ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

Řešené úlohy a postupy: Gaussův zákon

Peter Dourmashkin

Obsah

3. Gaussův zákon

3.1 Algoritmus pro řešení problémů pomocí Gaussova zákona

Následující kroky vedou k určování elektrických polí využitím Gaussova zákona:

1. **1.** Identifikace „symetrií“ v rozložení náboje.
2. **2.** Určení směru elektrického pole.
3. **3.** Určení počtu oblastí, na které budeme aplikovat Gaussův zákon, v závislosti na rozložení náboje v prostoru.

Pro každou takovou oblast:

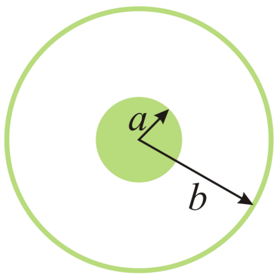
4. **4.** Zvolte Gaussovou plochu, na které je tok elektrického pole konstantní nebo nulový.
5. **5.** Spočítejte tok Gaussovou plochou (s využitím neznámé $\mathbf{E}$).
6. **6.** Spočítejte velikost náboje uzavřeného v Gaussově ploše.
7. **7.** Porovnejte obě strany Gaussova zákona a určete tak velikost intenzity elektrického pole E.

Poté:

8. **8.** Vyneste velikost intenzity elektrického pole jako funkci parametru specifikující Gaussovou plochu pro každou oblast prostoru.

Tento postup byste měli aplikovat na následující úlohu:

P Úloha 1: Soustředné válce



Velmi tenký nevodivý plášť válce o poloměru b a délce L obklopuje dlouhý, plný nevodivý válec o poloměru a a délce L, kde $b < a$. V celém objemu vnitřního válce je spojitě vyplněn nábojem o celkové velikosti $+Q$. Na povrchu vnějším plášti válce je spojitě rozprostřen náboj stejné velikosti, opačného znaménka $-Q$. Oblast $a < r < b$ je prázdná. S využitím Gaussova zákona určete intenzitu elektrického pole v celém prostoru.

Ř Úloha 1: Soustředné válce

Úlohu budeme řešit algoritmem uvedeným výše:

1. **Jaká je symetrie úlohy?**

   Cylindrická.

2. **Jaký je směr intenzity elektrického pole?**

   Elektrické pole je míří v radiálním směru cylindrické vztažné soustavy, jeho velikost je konstantní na cylindrických plochách s konstantním poloměrem.

3. Kolik různých oblastí v prostoru budeme vyšetřovat?

Budeme vyšetřovat tři oblasti, uvnitř a, mezi a a b, vně b.

4. Pro každou oblast v prostoru zvolte Gaussovu plochu, jakou proměnnou zvolíte pro parametrizaci těchto ploch? Jaké jsou obory hodnot této proměnné?

V každé oblasti budeme používat válcové plochy o poloměru r a výšce h, které jsou souosé se skutečnými válci. Plochu budeme popisovat poloměrem r, jehož obor hodnot je interval $< 0, \infty)$.

5. Pro oblast $r < a$ spočítejte tok Gaussovou plochou, kterou jste si vybrali. Ve vyjádření vystrměli mít i neznámou intenzitu elektrického pole.

Obě podstavy Gaussova válce nebudou přispívat k celkovému toku plochou (ze symetrie je pole rovnoběžné s touto plochou). Tok pláštěm válce tak je

$$\phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 2\pi r h E \, .$$

6. Pro oblast $r < a$ spočítejte náboj uzavřený ve zvolené Gaussově ploše.

Ve vnitřním válci je náboj homogenně rozložen. Náboj uzavřený v Gaussově ploše můžeme vyjádřit dvěma způsoby: (1) jako objemový podíl uzavřený v ploše nebo (2) využitím objemové nábojové hustoty ρ. Výpočet je proveden oběma způsoby:

$$1)\ Q_{\text{uvnitř}} = \frac{V_{\text{uvnitř}}}{V_{\text{celkem}}} Q = \frac{r^2 h}{a^2 L} Q \qquad 2)\ \rho = \frac{Q}{L\pi a^2} \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{uvnitř}} = \rho \pi r^2 h = \frac{r^2 h}{a^2 L} Q$$

7. Pro oblast $r < a$ dejte podle Gaussova zákona do rovnosti vztahy z 5. a 6. bodu, vyjádřete velikost intenzity elektrického pole.

$$2\pi r h E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{r^2 h}{a^2 L} Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Qr}{2\pi \varepsilon_0 a^2 L}} \, .$$

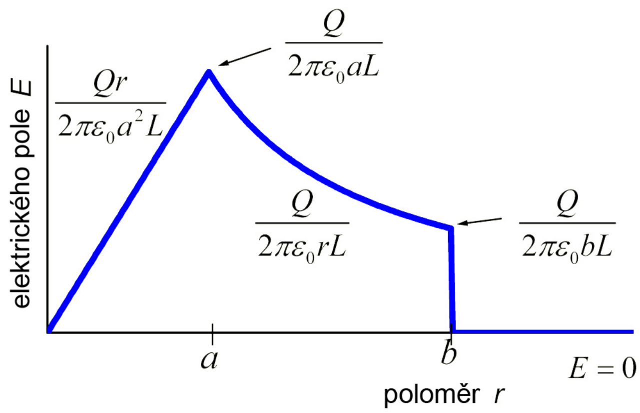
Zopakujte stejnou proceduru pro oblast $a < r < b$, vyjádřete intenzitu elektrického pole jako funkci r.

Náboj, který je uzavřen v ploše je konstantní, se vzrůstajícím poloměrem r se však mění celková plocha válce.

$$2\pi r h E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{h}{L} Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 r L}} \, .$$

Všimněte si, že intenzita ubývá jako $1/r$, tedy stejně jako v případě náboje umístěného na úsečce.

8. **Zakreslete intenzitu elektrického pole jako graf funkce v závislosti na parametru, který popisoval Gaussovou plochu. Graf nakreslete pro celý prostor.**



Další otázky:

Jaký je rozdíl potenciálů mezi body $r = a$ a $r = 0$? Tedy, kolik je $\Delta V = V(a) - V(0)$?

$$\Delta V = V(a) - V(0) = -\int_{r=0}^{a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{0}^{a} E(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = -\int_{0}^{a} E(r) dr = -\int_{0}^{a} \frac{Qr}{2\pi\varepsilon_0 a^2 L} dr =$$

$$= \boxed{-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}}.$$

Všimněte si, že rozdíl potenciálů je záporný, tedy vyšší potenciál je v místě, kde $r = a$.

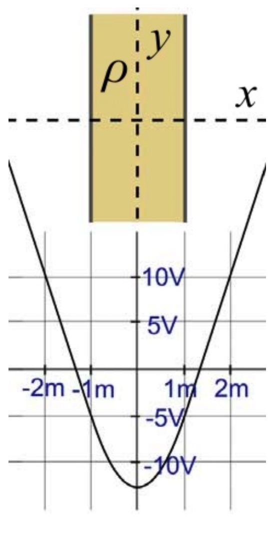
Jaký je rozdíl potenciálů mezi body $r = b$ a $r = a$? Jinými slovy spočítejte

$$\Delta V = V(b) - V(a) = -\int_{r=a}^{b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{a}^{b} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL} = \boxed{-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

Opět je rozdíl potenciálů záporný, neboť potenciál v místě $r = a$ je vyšší než v místě $r = b$.

P Úloha 2: Elektrický potenciál

Mějme nekonečnou homogenně nabitou desku (nekonečná ve směru $y-$ a $z-$, ohraničenou v x) s nábojovou hustotou ρ. Spodní obrázek zobrazuje průběh potenciálu desky jako funkci horizontální souřadnice x. Průběh je lineární pro $x > 1\,\mathrm{m}$ a $x < -1\,\mathrm{m}$, na intervalu $-1\,\mathrm{m} < x < 1\,\mathrm{m}$ je průběh potenciálu dán $V(x) = \frac{15}{2}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}x^2 - \frac{25}{2}\mathrm{V}$.



(a) **Spočítejte *x*-ovou komponentu elektrického pole pro $x < -1\,\mathrm{m}$?**

$$E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = 15\,\mathrm{V/m}$$

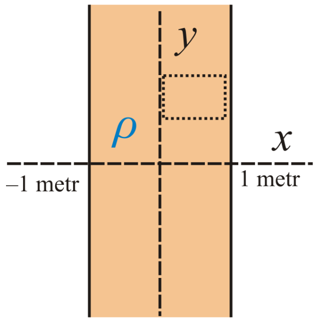
(b) **Spočítejte *x*-ovou komponentu elektrického pole pro $x > 1\,\mathrm{m}$?**

$$E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -15\ \mathrm{V/m}$$

(c) **Spočítejte *x*ovou komponentu elektrického pole pro $-1\,\mathrm{m} < x < 1\,\mathrm{m}$?**

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -15\ \mathrm{V/m^2} \cdot x \quad [\mathrm{V/m}].$$

(d) **Použitím Gaussova zákona spočítejte objemovou hustotu náboje uvnitř desky.**



Jako Gaussovskou plochu vezměme kvádr, jehož jedna stěna leží na $x = 0$ (kde $E = 0$), druhá stěna bude ve vzdálenosti $x < 1\,\mathrm{m}$. Z Gaussova zákona dostaneme

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA = -15\ \mathrm{V/m^2}\ xA = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho A x}{\varepsilon_0},$$

kde A je čelní plocha krabičky. Nábojová hustota tak je

$$\boxed{\rho = -15\ \mathrm{V/m^2} \cdot \varepsilon_0 \quad \left[\mathrm{C/m^3}\right]}.$$

Všimněte si, že nábojová hustota je záporná. Potenciál je konvexní funkce, deska proto musí být záporně nabitá. Všimněte si, že jsme kromě celkové jednotky uvedli i jednotku za číslem. Je to pro případ, abychom věděli kterou konstantu ε_0 máme dosadit pro vyjádření hustoty náboje.