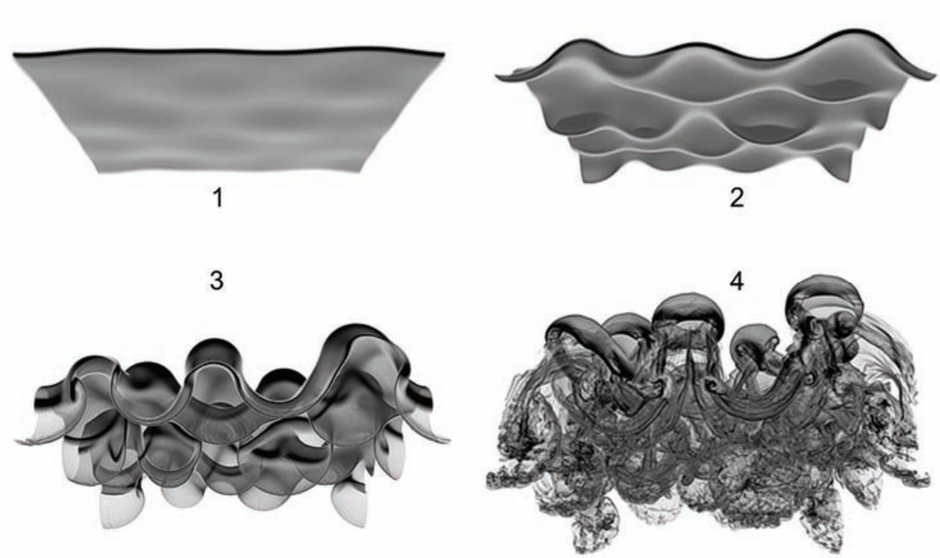
## 5.2.4 Rayleighova-Taylorova nestabilita

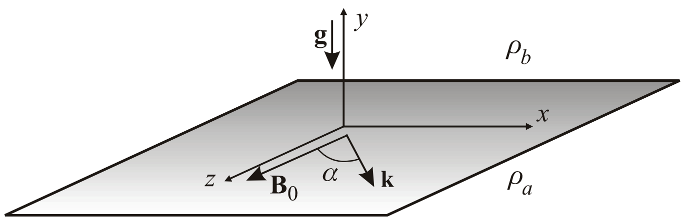
Rayleighova Taylorova nestabilita (RT nestabilita) vzniká na rozhraní dvou tekutin různých hustot (například je-li v gravitačním poli hustší kapalina „nad“ řidší). Pro tekutiny v konstantním tíhovém poli byla poprvé tato nestabilita popsána anglickým fyzikem, lordem Rayleighem (1842–1919) v roce 1883. Anglický fyzik a matematik Geoffrey Ingram Taylor (1886–1975) zobecnil tuto nestabilitu v roce 1950 i pro jakékoli konstantní zrychlení, které míří směrem od řidší k hustší tekutině. V takové situaci se snaží hustší tekutina zaujmout polohu „pod“ řidší tekutinou (v daném poli) a počáteční poruchy na rozhraní se rozvinou do charakteristických útvarů podobných prstům a později kloboučkům hub. Někdy se nestabilitám tohoto typu říká *výměnné nestability*, protože si různé oblasti tekutiny vyměňují pozici a „hledají“ stav s nižší energií. Typickým příkladem jsou dvě nemísící se kapaliny nalité do sklenice tak, aby hustší kapalina byla nad řidší. RT nestabilita ale vzniká i při inverzi na rozhraní dvou vzdušných mas nebo při interakci expandujícího hvězdného větru s Krabí mlhovinou, jež je pozůstatkem po explozi supernovy pozorované v roce 1054. RT nestabilita je zodpovědná i za hřibovitý útvar vznikající při atomovém výbuchu. V místě exploze vznikne lehký a horký plyn, který za pomoci RT nestability proniká vzhůru.




Obr122: Numerická simulace rozvoje Rayleighovy-Taylorovy nestability. Pittsburg Supercomputing Centrum.

V roce 1954 ukázali Martin Kruskal (1925–2006) a Martin Schwarzschild (1912–1997), že přítomnost magnetického pole může u krátkých vlnových délek zabránit rozvoji této nestability na rozhraní dvou druhů plazmatu.

Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby rozhraní obou prostředí bylo v rovině $y = 0$. Předpokládejme, že ve směru osy $y$ působí homogenní tíhové pole a na plazma působí vnější magnetické pole $\mathbf{B}_0$ rovnoběžné s rozhraním. Na rozhraní obou prostředí se rozvine malá porucha. Osu $z$ můžeme opět volit ve směru magnetického pole a zajistit tak kompatibilitu s předchozími výpočty. Jinou možností je volit osu $z$ ve směru šíření poruchy – periodická část pak bude mít jednoduchou závislost exp[i$kz$]. Postup odvození, který následuje, na volbě osy $z$ nezávisí. Důležité je jen, že vektory $\mathbf{B}_0$ a $\mathbf{k}$ jsou rovnoběžné s rozhraním. Pro určitost předpokládejme souřadnicový systém zvolený dle obrázku:




Obr. 123: Volba souřadnicového systému.

## Výpočet vektoru posunutí

Při naší volbě souřadnicového systému budou mít poruchy tvar

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \psi_0(y) + \delta\psi(t,\mathbf{x}); \qquad \delta\psi(t,\mathbf{x}) = \psi_1(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_z z - \omega t]} . \tag{5.94}$$

U vektoru posunutí budeme pro jednoduchost index 1 vynechávat

$$\delta\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_z z - \omega t]} . \tag{5.95}$$

Z geometrie problému pro jednotlivé veličiny plyne

$$\begin{gathered} \mathbf{k} = \mathbf{k}_{||} = (k_x, 0, k_z)\,, \\ \boldsymbol{\xi}(y) = \xi_\perp \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\xi}_{||} = (\xi_{||x}, \xi_\perp, \xi_{||z})\,, \\ \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0(y) = (B_{0x},\, 0,\, B_{0z})\,, \\ \rho_0 = \rho_0(y); \quad p_0 = p_0(y)\,. \end{gathered} \tag{5.96}$$

Symbol || znamená rovnoběžný s rozhraním, symbol $\perp$ znamená kolmý na rozhraní (tedy ve směru osy $y$). Hodnota $B_{0x}$ je v naší geometrii nulová, ale pro další odvození to není podstatné. Pro jednoduchost budeme předpokládat nestlačitelné plazma, tj. div $\delta\boldsymbol{\xi}$ = 0. Po rozepsání dá tato podmínka jednoduchý vztah

$$\xi'_\perp + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_{||} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi'_\perp + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi} = \mathrm{i}\,\xi'_\perp\,. \tag{5.97}$$

Čárka ve všech výrazech znamená derivaci podle jediné neperiodické proměnné $y$. V rovnici pro vektor posunutí (5.40) určíme nejprve poruchu magnetického pole v dané geometrii (div $\mathbf{B}_0$ = 0; div $\boldsymbol{\xi}$ = 0):

$$\delta\mathbf{B} = \mathrm{rot}\left(\delta\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_0\right) = \left(\mathbf{B}_0\cdot\nabla\right)\delta\boldsymbol{\xi} - \left(\delta\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}_0 = \mathrm{i}\left(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}\right)\delta\boldsymbol{\xi} - \delta\xi_\perp\mathbf{B}'_0\,. \tag{5.98}$$

Poruchu dosadíme do rovnice (5.40) pro vektor $\delta\boldsymbol{\xi}$, která pro nestlačitelné plazma dává

$$-\omega^2\rho_0\,\delta\boldsymbol{\xi} = \nabla(\delta\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)p_0 - \mathbf{g}\,\mathrm{div}\left(\rho_0\,\delta\boldsymbol{\xi}\right) + \frac{\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{B}}{\mu_0}\times\mathbf{B}_0 + \frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0}{\mu_0}\times\delta\mathbf{B}\,. \tag{5.99}$$

V rovnici rozepíšeme všechny členy, provedeme derivace, zkrátíme periodické části, upravíme dvojné vektorové součiny a za všechny výskyty (**k**·$\boldsymbol{\xi}$) dosadíme z (5.97):

$$-\omega^2\rho_0\xi_\perp = \left[\xi_\perp p_0' - \frac{\mathrm{i}}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\xi})(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_0')\xi_\perp\right]' - \frac{\xi_\perp}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2 + g\rho_0'\xi_\perp\,,$$

$$-\omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi}_{||} = \mathrm{i}\,\mathbf{k}\xi_\perp p_0' + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{k}(\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\xi})(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}) - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\xi}_{||}(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2 + \frac{\mathrm{i}}{\mu_0}\mathbf{k}(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_0')\xi_\perp\,.$$

Jde o tři rovnice (1+2) pro vektor posunutí. Druhou rovnici vynásobíme skalárně vektorem **k**, za $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_{||} = \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}$ opět dosadíme z (5.97), a vypočteme kombinaci

$$\frac{\mathrm{i}}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\xi})(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}) = \xi_\perp p_0' + \frac{\omega^2}{k^2}\rho_0\xi_\perp' - \frac{1}{\mu_0 k^2}(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2\,\xi_\perp' + \frac{\xi_\perp}{\mu_0}(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_0')\,,$$

kterou dosadíme do první rovnice. Tím získáme jednu jedinou rovnici pro kolmou složku vektoru posunutí:

$$\left[\left(\omega^2\rho_0 - \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)^2}{\mu_0}\right)\xi_\perp'\right]' - k^2\left(\omega^2\rho_0 - \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)^2}{\mu_0}\right)\xi_\perp - gk^2\rho_0'\xi_\perp = 0\,. \quad (5.100)$$

Pokud označíme kulaté závorky symbolem $\mathscr{K}_0$, získá rovnice pro kolmou složku vektoru posunutí jednoduchý tvar

$$\left(\mathscr{K}_0\xi_\perp'\right)' - k^2\left(\mathscr{K}_0\xi_\perp\right) - gk^2\rho_0'\xi_\perp = 0\,;$$

▶ $$\mathscr{K}_0 \equiv \omega^2\rho_0 - \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)^2\,. \quad (5.101)$$

Zavedeme-li Alfvénovu rychlost odpovídající neporušenému magnetickému poli vztahem

$$\mathbf{v}_{0\mathrm{A}} \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}\,, \quad (5.102)$$

lze funkci $\mathscr{K}_0$ přepsat do podoby

$$\mathscr{K}_0 \equiv \rho_0\left[\omega^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{0\mathrm{A}})^2\right]. \quad (5.103)$$

Pokud budeme uvažovat infinitezimálně tenké rovinné rozhraní (přechodovou vrstvu), jsou hustota $\rho_0(y)$ a magnetické pole $\mathbf{B}_0(y)$ v obou poloprostorech konstantní, ale v rovině $y = 0$ mají skok, takže derivace $\rho'_0$, $\mathbf{B}'_0$ vedou na distribuce. Nicméně pro $y \neq 0$ je $\rho'_0 = 0$ a funkce $\mathscr{K}_0$ je konstantní. Rovnice má proto v obou poloprostorech tvar

$$\xi_\perp'' - k^2\xi_\perp = 0\,. \quad (5.104)$$

Řešením je lineární kombinace dvou exponenciálních funkcí, z nichž v každém poloprostoru vybereme tu, která v nekonečnu klesá k nule:

$$\xi_\perp(y) = C\mathrm{e}^{-k|y|} = \begin{cases} C\mathrm{e}^{-ky} \; ; & y > 0\,, \\ C\mathrm{e}^{+ky} \; ; & y < 0\,. \end{cases} \tag{5.105}$$

## Navázání řešení a disperzní relace

Je zřejmé, že první derivace nalezeného řešení má v rovině $y = 0$ skok a druhá derivace se chová jako distribuce. Všechny derivace skoků se musí v původní rovnici (5.101) vyrušit. Toho můžeme využít k navázání řešení na rozhraní. Nalezené řešení dosadíme do původní rovnice (5.101). Integrací v proměnné $y$ se zbavíme derivace v prvním výrazu (a s ní souvisejících derivací skoků). V druhém výrazu derivace skoků nejsou. V posledním výrazu provedeme integraci per partes a derivaci skoku v hustotě tak převedeme na derivaci spojité veličiny $\xi_\perp$:

$$\left[-\mathscr{K}_0 \operatorname{sgn} y \; k\mathrm{e}^{-k|y|}\right]_{-l}^{+l} - k^2 \int_{-l}^{+l} \mathscr{K}_0 \mathrm{e}^{-k|y|} dy - \left[gk^2 \rho_0 \mathrm{e}^{-k|y|}\right]_{-l}^{+l} - \int_{-l}^{+l} gk^2 \rho_0 \operatorname{sgn} y \; \mathrm{e}^{-k|y|} dy = 0\,.$$

Nyní provedeme limitu $l \to 0$ (tedy z obou poloprostorů se blížíme k rozhraní). Oba integrandy jsou omezené a v limitě se integrály blíží k nule. Zbývá podmínka

$$\left[-\mathscr{K}_0 \operatorname{sgn} y \; k\mathrm{e}^{-k|y|} - gk^2 \rho_0(y) \mathrm{e}^{-k|y|}\right]_{y\to 0^-}^{y\to 0^+} = 0\,,$$

ze které okamžitě plyne disperzní relace

▶
$$\mathscr{K}_a + \mathscr{K}_b + gk(\rho_b - \rho_a) = 0\,, \tag{5.106}$$

kde indexy $a$ a $b$ značí dolní a horní poloprostor. Po dosazení za funkci $\mathscr{K}$ máme finální disperzní relaci problému

▶
$$\omega^2 \left(\rho_a + \rho_b\right) - \frac{1}{\mu_0}\left[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_b)^2\right] + gk(\rho_b - \rho_a) = 0\,. \tag{5.107}$$

## Rozbor řešení (nulové magnetické pole)

Pro nulové magnetické pole vychází:

▶
$$\omega^2 = -gk \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a + \rho_b}\,. \tag{5.108}$$

Situace je tedy vždy nestabilní, pokud je těžší tekutina nad lehčí ($\omega^2 < 0$, $\rho_b > \rho_a$). Koeficient nárůstu nestability je

$$\gamma = \sqrt{gk \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a + \rho_b}}\,, \tag{5.109}$$

tedy k nejrychlejšímu rozvoji nestability bude docházet pro krátké vlnové délky a pro velké rozdíly hustot ($\rho_b >> \rho_a$, hustší kapalina je nad řidší).

### Rozbor řešení (nenulové magnetické pole)

V přítomnosti magnetického pole máme disperzní relaci

► $$\omega^2 = -gk\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a + \rho_b} + \frac{1}{\mu_0}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_b)^2}{\rho_a + \rho_b}\,, \tag{5.110}$$

která vede na podmínku stability ( $\omega^2 \geq 0$ )

$$-gk(\rho_b - \rho_a) + \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_b)^2}{\mu_0} \geq 0\,. \tag{5.111}$$

Snadno ji přepíšeme do tvaru

► $$\lambda \leq \frac{2\pi\left(B_a^2\cos^2\alpha_a + B_b^2\cos^2\alpha_b\right)}{\mu_0 g(\rho_b - \rho_a)}\,. \tag{5.112}$$

Úhel mezi magnetickým polem a vlnovým vektorem jsme označili $\alpha$. Pro poruchu šířící se podél pole tedy vždy existuje pro dosti krátké vlnové délky oblast stability i v případě hustší kapaliny nad řidší. Pro kužel stability platí (pokud jsou oba úhly stejné, tj. $\alpha_a = \alpha_b = \alpha$)

► $$\begin{aligned} &\alpha \in <0, \alpha_{\max})\,; \quad \alpha_{\max} = \arccos\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_{\max}}}\,; \\ &\lambda \leq \lambda_{\max} \equiv \frac{2\pi\left(B_a^2 + B_b^2\right)}{\mu_0 g(\rho_b - \rho_a)}\,; \quad \rho_b > \rho_a\,. \end{aligned} \tag{5.113}$$

## 5.2.5 Kelvinova-Helmholtzova nestabilita

Další typickou nestabilitou, která se může rozvinout na rozhraní dvou prostředí je Kelvinova Helmholtzova (KH) nestabilita. Vzniká tam, kde se vůči sobě obě prostředí pohybují (vítr nad vodní hladinou, sluneční vítr obtékající na bocích magnetosféru, rozhraní pásů obřích planet nebo rozhraní dvou vrstev atmosféry Země). Při dostatečně velikém rozdílu rychlostí dojde k rozvoji nestability i tehdy, pokud je situace RT stabilní (tj. lehčí tekutina je nad těžší). KH nestabilita vzniká i při velkém střižném (kolmém na směr rychlosti) gradientu rychlosti v tekutině jediné. K stabilizujícím prvkům patří přítomnost gravitačního pole, magnetického pole v plazmatu nebo neostrost hranice rozhraní (rychlost se nemění skokem, ale postupně).

Nestabilitu poprvé popsal Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894) v roce 1868 a nezávisle na něm lord Kelvin (1824–1907) v roce 1871. Kompletní řešení pro nestlačitelné kapaliny nalezl v roce 1961 Subramanyan Chandrasekhar. V roce 1963 zobecnil toto řešení pro ideální magnetohydrodynamiku Amiya Sen, o rok později nalezl i řešení pro stlačitelný případ, které v roce 1968 zobecnil Richard Gerwin a v témže roce ještě David John Southwood pro magnetopauzu. V roce 1980 nalezl Attilio Ferrari alespoň částečné řešení pro relativistické rychlosti, které je důležité například u relativistických výtrysků z černých děr.