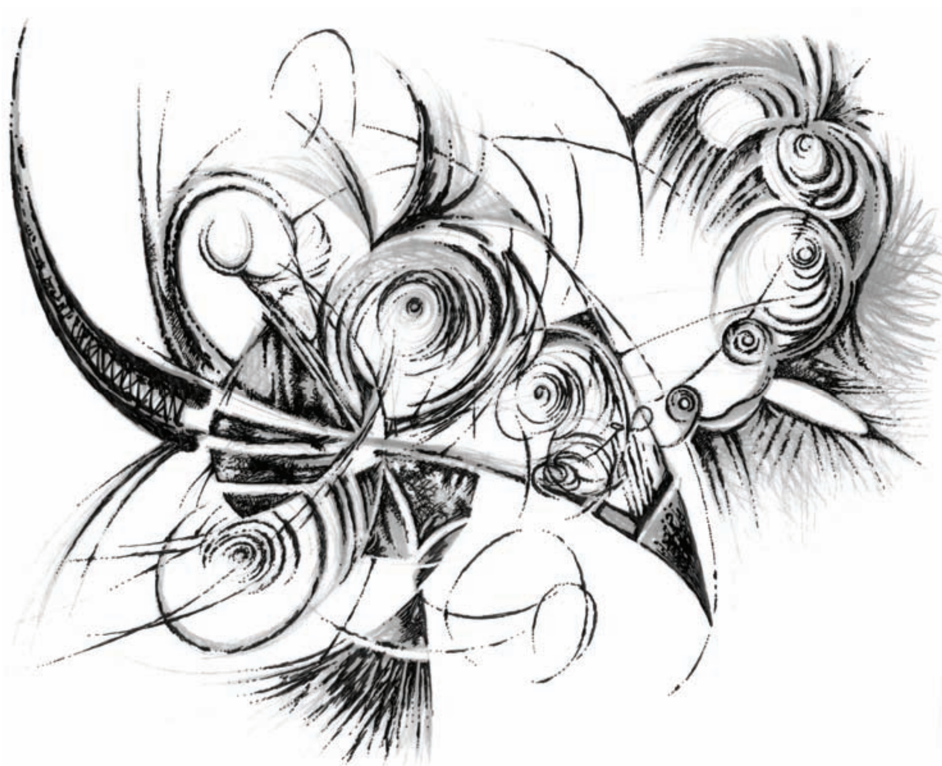
1. Pohyby nabitých částic



V celé první kapitole budeme počítat pohyby částic ve vnějších, předem známých (zadaných) polích. Předpokládáme, že

1. částice vzájemně neinteragují,
2. vlastní pole částic jsou zanedbatelná.

Pro popis elektrického pole využijeme intenzitu elektrického pole **E**, pro popis magnetického pole magnetickou indukci **B**. Alternativně můžeme elektrické a magnetické pole popsat za pomoci skalárního a vektorového potenciálu (ϕ, **A**). Převodní vztahy jsou

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{1.2}$$

Odvození těchto vztahů nalezne čtenář v jakékoli učebnici elektromagnetického pole, například v [8]. Při výpočtu pohybu nabitých částic budeme předpokládat, že potenciály $\phi(t, \mathbf{x})$ a $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ jsou předem dané funkce. Poznamenejme, že tvoří relativistický čtyřvektor a lze je z jedné souřadnicové soustavy do druhé transformovat za pomoci Lorentzovy transformace.

1.1 Nerelativistické pohyby

Za nerelativistické považujeme pohyby nabitých částic, jejichž rychlost je zanedbatelná vzhledem k rychlosti světla, tj. $v \ll c$. Takové částice nalezneme například ve slunečním větru nebo v plazmatu obloukového výboje.

1.1.1 Lagrangeova a Hamiltonova funkce

Problematika pohybu nabitých částic v elektromagnetických polích je dána Lagrangeovou funkcí

$$L = L_{\text{part}} + L_{\text{int}} + L_{\text{elmg}}, \tag{1.3}$$

kde L_{part} je Lagrangeova funkce částice, L_{int} popisuje interakci mezi částicí a polem a L_{elmg} je Lagrangeova funkce elektromagnetického pole. V našem přiblížení jsou pole pevně dána a nebudeme je počítat, proto je polní část Lagrangeovy funkce nulová. Pokud budeme uvažovat jen elektrické pole, které je potenciální, bude Lagrangeova funkce dána vztahem

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - Q\phi. \tag{1.4}$$

Tvar je shodný s klasickou mechanikou [1], kde je Lagrangeova funkce dána rozdílem kinetické a potenciální energie $L = T - V$. Kinetická energie představuje Lagrangeovu funkci volné částice L_{part} a potenciální energie Lagrangeovu funkci interakce s elektrickým polem L_{int}. V přítomnosti magnetického pole, které není potenciální, musí mít interakční část Lagrangeovy funkce další člen. Ten bude nějakou funkcí čtyřvektoru toku náboje pro částici (charakterizuje částici) a čtyřvektoru potenciálů pole (charakterizuje pole):

$$\mathsf{J} = \begin{pmatrix} c\rho_Q \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cQ\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ Q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \end{pmatrix}; \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{x}'$ je poloha částice a $\mathbf{x}$ poloha pozorovatele. Lagrangeova funkce by měla být skalárem, jedinou rozumnou kombinací připadající v úvahu je tedy veličina úměrná skalárnímu součinu obou čtyřvektorů integrovanému přes objem (bez integrace přes objem bychom dostali veličinu úměrnou hustotě Lagrangeovy funkce):

$$\int (\mathsf{J} \cdot \mathsf{A})\, d^3\mathbf{x}' = \int (-Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})\, \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}' = -Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\,.$$

Z uvedeného vztahu je již jasná chybějící část ve vztahu (1.4), správná Lagrangeova funkce pro nerelativistický pohyb částic v elektrickém a magnetickém poli bude

► $$L = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\,. \tag{1.5}$$

Standardními postupy určíme zobecněnou hybnost, zobecněnou energii a po vyloučení rychlosti z obou vztahů Hamiltonovu funkci:

► $$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}\,, \tag{1.6}$$

► $$\mathscr{E} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + Q\phi\,, \tag{1.7}$$

► $$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi\,. \tag{1.8}$$

Poznámka 1: Energii budeme v této kapitole značit symbolem $\mathscr{E}$, abychom ji odlišili od intenzity elektrického pole **E**.

Poznámka 2: Zobecněná hybnost není součinem hmotnosti a rychlosti jako v klasické mechanice, ale figuruje v ní vektorový potenciál!

Poznámka 3: Energie nezávisí na magnetickém poli (vektorovém potenciálu **A**), protože magnetické pole nemění energii částice, ale jen směr její rychlosti.

Ukažme, že příslušné Lagrangeovy rovnice jsou totožné s Lorentzovou pohybovou rovnicí pro nabitou částici. Ve složkách máme

$$L = \frac{1}{2} m v_j v_j - Q\phi(t, \mathbf{x}) + QA_j(t, \mathbf{x}) v_j\,;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}(m v_i + QA_i) + Q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - Q\frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(mv_i) + Q\frac{\partial A_i}{\partial t} + Q\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + Q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - Q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}v_j = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(mv_i) = Q\left[-\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + v_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)\right].$$

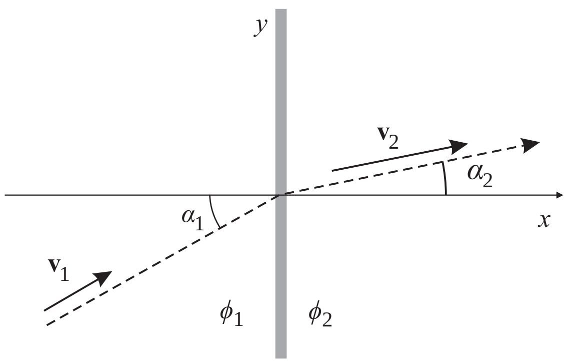
Poslední výraz v hranaté závorce snadno upravíme pomocí Levi-Civitova tenzoru do tvaru (postup naleznete v dodatku A, vztah A.20)

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = Q\left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}\times \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\right] \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = Q\left[\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right], \tag{1.9}$$

což je známá Lorentzova pohybová rovnice.

1.1.2 Pohyb v elektrickém poli, optická analogie

Pokud se nabitá částice pohybuje dostatečně dlouho jen v homogenním elektrickém poli, nelze situaci řešit nerelativisticky. Elektrické pole by částici urychlovalo nade všechny meze, což je v rozporu se speciální relativitou. Můžeme ale řešit úlohu, ve které je elektrické pole nenulové jen v malé oblasti prostoru, například v nějaké vrstvě plazmatu. Idealizovaným případem je rázová vlna se skokem elektrického potenciálu (tzv. dvojvrstva, se kterou se podrobněji seznámíme v kapitole 3.3.4).



Obr. 1: Skok elektrického potenciálu.

Předpokládejme, že v obou poloprostorech na obrázku je potenciál konstantní a elektrické pole tedy nulové. Nabitá částice se proto pohybuje rovnoměrně přímočaře. V tenké vrstvě (je označena šedě) na rozhraní obou oblastí se potenciál mění, elektrické pole je zde nenulové a míří ve směru osy x. Pokud je přechodová vrstva infinitezimálně malá, je změna potenciálu skoková. Ve směru osy y nepůsobí žádné pole, proto se složka rychlosti částice ve směru osy y nemění. Tečná složka rychlosti vzhledem k rozhraní je proto spojitá:

$$v_1 \sin\alpha_1 = v_2 \sin\alpha_2\,. \tag{1.10}$$

Při pohybu nabité částice se bude zachovávat energie (1.7):

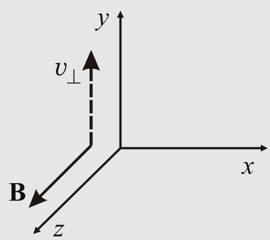
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + Q\phi_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + Q\phi_2 = \mathscr{E}. \tag{1.11}$$

Pokud z posledního vztahu vypočteme rychlosti a dosadíme do (1.10), dostaneme

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \sqrt{\frac{\mathscr{E} - Q\phi_2}{\mathscr{E} - Q\phi_1}} = \sqrt{\frac{C - \phi_2}{C - \phi_1}} = \sqrt{\frac{U_2}{U_1}}\,. \tag{1.12}$$

Uvedenému vztahu se říká *optická analogie pohybu částice v elektrickém poli*. Svým tvarem připomíná Snellův zákon lomu.

1.1.3 Pohyb v homogenním magnetickém poli



elektromagnetické pole:
$\mathbf{E} = (0,0,0)$,
$\mathbf{B} = (0,0,B)$;

počáteční podmínky:
$\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$,
$\mathbf{p}(0) = (0, mv_\perp, 0)$.

Předpokládejme homogenní magnetické pole; souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby osa *z* mířila ve směru pole. Nabitou částici vypustíme kolmo na magnetické indukční čáry ve směru osy *y*. Pohyb budeme řešit za pomoci Hamiltonových pohybových rovnic. Pro sestavení Hamiltonovy funkce proto nejdříve potřebujeme nalézt potenciály pole. Potenciály nejsou vztahy (1.1) a (1.2) určeny jednoznačně (různé potenciály vedou na stejná pole). Například pro magnetický potenciál můžeme v našem případě využít výrazy $\mathbf{A} = (-yB, 0, 0)$ nebo $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$ nebo $\mathbf{A} = ½\,(-yB, xB, 0)$. Vyzkoušejte si, že rot $\mathbf{A}$ vede vždy na pole $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Pro další výpočet zvolíme potenciály ve tvaru

$$\phi = 0\,,$$
$$\mathbf{A} = (0, xB, 0)\,.$$

Potenciály elektrických a magnetických polí pro typické konfigurace naleznete v dodatku D3. Zobecněná hybnost je v našem případě dána vztahem $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}$. Pro Hamiltonovu funkci platí

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi = \frac{p_x^2 + (p_y - QBx)^2 + p_z^2}{2m}$$

a Hamiltonovy rovnice jsou

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}\,, \tag{1.13}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - QBx}{m}\,, \tag{1.14}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \,, \tag{1.15}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{QB(p_y - QBx)}{m} \,, \tag{1.16}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \,, \tag{1.17}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \,. \tag{1.18}$$

Z rovnic (1.17), (1.18) máme ihned

$$p_y(t) = p_y(0) = m v_\perp \,,$$
$$p_z(t) = p_z(0) = 0 \,.$$

Tyto výrazy spolu s p_x vyjádřeným z (1.13) dosadíme do (1.16) a získáme tak rovnici

$$\ddot{x} + \left(\frac{QB}{m}\right)^2 x = \frac{QB v_\perp}{m}$$

pro proměnnou x. Po jejím vyřešení (je součtem homogenního a partikulárního) známe závislost $x(t)$ a můžeme již přímo integrovat rovnice (1.14), (1.15). Výsledné řešení má tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= R_\mathrm{L} - R_\mathrm{L} \cos \omega_\mathrm{c} t \,, \\ y(t) &= R_\mathrm{L} \sin \omega_\mathrm{c} t \,, \\ z(t) &= 0 \,, \end{aligned} \tag{1.19}$$

kde jsme označili

$$R_\mathrm{L} \equiv \frac{m v_\perp}{QB} \,; \qquad \omega_\mathrm{c} \equiv \frac{QB}{m} \tag{1.20}$$

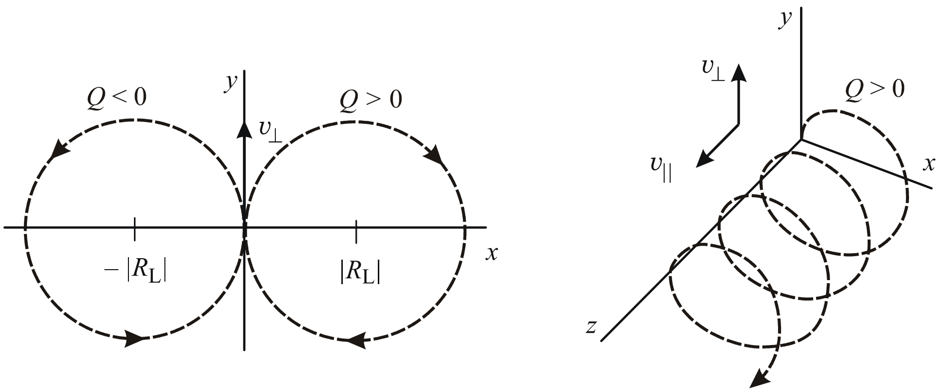
tzv. Larmorův poloměr R_L a cyklotronní frekvenci ω_c. Trajektorii získáme vyloučením času z (1.19):

$$\left(x - R_\mathrm{L}\right)^2 + y^2 = R_\mathrm{L}^2 \,. \tag{1.21}$$

Vidíme, že pohyb se děje po kružnici s poloměrem R_L a se středem $S = [\, R_\mathrm{L}, 0 \,]$. Poloha středu závisí na znaménku náboje částice.

Magnetické pole nepůsobí na pohyb částice ve směru podél pole. Kolmo na směr pole působí Lorentzova síla, která zakřivuje trajektorii částice na kružnici. Při nenulové počáteční rychlosti $v_z(0)$ je pohyb částice složen z rovnoměrného přímočarého pohybu podél pole a Larmorovy rotace (tzv. *gyrace*) v rovině kolmé na pole – tím vzniká pohyb po šroubovici.

Samotné elektrické pole naopak nepůsobí na pohyb částice napříč pole (v nerelativistickém případě) nebo jen velmi málo (v relativistickém případě). Ve směru pole dochází k urychlování.



Obr. 2: Pohyby nabité částice v homogenním magnetickém poli.

Poznámka: Výpočet Larmorova pohybu lze také provést přímo z Lorentzovy pohybové rovnice $m\ddot{\mathbf{r}} = Q\,\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}$. Složka z opět vede na volný pohyb. Ve složce x a y dostáváme

$$\ddot{x} = \frac{QB}{m}\dot{y}\,, \tag{1.22}$$

$$\ddot{y} = -\frac{QB}{m}\dot{x}\,. \tag{1.23}$$

Obě rovnice je možné řešit různými způsoby. Asi nejrychleji k cíli vede Landaův postup: druhou rovnici vynásobíme komplexní jednotkou a sečteme s první. Kombinaci QB/m označíme jako cyklotronní frekvenci:

$$\ddot{x} + \mathrm{i}\,\ddot{y} = -\mathrm{i}\,\omega_\mathrm{c}(\dot{x} + \mathrm{i}\,\dot{y}) \tag{1.24}$$

Nyní stačí zavést komplexní proměnnou $\xi \equiv x + \mathrm{i}\,y$ a řešit jednoduchou rovnici

$$\ddot{\xi} = -\mathrm{i}\,\omega_\mathrm{c}\,\dot{\xi} \tag{1.25}$$

v komplexním oboru. Po nalezení integračních konstant získáme hledanou polohu částice x a y tak, že oddělíme reálnou a imaginární část řešení.