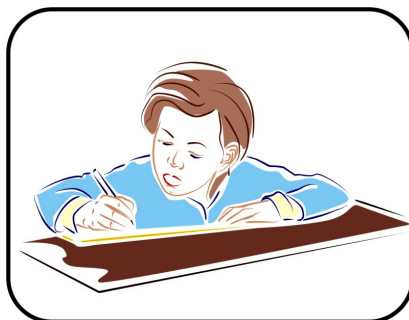


ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

Řešené úlohy a postupy: Kapacita a uložená energie

Peter Dourmashkin

© MIT 2006, překlad: Jan Pacák (2007)



Obsah

4. KAPACITA A ULOŽENÁ ENERGIE	2
4.1 ÚKOLY	2
4.2 ALGORITMUS PRO ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ	2
P ÚLOHA 1: VÁLCOVÝ KONDENZÁTOR	2
Q OTÁZKA 1: ELEKTRICKÉ POLE	2
Q OTÁZKA 2: ROZDÍL POTENCIÁLŮ (ROZDÍL NAPĚTÍ)	2
Q OTÁZKA 3: VÝPOČET KAPACITY	3
Q OTÁZKA 4: ULOŽENÁ ELEKTRICKÁ ENERGIE	3
Q OTÁZKA 5: NABÍJENÍ KONDENZÁTORU	3
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 1: VÁLCOVÝ KONDENZÁTOR	3
A OTÁZKA 1: ELEKTRICKÉ POLE	3
A OTÁZKA 2: ROZDÍL POTENCIÁLŮ (ROZDÍL NAPĚTÍ)	4
A OTÁZKA 3: VÝPOČET KAPACITY	4
A OTÁZKA 4: ULOŽENÁ ELEKTRICKÁ ENERGIE	4
A OTÁZKA 5: NABÍJENÍ KONDENZÁTORU	4
P ÚLOHA 2: KONDENZÁTOR JAKO KOULE	5
Q OTÁZKA 1: GAUSSŮV ZÁKON	5
Q OTÁZKA 2: ROZDÍL POTENCIÁLŮ	5
Q OTÁZKA 3: KAPACITA KONDENZÁTORU	5
Q OTÁZKA 4: ENERGIE ULOŽENÁ V ELEKTRICKÉM POLI	5
Ř ŘEŠENÍ ÚLOHY 2: KONDENZÁTOR JAKO KOULE	5
A OTÁZKA 1: GAUSSŮV ZÁKON	5
A OTÁZKA 2: ROZDÍL POTENCIÁLŮ	5
A OTÁZKA 3: KAPACITA KONDENZÁTORU	6
A OTÁZKA 4: ENERGIE ULOŽENÁ V ELEKTRICKÉM POLI	6

4. Kapacita a uložená energie

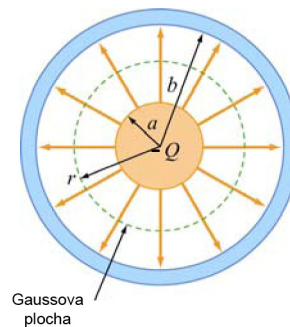
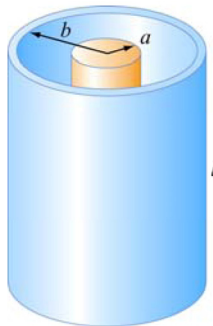
4.1 Úkoly

- Počítání kapacity kondenzátoru.
- Výpočet energie v něm uložené dvěma cestami.

4.2 Algoritmus pro řešení problémů

- Použijte Gaussův zákon, abyste mohli spočítat elektrické pole ve všech místech prostoru.
- Spočítejte potenciálový rozdíl ΔV mezi dvěma vodiči.
- Spočítejte kapacitu C jako $C = Q/|\Delta V|$.

P Úloha 1: Válcový kondenzátor



Mějme kondenzátor tvořený dvěma válci o poloměrech a a b a délce l , kde $a > b$. Na vnitřním válci je náboj $-Q$, na vnějším je náboj $+Q$. Zanedbejte okrajové efekty na koncích kondenzátoru. Spočítejte kapacitu kondenzátoru a energii v něm uloženou.

Q Otázka 1: Elektrické pole

Z Gaussova zákona nalezněte velikost i směr elektrického pole mezi vnitřním a vnějším válcem ($a < r < b$). Výsledek vyjádřete pomocí náboje Q , poloměrů a a b , délky l a dalších konstant, které uvážíte za vhodné. Na vnitřním válci je náboj $-Q$.

Q Otázka 2: Rozdíl potenciálů (rozdíl napětí)

Rozdíl napětí mezi válci, ΔV , je definován jako práce vykonaná při přemístění jednotkového náboje v elektrickém poli z jednoho válce na druhý

$$\Delta V \equiv V(b) - V(a) = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Vyjádřete rozdíl potenciálů mezi deskami pomocí náboje Q , poloměrů a a b , délky l a dalších potřebných konstant.

Q Otázka 3: Výpočet kapacity

Dva vodivé válce v zadání úlohy vytváří kondenzátor. Velikost náboje, $|Q|$, na každém válci je spojena s velikostí rozdílu potenciálů mezi válci (napětí na válcích) podle vztahu $|Q| = C|\Delta V|$, kde ΔV je napětí na kondenzátoru a C je konstanta úměrnosti označovaná jako *kapacita*. Kapacita je určena geometrickými vlastnostmi vodičů, které tvoří kondenzátor a je nezávislá na napětí na deskách kondenzátoru.

Jaká je kapacita tohoto systému dvou válců? Výsledek vyjádřete pomocí a , b a l , případně dalších konstant, které budete potřebovat.

Q Otázka 4: Uložená elektrická energie

Celkové množství energie uložené v elektrickém poli je dáno vztahem

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{celý prostor}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV_{(\text{objem})}.$$

Vyjděte ze vztahu pro intenzitu elektrického pole E z 1. otázky a spočítejte energii, která je uložena v kondenzátoru, vyjádřete ji proměnnými Q , a , b a l (a dalšími konstantami, které jsou třeba). Můžeme energii zapsat pouze proměnnými Q a C , pokud využijeme vyjádření kapacity C ze 3. otázky? Zapište ji.

Q Otázka 5: Nabíjení kondenzátoru

Předpokládejme, že kondenzátor místo připojení k baterii nabíjíme přesunem náboje z válce $r = b$ na válec $r = a$. Na počátku předpokládejte, že na vodičích kondenzátoru nebyl žádný náboj, v čase t jsme přesunuli náboj $q(t)$ na vnitřní válec.

- Jaký je rozdíl napětí mezi dvěma válci v čase t ? Vyjádřete je použitím proměnných C a $q(t)$.
- Nyní vezměme malou část náboje dq z vnějšího válce a přesuneme ji na vnitřní válec. Jakou práci dW jsme museli vykonat, pokud na vnitřním válci již byl náboj $q(t)$? Práci zapište použitím proměnných C , dq a $q(t)$.
- Využijte výsledku z bodu (b) a spočítejte celkovou práci k přesunu náboje Q z jednoho válce na druhý za předpokladu, že válce na počátku nebyly nabité.
- Je práce, kterou jsme spočítali menší, přesně rovná, nebo větší než energie uložená v elektrickém poli kondenzátoru (z otázky 4)? Vysvětlete proč.

Ř Řešení úlohy 1: Válcový kondenzátor

A Otázka 1: Elektrické pole

Ze symetrie úlohy elektrické pole míří v cylindrickém radiálnímu směru, tedy $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$, kde $\hat{\mathbf{r}}$ je cylindrický jednotkový vektor (kolmý na osu symetrie). Jako Gaussovu plochu použijeme válec, který je souosý s válci kondenzátoru. Podstavy válce nebudou přispívat do celkového

toku elektrického pole, neboť pole je s nimi rovnoběžné (kolmé na normálu). Pláštěm válce pro $b > r > a$ teče pole

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 2\pi r h E = \frac{Q_{\text{uvnitř}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{(-Q)}{l} h \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(r)_{a < r < b} = -\frac{Q}{2\pi r \epsilon_0 l} \hat{\mathbf{r}}$$

a pro poloměry $r < a$ a $r > b$ je elektrické pole nulové, protože celkový náboj uzavřený v Gaussově ploše je nulový. Nezapomeňte si všimnout směru pole. Pole míří radiálně dovnitř.

A Otázka 2: Rozdíl potenciálů (rozdíl napětí)

Rozdíl potenciálů mezi vnitřním a vnějším válcem je

$$\Delta V = V(b) - V(a) = -\int_a^b \frac{-Q}{2\pi r' \epsilon_0 l} dr' = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Všimněte si, že na kondenzátoru b je vyšší napětí než na kondenzátoru a .

A Otázka 3: Výpočet kapacity

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{|Q|}{\frac{|Q|}{2\pi \epsilon_0 l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

A Otázka 4: Uložená elektrická energie

Energii budeme integrovat po elementech tvaru pláště válce o výšce l , poloměru r a tloušťce dr , kde je intenzita elektrického pole konstantní. Objem takového diferenciálu je $dV_{\text{objem}} = 2\pi r l dr$. Uloženou energii tak můžeme integrovat

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^r \left(\frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r' l} \right)^2 2\pi r' l dr' = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

A Otázka 5: Nabíjení kondenzátoru

(a) $V(t) = \frac{q(t)}{C}.$

(b) $dW(t) = dq V(t) = dq \frac{q(t)}{C}.$

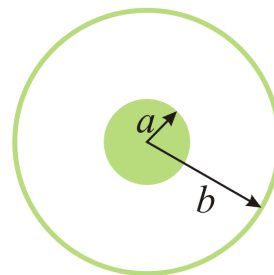
(c) $W = \int_0^Q dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$

Všimněte si, že pokud integrujeme $q = q(t)$, tak je závislost na čase irelevantní. Integrujeme podél náboje, nikoliv času, jednoduše integrujeme q .

(d) Tato práce je přesně stejná. Všechna energie, kterou vkládáme do nabíjení kondenzátoru, se přemění na energii uloženou v elektrickém poli. Tento proces je reverzibilní, při vybíjení kondenzátoru tuto energii můžeme získat zpět.

Úloha 2: Kondenzátor jako koule

Plná vodivá koule o poloměru a je obklopena vodivým sférickým pláštěm o poloměru b , tak že $a < b$. Na vnitřní kouli je náboj Q , na vnější kouli je náboj $-Q$.



Q Otázka 1: Gaussův zákon

Z Gaussova zákona nalezněte velikost i směr elektrického pole mezi vnitřní a vnější koulí ($a < r < b$).

Q Otázka 2: Rozdíl potenciálů

Vyjděte z vyjádření intenzity elektrického pole v otázce 1 a spočítejte rozdíl potenciálů mezi koulemi $\Delta V \equiv V(b) - V(a) = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$.

Q Otázka 3: Kapacita kondenzátoru

Vyjděte z výsledku 2. otázky a spočítejte kapacitu takového kondenzátoru.

Q Otázka 4: Energie uložená v elektrickém poli

Vyjděte z výsledku 1. otázky a integrujte energii uloženou v elektrostatickém poli integrací $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$. Jako diferenciál objemu použijte plášť koule tloušťky dr o objemu $dV = 4\pi r^2 dr$.

Ř Řešení úlohy 2: Kondenzátor jako koule

A Otázka 1: Gaussův zákon

Jako Gaussovu plochu jsme zvolili plášť koule, o poloměru $a < r < b$.

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{E}(r)_{a < r < b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}}$$

Pole je stejné jako pole bodového náboje. Pro $r < a$ a $r > b$ je pole nulové, protože celkový náboj uzavřený ve zvolené ploše je nulový.

A Otázka 2: Rozdíl potenciálů

$$\Delta V = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot dr \hat{\mathbf{r}} = \boxed{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

A Otázka 3: Kapacita kondenzátoru

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \boxed{\frac{4\pi\epsilon_0}{(a^{-1} - b^{-1})}}.$$

A Otázka 4: Energie uložená v elektrickém poli

$$U = \int_a^b \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \boxed{\frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}.$$