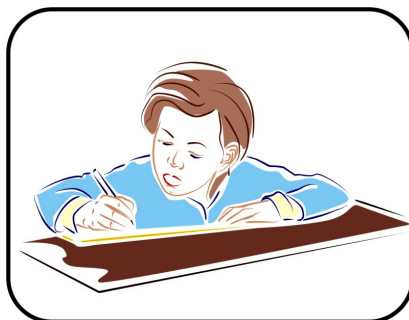


ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

Řešené úlohy a postupy: Řízené LRC Obvody

Peter Dourmashkin

© MIT 2006, překlad: Jan Pacák (2007)



Obsah

9. ŘÍZENÉ LRC OBVODY	3
9.1 ÚKOLY	3
9.2 OBECNÉ VLASTNOSTI ŘÍZENÝCH RLC OBVODŮ	3
P ÚLOHA 1: ŘÍZENÉ OSCILACE REZISTORU	3
Q OTÁZKA 1: AMPLITUDA A FÁZE PROUDU	4
Q OTÁZKA 2: KAPACITA A INDUKČNOST	4
Q OTÁZKA 3: VÝKON REZISTORU	4
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 1: ŘÍZENÉ OSCILACE REZISTORU	4
A OTÁZKA 1: AMPLITUDA A FÁZE PROUDU	4
A OTÁZKA 2: KAPACITA A INDUKČNOST	4
A OTÁZKA 3: VÝKON REZISTORU	4
P ÚLOHA 2: ŘÍZENÉ OSCILACE CÍVKY	4
Q OTÁZKA 1: AMPLITUDA A FÁZE PROUDU	4
Q OTÁZKA 2: ODPOR A KAPACITA	4
Q OTÁZKA 3: VÝKON CÍVKY	5
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 2: ŘÍZENÉ OSCILACE CÍVKY	5
A OTÁZKA 1: AMPLITUDA A FÁZE PROUDU	5
A OTÁZKA 2: ODPOR A KAPACITA	5
A OTÁZKA 3: VÝKON CÍVKY	5

P ÚLOHA 3: ŘÍZENÉ OSCILACE KONDENZÁTORU	5
Q OTÁZKA 1: AMPLITUDA A FÁZE PROUDU	5
Q OTÁZKA 2: VÝKON KONDENZÁTORU	5
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 3: ŘÍZENÉ OSCILACE KONDENZÁTORU	6
A OTÁZKA 1: AMPLITUDA A FÁZE PROUDU	6
A OTÁZKA 2: VÝKON KONDENZÁTORU	6
P ÚLOHA 4: ČERNÁ SKŘÍŇKA 1	6
Q OTÁZKA 1: PROUD	6
Q OTÁZKA 2: ČERNÁ SKŘÍŇKA	6
Q OTÁZKA 3: ODPOR	6
Q OTÁZKA 4: KAPACITA NEBO INDUKCE	6
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 4: ČERNÁ SKŘÍŇKA 1	6
A OTÁZKA 1: PROUD	6
A OTÁZKA 2: ČERNÁ SKŘÍŇKA	6
A OTÁZKA 3: ODPOR	6
A OTÁZKA 4: KAPACITA NEBO INDUKCE	7
P ÚLOHA 5: ČERNÁ SKŘÍŇKA 2	7
Q OTÁZKA 1: ČERNÁ SKŘÍŇKA	7
Q OTÁZKA 2: KAPACITA A INDUKČNOST	7
Q OTÁZKA 3: VÝKON	7
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 4: ČERNÁ SKŘÍŇKA 2	7
A OTÁZKA 1: ČERNÁ SKŘÍŇKA	7
A OTÁZKA 2: KAPACITA A INDUKČNOST	7
A OTÁZKA 3: VÝKON	8
P ÚLOHA 6: LRC OBVOD	8
Q OTÁZKA 1: KIRCHHOFFŮV ZÁKON	8
Q OTÁZKA 2: PROUDY V OKAMŽIKU ZAPNUTÍ SPÍNAČE	8
Q OTÁZKA 3: PROUDY V DLOUHÉM ČASOVÉM MĚŘÍTKU	8
Q OTÁZKA 4: NÁBOJ	8
Q OTÁZKA 5: ROZPOJENÝ SPÍNAČ	9
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 6: LRC OBVOD	9
A OTÁZKA 1: KIRCHHOFFŮV ZÁKON	9
A OTÁZKA 2: PROUDY V OKAMŽIKU ZAPNUTÍ SPÍNAČE	9
A OTÁZKA 3: PROUDY V DLOUHÉM ČASOVÉM MĚŘÍTKU	9
A OTÁZKA 4: NÁBOJ	9
A OTÁZKA 5: ROZPOJENÝ SPÍNAČ	9

9. Řízené LRC Obvody

9.1 Úkoly

- Zjistěte vztah mezi proudem a řídicím elektromotorickým napětím na třech obvodech, kde budou postupně zapojeny pouze rezistor, kondenzátor nebo cívka.
- Zjistěte tyto vztahy pro obvody, kde jsou rezistor, kondenzátor i cívka zapojeny najednou, a vyřešte dva vzorové příklady.

9.2 Obecné vlastnosti řízených RLC obvodů

LRC obvod je analogií z mechaniky k pružině a závaží. Rozlišujeme mezi dvěma druhy chování těchto obvodů. U prvního zapojení sledujeme „volné“ oscilace, tedy obvod nějakým způsobem vyvedeme z rovnovážné polohy (např. nabijeme kondenzátor) a sledujeme vlastní oscilace obvodu.

Druhý příklad představuje LRC obvody, kdy oscilace „řídíme“ vnějším zdrojem elektromotorického napětí s danou amplitudou a frekvencí. Pokud je časový průběh napětí zdroje $V(t) = V_0 \sin \omega t$, kde ω je úhlová frekvence zdroje a V_0 je amplituda zdroje, „řízená“ odpověď bude časová závislost proudu

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi),$$

kde

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (9.1)$$

Všimněte si, že proud zachovává řídicí frekvenci zdroje, nezachovává se tedy vlastní frekvence obvodu. Obvodem však bude téci nejvyšší proud (obvod dává nejlepší odezvu), pokud řídicí frekvence je vlastní frekvencí zapojení, tzn. $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Můžeme také spočítat průměrný příkon spotřebovaný zapojením zprůměrováním součinu $I(t)V(t)$

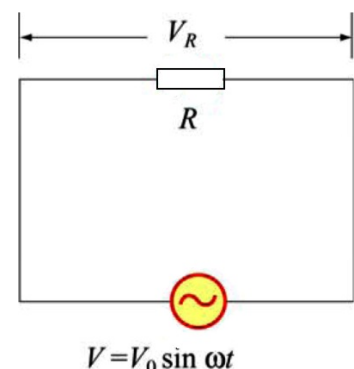
$$\langle P(t) \rangle = \langle I(t)V(t) \rangle = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \phi. \quad (9.2)$$

Úloha 1: Řízené oscilace rezistoru

Začneme obvodem složeným pouze ze zdroje a rezistoru. Schéma zapojení je na obrázku vpravo.

Z Kirchhoffova zákona můžeme obvod popsat rovnicí:

$$I_R(t)R - V(t) = 0.$$



Q Otázka 1: Amplituda a fáze proudu

Jaká je amplituda a fáze proudu rezistorem, pokud jej zapíšeme $I_R(t) = I_{R0} \sin(\omega t - \phi)$?

Q Otázka 2: Kapacita a indukčnost

Jaká kapacita a indukčnost charakterizují odpor (např. tak, abychom mohli dosadit do rovnice 9.1)?

Q Otázka 3: Výkon rezistoru

Jaký průměrný výkon $\langle P_R(t) \rangle = \langle I_R(t)V_R(t) \rangle$ je disipován na rezistoru? Střední hodnota $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$.

Ř Řešení úlohy 1: Řízené oscilace rezistoru

A Otázka 1: Amplituda a fáze proudu

$$I_{R0} = \frac{V_0}{R}, \quad \phi = 0.$$

A Otázka 2: Kapacita a indukčnost

$$L = 0, \quad C = \infty.$$

A Otázka 3: Výkon rezistoru

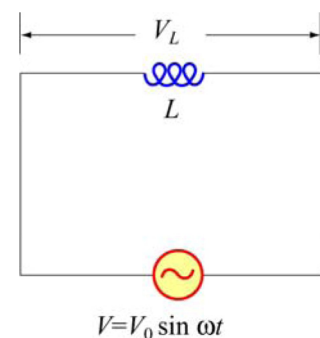
$$\langle P_R(t) \rangle = \langle I_R(t)V_R(t) \rangle = \frac{V_0^2}{R} \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{V_0^2}{2R}.$$

P Úloha 2: Řízené oscilace cívky

Mějme nyní obvod složený pouze ze zdroje napětí $V(t) = V_0 \sin \omega t$ a cívky. Schéma zapojení je na obrázku vpravo.

Z Kirchhoffova zákona můžeme obvod popsat rovnicí:

$$L \frac{dI_L}{dt} - V(t) = 0.$$



Q Otázka 1: Amplituda a fáze proudu

Vyřešte danou diferenciální rovnici a запиšte proud jako funkci času $I_L(t) = I_{L0} \sin(\omega t - \phi)$. Jaká bude amplituda a fáze proudu? Použijte trigonometrickou identitu $\sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \sin \phi \cos \omega t$.

Q Otázka 2: Odpor a kapacita

Jaký odpor a kapacita charakterizují cívku (např. tak, abychom mohli dosadit do rovnice 9.1)?

Q Otázka 3: Výkon cívky

Jaký průměrný výkon $\langle P_L(t) \rangle = \langle I_L(t)V_L(t) \rangle$ je disipován na cívce? Střední hodnota $\sin \omega t \cos \omega t$ je $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$.

R Řešení úlohy 2: Řízené oscilace cívky

A Otázka 1: Amplituda a fáze proudu

$$I_{L0} = \frac{V_0}{\omega L}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

A Otázka 2: Odpor a kapacita

$$R = 0, \quad C = \infty.$$

A Otázka 3: Výkon cívky

$$\langle P_L(t) \rangle = \langle I_L(t)V_L(t) \rangle = \frac{V_0^2}{\omega L} \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0.$$

P Úloha 3: Řízené oscilace kondenzátoru

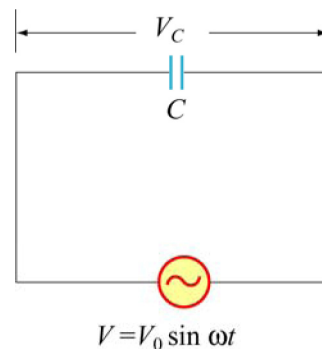
Mějme nyní obvod složený pouze z kondenzátoru a zdroje napětí $V(t) = V_0 \sin \omega t$. Schéma zapojení je na obrázku.

Z Kirchhoffova zákona můžeme obvod popsat rovnicí:

$$\frac{Q}{C} - V(t) = 0.$$

Pokud rovnici jednou derivujeme podle času, dostaneme

$$\frac{I_C}{C} - \frac{d}{dt}V(t) = \frac{I_C}{C} - \omega V_0 \cos \omega t = 0.$$



Q Otázka 1: Amplituda a fáze proudu

Vyřešte danou diferenciální rovnici a запиšte proud jako funkci času $I_C(t) = I_{C0} \sin(\omega t - \phi)$. Jaká bude amplituda a fáze proudu? Použijte trigonometrickou identitu $\sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \sin \phi \cos \omega t$.

Q Otázka 2: Výkon kondenzátoru

Jaký průměrný výkon $\langle P_C(t) \rangle = \langle I_C(t)V_C(t) \rangle$ je disipován na cívce? Střední hodnota $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$.

Ř Řešení úlohy 3: Řízené oscilace kondenzátoru

A Otázka 1: Amplituda a fáze proudu

$$I_{C0} = \omega C V_0, \quad \phi = -\frac{\pi}{2}.$$

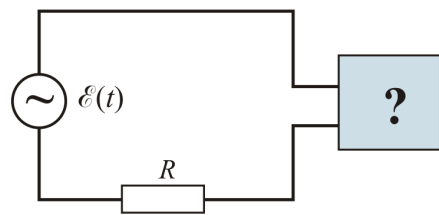
A Otázka 2: Výkon kondenzátoru

$$\langle P_C(t) \rangle = \langle I_C(t) V_C(t) \rangle = \omega C V_0^2 \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0.$$

P Úloha 4: Černá skříňka 1

Mějme zapojení podle obrázku složené ze zdroje střídavého elektromotorického napětí o časové závislosti $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, rezistoru o odporu R a „černé skříňky“, která obsahuje buď kondenzátor, nebo cívku, obě součástky však ve skříňce nemohou být najednou. Amplituda řídicího elektromotorického napětí je

$\mathcal{E}_0 = 100\sqrt{2}$ V a úhlová frekvence zdroje je $\omega = 10$ rad/s. Změřili jsme proud, který tekl zapojením, jeho průběh jako funkce času je $I(t) = (10 \text{ A}) \sin(\omega t + \pi/4)$. (Poznámka: $\pi/4$ rad = 45° , $\tan(\pi/4) = +1$.)



Q Otázka 1: Proud

Předbíhá, nebo je proud opožděn za řídicím napětím?

Q Otázka 2: Černá skříňka

Je v černé skříňce kondenzátor nebo cívka?

Q Otázka 3: Odpor

Jaká je hodnota odporu R ?

Q Otázka 4: Kapacita nebo indukce

Jaká je kapacita C nebo indukce L součástky v černé skříňce?

Ř Řešení úlohy 4: Černá skříňka 1

A Otázka 1: Proud

Proud předbíhá řídicí napětí.

A Otázka 2: Černá skříňka

V černé skříňce musí být kondenzátor, protože proud předbíhá napětí.

A Otázka 3: Odpor

Z rovnice 9.1 získáme

$$\tan \phi = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 = \frac{-X_C}{R} \Rightarrow X_C = R,$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \Rightarrow R = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}I} = 10 \Omega.$$

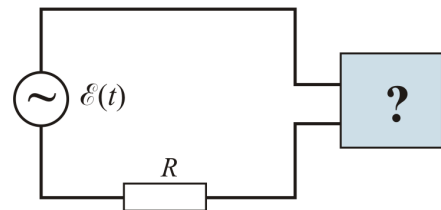
A Otázka 4: Kapacita nebo indukce

Ve skříňce je zapojen kondenzátor, jeho kapacita je

$$C = \frac{1}{\omega R} = \frac{1}{100} \text{ F} = 10 \text{ mF}.$$

P Úloha 5: Černá skříňka 2

Mějme zapojení podle obrázku složené ze zdroje střídavého elektromotorického napětí o časové závislosti $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, rezistoru o odporu $R = 3 \Omega$ a „černé skříňky“, která obsahuje kondenzátor, cívku, nebo obě součástky najednou. Amplituda řídicího elektromotorického napětí je $\mathcal{E}_0 = 6 \text{ V}$. Pokud je úhlová frekvence



zdroje $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ je proud přesně ve fázi s napětím na zdroji, pokud úhlová frekvence je však $\omega = 2 \text{ rad/s}$ je fázový rozdíl mezi proudem a napětím $\pi/4$ radiánů.

Q Otázka 1: Černá skříňka

Je v černé skříňce kondenzátor, cívka, nebo obě součástky najednou? Předbíhá, nebo je proud opožděn za řídicím napětím?

Q Otázka 2: Kapacita a indukčnost

Jaká je kapacita, nebo indukčnost, případně obě tyto hodnoty součástky(tek) v černé skříňce? Nezapomeňte na jednotky. K řešení této úlohy byste neměli potřebovat kalkulátor, vše se dá vyjádřit v jednoduchých zlomcích.

Q Otázka 3: Výkon

Jaký je průměrný výkon disipovaný v zapojení při úhlové frekvenci ω_1 ?

Ř Řešení úlohy 4: Černá skříňka 2

A Otázka 1: Černá skříňka

Černá skříňka musí obsahovat obě tyto součástky tak, aby mohl být proud ve fázi s napětím.

A Otázka 2: Kapacita a indukčnost

Vyjdeme z rovnice 9.1, pro ω_1 :

$$\tan \phi = \tan 0 = 0 = \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right) / R \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_1^2 C}.$$

Rovnice 9.1 pro ω_2 :

$$\tan \phi = \tan \frac{\pi}{4} = 1 = \frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R} \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1^2 C} - \frac{1}{\omega_2 C} = R \Rightarrow C = \frac{\omega_2}{\omega_1^2 R} - \frac{1}{\omega_2 R} = 0,5 \text{ F.}$$

$$L = \frac{1}{\omega_1^2 C} = 2 \text{ H.}$$

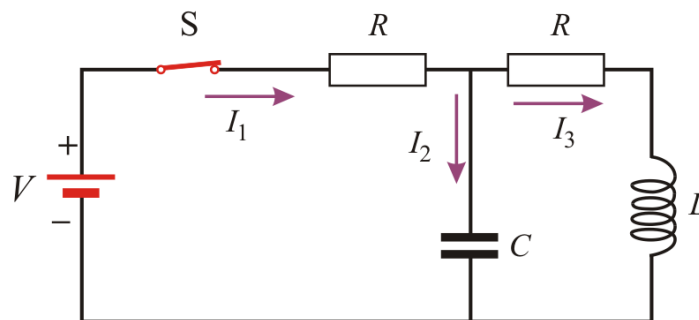
A Otázka 3: Výkon

Obvod je v rezonanci, výkon je disipován pouze na rezistoru

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} = 6 \text{ W.}$$

P Úloha 6: LRC obvod

Zapojení složené ze zdroje elektromotorického napětí V , cívky L , kondenzátoru C a dvou rezistorů, oba mají odpor R , viz obrázek dole. Kondenzátor je vybitý, obvodem nikde neteče proud. Spínač S byl sepnut, jak je zobrazeno na obrázku.



Q Otázka 1: Kirchhoffův zákon

Použijte Kirchhoffův smyčkový zákon pro cívku a запиšte součet potenciálů pro vnější smyčku zapojení (tu s cívkou a baterií).

Q Otázka 2: Proudů v okamžiku zapnutí spínače

Určete velikost proudů I_1 , I_2 a I_3 v okamžiku zapnutí spínače. Předpokládejte, že levá smyčka má nulovou indukčnost. Nemusíte řešit diferenciální rovnici tak, abyste byli schopni odpovědět na tuto otázku.

Q Otázka 3: Proudů v dlouhém časovém měřítku

Určete velikost proudů I_1 , I_2 a I_3 v dostatečně dlouhém čase. Nemusíte řešit diferenciální rovnici tak, abyste byli schopni odpovědět na tuto otázku.

Q Otázka 4: Náboj

Jak velký náboj je na kondenzátoru v dostatečně dlouhém čase? Nemusíte řešit diferenciální rovnici tak, abyste byli schopni odpovědět na tuto otázku.

Q Otázka 5: Rozpojený spínač

Jak velké budou proudy v obvodu v okamžiku rozpojení spínače? Předpokládejte, že levá smyčka má nulovou indukčnost.

Ř Řešení úlohy 6: LRC obvod

A Otázka 1: Kirchhoffův zákon

$$V - I_1 R - I_3 R - L \frac{d}{dt} I_3 = 0.$$

A Otázka 2: Proud v okamžiku zapnutí spínače

Kondenzátor zkratuje rezistor i cívku a tak

$$I_3 = 0,$$
$$I_1 = I_2 = \frac{V}{R}.$$

A Otázka 3: Proud v dlouhém časovém měřítku

V dostatečně dlouhém čase je kondenzátor nabitý, neprochází jím tedy žádný proud

$$I_2 = 0,$$
$$I_1 = I_3 = \frac{V}{2R}.$$

A Otázka 4: Náboj

V dostatečně dlouhém čase se cívka chová jako vodič, kondenzátor se již nenabíjí a náboj na deskách kondenzátoru odpovídá potenciálu na rezistoru je tedy

$$Q = CV_C = CV_R = CI_3 R = \frac{CV}{2}.$$

A Otázka 5: Rozpojený spínač

Rezistorem vlevo neteče žádný proud (spínač je rozpojen), cívka se chová jako drát a na kondenzátoru je stejné napětí, jako bylo před otevřením spínače, tedy

$$I_1 = 0,$$
$$I_3 = -I_2 = \frac{V}{2R}.$$