovo magnetické 62, 90, 296
čtyřpotenciál 27, 261
čtyřrychlost 27–28, 205, 265
čtyřvektor 16–17, 25, 60, 116, 204–205, 265, 274
čtyřzrychlení 27, 265
čtyřvlnná interakce 163
Debyeova vzdálenost 14, 109, 129–130, 231–232, 237, 242, 326, 342
diamagnetizmus 55, 150
diference, diferenční 310
difúze
  ambipolární 223
  anomální 228
  gyromagnetická (Bohmova) 227
  neoklasická 228
  v magnetickém poli 64–67
  diferenční schémata 314–315
difúzní region 93
disperzní relace 116–124, 126, 128–132, 132–136, 137–146, 150, 156–162, 175, 180–184, 252, 255–256, 258, 278, 281, 285–289, 321
Dreicerovo pole 272, 275–276, 355
drift
  E×**B** 30, 40–42, 94
  grad *B* 41
  gravitační 40
  inerciální 40
  obecně 40, 54
  polarizační 42
  zakřivení 41
dvojvrstva 18, 108–113
dynamické tření 237, 248
dynamický tlak 211, 215
elektromagnetický kolaps 106
Elsässerova pole 299–297, 299
energie
  ionizační 13, 203,
entropie 229–230
Faradayova rotace – viz jev
Fermiho mechanizmus (urychlení) 44
formule
  Appletonova-Hartreeho 146, 150, 353, 357
  Rutherfordova 232, 235
  Spitzerova 251
frekvence
  cyklotronní 21, 23, 31, 35, 44, 52, 138, 140, 150, 260
  dolní hybridní , 148
  gyrační 33
  horní hybridní 143, 148
  charakteristická 220
  mezní 140, 142, 145, 148
  mezní levá 141, 143, 148
  mezní pravá 141, 143, 148

plazmová 126, 127–131, 138, 140, 142, 162, 252, 255, 256, 290, 326
rezonanční 140, 146
srážková 202, 207, 222, 225, 270, 272, 275
úhlová 86, 116, 121, 122, 123, 139, 156, 168, 183, 278
funkce
Besselovy 104, 171
Diracova zobecněná 65–67, 204, 247, 248
distribuční 334
Greenova 65–67, 310
Hamiltonova 16, 17, 19, 22, 26, 29
holomorfní 254
Chandrasekharova 243–245, 248–250, 272–276
chybová 243–245
kulové 242
Lagrangeova 16–17, 25, 233, 279, 282
vlnová 116, 349
generátor náhodných čísel
Fibonacciho 333
LCG 333
L'Ecuyerův 333–334
obecně 332–334
gyrace – viz Larmorova rotace
Hartmannovo řešení 75–78
helicita 80–8, 89, 92
hustota
hybnosti 58, 215
Jouleova výkonu 218, 219, 229
hvizdy – viz vlny
index
lomu 19, 139–147, 155
rekonekce 94–98
Jeansovo kritérium 122–124
jev (efekt)
alfa 87–89, 91, 98
Comptonův 268, 355
Faradayova rotace 148–149
Hallův 96–98
omega 86–88, 91
termodifúze 229
termoelektrický 185, 229
koeficient
difúze 223, 225, 226
kinetický 230
magnetické difúze 64
nárůstu nestability 156, 183, 197
polytropní 114, 124, 186
Stixův 145–146
tepelné vodivosti 229, 230
viskozity 71, 211, 296
komplex elektromagnetický 137–154
komplex magnetoakustický 132–136
konvoluce 66, 310
konstanta vazebná 158
korelace 88, 90, 91, 208, 332–333
kvazineutralita 12, 14, 60, 61, 108, 109, 127, 130, 185, 203, 223, 224, 231
Landauův útlum
na elektronech 252–258
na iontech 258–259
Bernsteinovy módy 260
Larmorova
formule 265
frekvence 141
rotace 21, 34, 43, 44, 46, 54
Larmorův poloměr 20, 24, 30, 32, 33–35, 39, 44, 96–98, 293, 295, 305
Lawsonovo kritérium 53
magnetické zrcadlo 12, 43–47, 51, 97, 188
magnetický ostrov 94, 97, 197, 199
magnetický povrch 100
magnetohydrodynamika 57–115
ideální 92, 114, 115, 164, 167, 168, 175, 181
jako teorie kontinua
minimální varianta 57–74
rezistivní 92, 93, 195
markovský řetězec (proces) 236–237
Maxwellovo rozdělení 220–222, 228, 231, 245, 247, 249, 360
metoda Monte Carlo 331–344
střelby (distribuční funkce) 334
superpozice 338
von Neumana 337
mikronestability 251
model
jednotekutinový 60, 125, 132, 211, 218
GS95 97, 299
IK64 297, 299
K41 294
Parkerův (dynama) 86, 89
Petschekův 162–163
Sweetův-Parkerův 94–98, 368
vícetekutinový 61, 212
$\alpha\alpha$ 89
$\alpha\Omega$ 89
módy
A nestabilní 156
Bernsteinovy 260
C nestabilní 156
evanescentní 157, 168
nestability pinče 170–177
svázané 157
zesilující 157

molekulární chaos 208
moment
  Boltzmannovy rovnice 210–220
  FP rovnice 247–250
  hybnosti 48, 70, 218, 233
  kvadrupólový 87
  magnetický dipólový 36, 45–48, 55
  oktupólový 87
Monte Carlo 331–344
monopól 48–49
multipól 45, 50
multiplikátory Lagrangeovy 83
navázání polí na hranici 169
narušení kauzality 264, 265, 269
nestability
  Bunemanova 159–163, 257, 365
  diocotronová 185–186, 352
  driftová 163
  dvousvazková – viz Bunemanova
  Kelvinova-Helmholtzova 181–184
  korálková 175
  mikronestability 251–260
  ostrůvková (tearing) 196–197
  parametrické 290
  plazmového vlákna 170–177
  Rayleighova-Taylorova 177–181
  rezistivní 193–195
  Richtmyerova-Meškovova 184
  řízené rezistivní 197
  Schwarzschildova (konvekce) 190–192
  smyčková 175
  svazek-plazma 162
  tokamakové 198
  výměnné (tlakem řízená) 186–190
  Weibelova
optická analogie 18–19
parametr
  beta 189–190, 348
  bezpečnostní (rotační číslo) 198
  dvojvrstvy 108, 109
  kritický záměrný 234
  záměrný 233–235
Parkerova plocha 107
permitivita plazmatu 153–154
PIC simulace 326–330
pinč – viz proudové vlákno
plazma
  bezesrážkové 14, 97, 98, 220, 251, 252, 256, 291, 364, 367
  definice 12
  ideální 15, 81, 232
  kvantové 13
  nerovnovážné 14
  nízkoteplotní 14
  prachové 15
  relativistické 13
  rovnováha 100
  rovnováha osově symetrická 101
  srážkové 14, 60
  v termodynamické rovnováze 14, 220, 229, 231
  vysokoteplotní 14
plazmové oscilace 125, 127–128, 131, 140, 256, 288
pohybová rovnice
  Abrahamova-Lorentzova 263
  Landauova-Lifšicova 268
  Lorentzova 17, 18, 26, 28, 44
  Lorentzova-Diracova 265
  Lorentzova relativistická 26–27
pohyblivost (mobilita) 224
Poyntingův vektor 114, 216, 219
proudová stěna 107
proudové (plazmové) vlákno 49, 54, 102, 118, 164, 170, 175, 176, 185
přepojení indukčních čar 92–99
radiační reakce 274275
Rankinovy-Hugoniotovy podmínky 113–115
rázová vlna 18, 47, 96, 113–115, 155, 163, 184, 357, 361, 366
redukovaná hmotnost 232, 343
rekonekce – viz přepojení
relace Onsagerovy (reciprocity) 229–230
reziduum 255, 304
rezonance
  cyklotronní 141, 143, 146, 148
  dolní hybridní 143, 146, 148
  horní hybridní 143, 148
  obecně 140, 144
Rosenbluthovy potenciály 237–249
rotační číslo – viz parametr, bezpečnostní
rovinná vlna 78, 116, 117, 118, 120, 123, 132, 278, 279
rovnice
  BGK (Boltzmann-Bhatnagar-Krook) 202, 220, 223, 225, 228, 353, 356, 358
  Boltzmannova 200–212, 213–230, 236, 252, 353, 356
  Boltzmannova relativistická 204
  driftová 39
  Fokkerova-Planckova 201, 235–239, 242, 243, 247, 250, 355
  Gradova-Šafranovova 102
  gyračního středu 36
  Hamiltonovy 8, 19, 22, 26, 29, 304
  Helmholtzova 80, 84, 357
  Kleinova-Gordonova 118, 280–281

kontinuity 58–59, 63, 68–70, 73–75, 93, 95, 110–113, 119, 125, 137, 138, 211, 212, 214, 217, 223, 230, 288
Lagrangeovy 17
Landauova 201, 359
Landauova-Lifšicova 268
proudnice 57, 64
přenosu (momentová) 209
Sahova 203
Vlasovova 202, 220, 252, 364
vlnová 68, 78, 79, 118, 193, 280, 287, 288, 290, 311, 319
rychlost
Alfvénova – viz Alfvénova rychlost
fázová 116–118, 134, 151, 203, 259, 285, 291
grupová 117–118, 121, 123, 129, 136, 151, 278, 279
světla 16, 30, 33, 60, 117, 118, 138, 216, 267, 355
zvuku 121, 123, 126, 130, 134, 136
rovnováha hvězdy 124
separatrisa 94, 197,
schéma (numerické)
Borisovo-Bunemanovo 307
Crankovo-Nicolsonové 316
Du Fortovo-Frankelovo 315
explicitní 313
implicitní 313
Laxovo-Wendrofovo 315
Leap-Frog 305
Newtonovo-Eulerovo 302
Richtmyerovo-Mortonovo 316
Rungeovo-Kuttovo 306
relativistické 308
řád 304
stabilita 304, 318
síla
Abrahamova-Lorentzova 263, 352
Coriolisova 87, 88
grad *B* 38–39
Lorentzova 21, 38, 61, 69, 72, 73, 75, 78, 81, 93, 100, 102, 143, 194, 202, 210, 215–217, 268, 295, 296, 360
Lorentzova čtyřsíla 205, 265
termodynamická 229
třecí (srážková) 270
skinová hloubka 348
srážkový člen 131, 201, 202, 206, 208, 218, 220, 232, 235–237, 242, 343
srážkový (sumační) invariant 208–209, 211, 214–215, 218, 220
stabilita schématu
CFL podmínka 320
John von Neumannova podmínka 318
obecně 304, 318
stelarátor 50, 363
střední volná dráha 14, 164, 227, 228, 291
substancionální derivace 57, 62, 64, 68, 69, 285
šlírová fotografie 142, 154–155
tenzor
difúze 249
dynamického tlaku 215
elektrické vodivosti 230
Levi-Civitův 18, 210, 217, 352
Maxwellův pnutí 70, 72,73, 211, 217
permitivity 153–154
tepelné vodivosti 230
tlaku 72, 211, 214–215
toku hybnosti 215
viskozity 71
teorie Drudeho 222
tokamak 44, 49–53, 85, 93, 143, 198–199, 228, 271, 272, 274–275
Compass D 52–53, 275
ITER 52–53, 272, 368
JET 52–53, 271
Tore Supra 52
transformace
Legendreova duální 26
Fourierova 116, 118–120, 126, 131, 138, 153, 159, 164, 329, 330
trochoida 23–24
turbulence
Elsässerova pole 296–297, 299
GS model 97, 299
IK model 297
Kolmogorovova 294–295
magnetohydrodynamická 295–296
silná anizotropní 299
turbulentní kaskáda 293–294
ubíhající
částice 247
elektrony 270–276
účinný průřez 52, 170, 201, 204, 207, 208, 229, 233–235, 238–239, 276, 342–343
úhlová frekvence 86, 121, 123, 142, 156, 157, 168, 183, 278
úloha
Cauchyova 312
Dirichletova 312
Neumannova 312
smíšená 312
urychlovač LWFA 257–258
vazkost (první a druhá) 71
vektor posunutí 166–169
vektorové identity 18

věta
  Gaussova 78
  reziduová 254
  Stokesova 35, 86
vlnění
  podélné 121, 125, 131, 136, 252, 256
  příčné 136, 360
vlnoplocha 116, 134, 135, 146, 147, 278
vlnová funkce – viz funkce
vlnový balík 78, 117, 118, 278–281, 289
vlnový vektor 132–133, 142, 149, 151, 156, 158, 163, 260, 318
vlny
  Alfvénovy (A) 134–136
  elektromagnetické 137–155
  hvizdy 150–153
  kompresní 136
  konečné amplitudy 78–79
  levotočivé (L) 140–141
  magnetoakustické 132–136
  magnetoakustické pomalé (S) 134
  magnetoakustické rychlé (F) 134
  mimořádné (X) 141–143
  plazmové 128
  pravotočivé (R) 140–141
  řádné (O) 141–143
vodivost
  diferenciální 222, 251
  tepelná 229
zákon
  Fickův 222–223, 355
  Fourierův 228–229
  Ohmův 61–62, 81, 96, 194, 221, 222
  Poiseuillův 75–77
zamrzání pole 62–64, 68, 75, 78, 81, 82, 92, 93, 193, 295–296, 362

Literatura

Nahrávky přednášek

server www.aldebaran.cz, sekce studium;
portál www.vsprednasky.cz;
portál fel.cvut.cz

Navazující učebnice

[1] Petr Kulhánek: *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky I (Teoretická mechanika, Kvantová teorie, Matematika pro fyziku)*; AGA 2020, ISBN: 978-80-906638-2-4, online verze: https://www.aldebaran.cz/studium/

[2] Petr Kulhánek: *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky II* (*Statistická fyzika, Elektromagnetické pole, Relativita)*; AGA 2020, ISBN: 978-80-906638-3-1, online verze: https://www.aldebaran.cz/studium/

Základní učebnice fyziky plazmatu v češtině

[3] Jiří Kracík, Jaromír Tobiáš: *Fyzika plazmatu*; ACADEMIA Praha, 1966.

[4] Josip Kleczek: *Plazma ve vesmíru a laboratoři*; ACADEMIA; Praha 1968.

[5] Jiří Kracík a kol.: *Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu*; ACADEMIA, Praha, 1974.

[6] Francis F. Chen: *Úvod do fyziky plazmatu*; ACADEMIA, Praha 1984.

[7] Jozef Kvasnica: *Teorie elektromagnetického pole*. ACADEMIA, Praha, 1985.

[8] Pavel Kubeš: *Magnetohydrodynamika*, studijní text pro doktorské studium; FEL ČVUT v Praze, 2001, https://www.aldebaran.cz/studium/MHD.pdf.

Populární knížky o plazmatu

[9] Ivan Štoll: *Tajemství kulového blesku*, Horizont 1988.

[10] Garry McCracken, Peter Stott: *Fúze – energie vesmíru*; Mladá fronta, edice Kolumbus, 2006.

[11] Petr Kulhánek, Jakub Rozehnal: *Hvězdy, planety, magnety*; Mladá fronta, edice Kolumbus, 2007.

[12] Petr Kulhánek: *Blýskání aneb třináctero příběhů o plazmatu*; Aldebaran Group for Astrophycics, 2011.

Učební texty v angličtině

[13] Barry J. Rye, John Claude Taylor (editors): *Physics of hot plasmas*; Scottish Summer School; Olover & Boud, Edinburgh, 1968.

[14] George B. Rybicki, Alan P. Lightman: *Radiative Processes in Astrophysics*; John Willey & Sons, 1979.

[15] D. R. Nicholson: *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons Inc, 1983, ISBN: 047109045X.

[16] R. A. Cairns: *Plasma Physics*; Blackie, Glasgow, 1985.

[17] J. P. Freidberg: *Ideal Magnetohydrodynamics*, Springer, 1987, ISBN: 0306425122.

[18] Anthony L. Peratt: *Physics of the Plasma Universe*, Springer-Verlag, 1991, ISBN 3-54097575-6.

[19] S. P. Gary: *Theory of Space Plasma Microinstabilities*; Cambridge University Press, 1993.

[20] R. Dendy (editor): *Plasma Physics – An Introductory Course*; Cambridge University Press, 1995, ISBN: 978-0521484527.

[21] S. D. Pinches: *Nonlinear Interaction of Fast Particles with Alfvén Waves in Tokamaks*, University of Nottingham, 1996, online http://www.ipp.mpg.de/~Simon.Pinches/thesis/.

[22] T. E. Cravens: *Physics of Solar System Plasmas*, Cambridge Atmospheric and Space Science Series, Cambridge University Press, 1997, ISBN: 0-52161194-6

[23] T. J. Dolan: *Fusion Research; Principles, Experiments and Technology*; Pergamon Press, 1982, 2000.

[24] E. Infeld, G. Rowlands: *Nonlinear waves, solitons, and chaos*; Cambridge University Press, 2000.

[25] E. Priest, T. Forbes: *Magnetic Reconnection – MHD Theory and Applications*; Cambridge University Press, 2000, ISBN: 0-52148179-1.

[26] T. J. M. Boyd, J. J. Sanderson: *The Physics of Plasmas*, Cambridge University Press, 2003, ISBN: 0521459125.

[27] A. A. Fridman, L. A. Kennedy: *Plasma Physics and Engineering*; Taylor & Francis Routledge, 2004.

[28] F. F. Chen: *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*; Springer, 2004, ISBN: 978-0306413322.

[29] J. P. Goedbloed, S. Poedts: *Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas*; Cambridge University Press, 2004. ISBN: 978-0521626071.

[30] K.Miyamoto: *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*; Springer, 2005.

[31] T. H. Stix: *Waves in Plasmas,* Springer, 2006, ISBN: 0883188597.

[32] M. De Bock: *Understanding and controlling plasma rotation in tokamaks*; Technische Universiteit Eindhoven, 2007.

[33] J. P. Freidberg: *Plasma Physics and Fusion Energy*, Cambridge University Press, 2007.

[34] P. M. Bellan: *Fundamentals of Plasma Physics*; Cambridge University Press, 2008, ISBN: 978-0521528009.

[35] Kip Thorne: *Applications of Classical Physics* (kapitoly 17 až 21), CalTech Course No. Ph 136, 2008. Online: http://www.pma.caltech.edu/Courses/ph136/yr2008/.

[36] J. D. Huba: *NRL Plasma Formulary*, Supported by The Office of Naval Research, 2019, https://www.nrl.navy.mil/ppd/content/nrl-plasma-formulary.

[37] Marian Karlický: *Plasma Astrophysics*; Matfyz Press 2014

Numerické simulace

[38] A. Ralston: *Základy numerické matematiky*; Academia, Praha, 1978.

[39] R. Rubinstein: *Simulation and the Monte Carlo Method*; John Wiley & Sons, 1981.

[40] E. Vitásek: *Numerické metody*; SNTL, Praha, 1987.

[41] J. Hubbard, D. Schleicher, S. Sutherland: *How to Find All Roots of Complex Polynomials With Newton's Method*; Inventiones Mathematicae 146 (2001).

[42] G. W. Collins, II: *Fundamental Numerical Methods and Data Analysis*; 2003, ADS Digital Library for Physics and Astronomy, online: http://ads.harvard.edu/books/1990fnmd.book/.

[43] Ch. K. Birdsall, A. B. Langdon: *Plasma Physics via Computer Simulation*; IoP, Series in Plasma Physics, 2004.

[44] P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall: *Differential equations – third edition*; Thomson Brooks/Cole, 2006.

[45] S. J. Chapman: *Fortran 95/2003 for Scientists and Engineers*; McGraw-Hill Companies, 2007.

[46] A. J. Chorin, Ole H. Hald: *Stochastic Tools in Mathematics and Science*; Vol. 1, ze série knih Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, ed. by S. S. Antman, J. E. Marsden, L. Sirovich, Springer, 2009.

[47] A. Quarteroni: *Numerical Model for Differential Problems*; Springer, 2009.

[48] A. K. Jaiswall, Anju Khandelwall: *A Textbook of Computer Based Numerical and Statistical Techniques*; New Age International Publishers, 2010.

[49] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery: *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*; Cambridge Unniversity Press 2007

[50] Philipp O. J. Scherer: *Computational Physics*, Third Edition; Springer 2017

Články a knihy – odvození důležitých vztahů

[51] Gilberto M. Kremer: *Theory and applications of the relativistic Boltzmann equation*; International Journal of Geometrical Methods in Modern Physics, Vol. 11, 1460005 (2014); arXiv:1404.7083 [cond-mat.stat-mech]

[52] Max Abraham: *Theorie der Elektrizität: Elektromagnetische Theorie der Strahlung; Teubner*, Leipzig (1905)

[53] Paul A. M. Dirac: *Classical Theory of Radiating Electrons*; Proc. Roy. Soc. London **A167**, 148 (1938)

[54] Wolfgang Pauli: *Theory of Relativity*; Pergamon Press 1958

[55] Eric Poisson: *An introduction to the Lorentz-Dirac equation*; arXiv:gr-qc/9912045v1 (1999)

[56] Michael Ibison, Harold E Puthoff: *Relativistic integro-differential form of the Lorentz–Dirac equation in 3D without runaways*; J. Phys. A: Math. Gen. 34, 3421–3428 (2001)

[57] A. Cabo Montes de Oca, N. G. Cabo Bizet: *Newton-like equations for a radiating particle*; Physical Review D91, 016001 (2015)

[58] Martin Jirka: *Ultra-intense laser-matter interaction*; Doctoral thesis, FNSPE CTU, 2018

[59] Matthew C. Williams: Solitons – *Interactions, Theoretical and Experimental Challenges and Perspectives*; Nova Science Publishers 2013

[60] Sascha Vongehr: *Solitons*; Nanjing University 1997, online: aldebaran.cz/studium/tpla/docs/Vongehr-solitons.pdf

[61] Roger Grimshaw: *Korteweg-de Vries Equation*; Loughborough University (UK) 2008. online: aldebaran.cz/studium/tpla/docs/KdV_Grimshaw.pdf

[62] E. M. de Jager: *On the Origin of the Korteweg-de Vries Equation*; arXiv:math/0602661v2 [math.HO] 8 Dec 2011

[63] Katie Banks: *Solitons and the Korteweg de Vries Equation: Starting with Shallow-Water Waves*; Semantic Scholar 2012; online: aldebaran.cz/studium/tpla/docs/KdV_Banks.pdf

[64] N. Nagesha Rao, Ram K. Varma: *A theory for Langmuir solitons*; J. Plasma Physics (1982), vol. 27, part 1, pp. 95–120

[65] Petr Kulhánek: *3D PIC Model of the Helical Current Filament*; Inaugural Dissertation (prof), 2004, Collection of 3D PIC package papers, FEE CTU (2004), online: https://www.aldebaran.cz/~kulhanek/texts/2004_PIC.pdf

[66] Vojtěch Delong, Radek Beňo, David Břeň, Petr Kulhánek: *Notes on the relativistic movement of runaway electrons in parallel electric and magnetic fields*; Physics of Plasmas 23, 094504 (2016)

[67] Ladislav Šubr: *Lecture notes NAST008: Cosmic electrodynamics*; MFF UK 2017; online: https://astro.mff.cuni.cz/vyuka/AST008/NAST008_notes.pdf

[68] E. R. Tracy, A. J. Brizard, A. S. Richardson, A. N. Kaufman: *Ray Tracing and Beyond: Phase Space Methods in Plasma Wave Theory*; Cambridge University Press (2014)

[69] Bogdan A. Hnat: *Plasma Turbulence*; University of Warwick, 2016. Online: http://sp2rc.group.shef.ac.uk/assssp16/lectures/L12Hnat.pdf

[70] Silvio Sergio Cerri, Daniel Grošelj, Luca Franci: *Kinetic plasma turbulence: recent insights and open questions from 3D3V simulations*; Front. Astron. Space Sci., 11 Oct 2019

[71] Andrej Nikolajevič Kolmogorov: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers; Proceedings of the USSR Academy of Sciences, 1941, 299–303. Online anglický překlad: https://courses.physics.ucsd.edu/2014/Spring/physics281/kolmogorov41.pdf

[72] H. Knoepfel, D. A. Spong: *Runaway Electrons in Toroidal Discharges*; Nuclear Fusion **19**/6 (1979)

[73] Dreicer, H.: *Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. I*. Phys. Rev. 115 (1959), 238–249

[74] Gurevich, A. V., Milikh, G. M., Roussel-Dupre R. A.: *Runaway electron mechanism of air breakdown and preconditioning during a thunderstorm.* Physics Letters A 165 (1992), 463–468

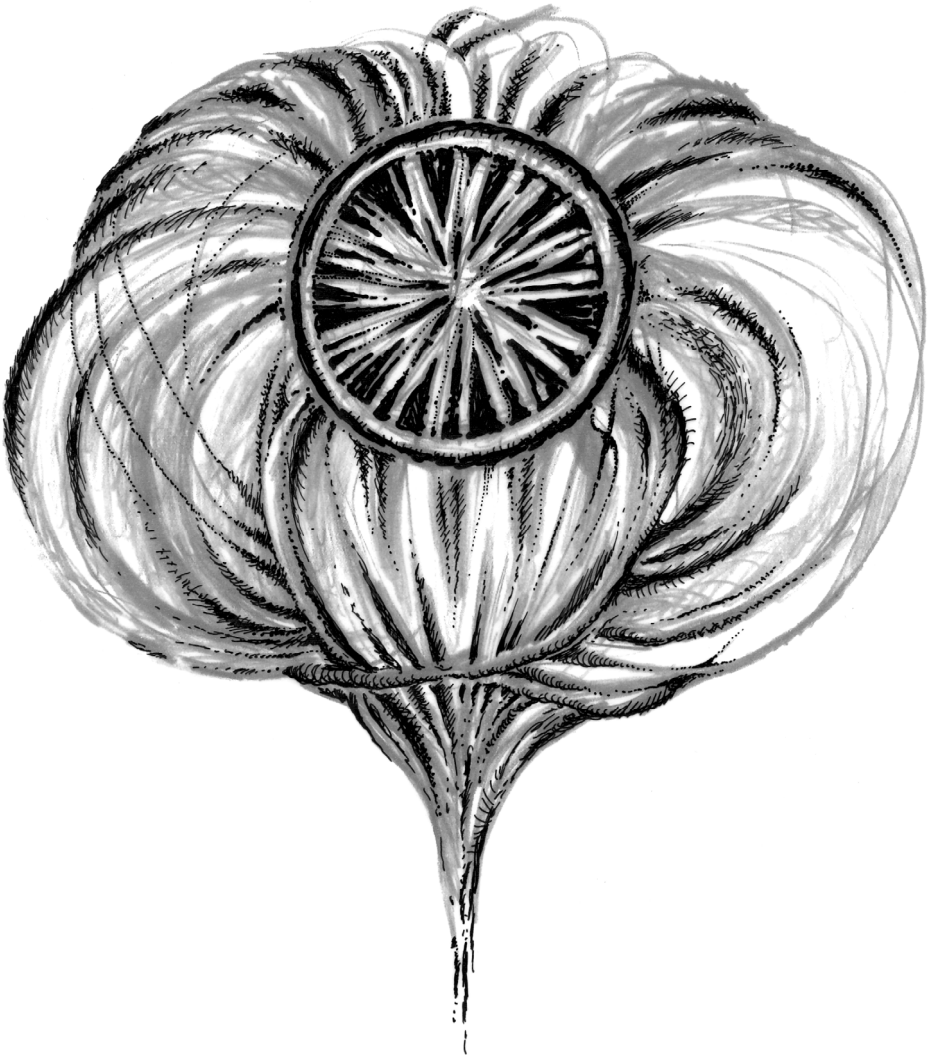
[75] Giovanelli, R. G.: *Electron Energies Resulting from an Electric Field in a Highly Ionized Gas*. Phil. Mag. 40 (1949), 206–214

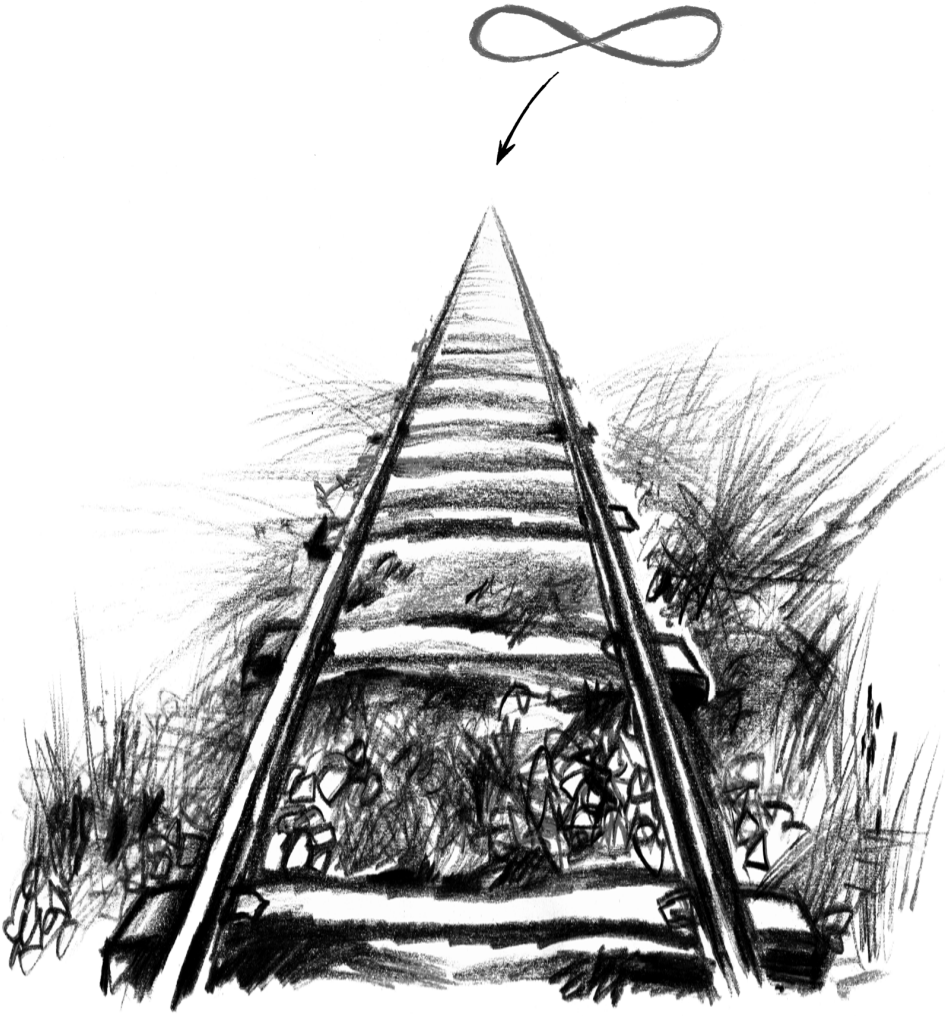
[76] Jaspers, R.: *Relativistic runaway electrons in tokamak plasmas*. PhD thesis, TU Eindhoven, 1995, [online] https://pure.tue.nl/ws/files/1475618/431410.pdf

[77] Wilson, C. T. R.: *The acceleration of β-particles in strong electric fields such as those of thunderclouds. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 22 (1925), 534–538

[78] Dwyer, J. R.: *A fundamental limit on electric fields in air*. Geophysical Research Letters 30/20 (2003), 2055-2059

Co najdete v dalších dílech?





Vybrané kapitoly z teoretické fyziky I

První díl „Vybraných kapitol“ je úvodním dílem celé série. Začíná základními pojmy z teoretické mechaniky. Čtenář se seznámí se elegancí popisu mechanických i dalších dějů za pomoci Lagrangeových, Hamiltonových rovnic a Poissonových závorek. Druhá část je věnována kvantové teorii. Relativně standardní partie týkající se stavby a interpretace kvantové teorie jsou následovány problematikou týkající se hranice mezi kvantovým a klasickým světem, vyvrácením existence skrytých parametrů, EPR paradoxem a Bellovými nerovnostmi. Poslední část prvního dílu „Vybraných kapitol“ je věnována základům matematiky, které jsou nutné ke studiu fyzikálních dějů. Čtenář může do této části učebnice nahlédnout, kdykoli nebude znát matematiku potřebnou pro četbu fyzikálních partií.

TEORETICKÁ MECHANIKA

- Integrální principy mechaniky
- Zákony zachování v přírodě
- Hamiltonovy kanonické rovnice
- Vybrané úlohy z teoretické mechaniky
- Nelineární dynamické systémy
- Lagrangeovy rovnice pro polní problémy

KVANTOVÁ TEORIE

- Mikrosvět a makrosvět
- Základní principy kvantové teorie
- Harmonický oscilátor
- Jednoduché jednorozměrné systémy
- Sféricky symetrický potenciál
- Časový vývoj
- Relativistická kvantová teorie, spin
- Fermiony a bosony
- Kvantová teorie a skryté parametry

MATEMATIKA PRO FYZIKU

- Einsteinova sumační konvence
- Komplexní čísla a funkce
- Vektory a tenzory
- Diracova symbolika a operátory v kvantové teorii
- Od gradientu k helicitě
- Vícerozměrné integrály
- Některé speciální funkce
- Zobecněné funkce
- Kuželosečky, trigonometrie a další



Vybrané kapitoly z teoretické fyziky II

Další díl „Vybraných kapitol“ navazuje na úvodní učebnici, kterou právě držíte v rukou. Potřebné matematické základy pro druhý i třetí díl jsou součástí prvního dílu trilogie. Druhý díl je věnován statistické fyzice, elektromagnetickému poli a relativitě. K pochopení statistické fyziky je třeba znát alespoň základy teoretické mechaniky a kvantové teorie. Teorie elektromagnetického pole ukazuje eleganci Maxwellových rovnic a odvozuje z nich jednotlivé fyzikální jevy až po nejrůznější druhy elektromagnetického záření. Poslední část druhého dílu je věnována relativitě, která zcela změnila naše chápání, jak funguje svět kolem nás. Začíná speciální relativitou a pokračuje základy obecné relativity, současné teorie gravitační interakce.

STATISTICKÁ FYZIKA

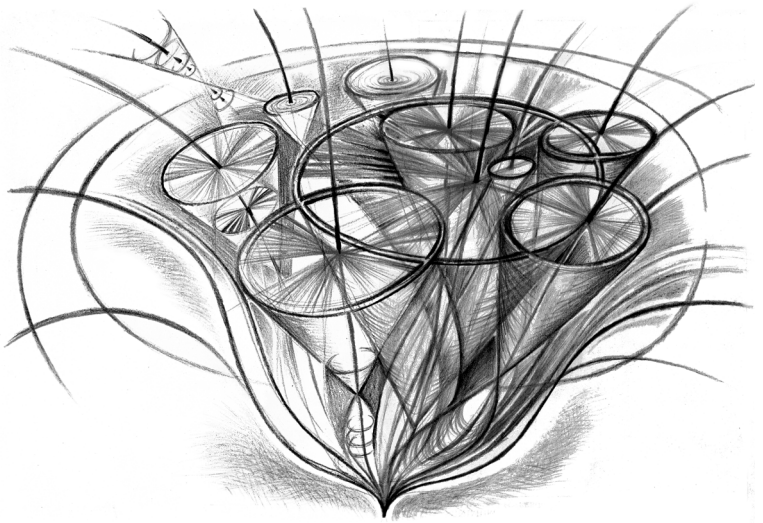
- Vybrané partie z termodynamiky
- Základní pojmy statistické fyziky
- Gibbsův kanonický soubor
- Jednoduché příklady
- Další příklady
- Grandkanonický soubor
- Fermiony a bosony
- Fluktuace a entropie
- Magneticky aktivní systémy

ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

- Maxwellovy rovnice
- Elektrostatika
- Magnetostatika
- Zákony zachování
- Elektromagnetické vlny
- Elektromagnetické potenciály
- Elektromagnetické záření
- Pole v rezonanční dutině

RELATIVITA

- Od speciální relativity k principu ekvivalence
- Metrika, kovariantní derivace
- Rovnice geodetiky
- Dilatace času a červený gravitační posuv
- Riemannův tenzor křivosti a Einsteinův gravitační zákon
- Gravitační vlny
- Schwarzschildovo řešení a pohyby ve Schwarzschildově geometrii
- Strhávání časoprostoru rotujícím tělesem
- Úvod do kosmologie



Petr Kulhánek
Vybrané kapitoly z teoretické fyziky III
(1. Teorie plazmatu, 2. Numerické simulace)

Žádná část této publikace nesmí být publikována a šířena žádným způsobem
a v žádné podobě bez výslovného svolení autora a sdružení AGA.

Autor: prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.
Grafika a obálka: Ing. arch. Ivan Havlíček
Formát: 165×235 mm, 384 stran, 228 obrázků
Nakladatelství: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)
Nahrávky přednášek: aldebaran.cz (Daniel Handl, FEL ČVUT)
Přední strana obálky: Twin Jet Nebula, NASA/HST/ESA
Zadní strana obálky: Butterfly Nebula Minkowski 2-9, HST
Vydání: dotisk druhého vydání, prosinec 2024, Praha
Aktualizace elektronické verze: 21. dubna 2025
Tisk: TISK CENTRUM s.r.o.

ISBN 978-80-906638-4-8