ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

Řešené úlohy a postupy:
Posuvný proud a Poyntingův vektor

Peter Dourmashkin

Obsah

10. Posuvný proud a Poyntingův vektor

10.1 Úkoly

(a) Seznamte se efektem posuvného proudu jako Maxwellova dodatku do Ampérova zákona.

(b) Prokažte přítomnost magnetického pole uvnitř nabíjejícího se kondenzátoru.

(c) Seznamte se s konceptem energie přenášené elektromagnetickým polem.

(d) Kvantifikujte tuto energii Poyntingovým vektorem.

(e) Spočítejte přírůstek energie na kondenzátoru, když se nabíjí a srovnejte tuto hodnotu s hodnotou energie uloženou v poli.

10.2 Posuvný (Maxwellův) proud

V magnetostatice (ta zkoumá jevy, kde se elektrické a magnetické pole nemění s časem) sloužil Ampérův zákon k určení vztahu mezi integrálem po uzavřené smyčce magnetického pole a proudu, který se pohybuje libovolnou plochou ohraničenou touto křivkou.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{uzav}} = \mu_0 \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} .$$

Z důvodů, které jsou rozebírány v 13. kapitole kurzu, zavedl Maxwell v případě časově závislých polí do této rovnice další člen:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{uzav}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I_{\text{uzav}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} , \qquad (10.1)$$

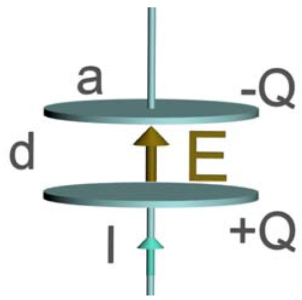
nebo

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{uzav}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I_{\text{uzav}} + \mu_0 I_{\text{d}} , \qquad (10.2)$$

kde $I_{\text{d}} = \varepsilon_0 \dfrac{d\phi_E}{dt}$.

P Úloha 1: Nabíjející se kondenzátor

Kondenzátor se skládá ze dvou kruhových desek o poloměru a, které jsou od sebe vzdáleny d, předpokládejte $d \ll a$. Středy desek jsou připojeny tenkým drátem ke zdroji napětí. V čase $t = 0$ byl sepnut spínač a kondenzátor se nabíjí proudem $I(t)$. Vztah mezi nábojem na kondenzátoru a nabíjecím proudem odpovídá rovnici $I(t) = dQ(t)/dt$. Budeme se zabývat elektrickým polem mezi deskami kondenzátoru. Během výpočtů zanedbejte okrajové jevy, předpokládejte, že elektrické pole je nulové pro $r > a$.

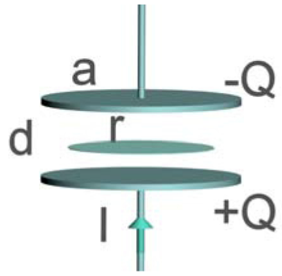


Otázka 1: Elektrické pole

Použijte Gaussův zákon a spočítejte velikost a směr elektrického pole, když je na deskách náboj Q (viz obrázek). Vektor $\hat{\mathbf{k}}$ míří ve svislém směru.

Otázka 2: Tok elektrického pole

Nyní si představte myšlený tenký disk o poloměru $r < a$ v rovině mezi deskami podle obrázku:



Použijte vektor intenzity elektrického pole $\mathbf{E}$ z první úlohy a spočítejte tok elektrického pole tímto myšleným diskem o poloměru $r < a$, rovina disku je kolmá k vektoru $\hat{\mathbf{k}}$.

Otázka 3: Maxwellův proud

Kondenzátor se nabíjí, a proto tok elektrického pole není konstantní. Spočítejte Maxwellův posuvný proud

$$I_{\mathrm{d}} = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\text{disk } r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

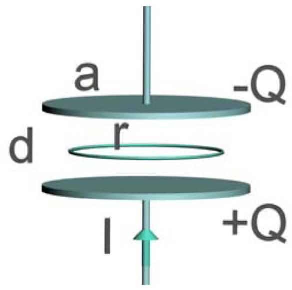
tekoucí v tomto případě diskem o poloměru $r < a$ v rovině uprostřed mezi deskami. K vyjádření posuvného proudu použijte proměnných r, $I(t)$ a a.

Otázka 4: Vodivostní proud

Spočítejte vodivostní proud $\iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$ diskem o poloměru $r < a$. Vodivostním proudem máme na mysli skutečný proud nabitých částic (např. elektrony nebo ionty).

Otázka 5: Uzavřená smyčka

Protože desky kondenzátoru jsou osově symetrické a víme, že magnetické pole kolem drátu má azimutální směr, můžeme předpokládat, že magnetické pole uvnitř kondenzátoru je nenulové a silokřivky mají také směr azimutálních kružnic.



Zvolte si proto kružnici jako uzavřenou smyčku, kružnice je o poloměru $r < a$ a je v rovině mezi deskami. Spočítejte křivkový integrál kolem kružnice $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$. Výsledek vyjádřete v proměnných $B = |\mathbf{B}|$ a r. Element délky $d\mathbf{s}$ je zvolen podle pravidla pravé ruky k vektoru $d\mathbf{A}$, při pohledu z vrchu míří proti směru hodinových ručiček.

Q Otázka 6: Ampérův zákon

Využijte nyní výsledků z předchozích otázek a použijte je do obecného Ampérova zákona (rovnice 10.1 nebo 10.2) a spočítejte velikost magnetického pole ve vzdálenosti $r < a$ od osy symetrie.

Q Otázka 7: Pravidlo pravé ruky

Pokud Váš pravý palec bude mířit ve směru elektrického pole vytvořeného nabíjením kondenzátoru, bude vektor magnetického pole mířit ve směru ostatních prstů pravé ruky, nebo bude mířit proti tomuto směru?

Q Otázka 8: Vybíjení kondenzátoru

Změní se směr magnetického pole, pokud budeme kondenzátor vybíjet? Proč?

Ř Řešení úlohy 1: Nabíjející se kondenzátor

A Otázka 1: Elektrické pole

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}} = \frac{Q}{\pi a^2 \varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}} .$$

A Otázka 2: Tok elektrického pole

$$\iint_{\text{disk } r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 a^2} r^2 .$$

A Otázka 3: Maxwellův proud

$$I_\mathrm{d} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\text{disk } r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{Q(t)}{\varepsilon_0 a^2} r^2 \right) = \frac{r^2}{a^2} I(t) .$$

A Otázka 4: Vodivostní proud

Vodivostní proud je nulový.

A Otázka 5: Uzavřená smyčka

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B .$$

A Otázka 6: Ampérův zákon

$$2\pi r B = \varepsilon_0 I_\mathrm{d} = \mu_0 \frac{r^2}{a^2} I \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi a^2} .$$

A Otázka 7: Pravidlo pravé ruky

Pokud se kondenzátor nabíjí, magnetické pole míří ve směru prstů pravé ruky.

Otázka 8: Vybíjení kondenzátoru

Směr magnetického pole se změní, protože tok elektrického pole bude ubývat.

10.3 Tok energie (Poyntingův vektor)

Když je kondenzátor nabit, je v něm uložena elektrická energie. Víme, že energie v kondenzátoru pochází ze zdroje elektromotorického napětí. Jak však energie z baterie do kondenzátoru dostává? U elektromagnetických jevů je tok energie plochou dán Poyntingovým vektorem

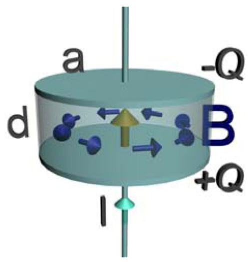
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s\ m^2}}, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}\right].$$

Pokud chceme spočítat tok energie povrchem, musíme spočítat plošný integrál $\iint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{A}$, jednotkou je [J/s], [W].

Úloha 2: Tok energie v nabíjejícím se kondenzátoru

V této úloze si ukážeme, jak spočítat Poyntingův vektor uvnitř nabíjejícího se kondenzátoru. Elektrické a magnetické pole nabíjejícího se kondenzátoru při zanedbání okrajových jevů je:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi a^2}\hat{\mathbf{k}} & r \le a \\ \mathbf{0} & r > a \end{cases}, \qquad \mathbf{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I(t) r}{2\pi a^2}\hat{\varphi} & r \le a \\ \dfrac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}\hat{\varphi} & r > a \end{cases}.$$

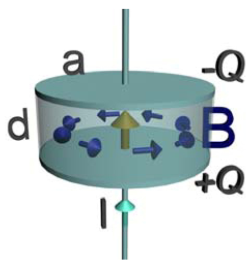


Otázka 1: Poyntingův vektor

Spočítejte Poyntingův vektor pro $r \le a$.

Otázka 2: Tok energie

Protože Poyntingův vektor míří radiálně do kondenzátoru, elektromagnetická energie se do kondenzátoru ukládá ze stran. Abychom mohli spočítat energii proudící do kondenzátoru, spočítejte Poyntingův vektor pro $r = a$ a integrujte jej po straně kondenzátoru $r = a$.



Spočítejte tok $\iint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ Poyntingova vektoru vyjádřeného pro $r = a$ imaginárním válcovým pláštěm o poloměru a a výšce d. Výsledek by měl být vyjádřen pomocí Q, a, R a d. Jaká je jednotka výsledku?

Q Otázka 3: Tok energie

Kapacita kondenzátoru tvořeného dvěma paralelníma deskami je $C = \varepsilon_0 A/d = \varepsilon_0 \pi a^2/d$. Přepište výsledek 2. otázky pomocí kapacity. Nyní by výsledek měl obsahovat pouze veličiny Q, I a C.

Q Otázka 4: Energie

Celková elektrostatická energie uložená v kondenzátoru v čase t je dána vztahem $Q(t)^2/2C$. Ukažte, že časová změna ukládané energie v kondenzátoru je stejná, jako energie, která teče ze stran dovnitř kondenzátoru, tedy energie spočítaná v Otázce 3.

Q Otázka 5: Vybíjení kondenzátoru

Nyní předpokládejte, že se kondenzátor vybíjí, tedy $dQ(t)/dt < 0$. Co se změní v probíhajícím ději. Co se změní na obrázku na předchozí straně dole?

Ř Řešení úlohy 2: Tok energie v nabíjejícím se kondenzátoru

A Otázka 1: Poyntingův vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{QIr}{2\pi^2 a^4 \varepsilon_0} \hat{\mathbf{r}}.$$

A Otázka 2: Tok energie

$$\iint \mathbf{S} \times d\mathbf{A} = -\frac{QId}{\pi a^2 \varepsilon_0} \; [\mathrm{J/s, W}].$$

A Otázka 3: Tok energie

$$\iint \mathbf{S} \times d\mathbf{A} = -\frac{QI}{C}.$$

A Otázka 4: Energie

$$\frac{d}{dt}\frac{Q^2}{2C} = \frac{Q}{C}\frac{d}{dt}Q = \frac{QI}{C}.$$

Časová změna energie přitékající na kondenzátor je rovna Poyntingově vektoru, tedy energii tekoucí do kondenzátoru.

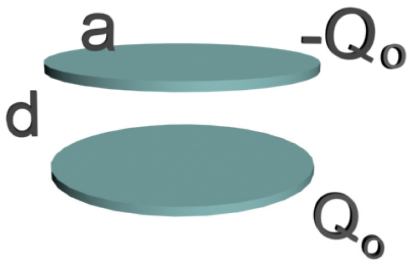
A Otázka 5: Vybíjení kondenzátoru

Směr elektrického pole bude stejný, směr magnetického pole se obrátí (tok elektrického pole bude klesat). Poyntingův vektor tak bude místo dovnitř kondenzátoru mířit ven. Rychlost úbytku energie na kondenzátoru bude odpovídat energii, která poteče ven z kondenzátoru.

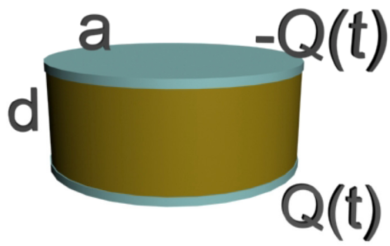
Úloha 3: Kondenzátor

Kondenzátor je složen ze dvou paralelních kruhových desek o poloměru a, které jsou ve vzdálenosti d, předpokládejte $a \gg d$. Kondenzátor je na počátku nabit, je na něm náboj Q_0. V čase $t = 0$ začneme kondenzátor vybíjet tím, že mezi desky kondenzátoru umístíme válcový rezistor o poloměru a a výšce d. Mezi konci rezistoru a deskami kondenzátoru je dobrý elektrický kontakt. Kondenzátor se začne vybíjet skrze rezistor v čase $t \geq 0$, náboj na kondenzátoru se tak stane funkcí času $Q(t)$. Při řešení této úlohy zanedbejte okrajové jevy.

$t < 0$



$t \geq 0$

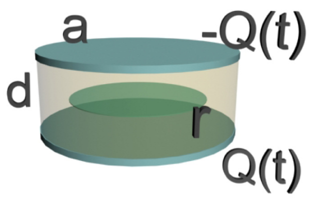


Otázka 1: Gaussův zákon

Použijte Gaussův zákon a zjistěte velikost elektrického pole mezi deskami kondenzátoru jako funkci $Q(t)$, parametrů kondenzátoru a příslušných konstant. Kterým směrem elektrické pole míří?

Otázka 2: Proud kondenzátorem

Nechť je v čase $t \geq 0$ v kondenzátoru myšlená plocha o poloměru $r < a$, její normálový vektor $d\mathbf{A}$ nechť míří vzhůru (viz obrázek).



Spočítejte vodivostní proud procházející touto plochou, vyjádřete jej pomocí $Q(t)$, derivace a příslušných parametrů kondenzátoru. Nechť míří kladný směr proudu vzhůru. Dávejte pozor na znaménka.

Otázka 3: Změna elektrického pole

Pro stejnou myšlenou plochu spočítejte časovou změnu toku elektrického pole v průběhu vybíjení kondenzátoru. Vyjádřete ji pomocí $Q(t)$, derivace a dalších parametrů kondenzátoru. *Návod:* použijte výsledku z 1. otázky.

Otázka 4: Maxwellův-Ampérův zákon

Čemu se rovná křivkový integrál indukce magnetického pole kolem zvolené plochy? Dejte pozor na znaménka.

Otázka 5: Disipace energie

Dává výsledek Otázky 5 smysl? Jak je při vybíjení kondenzátoru disipována energie? Logicky zdůvodněte svoji odpověď.

Řešení úlohy 3: Kondenzátor

Otázka 1: Gaussův zákon

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \pi a^2 E = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q(t)}{\pi a^2 \varepsilon_0}.$$

Otázka 2: Proud kondenzátorem

$$I = -\frac{dQ}{dt}\left(\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\right) = -\frac{dQ}{dt}\frac{r^2}{a^2}.$$

Proud míří nahoru (náboj ubývá a tak je časová změna záporná).

Otázka 3: Změna elektrického pole

Tok elektrického pole kruhem o poloměru r je

$$\phi_E = \pi r^2 E = \frac{Q(t) r^2}{\varepsilon_0 a}$$

a jeho příslušná časová změna je

$$\frac{d}{dt}\phi_E = \frac{r^2}{\varepsilon_0 a^2}\frac{d}{dt}Q(t).$$

Otázka 4: Maxwellův-Ampérův zákon

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\phi_E = \mu_0\left(-\frac{r^2}{a^2}\frac{d}{dt}Q\right) + \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{a^2}\frac{d}{dt}Q\right) = 0.$$

Otázka 5: Disipace energie

Výsledek 4. otázky je důsledkem toho, že posuvný proud je stejně velký a opačně orientovaný než proud vybíjecí. V kondenzátoru se tak nevytvoří žádné magnetické pole a energie neteče do ani z kondenzátoru. Je to proto, že energie je disipována přímo v kondenzátoru jako Jouleovo teplo, není třeba ji přenášet ven z kondenzátoru do dalších částí obvodu.