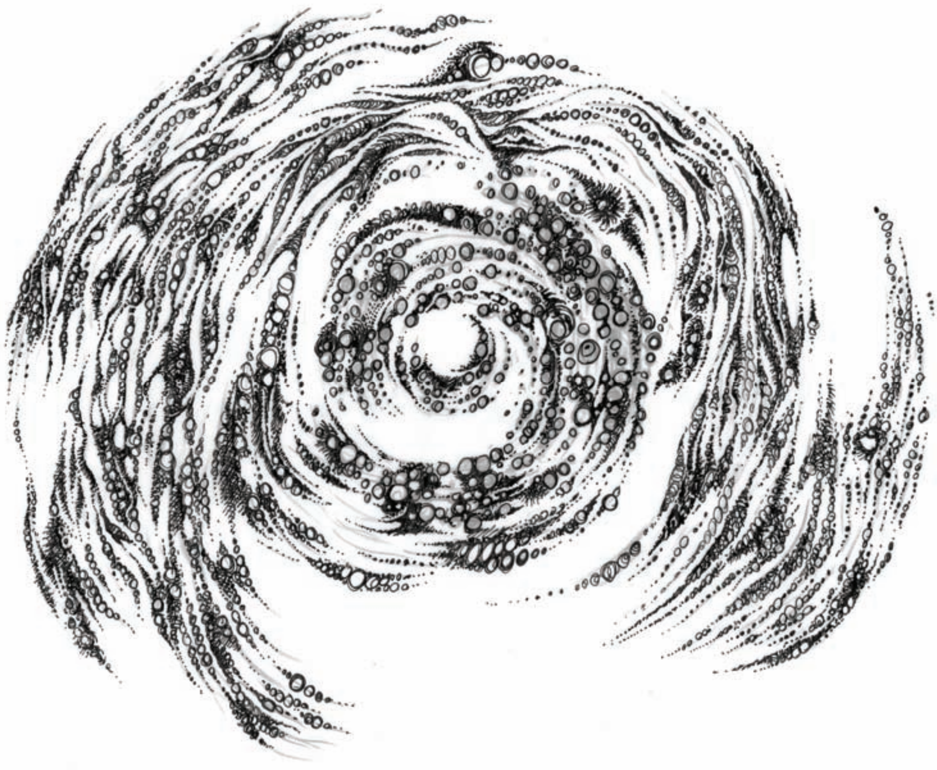
2. Statistický popis plazmatu



Při popisu typického plazmatu je technicky nemožné popsat trajektorie všech částic. Jen v řídkém plazmatu mezihvězdného prostoru nalezneme miliony částic v jednom metru krychlovém, v tokamacích 10^{18} částic v m^3 a v jádru Slunce dokonce 10^{31} částic v m^3. Pro tak obrovské systémy částic je mnohdy výhodné využívat statistický popis a spokojit se jen s informací o statistickém rozdělení jednotlivých druhů částic a o jejich průměrném chování jakožto celku. Statistickým popisem plazmatu se budeme zabývat v této kapitole.

2.1 Boltzmannova rovnice

Předpokládejme, že systém může být složen z několika druhů částic (elektrony, neutrály, ionty), které budeme označovat indexem α. V celé této kapitole platí sčítací konvence pro indexy psané latinkou (i, j, k,…). Neplatí pro řecké indexy popisující druh částic. Označme hustotu pravděpodobnosti výskytu částic druhu α

$$f_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) \; .$$

V termodynamické rovnováze nezávisí hustota pravděpodobnosti na čase a splývá s kanonickou nebo grandkanonickou rozdělovací funkcí ρ [3]. Hustotu pravděpodobnosti závislou na čase budeme normovat vzhledem k počtu částic, tj.

$$\blacktriangleright \qquad \begin{aligned} \int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\, d^3\mathbf{v}_\alpha &= n_\alpha(t, \mathbf{x}) \,, \\ \int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\, d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v}_\alpha &= N_\alpha(t) \,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Integrováním přes rychlostní prostor získáme koncentraci částic

$$n_\alpha = \lim_{\Delta V \to 0} \Delta N_\alpha / \Delta V \tag{2.2}$$

a dostaneme se tak na pozici kontinua. Dalším středováním přes prostorové proměnné získáme celkový počet částic N_α. Při středování obecné proměnné A musíme vzhledem ke způsobu normování pravděpodobnosti výsledek dělit součtem všech pravděpodobností:

$$\blacktriangleright \qquad \begin{aligned} \mathscr{A}(t, \mathbf{x}) = \langle A \rangle_{\mathbf{v}} &= \frac{\int A\, f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\, d^3\mathbf{v}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\, d^3\mathbf{v}_\alpha} \; ; \\ A(t) = \langle A \rangle_{\mathbf{x},\mathbf{v}} &= \frac{\int A\, f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\, d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\, d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v}_\alpha} \,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Veličina $\mathscr{A}(t, \mathbf{x})$ má význam hustoty veličiny A. Díky normování je

$$\blacktriangleright \qquad \int A\, f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)\, d^3\mathbf{v}_\alpha = n_\alpha(t, \mathbf{x})\, \mathscr{A}(t, \mathbf{x}) \; . \tag{2.4}$$

2.1.1 Různé varianty Boltzmannovy rovnice

Hustota pravděpodobnosti výskytu částic druhu α se s časem mění z důvodu srážek částic se sebou samými i s ostatními druhy:

$$\frac{d}{dt} f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \,.$$

Členy napravo se nazývají Boltzmannovy srážkové integrály a budou diskutovány v následující kapitole. Rozepišme úplnou derivaci na levé straně:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{k\alpha}}\frac{dv_{k\alpha}}{dt} = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \,.$$

Sumační konvence platí v předchozím vztahu jen pro indexy psané latinkou, pro řecké nikoli. Časové derivace poloh jsou rychlosti a časové derivace rychlostí jsou zrychlení, která vyjádříme pomocí síly z druhého Newtonova zákona:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_{k\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} + \frac{F_{k\alpha}}{m_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{k\alpha}} = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \,.$$

Členy přes které se sčítá na levé straně, zapíšeme jako působící operátory:

► $$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_\mathbf{x}) f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha}(\mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_\mathbf{v}) f_\alpha = \sum_\beta S_{\alpha\beta} \,. \tag{2.5}$$

Odvozená rovnice se nazývá Boltzmannova rovnice a je základní rovnicí statistiky nerovnovážných procesů. Členy na pravé straně se nazývají Boltzmannův srážkový integrál (lze je vyjádřit jako integrál přes část fázového prostoru). Podle možných způsobů vyjádření srážkového integrálu tuto rovnici nazýváme různými způsoby:

Boltzmannova rovnice

Srážky jsou zcela obecné a vyjadřují se pomocí srážkového integrálu (kapitola 2.1.2). Boltzmannova rovnice je pojmenována podle Ludwiga Boltzmanna (1844–1906), rakouského fyzika a zakladatele statistické fyziky.

Fokkerova-Planckova rovnice, Landauova rovnice

Srážkový člen započítává jen párové Coulombovy interakce, pro které je účinný průřez dobře znám. Rovnice je pojmenována podle Adriaana Daniëla Fokkera (1887–1972), holandského fyzika a muzikanta a podle Maxe Plancka (1858–1947), rakouského fyzika a jednoho ze zakladatelů kvantové teorie. Velmi příbuznou variantou Fokkerovy Planckovy rovnice je *Landauova rovnice*. Jako dolní mez párových Coulombových srážek zvolíme záměrnou vzdálenost, při které se srážející se částice odchýlí o pravý úhel (srážky na menší vzdálenosti jsou málo pravděpodobné) a jako maximální záměrnou vzdálenost srážky Debyeovu vzdálenost (vzdálenost přirozeného stínění bodových zdrojů). Rovnice je pojmenována podle Lva Davidoviče Landaua (1908–1968), sovětského teoretického fyzika a nositele Nobelovy ceny za fyziku pro rok 1962.

BGK rovnice

Předpokládáme, že systém není příliš daleko od lokální termodynamické rovnováhy f_{LE} a srážky způsobují jeho návrat do této rovnováhy, srážkový člen má jednoduchý tvar

$$S_\alpha \simeq (\Delta f_\alpha/\Delta t)_{\mathrm{col}} = -(f_\alpha - f_{\mathrm{LE}})/\tau_{\mathrm{C}} = -\nu_{\mathrm{C}}(f_\alpha - f_{\mathrm{LE}}) \,,$$

kde τ_{C} je střední doba mezi srážkami a ν_{C} je srážková frekvence (charakteristická konstanta). Rovnice je pojmenována podle autorů, jimiž jsou indický matematik Prabhu Lal Bhatnagar (1912–1976), americký teoretický fyzik Eugene Gross (1926–1991) a americký matematik a astrofyzik Max Krook (1913–1985).

Vlasovova rovnice

Srážky zcela zanedbáváme (na pravé straně je nula) a působící sílou je jen Lorentzova síla. Jde o nejméně přesnou, ale nejčastěji používanou aproximaci. Rovnice je pojmenována podle Anatolie Alexandroviče Vlasova (1908–1975), sovětského teoretického fyzika, který se po většinu života věnoval statistické fyzice.

☾ **Příklad 3:** Ukažte, že stacionární řešení Boltzmannovy (Vlasovovy) rovnice vede na kanonické rozdělení. Řešte v jedné dimenzi, pro jediný druh částic, které nepodléhají srážkám a pro potenciální silové pole $F = -dV/dx$.

Řešení: Z Boltzmannovy rovnice v tomto případě zbude

$$v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{m}\frac{dV}{dx}\frac{\partial f}{\partial v} = 0\,.$$

Rovnici řešme substitucí $f(x,v) = F(x)G(v)$. Pokusíme se separovat proměnné:

$$v\frac{dF}{dx}G - \frac{1}{m}\frac{dV}{dx}F\frac{dG}{dv} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dF}{FdV} = \frac{1}{m}\frac{dG}{Gvdv}\,.$$

Na levé straně rovnosti jsou všechny proměnné funkcí souřadnice, na pravé straně funkcí rychlosti. Je zřejmé, že mají-li se sobě rovnat dvě funkce různých proměnných, musí být obě konstantní:

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dV} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{F} = C\,dV \quad \Rightarrow \quad F(x) = K_x \exp[CV(x)]\,;$$

$$\frac{1}{mGv}\frac{dG}{dv} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{G} = C\,mv\,dv \quad \Rightarrow \quad G(v) = K_v \exp[Cmv^2/2]\,.$$

Celkové řešení je

$$f(x,v) = F(x)\cdot G(v) = K\exp\Big[C\Big(mv^2/2 + V(x)\Big)\Big]\,.$$

Řešení má skutečně charakter kanonického rozdělení. Hodnotu koeficientu C bychom zjistili porovnáním s termodynamikou, stejně jako při odvození kanonického rozdělení v učebnicích statistiky, například v [3]. Vyjde

$$C = -1/k_B T \,. \tag{2.6}$$

☽

Poznámka (Sahova rovnice): Z rovnovážného rozdělení a kvazineutrality plyne okamžitě rovnice pro poměrné zastoupení iontů různé násobnosti v plazmatu. Tuto rovnici poprvé odvodil indický astrofyzik Mehd Nad Saha (1893–1956) v roce 1920 a nezávisle na něm v roce 1923 také americký fyzik a chemik Irwing Langmuir (1881–1957). Dnes se zapisuje ve tvaru

▶
$$\frac{n_{i+1} n_e}{n_i} = C \frac{g_{i+1} g_e}{g_i} \exp\left[-\frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{k_B T} \right]; \qquad C = \frac{\left(2\pi m_e k_B T\right)^{3/2}}{\left(2\pi\hbar\right)^3}\,, \tag{2.7}$$

kde g_i je stupeň degenerace pro ionty násobnosti i, g_e je stupeň degenerace elektronů, zpravidla se pokládá roven 2, ε_i je energie potřebná k vytvoření iontu násobnosti i (k odstranění i elektronů z obalu, $i = 0$ odpovídá neutrálům). Faktor $(2\pi\hbar)^3$ je velikost jednoho kvantového stavu elektronu ve fázovém prostoru, podrobněji viz [3]. *Sahova rovnice* se často používá pro určení koncentrace elektronů při jednonásobné ionizaci, kdy $n_i = n_e$:

▶
$$\frac{n_e^2}{n_n} = C \frac{2 g_1}{g_0} \exp\left[-\frac{I}{k_B T} \right], \tag{2.8}$$

kde I je ionizační energie.

Boltzmannova rovnice v chaotických rychlostech

Vždy musíme rozlišovat mezi třemi rychlostmi:

$\mathbf{v}_\alpha$	fázová proměnná,	
$\mathbf{u}_\alpha(t,\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle$	rychlostní pole (průměrná, středovaná rychlost),	(2.9)
$\mathbf{w}_\alpha \equiv \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha$	chaotická (tepelná) složka rychlosti.	

Doposud jsme využívali fázový prostor se sedmi proměnnými (t, $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}_\alpha$). Fázová rychlost obsahuje část odpovídající proudění i tepelnou část ($\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha$). Někdy je výhodné pracovat s proměnnými obsahujícími jen tepelnou část pohybu, tj. provést transformaci

$$(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) \qquad \to \qquad (t, \mathbf{x}, \mathbf{w}_\alpha)\,.$$

V Boltzmannově rovnici potom musíme nahradit derivace a rychlosti podle schématu: