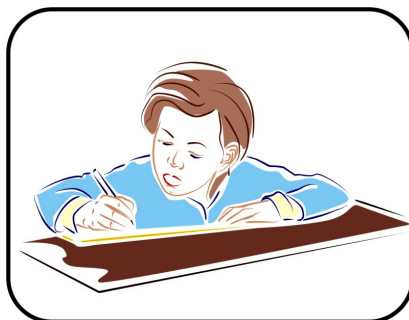


ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

Řešené úlohy a postupy: Magnetická síla a moment sil

Peter Dourmashkin

© MIT 2006, překlad: Jan Pacák (2007)



Obsah

6. MAGNETICKÁ SÍLA A MOMENT SIL	3
6.1 ÚKOLY	3
P ÚLOHA 1: HMOTNOSTNÍ SPEKTROMETR	3
Q OTÁZKA 1: ROZDÍL POTENCIÁLŮ	3
Q OTÁZKA 2: MAGNETICKÉ POLE	3
Q OTÁZKA 3: KINETICKÁ ENERGIE	3
Q OTÁZKA 4: TRAJEKTORIE ČÁSTIC	4
Q OTÁZKA 5: UHLÍK ¹² C	4
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 1: HMOTNOSTNÍ SPEKTROMETR	4
A OTÁZKA 1: ROZDÍL POTENCIÁLŮ	4
A OTÁZKA 2: MAGNETICKÉ POLE	4
A OTÁZKA 3: KINETICKÁ ENERGIE	4
A OTÁZKA 4: TRAJEKTORIE ČÁSTIC	4
A OTÁZKA 5: UHLÍK ¹² C	4
MAGNETICKÝ DIPÓLOVÝ MOMENT	5
P ÚLOHA 2: ČTVERCOVÁ SMYČKA	5
Q OTÁZKA 1: MOMENT SÍLY	5
Q OTÁZKA 2: LEVITACE	5
Q OTÁZKA 3: VISÍCÍ DÍTĚ	6
Q OTÁZKA 4: HOUPAJÍCÍ SE DÍTĚ	6
Q OTÁZKA 5: JINÝ ÚHEL	6

Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 2: ČTVERCOVÁ SMYČKA	6
A OTÁZKA 1: MOMENT SÍLY	6
A OTÁZKA 2: LEVITACE	6
A OTÁZKA 3: VISÍCÍ DÍTĚ	6
A OTÁZKA 4: HOUPAJÍCÍ SE DÍTĚ	6
A OTÁZKA 5: JINÝ ÚHEL	7
P ÚLOHA 3: NABITÁ ČÁSTICE V MAGNETICKÉM POLI	7
Q OTÁZKA 1: MAGNETICKÉ POLE NAD OSOU	7
Q OTÁZKA 2: MAGNETICKÉ POLE NAD OSOU	7
Q OTÁZKA 3: MAGNETICKÉ POLE POD OSOU	7
Q OTÁZKA 4: ČAS POTŘEBNÝ K POHYBU	8
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 3: NABITÁ ČÁSTICE V MAGNETICKÉM POLI	8
A OTÁZKA 1: MAGNETICKÉ POLE NAD OSOU	8
A OTÁZKA 2: MAGNETICKÉ POLE NAD OSOU	8
A OTÁZKA 3: MAGNETICKÉ POLE POD OSOU	8
A OTÁZKA 4: ČAS POTŘEBNÝ K POHYBU	8

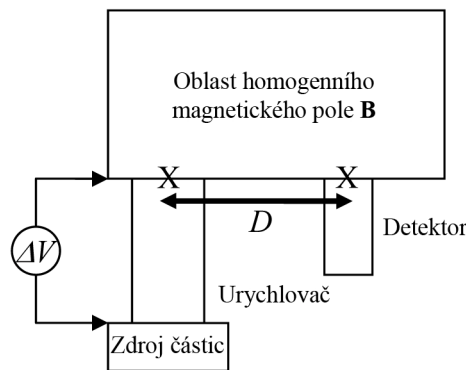
6. Magnetická síla a moment sil

6.1 Úkoly

- Seznamte se s chováním nabitě částice v homogenním magnetickém poli na příkladu hmotnostního spektrometru.
- Spočítejte moment sil působící na obdélníkovou proudovou smyčku v homogenním magnetickém poli.
- Zopakujte si definici dipólového momentu proudové smyčky a napište moment sil působící na smyčku za pomoci dipólového momentu smyčky a vektoru magnetické indukce.

P Úloha 1: Hmotnostní spektrometr

Hmotnostní spektrometr je složen ze zdroje nabitých částic, který ionizuje atom, jehož hmotnost chceme měřit (ideálně pouze jednou), urychlovače, části, kde se vlivem magnetického pole zakříví trajektorie částic, a detektoru. Viz Obr. 1.



Obr. 1: Schéma hmotnostního spektrometru,

Na obrázku 1 opouští ionty zdroj částic se zanedbatelnou rychlostí. Jsou urychleny rozdílem potenciálů v oblasti urychlovače a malou štěrbinou (X) vstupují do oblasti homogenního magnetického pole, kde je jejich dráha zakřivena a kde je za další štěrbinou detektor. Měněním urychlujícího napětí ΔV můžeme tak proměřovat interval hmotností (lépe řečeno poměru hmotnosti k náboji) a můžeme tak určit například složení neznámého plynu.

Q Otázka 1: Rozdíl potenciálů

Jakou polaritu by měl mít rozdíl potenciálů ΔV na urychlovači? (Má být pro kladně nabitě částice vyšší potenciál u zdroje částic nebo u oblasti homogenního magnetického pole?)

Q Otázka 2: Magnetické pole

Jakou orientaci by mělo mít magnetické pole tak, aby kladně nabitě částice dopadaly na detektor?

Q Otázka 3: Kinetická energie

Vyjádřete kinetickou energii iontů vstupujících do oblasti homogenního magnetického pole.

Q Otázka 4: Trajektorie částic

Po jaké trajektorii se pohybují ionty v oblasti homogenního magnetického pole? Spočítejte indukci magnetického pole tak, aby iont o hmotnosti m a náboji q , dopadl na detektor (ve vzdálenosti D od vstupního otvoru částice do magnetického pole).

Q Otázka 5: Uhlík ^{12}C

Jaké napětí musí být na urychlovači, aby jednou ionizovaný uhlík ^{12}C dopadnul na detektor ve vzdálenosti $D = 20 \text{ cm}$ od urychlovače? Indukce magnetického pole je $B = 1 \text{ T}$. Můžete předpokládat, že protony i neutrony mají stejnou hmotnost $mc^2 \sim 1 \text{ GeV}$.

R Řešení úlohy 1: Hmotnostní spektrometr

A Otázka 1: Rozdíl potenciálů

Aby byly urychlovány kladné ionty, musí být vyšší potenciál u zdroje částic.

A Otázka 2: Magnetické pole

Směr vektoru magnetické indukce by měl být kolmý na nárysnu a měl by mířit z náryсны, tak aby síla $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ na počátku mířila doprava.

A Otázka 3: Kinetická energie

Ionty jsou z počátku v klidu, kinetická energie je rovna změně energie částice při průchodu elektrickým polem

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V.$$

A Otázka 4: Trajektorie částic

Částice se pohybují po polokružové trajektorii, magnetická síla musí být rovna dostředivé síle, kdy průměr trajektorie částice musí mít vzdálenost detektoru D :

$$qvB = \frac{mv^2}{D/2} \Rightarrow B = \frac{2mv}{qD} \Rightarrow \boxed{B = \sqrt{\frac{8m\Delta V}{qD^2}}}.$$

A Otázka 5: Uhlík ^{12}C

Vyjdeme z výrazu, který je odvozen v řešení otázky 4:

$$\Delta V = \frac{qD^2 B^2 c^2}{8mc^2} = \frac{\cancel{q}(0,2 \text{ m})^2 (1 \text{ T})^2 (3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1})^2}{8(12 \text{ G}\cancel{q}\text{V})} \approx \boxed{4 \times 10^4 \text{ V}}.$$

Magnetický dipólový moment

V kurzu jsme odvodili, že rovinná proudová smyčka o ploše A (s normálovým jednotkovým vektorem $\hat{\mathbf{n}}$ kolmým na tuto plochu) a proudu I vytváří magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ daný vztahem

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} = IA\hat{\mathbf{n}}.$$

Normálový vektor $\hat{\mathbf{n}}$ míří do směru, který je definován pravidlem pravé ruky – pokud prsty pravé ruky budou mířit do směru proudu tekoucího smyčkou, vztyčený palec určí směr normálového vektoru.

Pokud smyčku umístíme do vnějšího homogenního magnetického pole \mathbf{B}_{ext} , bude na ni působit moment síly

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}.$$

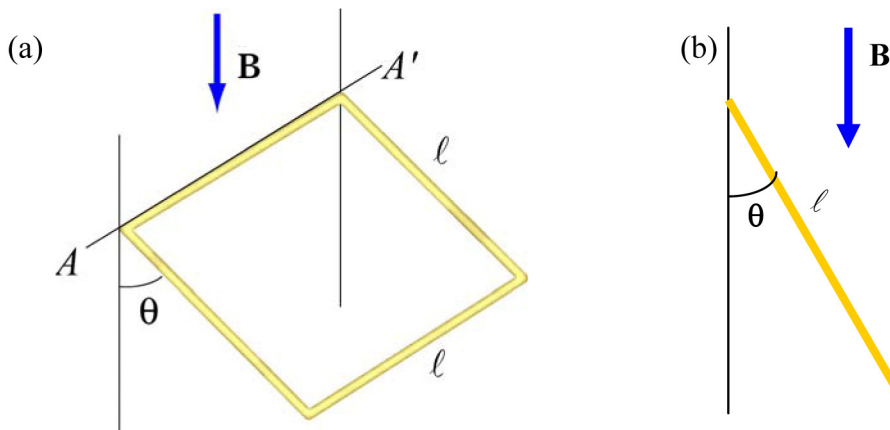
A v nehomogenním magnetickém poli \mathbf{B}_{ext} na ni bude působit síla

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{ext}}.$$

(Všimněte si, že výslednice sil působící na dipól v homogenním magnetickém poli je nulová.)

Úloha 2: Čtvercová smyčka

Mějme čtvercovou smyčku o straně ℓ , která se může volně otáčet kolem vodorovné osy AA' , viz Obr. 2. V okolí smyčky je homogenní magnetické pole o indukci B , vektor magnetické indukce míří kolmo dolů. Smyčkou teče proud I .



Obr. 2: Obdélníková smyčka zavěšená za horní stranu.

Otázka 1: Moment síly

Spočítejte moment síly působící na smyčku.

Otázka 2: Levitace

Jakým směrem musí smyčkou téct proud, aby smyčka v homogenním magnetickém poli levitovala (po nebo proti směru chodu hodinových ručiček při pohledu shora)?

Q Otázka 3: Visící dítě

Zanedbejte hmotnost smyčky o hraně $\ell = 1 \text{ m}$. Na smyčce však visí malé dítě ($m = 20 \text{ kg}$), smyčka v klidové poloze (i s dítětem) s normálou svírá úhel $\theta = 45^\circ$. Jak velká musí být indukce magnetického pole B , pokud smyčkou může téci maximální proud $I = 100 \text{ A}$?

Q Otázka 4: Houpající se dítě

Nyní se dítě začne na smyčce houpat. Je rovnovážná poloha spočítaná v otázce 4 labilní nebo stabilní? Pokud je labilní, spadne dítě i se smyčkou do spodní polohy ($\theta = 0^\circ$) nebo je naopak magnetické pole zvedne do polohy ($\theta = 90^\circ$)? Pokud je poloha stabilní, počítejte frekvenci malých oscilací kolem rovnovážné polohy. *Nápověda:* Můžete využít vztahů $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ a vztahů pro malé úhly kdy $\sin(x) \sim x$ a $\cos(x) \sim 1$. Dejte do rovnosti momenty síly gravitačního a magnetického pole pro úhel $\theta = 45^\circ$. Moment setrvačnosti hmotného bodu ve vzdálenosti ℓ od osy otáčení je $m\ell^2$.

Q Otázka 5: Jiný úhel

Pokud bychom chtěli, aby se dítě houvalo pod úhlem $\theta = 60^\circ$, je výhodnější nechat pole tak jak je, tedy mířící dolů, nebo jej otočit o 90 stupňů?

Ř Řešení úlohy 2: Čtvercová smyčka

A Otázka 1: Moment síly

Víme, že $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$ a dipólový moment čtvercové smyčky je $\boldsymbol{\mu} = IA = I\ell^2$. Moment síly je

$$\tau = \mu B \sin(90^\circ - \theta) = \mu B \cos \theta.$$

A Otázka 2: Levitace

Síla působící na spodní stranu smyčky musí mířit vzhůru, takže při pohledu shora musí proud smyčkou procházet ve směru chodu hodinových ručiček.

A Otázka 3: Visící dítě

Dítě na smyčce působí momentem síly $\tau = mgl \sin \theta$, který musí být vyrovnán momentem síly magnetického pole:

$$I\ell^2 B \cos \theta = mgl \sin \theta \Rightarrow B = \frac{mgl \sin \theta}{I\ell^2 \cos \theta} = \frac{mg \tan \theta}{I\ell} = 2 \text{ T}.$$

A Otázka 4: Houpající se dítě

Dítě je v rovnovážné poloze stabilní. Pokud úhel θ zvýšíme, sníží se moment síly působícího magnetického pole a převáží moment gravitační síly, úhel se začne zmenšovat. Pokud úhel zmenšíme, moment síly způsobený magnetickým polem vzroste a bude se nažít vrátit smyčku zpět do rovnovážné polohy.

Celkový moment síly působící na smyčku pro úhel $45^\circ + \Delta\theta$ je:

$$\begin{aligned}\tau &= Il^2B \cos(45^\circ + \Delta\theta) - mg\ell \sin(45^\circ + \Delta\theta) = \\ &= Il^2B(\cos 45^\circ \cos \Delta\theta - \sin 45^\circ \sin \Delta\theta) - mg\ell(\sin 45^\circ \cos \Delta\theta + \sin \Delta\theta \cos 45^\circ) \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{2}}{2}(IlB(1 - \Delta\theta) - mg\ell(1 + \Delta\theta)) = \frac{\sqrt{2}}{2}((Il^2B - mg\ell) - \Delta\theta(il^2B + mg\ell)).\end{aligned}$$

Pro $\Delta\theta = 0$ je výsledný moment nulový, tedy $Il^2B = mg\ell$ a můžeme přepsat moment $\tau \approx -\sqrt{2}mg\ell\Delta\theta$ a řešit diferenciální rovnici

$$\tau \approx -\sqrt{2}mg\ell\Delta\theta = I_\tau\Delta\ddot{\theta} = ml^2\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow \Delta\ddot{\theta} = -\frac{\sqrt{2}g}{\ell}\Delta\theta = -\omega^2\Delta\theta,$$

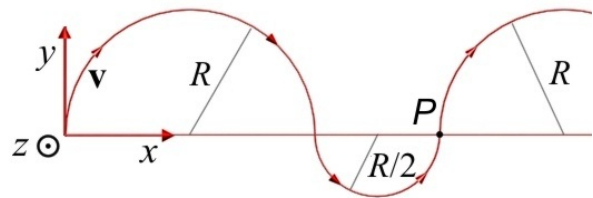
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{\ell}}}.$$

A Otázka 5: Jiný úhel

Pokud chceme co největší moment síly působící při stejné indukci magnetického pole, měl by být úhel mezi smyčkou a vektorem magnetické indukce co nejbližší 90° . Pro úhel 60° se tedy vyplatí pole otočit.

P Úloha 3: Nabitá částice v magnetickém poli

Nabitá částice o hmotnosti m a náboji $q > 0$ je v čase $t = 0$ na počátku vztažné soustavy a pohybuje se rychlostí $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{j}}$. Její trajektorie je zachycena na obrázku vpravo. Velikost rychlosti $v = |\mathbf{v}| = \text{konst}$ je stejná po celou dobu pohybu, mění se pouze směr rychlosti.



Q Otázka 1: Magnetické pole nad osou

Z trajektorie částice nad osou x je zřejmé, že částice se pohybuje v konstantním magnetickém poli. Pro kladně nabitou částici míří toto pole z nebo do nárysny?

Q Otázka 2: Magnetické pole nad osou

Odvoďte velikost vektoru magnetické indukce pro pole nad osou x . Výsledek vyjádřete pomocí veličin q , m , R , v a příslušných konstant.

Q Otázka 3: Magnetické pole pod osou

Magnetické pole pod osou x má jiný směr i velikost, spočítejte velikost a směr vektoru magnetické indukce pro pole pod osou x . Výsledek vyjádřete pomocí veličin q , m , R , v a příslušných konstant.

Q Otázka 4: Čas potřebný k pohybu

Jak dlouho trvalo částici, než se dostala z počátku do bodu P (viz obrázek), který je na ose x ? Výsledek vyjádřete v zadaných veličinách.

Ř Řešení úlohy 3: Nabitá částice v magnetickém poli

A Otázka 1: Magnetické pole nad osou

Pole \mathbf{B} míří z nárysny.

A Otázka 2: Magnetické pole nad osou

Magnetická síla musí být rovna síle dostředivé:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow B = \frac{mv}{qR}.$$

A Otázka 3: Magnetické pole pod osou

Pole \mathbf{B} pod osou x míří do nárysny, jeho velikost je $B = \frac{2mv}{qR}$.

A Otázka 4: Čas potřebný k pohybu

$$t = \frac{\pi R}{v} + \frac{\pi R/2}{v} = \frac{3}{2} \frac{\pi R}{v}.$$