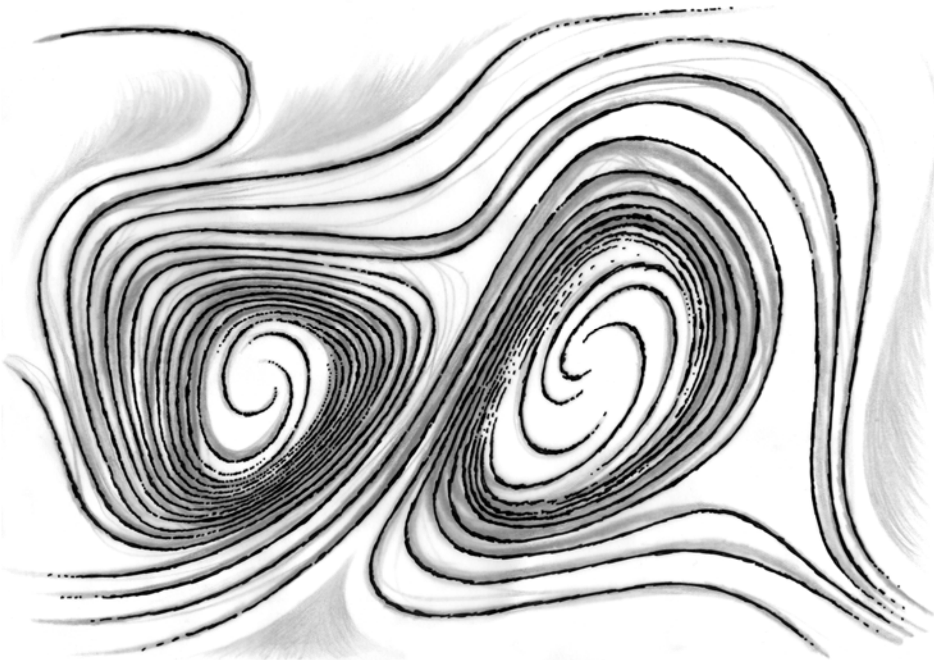
1. Teoretická mechanika



1.1 Integrální principy mechaniky

V teoretické mechanice se hojně používá Einsteinova sumační konvence, diferenciálu a Lagrangeova věta o přírůstku. Pokud s těmito matematickými základy čtenář není seznámen, měl by si nejprve důkladně pročíst Dodatek A, kde jsou tyto pojmy vysvětleny. Další informace ke studiu teoretické mechaniky může čtenář čerpat v učebnicích [2-6].

1.1.1 Základní pojmy z mechaniky

Mechanický systém

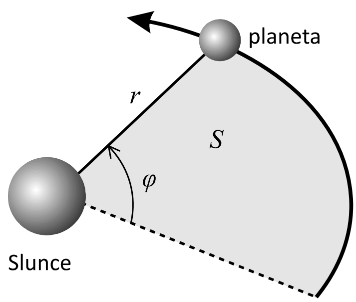
Mechanickým systémem nazýváme jakoukoli soustavu částic nebo těles, kterou se rozhodneme popisovat (elektron, atom, Zeměkoule, planetární systém,…).

Kartézské souřadnice

Kartézské souřadnice vycházejí ze tří navzájem kolmých a přímých os. Pro souřadnice používáme označení $\mathbf{x} \equiv \mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$, resp. $\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3) \equiv (F_x, F_y, F_z)$. Pohybová rovnice hmotného bodu má tvar $m\, \mathrm{d}^2\mathbf{x}/\mathrm{d}t^2 = \mathbf{F}$.

Zobecněné souřadnice

Za zobecněné souřadnice považujeme jakékoli parametry popisující pohyb (úhly, vzdálenosti, plochy). Označujeme je $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots)$.



Obr. 2: Souřadnice pro planetu obíhající kolem Slunce.

◖ **Příklad 1:** pohyb planety kolem Slunce

$q_1 = r(t)$ – vzdálenost od Slunce,

$q_2 = \varphi(t)$ – úhel průvodiče a zadané polopřímky,

$q_3 = S(t)$ – plocha opsaná průvodičem. ◗

Zobecněné rychlosti

Zobecněnou rychlostí nazýváme časovou změnu zobecněné souřadnice.

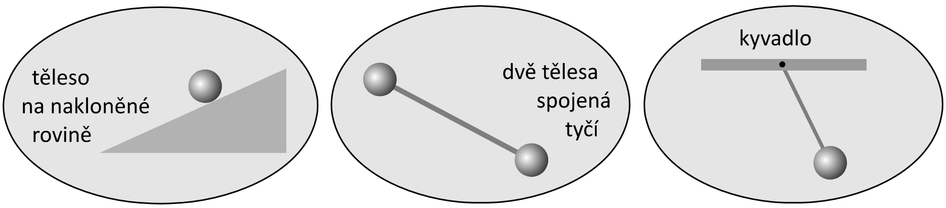
◖ **Příklad 2**

$v_r = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$	radiální rychlost,
$v_\varphi = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$	úhlová rychlost,
$v_S = \mathrm{d}S/\mathrm{d}t$	plošná rychlost,
$v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$	x-ová složka rychlosti.

◗

Vazby

Těleso nebo některé jeho části se nemusí pohybovat zcela libovolně. Pak říkáme, že v systému jsou vazby. Příklad vazeb je na následujícím obrázku:



Obr. 3: Vazby v systému.

Stupeň volnosti

Stupni volnosti rozumíme počet nezávislých údajů (parametrů), kterými lze zcela popsat pohyb systému (značíme f).

◖ **Příklad 3**

volný hmotný bod	$f = 3$,
N volných hmotných bodů	$f = 3N$,
hmotný bod na nakloněné rovině	$f = 2$,
2 hmotné body spojené tyčí	$f = 5$,
prostorové kyvadlo	$f = 2$,
rovinné kyvadlo	$f = 1$.

◗

Pro systém N hmotných bodů s R vazbami platí $f = 3N - R$. Zobecněné souřadnice volíme vždy jako množinu nezávislých parametrů, které zcela popisují systém, tj. je jich právě f:

$$\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \ldots q_f)\,.$$

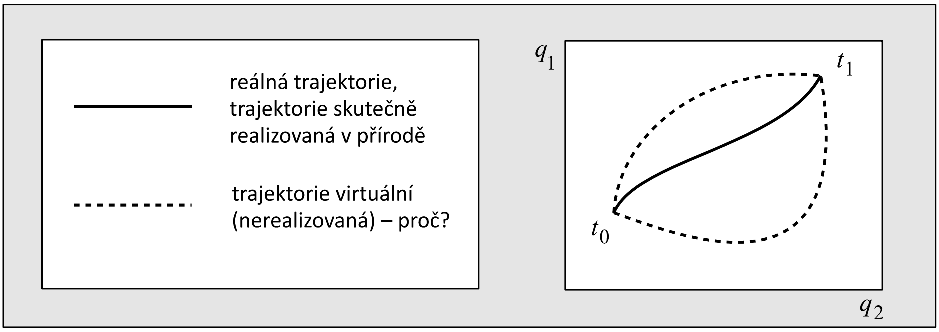
Konfigurační prostor

f-rozměrný prostor, do kterého zobrazujeme hodnoty zobecněných souřadnic. Bod konfiguračního prostoru nazýváme *konfigurací*. Časový vývoj konfigurace systému $\mathbf{q}(t)$ nazýváme *trajektorie*.

Stav systému

V klasické mechanice je v daném čase t_0 stav popisovaného systému zcela určen konfigurací $\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \ldots q_f)$ a tendencí (zobecněnými rychlostmi) $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, \ldots, v_f)$.

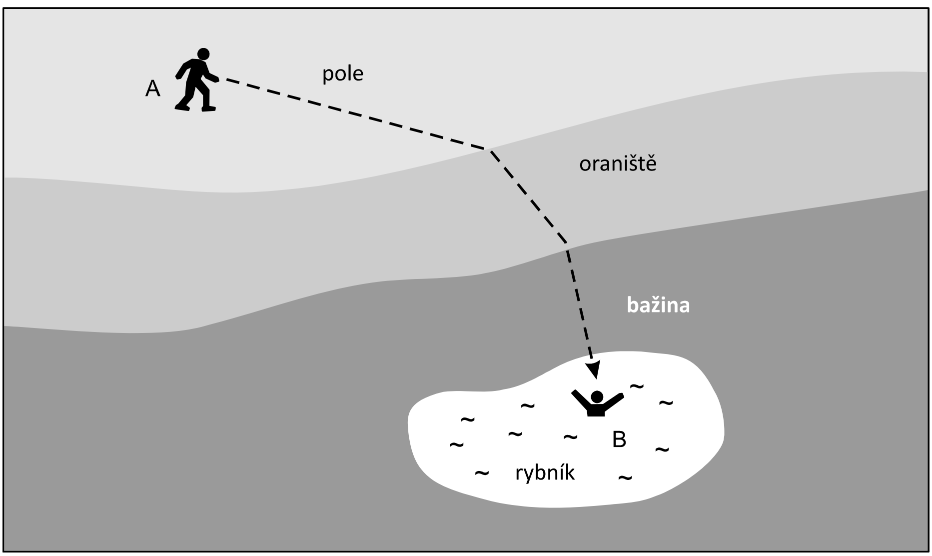
Reálná a virtuální trajektorie:



Obr. 4. Reálná a virtuální trajektorie.

1.1.2 Integrální principy

◖ **Příklad 4.** Představme si, že v rybníku se topí člověk. Mezi zachráncem a rybníkem je bažinatý pás, ve kterém se velmi těžko pohybuje, pás oraniště a pole. Zachránce musí volit optimální cestu, aby se k tonoucímu dostal co nejrychleji (takovou cestou nemusí být nejkratší spojnice mezi tonoucím a zachráncem):



Obr. 5: Jaká je optimální cesta k tonoucímu z hlediska času?

Celkový čas, po který se bude pohybovat zachránce, určíme takto:

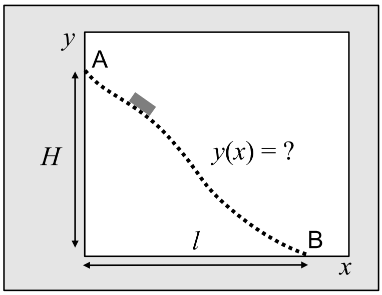
$$v = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}l}{v} \quad \Rightarrow$$

$$T = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}l}{v} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{v(x,y)} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\mathrm{d}x\,.$$

Předpokládáme, že známe prostorovou závislost rychlosti $v(x,y)$. Ta je dána typem terénu (pole, oraniště, bažina). Nyní hledáme takovou křivku $y(x)$, aby předchozí integrál měl minimální hodnotu. Řešením úloh tohoto typu se zabývá variační počet.

◗

◖ **Příklad 5: brachystochrona.** Řešme následující úlohu. Těleso má klouzat po nakloněné rovině obecného tvaru mezi dvěma body A a B, které jsou v různé výšce. Úkolem je nalézt rovnici tvaru nakloněné roviny tak, aby se těleso do bodu B dostalo za nejkratší čas. Název křivky pochází z řečtiny (βραχιστος = nejkratší, χρονος = čas).



Obr. 6: Brachystochrona.

Výpočet je obdobný předchozímu:

$$v = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}l}{v} \quad \Rightarrow$$

$$T = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}l}{v(y)} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{v(y)} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}\mathrm{d}x\,.$$

Rychlost určíme ze zákona zachování energie

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = mgH\,.$$

Výsledná doba pohybu je

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (1.1)$$

Nyní je nutné nalézt křivku $y(x)$, pro kterou nabývá integrál (1.1) svého minima – jde opět o typickou úlohu variačního počtu. Dokončení řešení naleznete na konci kapitoly 1.2.3. Variačně lze zformulovat i základní zákony mechaniky, teorii elektromagnetického pole i další fyzikální disciplíny. V této kapitole se budeme zabývat jedním z integrálních principů mechaniky – tzv. *Hamiltonovým principem*.

◗

1.1.3 Hamiltonův princip nejmenší akce

Oba dva úvodní příklady vedly na optimalizaci integrálu typu

$$T(x_A, x_B) = \int_{x_A}^{x_B} F\left(x, y(x), y'(x)\right) \mathrm{d}x\,. \tag{1.2}$$

Integrand je funkcí nezávislé proměnné x, hledané funkce $y(x)$ a její první derivace $y'(x)$. Výsledkem optimalizace by měla být hledaná trajektorie či křivka $y(x)$. V úvodním příkladu zachránce volil trajektorii tak, aby celkový čas byl nejkratší. Všechny ostatní trajektorie (tzv. *virtuální* – nerealizované) jsou sice v principu možné, ale zachránce se po nich bude pohybovat delší dobu. Obdobně je tomu v příkladu s klouzajícím tělesem. Integrály výše uvedeného typu se nazývají *funkcionály*. Funkcionál je zobrazení, při kterém funkci přiřadíme číslo (v našem případě celkový čas).

Základní myšlenka integrálních principů mechaniky je velmi podobná. Ze všech možných trajektorií systému se realizovala jen ta, která je nějakým způsobem výhodnější než ostatní. Hledisko výhodnosti se uvažuje obdobné úvodnímu příkladu, jen je ale nezávislou proměnnou čas, protože hledáme křivku $\mathbf{q}(t)$.

Hamiltonův princip

Budeme předpokládat, že existuje funkce času t, zobecněných souřadnic a jejich prvních derivací (tj. stavu)

► $$L(t, q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f)$$

taková, že ze všech možných závislostí $q_k(t) = f_k(t)$ se v přírodě realizuje ta, pro kterou má integrál

► $$S(t_A, t_B) \equiv \int_{t_A}^{t_B} L(t, q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f)\, \mathrm{d}t \tag{1.3}$$

extrém (minimum). Funkci $L(t, \mathbf{q}, \mathrm{d}\mathbf{q}/\mathrm{d}t)$ nazýváme *Lagrangeovou funkcí* (*lagranžiánem*) a integrál $S(t_A, t_B)$ *integrálem akce.* Hamiltonův princip je základní axiom teorie.

1.1.4 Lagrangeovy rovnice

Zaveďme *virtuální posunutí*

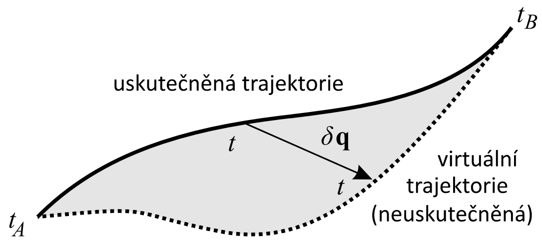
$$\begin{aligned} \delta q_k &= q_{k,\mathrm{virt}}(t) - q_{k,\mathrm{real}}(t)\,, \quad \text{resp.} \\ \delta \mathbf{q} &= \mathbf{q}_{\mathrm{virt}}(t) - \mathbf{q}_{\mathrm{real}}(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

jako infinitezimální rozdíl virtuální (myšlené) trajektorie a reálné (uskutečněné) trajektorie. Body na obou trajektoriích si odpovídají ve stejném čase (tzv. *izochronní variace*). Uveďme základní vlastnosti virtuálních posunutí:

► 1) $\delta\mathbf{q}(t_A) = \delta\mathbf{q}(t_B) = 0\,,$ (1.5)

► 2) $\delta\dot{\mathbf{q}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\mathbf{q}\,.$ (1.6)

První vlastnost vyjadřuje, že virtuální i reálné trajektorie začínají a končí ve stejném bodě konfiguračního prostoru. Druhá vlastnost vyjadřuje záměnnost operací derivace $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ a variace δ.



Obr. 7: K definici virtuálního posunutí.

> **Poznámka:** Vazby jsou v daném systému zahrnuty volbou zobecněných souřadnic – jejich celkový počet je roven počtu stupňů volnosti. Virtuální posunutí jsou posunutí ve shodě s vazbami v daném čase.

Odvoďme nyní nutné podmínky extremálnosti integrálu akce:

$$\delta\int_{t_A}^{t_B} L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,\mathrm{d}t = 0 \quad\Rightarrow\quad \int_{t_A}^{t_B} \delta\, L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,\mathrm{d}t = 0 \quad\Rightarrow\quad \int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)\mathrm{d}t = 0\,,$$

kde jsme z důvodu izochronnosti vynechali diferenciaci podle času. Druhý člen nyní za pomoci (1.6) integrujeme per partes:

$$\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\right)\mathrm{d}t \;+\; \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_A}^{t_B} \;=\; 0\,.$$

Poslední člen je vzhledem k (1.5) nulový, a proto

$$\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\,\mathrm{d}t \;=\; 0\,.$$

Tato rovnost musí platit pro každé dva časy t_A, t_B a pro každé virtuální posunutí δq_k. Vzhledem k tomu, že δq_k jsou nezávislá (počet zobecněných souřadnic je roven počtu stupňů volnosti systému), musí být závorka v předchozím vztahu pro každé k nutně nulová, tj.:

► $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \;=\; 0\,; \qquad k = 1,\ldots,f\,.$$ (1.7)