Dodatky

Dodatek A – Einsteinova sumační konvence a její použití

A1 Einsteinova sumační konvence

Vyskytnou-li se ve výrazu dva stejné indexy, potom přes ně automaticky sčítáme. Sčítací indexy budeme označovat malými písmeny abecedy ($i, j, k, ...$):

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_N b_N = \sum_{k=1}^{N} a_k b_k = a_k b_k \,. \tag{A.1}$$

Na označení sčítacího indexu nezáleží, můžeme ho libovolně měnit:

$$a_k b_k = a_l b_l = a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_N b_N \,. \tag{A.2}$$

V následujících ukázkách si pečlivě prohlédněte používání sumační konvence. Současně si přitom zopakujete některé jednoduché pojmy z matematiky. Záměrně v různých ukázkách používáme různé označení sčítacích indexů, jedině tak si na tuto užitečnou symboliku zvyknete.

Skalární součin dvou vektorů

$$\begin{gathered} \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)\,; \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)\,; \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_N b_N = a_j b_j \,. \end{gathered} \tag{A.3}$$

Divergence

$$\begin{gathered} \mathbf{T} \equiv (T_1, T_2, T_3)\,; \\ \operatorname{div} \mathbf{T} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} = \frac{\partial T_i}{\partial x_i} \,. \end{gathered} \tag{A.4}$$

Maticové násobení

$$\begin{gathered} \mathbf{A} = \left\{ a_{ij} \right\}; \qquad \mathbf{B} = \left\{ b_{ij} \right\}; \\ \left\{ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right\}_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\, b_{kj} = a_{ik}\, b_{kj} \,. \end{gathered} \tag{A.5}$$

Volné indexy jsou indexy, které se nacházejí na obou stranách rovnosti (zde i, j). Přes volný index se nesčítá. *Němý* (*vázaný*, *sčítací*) index je dvojice stejných indexů v jednom matematickém členu, přes který se sčítá (zde k).

Malý konečný přírůstek funkce jedné proměnné

Mějme funkci jedné reálné proměnné $f(q)$, která hodnotě q přiřadí hodnotu f:

► $$f(q): \quad q \to f\,; \qquad \text{potom } \Delta f \cong \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q}\Delta q\,. \tag{A.6}$$

V matematice platnost této aproximace přesně definuje tzv. Lagrangeova věta o přírůstku. Ukažme si její použití na příkladu koule o poloměru r, jejíž objem je

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\,. \tag{A.7}$$

Poloměr koule změníme o Δr. Její objem se pro malá Δr přibližně změní o hodnotu

$$\Delta V \cong \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r\,. \tag{A.8}$$

Interpretace je zřejmá: $4\pi r^2$ je plocha koule o poloměru r a Δr je tloušťka této plochy. Součin představuje změnu objemu koule.

Malý konečný přírůstek funkce více proměnných

Mějme funkci více reálných proměnných $f(q_1, q_2, \ldots q_N)$, která hodnotám $\mathbf{q}$ přiřadí hodnotu f:

$$f(q_1, \ldots, q_N): \qquad q_1, \ldots, q_N \to f\,. \tag{A.9}$$

Lagrangeovu větu o přírůstku této funkce můžeme jednoduše zapsat (bez členů vyššího řádu)

► $$\Delta f \cong \frac{\partial f}{\partial q_1}\Delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\Delta q_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_N}\Delta q_N = \frac{\partial f}{\partial q_k}\Delta q_k \tag{A.10}$$

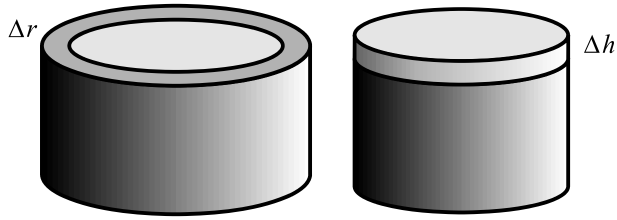
V zápisu jsme na závěr použili Einsteinovu sumační konvenci. Ukažme si, jak tato věta funguje na změně objemu válce. Samotný objem válce je funkcí dvou proměnných (poloměru podstavy a výšky):

$$V(r, h) = \pi r^2 h\,. \tag{A.11}$$

Pro přírůstek snadno spočítáme

$$\Delta V \cong \frac{\partial f}{\partial q_k}\Delta q_k = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h\,. \tag{A.12}$$

První příspěvek je od změny poloměru podstavy, druhý od změny výšky válce.



Obr. A1: K větě o přírůstku

Infinitezimální (nekonečně malý) přírůstek funkce více proměnných

Zavedeme-li infinitezimální změny namísto malých přírůstků, dostaneme tzv. první diferenciál funkce

► $$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \mathrm{d}q_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \cdot \mathrm{d}q_N = \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \mathrm{d}q_j \,. \tag{A.13}$$

Poznámka: předchozí vztahy lze precizněji formulovat pomocí Lagrangeovy věty o přírůstku a věty o prvním diferenciálu. Pro naše účely však postačí si zapamatovat, že Lagrangeova věta se týká konečného přírůstku a jde o vztah přibližný, zatímco první diferenciál se týká nekonečně malého přírůstku a jde o vztah přesný.

Derivace složené funkce:

Jestliže vnitřní proměnné q_i závisí na čase, potom má úplná časová derivace tvar:

$$f = f(q_1, q_2, \cdots, q_N)\,;$$

► $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \cdot \frac{\mathrm{d}q_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial q_k} \cdot \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k \,. \tag{A.14}$$

Jak první diferenciál, tak derivaci složené funkce si ukážeme na transformačním vztahu mezi polárními a kartézskými souřadnicemi:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\varphi(t)\,, \\ y(t) &= r(t)\sin\varphi(t)\,; \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,, \\ \mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,; \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\,. \end{aligned} \tag{A.17}$$

K symbolice v kartézských souřadnicích

Věnujme se nyní různým způsobům zápisu jednoho a téhož výrazu. Není důležité váhat nad volbou způsobu zápisu, ale vědět, co zápisy znamenají. Například vektor se v tištěných publikacích značí tučným řezem písma, ale na tabuli, kde to není možné, se používá šipka nad symbolem:

$$\mathbf{x} \equiv \vec{x}\,; \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \equiv \vec{a}\cdot\vec{b}\,. \tag{A.18}$$

Pro $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ zapisujeme gradienty (prostorový a rychlostní) také mnoha způsoby:

$$\nabla f \equiv \nabla_{\mathbf{x}} f \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} f \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}, \frac{\partial f}{\partial v_y}, \frac{\partial f}{\partial v_z}\right). \tag{A.19}$$

Prostorový gradient se často zapisuje jen v komponentách:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv \partial_k f \equiv f_{,k} \,. \tag{A.20}$$

Druhou mocninu velikosti vektoru, například rychlosti lze také zapsat mnoha způsoby:

$$v^2 = \mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_j v_j = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \,. \tag{A.21}$$

Nalezněme nyní rychlostní gradient tohoto výrazu ($f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^2$):

$$\frac{\partial f}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} v_j v_j = \delta_{ji} v_j + v_j \delta_{ji} = v_i + v_i = 2 v_i \,. \tag{A.22}$$

Často se volí rychlejší, symbolický zápis (jako bychom derivovali podle symbolu **v**):

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial \mathbf{v}} = 2\mathbf{v} \,. \tag{A.23}$$

Poznámka 1: Operace gradient míří ve směru největšího nárůstu dané funkce a je kolmá na izoplochy (plochy konstantní hodnoty funkce). To je patrné z rozpisu.

$$f(\mathbf{x}) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} \mathrm{d}x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \,. \tag{A.24}$$

Vektor $\mathrm{d}\mathbf{x}$ míří v izoploše a vektor ∇f je na něho kolmý.

Poznámka 2: Symbol ∇ se nazývá „nabla“. Název zavedl skotský matematický fyzik Peter Guthrie Tait (1831–1901) podle trojúhelníkového tvaru asyrské harfy ze 7. století př. n. l. Asýrie byla v severní Mezopotámii. Slovo nabla (Nbl) je z aramejštiny, která ho upravila z hebrejského Nev(b)el. Stejný nástroj už ale znali Sumerové v období 3 100 př. n. l. James Clerk Maxwell razil pro tento operátor název „slope“ z anglického slova znamenajícího spád či sklon. Návrh Taita ale zvítězil.

Poznámka 3: Skalární součin operátoru nabla s vektorovým polem se nazývá *divergence pole*; div $\mathbf{K} \equiv \nabla \cdot \mathbf{K} = \partial K_k / \partial x_k$. Jde o jednoduchý test, zda má pole v daném bodě zdroj. Pro div K > 0 pole v daném bodě vyvěrá, pro div **K** < 0 pole v daném místě mizí a pro div **K** = 0 pole daným bodem jen prochází.

Poznámka 4: Vektorový součin operátoru nabla s vektorovým polem se nazývá *rotace pole*; rot $\mathbf{K} \equiv \nabla \times \mathbf{K}$. Jde o jednoduchý test, zda je v daném místě střed víru. Musí jít o vektorový test – tedy tři testy, které souvisí s pohledem na vír ze směru souřadnicových os. Pokud je jediná složka rot **K** nenulová, je v daném místě střed víru a jeho osa rotace má směr vektoru rot **K**.

A2 Délkový element

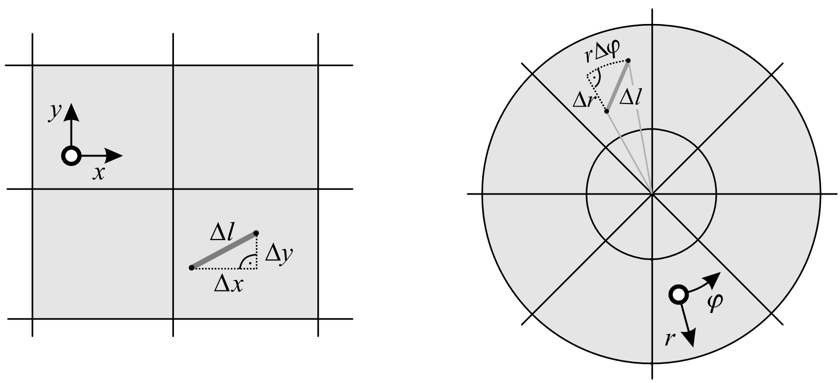
Délkovým elementem nazýváme kvadrát infinitezimální vzdálenosti dvou bodů. V kartézském souřadnicovém systému platí Pythagorova věta a je jedno, zda je vzdálenost konečná nebo infinitezimální, v obou případech platí přesný vztah:

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \;; \qquad \mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \;. \tag{A.25}$$

V polární souřadnicové soustavě je situace jiná. Pro konečné přírůstky platí jen přibližný vztah, neboť jsme jednu odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku nahradili obloukem (viz obr. A2):

$$\Delta l_{\text{pol}}^2 \doteq \Delta r^2 + r^2 \Delta\varphi^2 \;; \qquad \mathrm{d}l_{\text{pol}}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\varphi^2 \;; \tag{A.26}$$

Pro infinitezimálně malé vzdálenosti přejdou přibližné rovnosti opět v přesné rovnosti.



Obr. A2: Délkový element v kartézské a polární souřadnicové soustavě.

V ortogonálních systémech (souřadnicové sítě jsou vzájemně kolmé) lze délkový element vyjádřit obecně vztahem

► $$\mathrm{d}l^2 = g_{11}\mathrm{d}q_1^2 + g_{22}\mathrm{d}q_2^2 + g_{33}\mathrm{d}q_3^2 \,, \tag{A.27}$$

v neortogonálních obecně platí, že délkový element je kvadratickou funkcí přírůstků:

► $$dl^2 = g_{ij}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j \,. \tag{A.28}$$

Poznamenejme, že platí sumační konvence. Koeficienty g_{ij} se nazývají *metrika* nebo *metrický tenzor*. Při jejich určování lze postupovat buď geometricky (viz horní obrázek) nebo z diferenciálů transformačních vztahů pro souřadnice. Pro polární souřadnice jde o vztahy (A.16). Analogicky postupujeme i pro další souřadnicové systémy:

Polární souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \quad ; \qquad \mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2\,. \tag{A.29}$$

Sférické souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \quad ; \qquad \mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\,. \tag{A.30}$$

Válcové souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad ; \qquad \mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2\,. \tag{A.31}$$

Kinetickou energii systému pak můžeme snadno v zobecněných souřadnicích určit za pomoci délkového elementu ze vztahu:

$$T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\,m\frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}m\,g_{ij}\,\frac{\mathrm{d}q_i\,\mathrm{d}q_j}{d\,t^2} = \frac{1}{2}\,m\,g_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j\,. \tag{A.32}$$

Speciálně pro předchozí souřadnice tedy platí:

$$\begin{array}{ll} \text{Kartézské} & T(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \\ \text{Polární} & T(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2) \\ \text{Sférické} & T(r,\theta,\dot{r},\dot{\varphi},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) \\ \text{Válcové} & T(r,\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2) \end{array} \tag{A.33}$$

►

V jednotlivých souřadnicích se kinetická energie rozpadá na součet členů odpovídajících jednotlivým stupňům volnosti. Například v polárních souřadnicích se kinetická energie skládá z radiální části T_r a rotační části T_φ.

Poznámka: velikost kinetické energie nemůže záviset na volbě souřadnicového systému, kinetická energie je skalární funkcí zobecněných souřadnic. Další skalární funkcí je například potenciální energie.