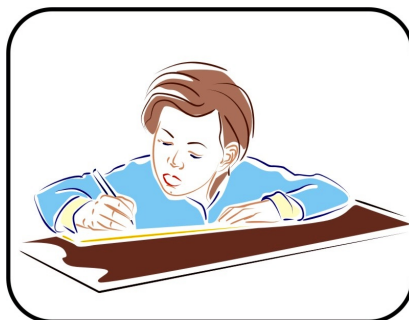


# ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

## Řešené úlohy a postupy: Obvody

Peter Dourmashkin

© MIT 2006, překlad: Jan Pacák (2007)



### Obsah

<b>8. OBVODY</b>	<b>3</b>
<b>8.1 ÚKOLY</b>	<b>3</b>
<b>P ÚLOHA 1: KONDENZÁTOR</b>	<b>3</b>
<b>Q OTÁZKA 1: PROUD KONDENZÁTOREM</b>	<b>3</b>
<b>Q OTÁZKA 2: PROUDY TEKOUcí REZISTORY</b>	<b>3</b>
<b>Q OTÁZKA 3: PROUDY TEKOUcí REZISTORY PO DOSTATEČNĚ DLOUHÉM ČASE</b>	<b>3</b>
<b>Q OTÁZKA 4: PROUD TEKOUcí KONDENZÁTOREM V DOSTATEČNĚ DLOUHÉM ČASE</b>	<b>3</b>
<b>Q OTÁZKA 5: NÁBOJ NA KONDENZÁTORU</b>	<b>3</b>
<b>Q OTÁZKA 6: ČASOVÁ KONSTANTA</b>	<b>3</b>
<b>Q OTÁZKA 7: ČASOVÁ ZÁVISLOST NÁBOJE NA KONDENZÁTORU</b>	<b>4</b>
<b>Q OTÁZKA 8: PROUD PO OTEVŘENÍ SPÍNAČE</b>	<b>4</b>
<b>Q OTÁZKA 9: PROUDY TEKOUcí REZISTORY</b>	<b>4</b>
<b>Q OTÁZKA 10: NÁBOJ NA KONDENZÁTORU</b>	<b>4</b>
<b>Q OTÁZKA 11: ČASOVÁ KONSTANTA VYBÍJENÍ</b>	<b>4</b>
<b>Q OTÁZKA 12: NÁBOJ NA KONDENZÁTORU</b>	<b>4</b>
<b>Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 1: KONDENZÁTOR</b>	<b>4</b>
<b>A OTÁZKA 1: PROUD KONDENZÁTOREM</b>	<b>4</b>
<b>A OTÁZKA 2: PROUDY TEKOUcí REZISTORY</b>	<b>4</b>
<b>A OTÁZKA 3: PROUDY TEKOUcí REZISTORY PO DOSTATEČNĚ DLOUHÉM ČASE</b>	<b>4</b>
<b>A OTÁZKA 4: PROUD TEKOUcí KONDENZÁTOREM V DOSTATEČNĚ DLOUHÉM ČASE</b>	<b>5</b>
<b>A OTÁZKA 5: NÁBOJ NA KONDENZÁTORU</b>	<b>5</b>
<b>A OTÁZKA 6: ČASOVÁ KONSTANTA</b>	<b>5</b>
<b>A OTÁZKA 7: ČASOVÁ ZÁVISLOST NÁBOJE NA KONDENZÁTORU</b>	<b>5</b>
<b>A OTÁZKA 8: PROUD PO OTEVŘENÍ SPÍNAČE</b>	<b>6</b>
<b>A OTÁZKA 9: PROUDY TEKOUcí REZISTORY</b>	<b>6</b>

<b>A</b> OTÁZKA 10: NÁBOJ NA KONDENZÁTORU	6
<b>A</b> OTÁZKA 11: ČASOVÁ KONSTANTA VYBÍJENÍ	6
<b>A</b> OTÁZKA 12: NÁBOJ NA KONDENZÁTORU	6
<b>P</b> ÚLOHA 2: KONDENZÁTOR	7
<b>Q</b> OTÁZKA 1: KIRCHHOFFŮV UZLOVÝ ZÁKON	7
<b>Q</b> OTÁZKA 2: KIRCHHOFFŮV SMYČKOVÝ ZÁKON	7
<b>Q</b> OTÁZKA 3: KIRCHHOFFŮV SMYČKOVÝ ZÁKON	7
<b>Q</b> OTÁZKA 4: PROUD $I_1$	7
<b>Q</b> OTÁZKA 5: PROUDY $I_2$ A $I_3$	7
<b>Q</b> OTÁZKA 6: NAPĚTÍ NA KONDENZÁTORU	7
<b>Ř</b> ŘEŠENÍ ÚLOHY 2: KONDENZÁTOR	7
<b>A</b> OTÁZKA 1: KIRCHHOFFŮV UZLOVÝ ZÁKON	7
<b>A</b> OTÁZKA 2: KIRCHHOFFŮV SMYČKOVÝ ZÁKON	7
<b>A</b> OTÁZKA 3: KIRCHHOFFŮV SMYČKOVÝ ZÁKON	7
<b>A</b> OTÁZKA 4: PROUD $I_1$	7
<b>A</b> OTÁZKA 5: PROUDY $I_2$ A $I_3$	8
<b>A</b> OTÁZKA 6: NAPĚTÍ NA KONDENZÁTORU	8

## 8. Obvody

### 8.1 Úkoly

(a) Analyzujte stejnosměrné obvody složené z rezistoru a kondenzátoru nebo cívky. Stejným způsobem analyzujte střídavé obvody. Zvažte, co se stane, pokud místo kondenzátoru zapojíme cívku.

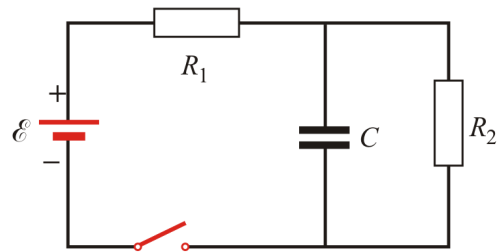
(b) Spočítejte časové závislosti náboje na kondenzátoru v těchto obvodech.

Střídavé obvody jsou většinou složeny z rezistoru, kondenzátoru a typicky baterie jako zdroje elektromotorického napětí. Pokud není kondenzátor nabitý, chová se jako vodič, do té doby, než se na jeho deskách vytvoří dostatečně velký potenciál a kondenzátor se nabije. Kondenzátor rovněž může sloužit jako zdroj napětí, pokud okolní potenciál klesne a začne se vybíjet.

Příklady jsou rozděleny do dvou částí. V první Vás čeká několik krátkých otázek, kde se budeme ptát na chování obvodů po dlouhém časovém úseku. Ve druhé části budete řešit úlohy i kvantitativně.

#### **P** Úloha 1: Kondenzátor

Mějme obvod složený ze dvou rezistorů  $R_1$  a  $R_2$ , kondenzátoru  $C$ , baterie  $\mathcal{E}$  a spínače. Spínač byl otevřen po dostatečně dlouhou dobu, než byl v čase  $t = 0$  sepnut.



#### **Q** Otázka 1: Proud kondenzátorem

Jaký velký proud  $I_C$  procházel kondenzátorem v čase  $t = 0$  (v momentě sepnutí spínače)?

#### **Q** Otázka 2: Proud tekoucí rezistory

Jaká je velikost proudů  $I_1$  a  $I_2$  tekoucích příslušnými rezistory v čase  $t = 0$ ?

#### **Q** Otázka 3: Proud tekoucí rezistory po dostatečně dlouhém čase

Jaká je velikost proudů  $I_1$  a  $I_2$  tekoucích příslušnými rezistory v čase  $t = \infty$ ?

#### **Q** Otázka 4: Proud tekoucí kondenzátorem v dostatečně dlouhém čase

Jaký velký proud  $I_C$  procházel kondenzátorem v čase  $t = \infty$ ?

#### **Q** Otázka 5: Náboj na kondenzátoru

Předpokládejte, že v čase  $t$  je na kondenzátoru náboj  $q$ . Použijte Kirchhoffův zákon a запиšte diferenciální rovnici pro náboj  $q$ , předpokládejte, že  $R_1 = R_2 = R$  (vyjádřete si proud tekoucí kondenzátorem a přepište jej pomocí vztahu  $I_C = \frac{d}{dt}q$ ).

#### **Q** Otázka 6: Časová konstanta

Napište časovou konstantu nabíjejícího se kondenzátoru?

### **Q Otázka 7: Časová závislost náboje na kondenzátoru**

Zapište časovou závislost pro velikost náboje na kondenzátoru.

### **Q Otázka 8: Proud po otevření spínače**

Po dlouhém čase  $t = T$  byl spínač otevřen. Jaký proud teče kondenzátorem v okamžiku, kdy jsme spínač otevřeli?

### **Q Otázka 9: Proudů tekoucí rezistory**

Vyjádřete proudy  $I_1$  a  $I_2$  tekoucí příslušnými rezistory v čase  $t = T$ ?

### **Q Otázka 10: Náboj na kondenzátoru**

Zapište diferenciální rovnici pro časovou závislost náboje  $q$  na kondenzátoru v čase  $t$  počítaného od otevření spínače. Předpokládejte, že  $R_1 = R_2 = R$ , k zápisu použijte Kirchhoffův zákon.

### **Q Otázka 11: Časová konstanta vybíjení**

Napište časovou konstantu vybíjení kondenzátoru.

### **Q Otázka 12: Náboj na kondenzátoru**

Napište časovou závislost velikosti náboje na vybíjejícím se kondenzátoru.

## **R Řešení úlohy 1: Kondenzátor**

### **A Otázka 1: Proud kondenzátorem**

V okamžiku sepnutí spínače se kondenzátor chová jako zkrat (všechny proud teče kondenzátorem  $C$ , žádný rezistorem  $R_2$ ).

$$I_C = \frac{\mathcal{E}}{R_1}.$$

### **A Otázka 2: Proudů tekoucí rezistory**

Všechny proud teče kondenzátorem, stejný proud teče i rezistorem  $R_1$ .

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}, \quad I_2 = 0.$$

### **A Otázka 3: Proudů tekoucí rezistory po dostatečně dlouhém čase**

Po dostatečně dlouhém čase je kondenzátor nabit, proud

$$I_C = 0.$$

#### **A Otázka 4: Proud tekoucí kondenzátorem v dostatečně dlouhém čase**

Kondenzátorem již neteče žádný proud, všechen prochází rezistorem  $R_2$ :

$$I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

#### **A Otázka 5: Náboj na kondenzátoru**

Uvažujme dvě smyčky, proud  $I_1$  v levé, proud  $I_2$  v pravé smyčce. Předpokládejme kladný náboj  $q$  na horní desce kondenzátoru. Z Kirchhoffova smyčkového zákona (vyjdeme vždy z levého spodního rohu po směru hodinových ručiček):

$$\mathcal{E} - I_1 R_1 - q/C = 0, \quad q/C - I_2 R_2 = 0.$$

Nyní využijeme faktu že  $R_1 = R_2 = R$  a zavedeme proud tekoucí kondenzátorem jako  $I_C = I_1 - I_2$  (proud tekoucí na vrchní desku kondenzátoru):

$$\begin{aligned}\mathcal{E} - I_1 R - q/C - (q/C - I_2 R) &= 0, \\ \mathcal{E} - (I_1 - I_2) R - 2q/C &= 0, \\ \mathcal{E} - I_C R - 2q/C &= 0.\end{aligned}$$

Nyní přepíšeme proud tekoucí na kladnou desku kondenzátoru  $I_C = +\frac{dq}{dt}$ , časová změna náboje je kladná, protože proud jsme zvolili ve směru nabíjení kondenzátoru a náboj na něm roste.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} - R \frac{d}{dt} q - \frac{2q}{C} &= 0, \\ \frac{d}{dt} q &= \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{2}{RC} q.\end{aligned}$$

#### **A Otázka 6: Časová konstanta**

Časová konstanta je člen ve jmenovateli derivace exponenciální závislosti náboje na kondenzátoru:

$$\tau = \frac{RC}{2}.$$

#### **A Otázka 7: Časová závislost náboje na kondenzátoru**

Řešení diferenciální rovnice je

$$q(t) = Q_f \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Pro ověření rovnosti a určení konstanty  $Q_f$  můžeme výsledek dosadit zpět do diferenciální rovnice

$$\frac{d}{dt}q = \frac{d}{dt}Q_f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{Q_f}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{2}{RC}Q_f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{Q_f}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Aby platila rovnost, musí platit

$$0 = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{Q_f}{\tau} \Rightarrow Q_f = \frac{\mathcal{E}C}{2}.$$

Proč je finální náboj na kondenzátoru pouze poloviční, než by byl, pokud bychom jej připojili ke zdroji napětí přímo? V průběhu nabíjení totiž prochází rezistorem  $R_2$  proud a tudíž na rezistoru  $R_1$  je úbytek napětí (odpory fungují jako dělička napětí).

### **A** Otázka 8: Proud po otevření spínače

Pokud otevřeme spínač, od zapojení odpojíme baterii a rezistor  $R_1$ . Kondenzátor se stane zdrojem elektromotorického napětí a začne se vybíjet přes rezistor  $R_2$ .

$$I_C = \frac{V(T)}{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{2R}.$$

### **A** Otázka 9: Proudů tekoucí rezistory

Rezistorem  $R_1$  neteče žádný proud, rezistorem  $R_2$  teče vybíjecí proud kondenzátoru

$$I_2 = I_C = \frac{\mathcal{E}}{2R}.$$

### **A** Otázka 10: Náboj na kondenzátoru

Nyní je zapojení podstatně jednodušší

$$\frac{q}{C} - \frac{I}{R} = 0 = \frac{q}{C} + R \frac{d}{dt}q.$$

### **A** Otázka 11: Časová konstanta vybíjení

Časová konstanta je nyní jednoduše

$$\tau = RC.$$

### **A** Otázka 12: Náboj na kondenzátoru

Řešení diferenciální rovnice je

$$q(t) = Q_f e^{-\frac{t-T}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}C}{2} e^{-\frac{t-T}{\tau}}.$$

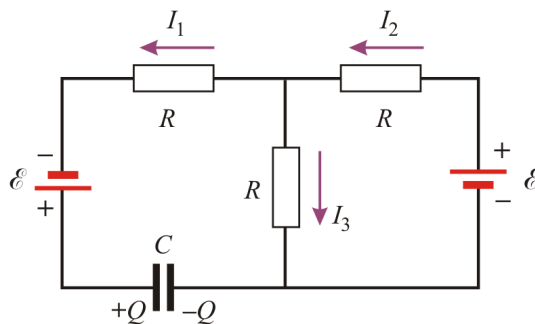
Časová závislost je posunutá o čas otevření spínače  $T$ , počáteční náboj na kondenzátoru odpovídá náboji nabitého kondenzátoru.

## P Úloha 2: Kondenzátor

Mějme obvod zapojený podle obrázku. Na počátku je kondenzátor vybitý.

### Q Otázka 1: Kirchhoffův uzlový zákon

Jaký je vztah mezi proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$ ?



### Q Otázka 2: Kirchhoffův smyčkový zákon

Zapište vztahy mezi napětím, nábojem a proudem v levé smyčce obvodu pomocí Kirchhoffova zákona (smyčku projděte proti směru hodinových ručiček).

### Q Otázka 3: Kirchhoffův smyčkový zákon

Zapište vztahy mezi napětím a proudem v pravé smyčce obvodu pomocí Kirchhoffova zákona (smyčku projděte proti směru hodinových ručiček).

### Q Otázka 4: Proud $I_1$

Jaké je hodnota proudu  $I_1$  v čase  $t \gg RC$ ?

### Q Otázka 5: Proud $I_2$ a $I_3$

Jaké je hodnota proudů  $I_2$  a  $I_3$  v čase  $t \gg RC$ ?

### Q Otázka 6: Napětí na kondenzátoru

Jaké je napětí na kondenzátoru v čase  $t \gg RC$ ? *Nápověda:* použijte výsledků 2. – 5. otázky.

## Ř Řešení úlohy 2: Kondenzátor

### A Otázka 1: Kirchhoffův uzlový zákon

$$I_2 = I_1 + I_3.$$

### A Otázka 2: Kirchhoffův smyčkový zákon

$$\mathcal{E} - \frac{Q}{C} + I_3 R - I_1 R = 0.$$

### A Otázka 3: Kirchhoffův smyčkový zákon

$$\mathcal{E} - I_2 R - I_3 R = 0.$$

### A Otázka 4: Proud $I_1$

Kondenzátor se nabije, takže proud touto větví bude nulový ( $I_1 = 0$ ).

**A** **Otázka 5: Proud**  $I_2$  **a**  $I_3$ 

V okamžiku, kdy kondenzátor již bude nabit, se levá smyčka bude chovat jako sériové zapojení dvou rezistorů, tedy  $I_2 = I_3 = \frac{\mathcal{E}}{2R}$ .

**A** **Otázka 6: Napětí na kondenzátoru**

Napětí na centrálním odporu bude dáno součtem napětí kondenzátoru a baterie (napětí na levém rezistoru je nulové, protože jím neprochází proud).

$$I_3 R = \frac{\mathcal{E}}{2} = -\mathcal{E} + V_C \quad \Rightarrow \quad V_C = \frac{3}{2} \mathcal{E}.$$