4.3 Magnetoakustické vlny

V této kapitole si povšimneme nízkofrekvenčních vln generovaných pohybem iontů v přítomnosti magnetického pole. Samo magnetické pole vnáší do hry zcela nový prvek – anizotropii. Dalšími činiteli ovlivňujícími charakter vln jsou samozřejmě elektrický náboj iontů a vodivost prostředí.

4.3.1 Odvození disperzní relace

Za výchozí sadu rovnic budeme uvažovat klasickou jednotekutinovou magnetohydrodynamiku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0\,, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{\operatorname{rot}\mathbf{B}}{\mu_0}\times\mathbf{B}\,, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma\mu_0}\nabla^2\mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\,, \\ p &= p(\rho)\,. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Difúzní člen v rovnici pro magnetické pole je zodpovědný za útlum magnetoakustických vln. V případě vysoce vodivého plazmatu $\sigma \to \infty$ je možné tento člen zanedbat a magnetoakustické vlny nebudou tlumené. Kdybychom tento člen v soustavě ponechali, poskytovala by disperzní relace komplexní řešení pro frekvenci i vlnový vektor a rovinná vlna by tak byla exponenciálně tlumena. Celá výchozí soustava je opět algebraicky uzavřena stavovou rovnicí.

Postupujme nyní obdobně jako v minulém případě, tj. provedeme perturbace klidového řešení

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho\,; \qquad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}\,; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}\,; \qquad p = p_0 + \delta p\,. \tag{4.56}$$

Hledané řešení (4.56) dosadíme do soustavy (4.55), zanedbáme kvadráty a vyšší mocniny poruch a budeme předpokládat poruchu ve tvaru rovinné vlny. Výsledná linearizovaná algebraická soustava rovnic je:

$$\begin{aligned} -\omega\,\delta\rho + \rho_0\,\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u} &= 0\,, \\ \mathbf{k}\,\delta p - \rho_0\omega\,\delta\mathbf{u} + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\delta\mathbf{B})\mathbf{k} - \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})\delta\mathbf{B} &= 0\,, \\ \mathbf{k}\times(\mathbf{B}_0\times\delta\mathbf{u}) - \omega\delta\mathbf{B} &= 0\,, \\ \delta p - c_\mathrm{s}^2\,\delta\rho = 0\,; \qquad c_\mathrm{s}^2 &\equiv \frac{\partial p}{\partial\rho}\,. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Jde o soustavu osmi rovnic (2 skalární a 2 vektorové) bez pravých stran. Postupnou eliminací proměnných je možné nalézt jen rovnici pro rychlost (druhá rovnice). Nejprve dosadíme za δp z poslední rovnice. Poté za $\delta\rho$ z první rovnice a nakonec za $\delta\mathbf{B}$ ze třetí rovnice (upravíme dvojný vektorový součin). Získáme tak soustavu rovnic pro perturbace rychlostního pole

$$\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}\,. \tag{4.58}$$

Složky symetrické matice **M** mají tvar

$$M_{kl} = \left[\omega^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A})^2\right]\delta_{kl} + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A})(k_k v_l^{(\mathrm{A})} + k_l v_k^{(\mathrm{A})}) - \left(v_\mathrm{A}^2 + c_\mathrm{s}^2\right)k_k k_l\,.$$

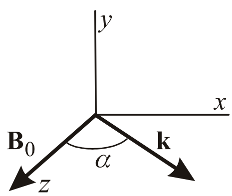
Tuto matici můžeme také zapsat v invariantním tvaru

$$\mathbf{M} = \left[\omega^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A})^2\right]\vec{\mathbf{1}} + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A})\left[\mathbf{k}\otimes\mathbf{v}_\mathrm{A} + \mathbf{v}_\mathrm{A}\otimes\mathbf{k}\right] - \left(v_\mathrm{A}^2 + c_\mathrm{s}^2\right)\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}\,.$$

Veličina $\mathbf{v}_\mathrm{A}$ se nazývá Alfvénova rychlost a je definována jako

$$\mathbf{v}_\mathrm{A} \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0\,\rho_0}}\,. \tag{4.59}$$

Pro dopočet disperzní relace můžeme zvolit souřadnicový systém. Osu z volme ve směru magnetického pole $\mathbf{B}_0$ (ve směru Alfvénovy rychlosti). Kolem této osy otočíme souřadnicový systém tak, aby vlnový vektor **k** byl v rovině (x, z). V takto zvoleném souřadnicovém systému platí $\mathbf{B}_0 = (0,0,B_0)$, $\mathbf{v}_\mathrm{A} = (0,0,v_\mathrm{A})$ a pro vlnový vektor máme výraz $\mathbf{k} = (k\sin\alpha,\,0,\,k\cos\alpha)$. Úhel mezi vektory $\mathbf{B}_0$ a **k** je α.



Obr. 89: Volba souřadnic.

Pro tuto volbu má matice **M** jednoduchý tvar:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega^2 - k^2 v_\mathrm{A}^2 - c_\mathrm{s}^2 k^2 \sin^2\alpha & 0 & -c_\mathrm{s}^2 k^2 \sin\alpha\cos\alpha \\ 0 & \omega^2 - k^2 v_\mathrm{A}^2 \cos^2\alpha & 0 \\ -c_\mathrm{s}^2 k^2 \sin\alpha\cos\alpha & 0 & \omega^2 - c_\mathrm{s}^2 k^2 \cos^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení soustavy (4.58), musí být determinant matice **M** nulový. Z této podmínky získáme disperzní relaci magnetoakustických vln, a to dokonce ve tvaru nezávislém na souřadnicové soustavě

$$\left[\omega^2 - \left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A}\right)^2\right]\cdot\left[\omega^4 - k^2\left(v_\mathrm{A}^2 + c_\mathrm{s}^2\right)\omega^2 + c_\mathrm{s}^2 k^2\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{A}\right)^2\right] = 0\,. \tag{4.60}$$

Alfvénova rychlost míří ve směru magnetického pole $\mathbf{B}_0$. Již na první pohled je vidět, že magnetoakustické vlny jsou mnohem složitější než obyčejný zvuk. Bude-li výraz v první hranaté závorce nulový, získáme jeden z módů, tzv. *Alfvénovu vlnu* (*A*). Bude-li nulový výraz v druhé hranaté závorce, získáme snadno řešitelnou bikvadratickou rovnici pro úhlovou frekvenci. Její řešení poskytuje další dva módy magnetoakustických vln, tzv. *pomalou vlnu* (*S*, Slow) a *rychlou vlnu* (*F*, Fast). Disperzní relace jednotlivých módů zřejmě jsou (α je úhel mezi vlnovým vektorem a magnetickým polem resp. Alfvénovou rychlostí):

► $$\begin{aligned} \omega^2 &= v_\mathrm{A}^2 k^2 \cos^2\alpha\,, \\ \omega^2 &= \frac{1}{2}k^2\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right) - \frac{1}{2}k^2\sqrt{\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right)^2 - 4c_\mathrm{s}^2 v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha}\,, \\ \omega^2 &= \frac{1}{2}k^2\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right) + \frac{1}{2}k^2\sqrt{\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right)^2 - 4c_\mathrm{s}^2 v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha}\,. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Poznamenejme, že v některé literatuře se Alfvénovými vlnami nazývají všechny tři zde zavedené módy magnetoakustických vln. V klasické zvukové vlně dochází k přelévání hustoty energie mezi chaotickou (tlakovou, p) částí energie a uspořádanou (kinetickou, $\rho v^2/2$) částí energie. V magnetoakustické vlně je rovnocenným partnerem ještě hustota energie magnetického pole (magnetický tlak, $p_\mathrm{M} = B^2/2\mu_0$). Položíme-li sobě rovny hustotu kinetické energie a magnetický tlak, získáme hodnotu Alfvénovy rychlosti:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad \Rightarrow \qquad v = v_\mathrm{A} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0\rho}}\,.$$

4.3.2 Vlnoplochy magnetoakustických vln

Z disperzních relací (4.61) snadno určíme fázové rychlosti šíření jednotlivých módů:

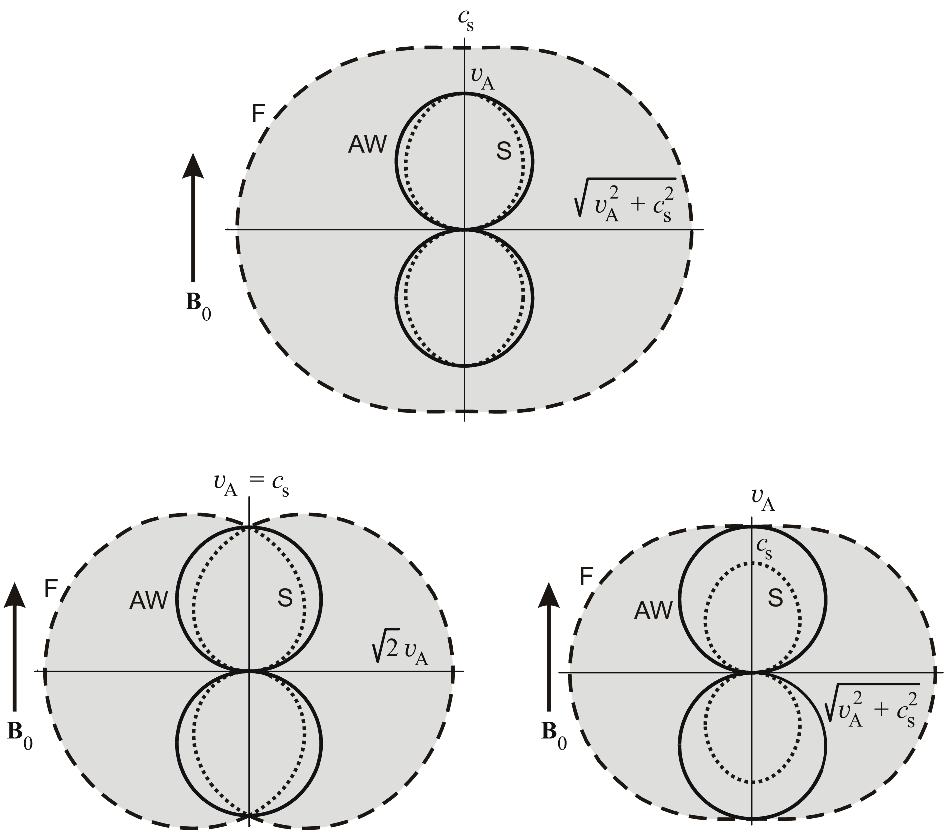
$$\begin{aligned} v_\mathrm{Af}^2 &= v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha\,, \\ v_\mathrm{Sf}^2 &= \frac{1}{2}\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right)^2 - 4c_\mathrm{s}^2 v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha}\,, \\ v_\mathrm{Ff}^2 &= \frac{1}{2}\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(c_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{A}^2\right)^2 - 4c_\mathrm{s}^2 v_\mathrm{A}^2\cos^2\alpha}\,. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Nalezněme nyní tyto rychlosti ve směru magnetického pole $\mathbf{B}_0$ ($\alpha = 0$) a ve směru kolmém na toto pole ($\alpha = \pi/2$). Výsledek je v následující tabulce:

mód	A	S	F	
$\alpha = 0$	v_A	$\min(v_\mathrm{A}, c_\mathrm{s})$	$\max(v_\mathrm{A}, c_\mathrm{s})$	(4.63)
$\alpha = \pi/2$	0	0	$\sqrt{v_\mathrm{A}^2 + c_\mathrm{s}^2}$	(4.64)

Ve směru pole je fázová rychlost Alfvénovy vlny rovna Alfvénově rychlosti, pomalá vlna získá menší z obou základních rychlostí (rychlosti zvuku a Alfvénovy rychlosti) a rychlá vlna se bude šířit větší z obou rychlostí. Ve směru kolmém na původní magnetické pole má nenulovou rychlost šíření jen rychlá vlna, pomalá a Alfvénova mají nulové rychlosti.

Situace je dobře patrná na polárním diagramu závislosti fázové rychlosti všech tří módů. Takový diagram můžeme interpretovat jako tvary jednotlivých vlnoploch. Při zmenšujícím se magnetickém poli se vlnoplochy Alfvénovy vlny a pomalé magnetoakustické vlny zmenšují a vlnoplocha rychlé magnetoakustické vlny se stává „obyčejnou“ zvukovou vlnoplochou. Magnetické pole vnáší do šíření zvuku anizotropii. Chování vlnoploch při různých hodnotách pole si můžete vyzkoušet v apletech na serveru aldebaran.cz. Tvar vlnoploch resp. polární diagram fázové rychlosti pro různé hodnoty magnetických polí si prohlédněte na obrázcích.



Obr. 90: Na horním obrázku je znázorněna situace pro slabé pole ($v_A < c_s$). Rychlá vlna (F) reprezentuje „normální“ zvukovou vlnu. Na levém dolním obrázku je vyrovnán vliv magnetického a dynamického tlaku ($v_A = c_s$). Na pravém dolním obrázku dominuje magnetické pole ($v_A > c_s$).