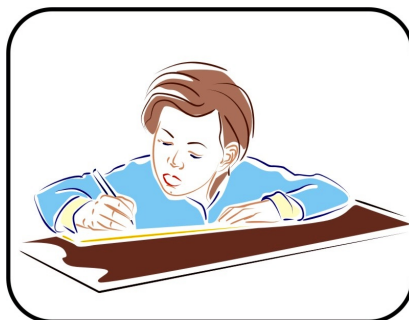


ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

Řešené úlohy a postupy: Ampérův zákon

Peter Dourmashkin

© MIT 2006, překlad: Jan Pacák (2007)



Obsah

5. AMPÉRŮV ZÁKON	3
5.1 ÚKOLY	3
5.2 ALGORITMUS PRO ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ	3
P ÚLOHA 1: VÁLCOVÝ PLÁŠŤ	3
Q OTÁZKA 1: PROUD TEKOUcí UZAVŘENOU SMYČKOU	4
Q OTÁZKA 2: PLOCHA VODIČE V UZAVŘENÉ SMYČCE	4
Q OTÁZKA 3: OKRAJOVÉ HODNOTY	4
Q OTÁZKA 4: KŘIVKOVÝ INTEGRÁL	4
Q OTÁZKA 5: AMPÉRŮV ZÁKON	4
Q OTÁZKA 6: VNITŘNÍ OBLAST VODIČE	4
Q OTÁZKA 7: VNĚJŠÍ OBLAST VODIČE	4
Q OTÁZKA 8: PRŮBĚH MAGNETICKÉ INDUKCE	4
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 1: VÁLCOVÝ PLÁŠŤ	4
A OTÁZKA 1: PROUD TEKOUcí UZAVŘENOU SMYČKOU	4
A OTÁZKA 2: PLOCHA VODIČE V UZAVŘENÉ SMYČCE	5
A OTÁZKA 3: OKRAJOVÉ HODNOTY	5
A OTÁZKA 4: KŘIVKOVÝ INTEGRÁL	5
A OTÁZKA 5: AMPÉRŮV ZÁKON	5
A OTÁZKA 6: VNITŘNÍ OBLAST VODIČE	5
A OTÁZKA 7: VNĚJŠÍ OBLAST VODIČE	5
A OTÁZKA 8: PRŮBĚH MAGNETICKÉ INDUKCE	5

P ÚLOHA 2: DESKA	6
Q OTÁZKA 1: POLE VE STŘEDU DESKY	6
Q OTÁZKA 2: UZAVŘENÁ SMYČKA	6
Q OTÁZKA 3: PROUD V UZAVŘENÉ SMYČCE	6
Q OTÁZKA 4: KŘIVKOVÝ INTEGRÁL	6
Q OTÁZKA 5: MAGNETICKÉ POLE NAD DESKOU	6
Q OTÁZKA 6: UZAVŘENÁ SMYČKA	6
Q OTÁZKA 7: PROUD V UZAVŘENÉ SMYČCE	6
Q OTÁZKA 8: KŘIVKOVÝ INTEGRÁL	6
Q OTÁZKA 9: MAGNETICKÉ POLE V DESCE	6
Q OTÁZKA 10: GRAF	7
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 2: DESKA	7
A OTÁZKA 1: POLE VE STŘEDU DESKY	7
A OTÁZKA 2: UZAVŘENÁ SMYČKA	7
A OTÁZKA 3: PROUD V UZAVŘENÉ SMYČCE	7
A OTÁZKA 4: KŘIVKOVÝ INTEGRÁL	7
A OTÁZKA 5: MAGNETICKÉ POLE NAD DESKOU	7
A OTÁZKA 6: UZAVŘENÁ SMYČKA	7
A OTÁZKA 7: PROUD V UZAVŘENÉ SMYČCE	8
A OTÁZKA 8: KŘIVKOVÝ INTEGRÁL	8
A OTÁZKA 9: MAGNETICKÉ POLE V DESCE	8
A OTÁZKA 10: GRAF	8
P ÚLOHA 3: KOAXIÁLNÍ VODIČ	8
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 3: KOAXIÁLNÍ VODIČ	9

5. Ampérův zákon

5.1 Úkoly

- Využití Ampérova zákona pro počítání magnetické indukce v prostoru symetricky rozložených proudů.
- Výpočet magnetické indukce pro proud tekoucí pláštěm válce o vnitřním průměru a a vnějším průměru b .
- Výpočet magnetické indukce pro proud tekoucí deskou.

5.2 Algoritmus pro řešení problémů

Ampérův zákon postuluje, že integrál $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ po uzavřené křivce je přímo úměrný celkovému proudu, který touto křivkou protéká $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$.

Pro výpočet magnetické indukce Ampérovým zákonem použijte následující postup:

- Identifikace „symetrií“ v rozložení proudů.
- Určení směru magnetického pole.
- Určení počtu oblastí, které budeme zvlášť vyšetřovat Ampérovým zákonem.

Pro každou takovou oblast:

- Zvolte uzavřenou smyčku, na které je indukce konstantní nebo nulová.
- Spočítejte proudy tekoucí uvnitř smyčky.
- Spočítejte křivkový integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$.
- Dejte do rovnosti integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ s proudem $\mu_0 I$ a vyjádřete \mathbf{B} .

▣ Úloha 1: Válcový plášť

Uvedený postup použijeme pro následující úlohu. Mějme dutý měděný válcový vodič o poloměru b , kde dutinu tvoří souosý válec o poloměru $a < b$. Proud I je rovnoměrně rozložen v měděném průřezu (tečkovaná oblast), teče směrem před nárýsnu. Spočítejte magnetickou indukci v oblasti $a < r < b$.

Pro řešení použijeme postup popsany výše:

Q Jaká je symetrie problému?

A Válcová (v řezu kruhová).

Q Jaký je směr magnetické indukce?

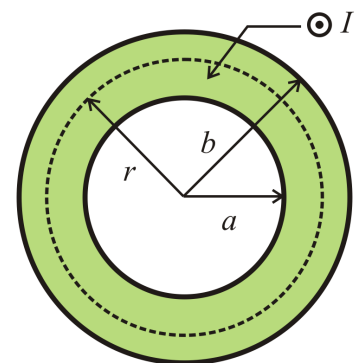
A Po nebo proti směru chodu hodinových ručiček, azimutální.

Q Jaký je počet oblastí?

A Tři: $r < a$, $a < r < b$, $r > b$

Q Zakreslete smyčku, na které je indukce konstantní.

A Viz obrázek vpravo.



V dalším kroku bychom měli spočítat proud uzavřený ve zvolené smyčce. Protože je proudová hustota ve vodiči konstantní, k výsledku vedou dvě cesty. Můžeme vzít stejný díl proudu, jako díl vodiče uzavřený ve smyčce ku celkovému povrchu vodiče, nebo můžeme spočítat plošnou proudovou hustotu vodiče a vynásobit ji ve smyčce uzavřenou plochou. Pro srovnání byste měli ve výpočtu použít obě metody.

Q Otázka 1: Proud tekoucí uzavřenou smyčkou

Jaká je hodnota plošné hustoty proudu J v oblasti $a < r < b$? Předpokládejte, že proud je homogenně rozprostřen v průřezu celého vodiče $a < r < b$. Plošná proudová hustota je definována jako proud protékající jednotkovou plochou. Pokud znáte proudovou hustotu, spočítejte celkový proud tekoucí uzavřenou smyčkou o poloměru r .

Q Otázka 2: Plocha vodiče v uzavřené smyčce

Spočítejte podíl uzavřené části vodiče na celkové ploše vodiče. Spočítejte proud tekoucí uzavřenou smyčkou o poloměru r .

Q Otázka 3: Okrajové hodnoty

Proud v uzavřené smyčce by měl být nulový pro $r = a$ a měl by mít hodnotu I pro $r = b$ (proč?). Splňuje Váš vztah tyto podmínky?

Q Otázka 4: Křivkový integrál

Spočítejte křivkový integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$.

Q Otázka 5: Ampérův zákon

Dejte do rovnosti výsledky získané v předchozích bodech a spočítejte hodnotu magnetické indukce.

Q Otázka 6: Vnitřní oblast vodiče

Spočítejte magnetickou indukci pro oblast $r < a$.

Q Otázka 7: Vnější oblast vodiče

Spočítejte magnetickou indukci pro oblast $r > b$.

Q Otázka 8: Průběh magnetické indukce

Zakreslete \mathbf{B} v závislosti na r .

R Řešení úlohy 1: Válcový plášť

A Otázka 1: Proud tekoucí uzavřenou smyčkou

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)},$$

$$I_{\text{uz}} = JA_{\text{uz}} = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} (\pi r^2 - \pi a^2) = I \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right).$$

A Otázka 2: Plocha vodiče v uzavřené smyčce

$$n_{uz} = \frac{\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)},$$

$$I_{uz} = I \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right).$$

A Otázka 3: Okrajové hodnoty

Výše uvedené vztahy podmínky splňují. Smyčkou neprotéká žádný proud, pokud $r = a$, naopak pokud $r = b$, tak smyčkou protéká proud všechen, tedy $I_{uz} = I$.

A Otázka 4: Křivkový integrál

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(2\pi r).$$

A Otázka 5: Ampérův zákon

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{uz} = \mu_0 I \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right).$$

Směr indukce magnetického pole je proti směru chodu hodinových ručiček.

A Otázka 6: Vnitřní oblast vodiče

V oblasti $r < a$ je $I_{uz} = 0$ a tedy i pole $B = 0$.

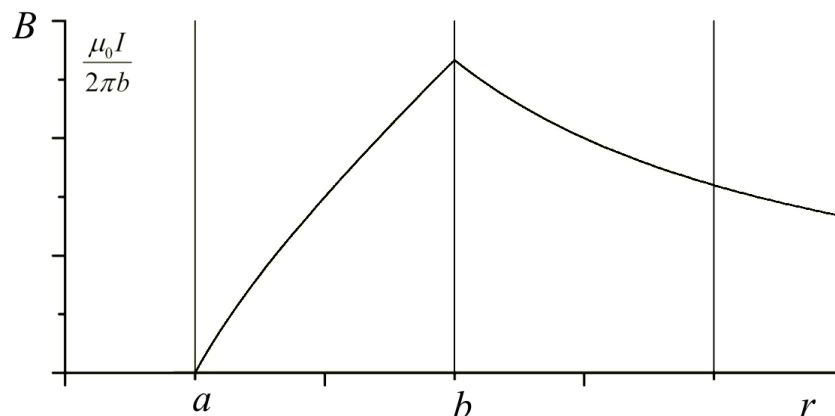
A Otázka 7: Vnější oblast vodiče

V oblasti $r > b$ je $I_{uz} = I$ a tedy

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

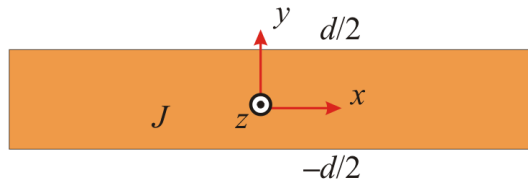
Směr indukce magnetického pole je i zde proti směru chodu hodinových ručiček.

A Otázka 8: Průběh magnetické indukce



Úloha 2: Deska

Využijte Ampérův zákon a spočítejte indukci magnetického pole \mathbf{B} vytvořeného deskou, kterou teče proud o hustotě $\mathbf{J} = 2J_0 \frac{|y|}{d} \hat{\mathbf{z}}$, kde jednotka



konstanty J_0 je $[\text{A}/\text{m}^2]$. Deska je nekonečně dlouhá a široká v rovině xz , její tloušťka v ose y je d .

Otázka 1: Pole ve středu desky

Jaká je hodnota magnetické indukce ve středu desky pro $y = 0$?

Otázka 2: Uzavřená smyčka

Jakou zvolíte uzavřenou smyčku pro $y > d/2$? Zakreslete ji do obrázku nahoře, na náčrtku vyznačte její rozměry.

Otázka 3: Proud v uzavřené smyčce

V dalším kroku potřebujeme znát proud, který prochází zvolenou uzavřenou smyčkou. *Nápověda:* proud, který je uzavřený ve smyčce je roven ploše vynásobené příslušnou proudovou hustotou.

Otázka 4: Křivkový integrál

Spočítejte křivkový integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ pro $y > d/2$.

Otázka 5: Magnetické pole nad deskou

Z hodnot spočítaných v předchozích otázkách dosadte do Ampérova zákona a spočítejte \mathbf{B} pro $y > d/2$.

Otázka 6: Uzavřená smyčka

Jakou zvolíte uzavřenou smyčku pro $0 < y < d/2$? Zakreslete ji do obrázku nahoře, na náčrtku vyznačte její rozměry.

Otázka 7: Proud v uzavřené smyčce

Nyní spočítejte proud, který prochází zvolenou uzavřenou smyčkou z 6. otázky.

Otázka 8: Křivkový integrál

Spočítejte křivkový integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ pro $0 < y < d/2$.

Otázka 9: Magnetické pole v desce

Z hodnot spočítaných v předchozích otázkách dosadte do Ampérova zákona a spočítejte \mathbf{B} pro $0 < y < d/2$.

Q Otázka 10: Graf

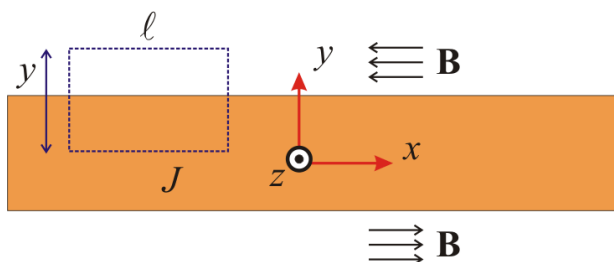
Zakreslete B_x v závislosti na y . Využijte symetrie úlohy a doplňte graf i pro $y < 0$. Označte osy.

Ř Řešení úlohy 2: Deska

A Otázka 1: Pole ve středu desky

Ze symetrie úlohy je na středu desky pole nulové.

A Otázka 2: Uzavřená smyčka



A Otázka 3: Proud v uzavřené smyčce

Proud tekoucí uzavřenou smyčkou spočítáme integrací:

$$I_{uz} = \iint \frac{2J_0 y}{d} dA = \frac{2J_0 \ell}{d} \int_0^{d/2} y dy = \frac{J_0 \ell d}{4}.$$

A Otázka 4: Křivkový integrál

Smyčka se skládá ze čtyř částí, v otázce 1 jsme si již zdůvodnili, že na spodní části smyčky je pole nulové, na bočních částech je pole kolmé na smyčku, proto příspěvek i těchto částí je nulový.

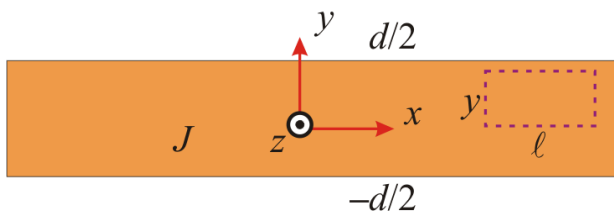
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(y)\ell + 0 + 0 + 0 = B\ell.$$

A Otázka 5: Magnetické pole nad deskou

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\ell = \frac{\mu_0 J_0 \ell d}{4} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 J_0 d}{4}.$$

Směr pole je naznačen na obrázku u odpovědi na otázku 2 (míří doleva).

A Otázka 6: Uzavřená smyčka



A Otázka 7: Proud v uzavřené smyčce

Proud procházející smyčkou spočítáme obdobně jako u otázky 3:

$$I_{uz} = \iint \frac{2J_0 y}{d} dA = \frac{2J_0 \ell}{d} \int_0^y y' dy' = \frac{J_0 \ell y^2}{d}.$$

A Otázka 8: Křivkový integrál

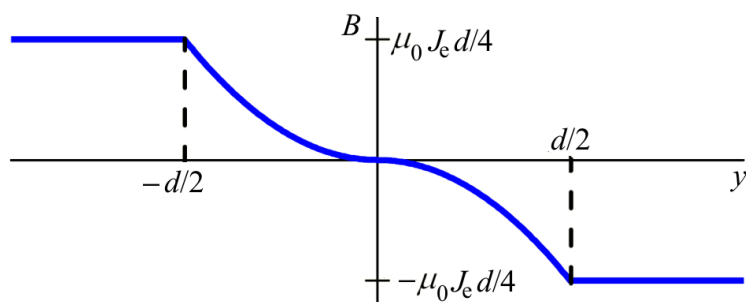
Křivkový integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ vyjde pro oblast uvnitř desky stejně, jako u otázky 4 (příspěvky spodní a bočních stran jsou nulové), $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\ell$.

A Otázka 9: Magnetické pole v desce

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\ell = \frac{\mu_0 J_0 \ell y^2}{d} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 J_0 y^2}{d}.$$

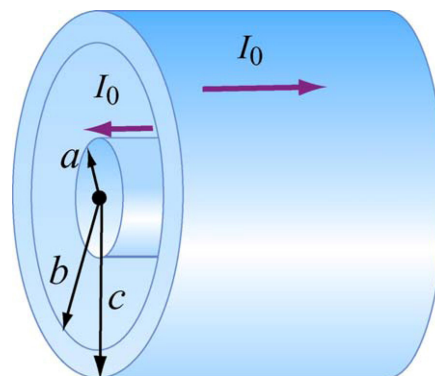
Směr pole je naznačen na obrázku u odpovědi na otázku 2 (míří doleva).

A Otázka 10: Graf



P Úloha 3: Koaxiální vodič

Koaxiální vodič je složen z vnitřního plného válce o poloměru a , který je obklopen souosým válcovým pláštěm o vnitřním poloměru b a vnějším poloměru c . Oběma vodiči teče stejný proud I_0 , který je homogenně rozprostřen na celém průřezu obou vodičů. Určete indukci magnetického pole v závislosti na vzdálenosti r od osy válců. Do obrázku načrtněte zvolenou smyčku pro Ampérův zákon. Výsledky znázorněte do grafu, nezapomeňte označit osy.



Řešení úlohy 3: Koaxiální vodič

(a) $r < a$:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 I_0 \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}.$$

(b) $a < r < b$:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 I_0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}.$$

(c) $b < r < c$:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 I_0 \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right).$$

Ve všech případech vektor magnetické indukce míří proti směru chodu hodinových ručiček.

(d) graf:

