ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

Řešené úlohy a postupy: Spojité rozložení náboje

Peter Dourmashkin

Obsah

2. Spojité rozložení náboje

2.1 Úkoly

1. Seznámení se s pojmy lineární, plošné a objemové hustoty náboje.
2. Spočítání intenzity elektrického pole náboje rozloženého na úsečce ze dvou různých směrů.
3. Ověření, že pokud rozměr úsečky jde k nule, dostaneme předpokládaný výsledek.

2.2 Algoritmy pro řešení problému

Abychom byli schopni spočítat elektrické pole vytvořené v prostoru spojitě rozloženým nábojem, musíme tento náboj rozdělit na menší části dq, každá část vytvoří příspěvek elektrického pole $d\mathbf{E}$. Pokud spojité rozložení rozdělíme na bodové náboje, můžeme psát

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

kde r je vzdálenost od náboje dq k bodu P (tam kde měříme elektrické pole $\mathbf{E}$) a $\hat{\mathbf{r}}$ je odpovídající jednotkový vektor. Obecně proto můžeme použít následující kroky:

(1) Rozdělte nábojové rozložení na malé části dq, od kterých znáte příspěvek $d\mathbf{E}$.

(2) Napište odpovídající příspěvky $d\mathbf{E}$ pro dq. Například příspěvek bodového náboje je $d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\mathbf{r}$ (druhý zápis je většinou výhodnější).

(3) Přepište element náboje dq jako

$$dq = \begin{cases} \lambda dl & \text{(délka)} \\ \sigma dA & \text{(plocha)} \\ \rho dV & \text{(objem)} \end{cases}$$

v závislosti na dimenzi objektu, na kterém je náboj rozložen.

(4) Nahraďte substituci dq ve výrazu $d\mathbf{E}$.

(5) Zvolte si vhodný systém souřadnic (kartézský, cylindrický nebo sférický) a vyjádřete si element diferenciálu (dl, dA nebo dV) a r v těchto souřadnicích (viz Tab. 2.1), pokud si potřebujete zopakovat souřadné systémy, využijte předchozích řešených úloh.

	Kartézské (x, y, z)	**Cylindrické** (ρ, ϕ, z)	**Sférické** (r, θ, ϕ)
dl	dx, dy, dz	$d\rho$, $\rho d\phi$, dz	dr, $rd\theta$, $r\sin\theta d\phi$
dA	$dxdy$, $dxdz$, $dxdz$	$d\rho dz$, $\rho d\phi dz$, $\rho d\phi d\rho$	$rdrd\theta$, $r\sin\theta drd\phi$, $r^2\sin\theta d\theta d\phi$
dV	$dxdydz$	$\rho d\rho d\phi dz$	$r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

Tabulka 2.1: Diferenciální elementy v jednotlivých systémech souřadnic.

(6) Přepište $d\mathbf{E}$ v integračních proměnných, ze symetrií zjistěte, které příspěvky se vyruší a které je třeba zahrnout do integrace.

(7) Integrujte výraz, abyste získali $\mathbf{E}$.

P Úloha 1: Spojité rozložení náboje

(1) Na plášť válce délky L a poloměru R, kde $L \gg R$, je rovnoměrně rozložen náboj Q. Na podstavách válce není žádný náboj.

a. Ze zadaných parametrů vyjádřete *povrchovou hustotu náboje* σ? Proveďte rozměrovou analýzu.

b. Předpokládejte, že jste ve vzdálenosti mnohem větší, než je poloměr válce R. Válec tak vypadá jako nabitá úsečka. Jaká je *lineární hustota náboje* λ zdánlivé nabité úsečky? Proveďte rozměrovou analýzu.

(2) Objem válce délky L a poloměru R ($L \gg R$) je rovnoměrně vyplněn nábojem Q.

a. Jaká je *objemová hustota náboje* ρ? Proveďte rozměrovou analýzu.

b. Předpokládejte, že jste ve vzdálenosti mnohem větší, než j poloměr válce. Válec tak vypadá jako nabitá úsečka. Jaká je *lineární hustota náboje* λ zdánlivé nabité úsečky? Proveďte rozměrovou analýzu.

Ř Úloha 1: Spojité rozložení náboje

(1)

a. $\sigma = Q/(2\pi RL)$,

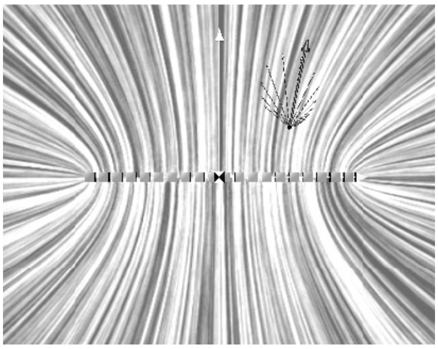
b. $\lambda = Q/L$.

(2)

a. $\rho = \dfrac{Q}{\pi R^2 L}$,

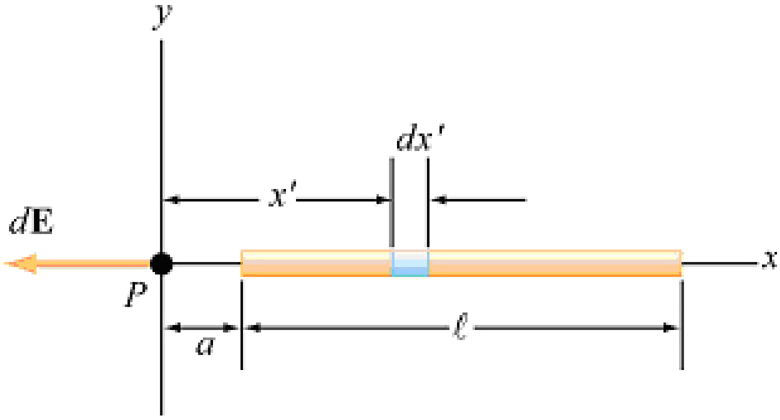
b. $\lambda = \dfrac{Q}{L}$.

Následující úlohy se budou zabývat elektrickým polem kolem nabité úsečky. Analyticky jsme schopni toto pole spočítat pouze pro dvě přímky v prostoru. V ostatních bodech musíme použít numerické metody pro výpočet elektrického pole. Celkovou reprezentaci pole můžete vidět v jedné z vizualizací na adrese http://www.aldebaran.cz/elmg/vizualizace_elst.html, kde si vyberte osmou vizualizaci. Obrázek dole ukazuje globální pole nabité úsečky zobrazené šumovou texturou



P Úloha 2: Elektrické pole nabité úsečky na ose symetrie

Drát délky l je homogenně nabit celkovým nábojem Q. Spočítejte elektrické pole v bodě P, který je ve vzdálenosti a od podélné osy úsečky.



a. Zapište integrál vyjadřující elektrické pole v bodě P.

b. Spočítejte tento integrál.

c. Obdržíme očekávaný výsledek, pokud půjde v limitě délka úsečky k nule?

Ř Úloha 2: Elektrické pole nabité úsečky na ose symetrie

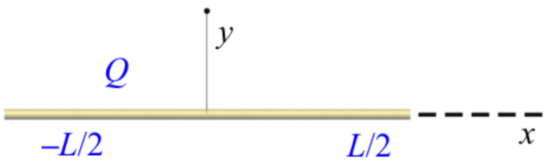
a. $\mathbf{E} = -k_e \hat{\mathbf{i}} \int\limits_a^{a+\ell} \dfrac{\lambda dx'}{(x')^2}$,

b. $\mathbf{E} = k_e \lambda\, \hat{\mathbf{i}} \left[\dfrac{1}{x'}\right]_a^{a+\ell} = -k_e \hat{\mathbf{i}} \dfrac{Q}{a(a+\ell)}$,

c. Pokud ℓ půjde v limitě k nule, dostaneme, jak jsme očekávali, pole bodového náboje $\mathbf{E} = \left(-k_e \dfrac{Q}{a^2}\right)\hat{\mathbf{i}}$.

P Úloha 3: Elektrické ve směru kolmém k nabité úsečce

Na tyči délky L je rovnoměrně rozprostřen náboj Q po celé její délce.



Vyjádřete intenzitu elektrického pole $\mathbf{E}$ na ose kolmé k tyči ve vzdálenosti y od středu (viz obr. nahoře).

Ř Úloha 3: Elektrické ve směru kolmém k nabité úsečce

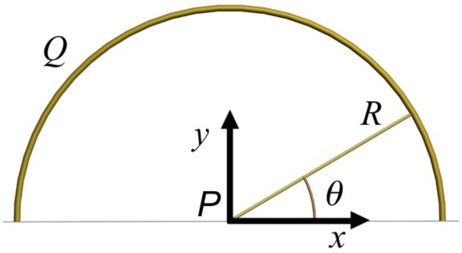
Uvažme malý element náboje dq umístěný na segmentu dx ve vzdálenosti x od počátku souřadnic (viz obr.). Z délkové hustoty náboje vyjádříme, že $dq = \lambda dx$, elektrické pole způsobené elementem dq tak je $d\mathbf{E} = k_e \frac{dq}{r^3}\mathbf{r}$. Z obrázku je zřejmé, že $\mathbf{r} = -x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, takže dostaneme

$$d\mathbf{E} = k_e \frac{dq}{r^3}\mathbf{r} = k_e \frac{\lambda dx}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}\right).$$

Ze symetrie problému zjistíme, že x-ová složka elektrického pole vymizí, proto celkové pole v daném bodě můžeme integrovat jako

$$\mathbf{E} = k_e y\lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{j}}.$$

P Úloha 4: Nabitá půlkružnice



Polokruhová tyč o poloměru R je homogenně nabitá celkovým nábojem Q.

a. Vyjádřete hodnotu elektrického pole ve středu polokružnice.

b. Spočítejte elektrický potenciál ve středu polokružnice.

Ř Úloha 4: Nabitá půlkružnice

Stejně jako v předchozím případě si vyjádříme elektrické pole elementu dq, v tomto případě však budeme integrovat podél úhlu θ. Element náboje tak můžeme vyjádřit jako $dq = \lambda R d\theta$, nyní můžeme napsat intenzitu elektrického pole elementu dq:

$$d\mathbf{E} = k_e \frac{dq}{r^3}\mathbf{r} = k_e \frac{\lambda R d\theta}{R^3}\left(-R\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - R\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right).$$

Ze symetrie úlohy x-ová složka intenzity se odečte, integrovat tak musíme pouze y-ovou složku

$$E_y = \int_{\text{oblouk}} dE_y = -\int_0^{\pi} k_e \frac{\lambda}{R}\sin\theta d\theta = -2k_e \frac{\lambda}{R}.$$

Z toho

$$\mathbf{E} = E_y\,\hat{\mathbf{j}} = -\frac{2k_e\lambda}{R}.$$

Výpočet potenciálu je mnohem jednodušší, neboť všechen náboj je ve stejné vzdálenosti R od středu, potenciál v tomto bodě je tedy

$$V = k_e \frac{Q}{R}.$$