ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

Řešené úlohy a postupy – Matematika

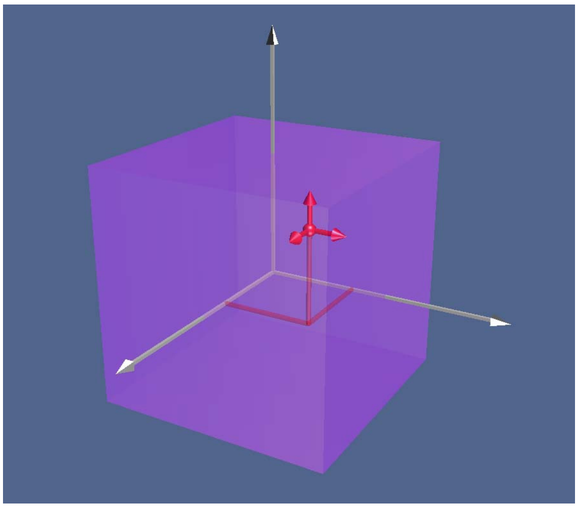
Peter Dourmashkin

Obsah

1. Matematický aparát použitý v kurzu

1.1 Souřadnicové systémy

V celém kurzu používáme tři různé systémy souřadnic – pravoúhlý kartézský, cylindrický (válcový) nebo sférický. Abyste se sžili s jednotlivými systémy, projděte si **vizualizace** znázorňující jednotlivé systémy (nebo na začátku kurzu zvolte *Vizualizace*, pak *Vektorová pole* a vyberte vizualizaci *Souřadnicové systémy*). Po nahrání vizualizace uvidíte kartézský souřadnicový systém:



Ve vizualizaci můžete:

1. Přecházet mezi jednotlivými souřadnými systémy klávesou C.
2. Pohybovat jednotkovými vektory šipkami (ve třetím směru použijte klávesu CTRL+šipky)
3. Kliknutím a tažením myši můžete měnit směr pohledu na vztažnou soustavu.

P Úloha 1: Souřadnicové systémy

Jaký je hlavní rozdíl mezi jednotkovými vektory sférického nebo cylindrického souřadnicového systému, pokud je srovnáme s kartézským souřadným systémem?

Ř Úloha 1: Souřadnicové systémy

V kartézském souřadném systému jsou osy fixní (vektory $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ a $\hat{\mathbf{k}}$ míří stále do jednoho směru). Ve sférickém nebo cylindrickém systému souřadnic směr jednotkových vektorů závisí na poloze v prostoru.

1.2 Derivace a gradient

Pro jednodimenzionální funkci jedné proměnné, např. $f(x)$, derivace $\dfrac{df(x)}{dx}$, také často značená pouze jako $f'(x)$, je určena mírou přírůstku funkce na nezávislé proměnné (x). Derivace jako směrnice tečny funkce v daném bodě jsou velmi užitečné. Pokud funkce závisí na více proměnných, např. $f(x,y,z)$, můžeme napsat více derivací, které jsou označované jako parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ a $\frac{\partial f}{\partial z}$. Parciální derivace mají stejný význam jako v jednorozměrném případě, vyjadřují tedy míru změny funkce, pokud měním jednu proměnnou, zatímco ostatní jsou fixní.

P Úloha 2: Parciální derivace

Uvažme funkci $V(x,y,z)=\frac{kq}{r}=\frac{kq}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Spočítejte $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ a $\frac{\partial V}{\partial z}$.

Ř Úloha 2: Parciální derivace

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{kq}{2}\frac{2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{kqx}{r^3}.$$

Obdobně získáme i $\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{kqy}{r^3}$ a $\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{kqz}{r^3}$.

Je užitečné také zavést gradient vícerozměrné skalární funkce. Gradient je vektor, který v každém bodě prostoru je tečný k dané funkci. Můžeme ho spočítat:

$$\mathrm{gradient}(f)=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}.$$

P Úloha 3a: Gradient

Opět uvažme funkci $V(x,y,z)=\frac{kq}{r}=\frac{kq}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Spočítejte gradient ∇V.

Ř Úloha 3a: Gradient

$$\nabla V=\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}=-\frac{kqx}{r^3}\hat{\mathbf{i}}-\frac{kqy}{r^3}\hat{\mathbf{j}}-\frac{kqz}{r^3}\hat{\mathbf{k}}=-kq\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Tato rovnost by nám měla připadat známá. Výsledek je záporně vzaté elektrické pole tvořené bodovým nábojem a funkce V je potenciál bodového náboje. Mezi těmito veličinami je vztah

$$\mathbf{E}=-\nabla V.$$

P Úloha 3b: Směr gradientu

Míří gradient ∇V tečně vzhůru k funkci V? Vysvětlete.

Ř Úloha 3b: Směr gradientu

Gradient míří opačným směrem, než vektor $\mathbf{r}$, tedy do středu systému, kde potenciál V roste nade všechny meze, gradient tedy musí mířit vzhůru.

1.3 Vícerozměrná integrace

Přestože v tomto kurzu poměrně častou používáme integraci, většina integrálů je VELMI jednoduchá (většina proměnných jsou konstanty, které můžeme vytknout před integrál). Studenti mívají ale problémy pochopit koncept integrace a to jak sestavit nebo zapsat integrál. V následující části se proto spíše zaměříme na typy integrálů. Pokud V příkladech hodně počítáte, pravděpodobně problém neřešíte správně.

1.3.1 Integrace jako součet částí

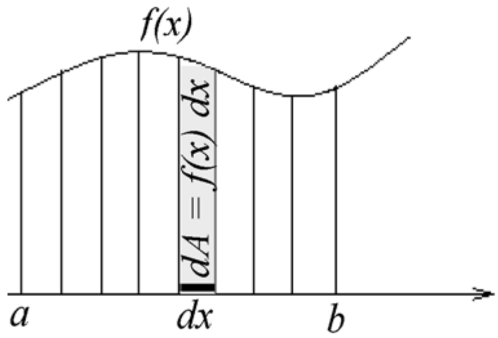
Určitý integrál funkce o jedné proměnné můžeme zapsat jako $\int_a^b f(x)dx$, kde dx je diferenciál, tedy malý element na ose x. Pro mnoho studentů je diferenciál pouze formální notace, jakýsi apendix integrálu. Myslím si však, že diferenciál je nejdůležitější součástí integrálu a integrovat bychom měli začít pouze s diferenciálem. Například, pokud chceme znát celkový náboj na objektu prapodivného tvaru a známe jeho nábojovou hustotu, celkový náboj jednoduše spočítáme jako $Q = \int dQ$, nebo pokud chceme znát plochu určité oblasti, rovněž ji jednoduše spočítáme jako $A = \iint dA$.

Můžete se ptát, co tím získáme? Pokud chceme získat celkovou hodnotu něčeho (ať už je to plocha nebo náboj), musíme si prostor rozdělit na jednotlivé části a sečíst příspěvky těchto částí. Diferenciál (například dQ) je tak malá část integračního prostoru, (1) kterou můžeme snadno zapsat a (2) můžeme tímto způsobem zapsat celý prostor, přes který integrujeme.

P Příklad 1: Plocha pod funkcí

Předpokládejme, že chceme spočítat plochu pod funkci $f(x)$ ohraničenou $x=a$ a $x=b$. Rozdělíme si proto celkovou plochu A na určité množství malých obdélníčků o šířce dx a výšce $f(x)$. Plochu každého z těchto malých obdélníčků můžeme jednoduše zapsat jako

$$dA = f(x)dx.$$



Celkovou plochu tak spočítáme jako

$$A = \iint dA = \int_a^b f(x)dx.$$

Volba plochy dA splňovala oba požadavky, tedy mohli jsme ji jednoduše zapsat (známe plochu obdélníčku) a postupným procházením na ose x z bodu a do bodu b získáme plochu celé oblasti.

1.3.2 Vícerozměrná integrace

Pokud se dostaneme k vícerozměrným integrálům, potřebujeme nové značení. Místo přímého procházení kolem jedné přímé osy (např. osa x v příkladu nahoře) můžeme ve třírozměrném světě procházet po křivkách (jednorozměrné objekty), plochách (2D) nebo objemech (3D). Pro každou další dimenzi potřebujeme další proměnnou, abychom věděli, kde se na daném objektu nacházíme – u křivkového integrálu nám polohu jednoznačně určí vzdálenost od konce křivky, u plošného integrálu potřebujeme proměnné dvě, proto používáme i dvě značky integrálu. Máme tak

Křivkové integrály: $s = \int ds$.

Povrchové integrály: $A = \iint dA$.

Objemové integrály: $V = \iiint dV$.

U křivkových a plošných integrálů navíc rozlišujeme, zda se jedná o otevřené nebo uzavřené křivky/plochy. Uzavřené křivky jsou takové, kde počáteční bod splývá s bodem koncovým (obvod kruhu je uzavřená křivka, úsečka není). Uzavřené plochy jsou takové, uvnitř kterých je uzavřen nějaký objem (povrch koule je uzavřená plocha, rovina uzavřenou plochou není). Integraci po uzavřené křivce nebo ploše značíme kolečkem přes integrační znaménko

Integrál po uzavřené křivce: $s = \oint ds$.

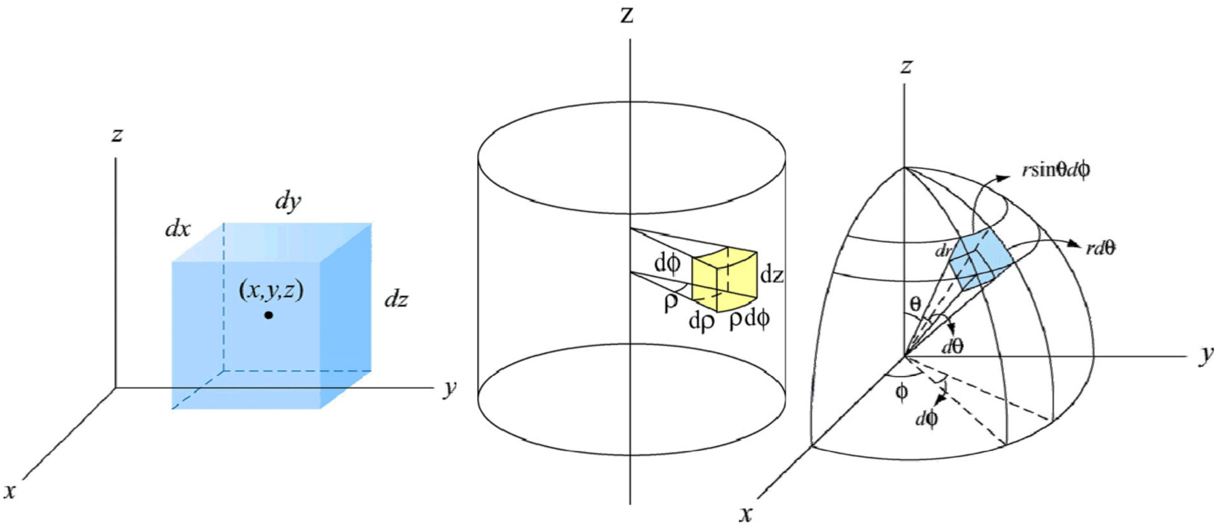
Integrál po uzavřené ploše: $A = \oiint dA$.

Toto rozdělení nemá vliv na vlastní výpočet integrálu, ale pomáhá určit tvar integrované oblasti.

1.3.3 Diferenciály v různých souřadnicových systémech

Nakonec si povíme, jak rozdělit 3d objekty v různých souřadnicových systémech. V pravoúhlých kartézských souřadnicích jsou diferenciály přímočaré, křivky si rozdělíme na elementy $ds = dx$ (dy nebo dz), plochy rozdělíme na čtverce ($dA = dxdy$ nebo $dxdz$ …). Objemy integrujeme přes diferenciální krychličky ($dV = dxdydz$).

Podobné objekty můžeme vytvořit i v ostatních souřadnicových systémech, viz obr.:

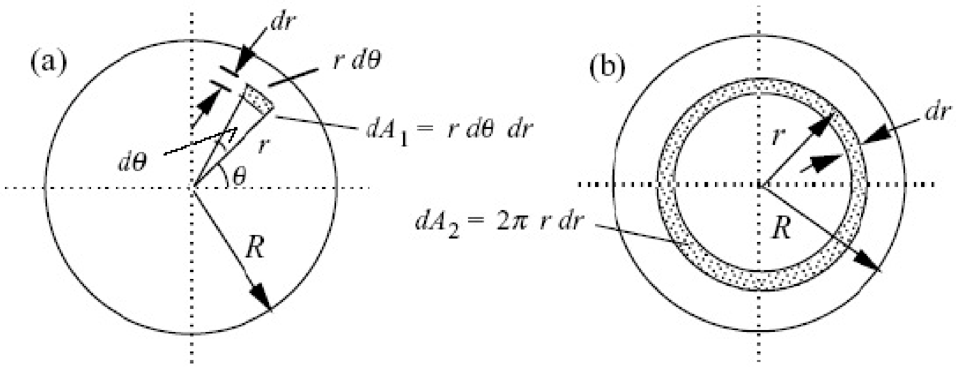


Obr. 2: Objemové diferenciály v jednotlivých vztažných soustavách.
U cylindrických souřadnic je jednotková krychle o hranách $d\rho$, $\rho d\phi$ a dz.
U sférických souřadnic je jednotková krychle o hranách dr, $rd\theta$ a $r\sin\theta d\phi$.

Většinou je pohodlnější integrovat přes větší diferenciály (nebo zavést substituci). V našem příkladě jsme si plochu zapsali jako $dA = f(x)dx$ a integrovali pouze podél x, místo toho abychom počítali integrál $dA = dxdy$ a integrovali nejdříve od $y = 0$ do $f(x)$ a pak podél x. V podstatě jsme tento integrál přímočaře spočítali v naší hlavě.

Příklad 2: Obsah kruhu

Zapište integrálem obsah kruhu o poloměru R dvěma různými způsoby.



(a) $A = \iint\limits_{\text{kruh}} dA = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}(r d\theta)\, dr$.

(b) $A = \iint\limits_{\text{kruh}} dA = \int_{r=0}^{R} 2\pi r dr$.

Úloha 4: Objem válce

Napište si sami objem válce v cylindrických souřadnicích. Válec je o poloměru R a výšce H. Zapište jej:

(a) Jako 3D integrál přes diferenciály z obrázku 2.

(b) Jako 2D integrál, integrujte přes prstýnky o poloměru r, tloušťky dr a výšky dz.

(c) Jako 1D integrál cylindrických plášťů o poloměru r, tloušťky dr a výšky H.

(d) Jako 1D integrál disků o poloměru R a tloušťky dz.

Ř Úloha 4: Objem válce

(a) $V = \iiint dV = \int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r d\theta dr dz$.

(b) $V = \iiint dV = \int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{R} 2\pi r dr dz$.

(c) $V = \iiint dV = \int_{r=0}^{R} 2\pi r H dr$.

(d) $V = \iiint dV = \int_{z=0}^{H} \pi r^2 dz$.

1.3.4 Hustota náboje – příklad integrace skalární funkce

Náboj většinou nebývá umístěn bodově, ale bývá rozložen na objektech buď rovnoměrně (s určitou konstantní nábojovou hustotou) nebo s hustotou náboje závislou na poloze v prostoru. Pro 1, 2 a 3 rozměrné objekty máme různá značení nábojové hustoty:

1D: $dq = \lambda ds$ (λ v [C/m]), 2D: $dq = \sigma dA$ (σ v [C/m^2]), 3D: $dq = \rho dV$ (ρ v [C/m^3]).

Úloha 5: Celkový náboj

Spočítejte celkový náboj na jednotlivých objektech, pokud znáte příslušnou hustotu.

(a) Na kruhu o poloměru R s konstantní lineární hustotou λ.

(b) V plné kouli a poloměru R s objemovou nábojovou hustotou danou $\rho(r) = \rho_R \dfrac{R}{r}$.

Ř Úloha 5: Celkový náboj

(a) $Q = \lambda l = 2\pi R\lambda$.

(b)
$$Q = \iiint dq = \iiint \rho dV = \int_{r=0}^{R} \left(\rho_R \frac{R}{r}\right)\left(4\pi r^2\right) dr =$$
$$= 4\pi\rho_R R \int_{r=0}^{R} r dr = 4\pi\rho_R R \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = 2\pi\rho_R R^3 .$$

Proveďte si i rozměrovou analýzu: ρ v [C/m^3], R v [m] a tedy Q v [C].

1.3.5 Křivkové integrály vektorových funkcí skalárně násobených posunutím

Integraci skalárních funkcí doplníme o integrování vektorových funkcí, které jsou skalárně násobeny vektorem (délky, posunutí, atp.). Výsledkem skalárního součinu je funkce, kterou můžeme integrovat stejným způsobem, jež jsme si uvedli výše. Například, pokud na objekt působí síla $\mathbf{F}$ a posune jej o vzdálenost $d\mathbf{s}$, vykoná práci $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Pokud se objekt pohybuje po libovolné trajektorii, celková práce, kterou síla vykonala, můžeme spočítat jako

$$W = \int dW = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} .$$

Skalární součin vyjadřuje, že práci koná pouze ta část síly, která se promítá do směru změny polohy.

P Úloha 6: Náboj v elektrickém poli

Na náboj o velikosti q v homogenním elektrickém poli $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{j}}$ působí síla $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Jakou práci vykoná elektrické pole, pokud se částice pohybuje podél polokruhové dráhy o poloměru R se středem v počátku souřadné soustavy v rovině xy, tedy z bodu $(x, y) = (0, R)$ do bodu $(0, -R)$?

Ř Úloha 6: Náboj v elektrickém poli

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int qE_0\hat{\mathbf{j}} \cdot Rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = qE_0R \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\hat{\mathbf{j}} \cdot \left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right) =$$
$$= qE_0R \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = -2qE_0R .$$

Můžeme také vyjít z toho, že elektrické pole je konzervativní a proto celková práce nezávisí na cestě, kterou si vybereme, můžeme tak počítat pouze lineární pohyb podél osy y

$$W=\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int qE_0\hat{\mathbf{j}}\cdot dy\hat{\mathbf{j}}=qE_0\int_{y=R}^{R} dy=-2qE_0R\,.$$

1.3.6 Plošné integrály vektorových funkcí skalárně násobených normálou – tok

Jedná se o dvourozměrnou analogii předešlého, kdy předtím jsme se ptali na to, kolik z daného vektoru míří do cesty, přes kterou integrujeme, nyní se ptáme na to, kolik z vektorového pole teče skrz plochu, přes kterou integrujeme. Hodnota je často také označována jako tok vektorové funkce $\mathbf{F}$, tok plochou S je dán jako

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA=\iint_S F_n dA\,,$$

kde $d\mathbf{A}=d\hat{\mathbf{n}}$ a $\hat{\mathbf{n}}$ je jednotkový vektor normálový (kolmý) k ploše. Skalární součin $F_n=\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ je komponenta vektoru $\mathbf{F}$ rovnoběžná s vektorem $\hat{\mathbf{n}}$.

Jako příklad funkce $\mathbf{F}$ můžeme mít míru, kterou voda teče cylindrickým potrubím na jednotku plochy za sekundu (její jednotka je tak [litr/m^{2}s]). *Tok* této funkce na nějaké ploše A je celková hodnota vody, která protekla danou plochou za jednotku času. Je zřejmé, že pokud plochou pokryjeme celý průřez trubky, celková hodnota toku nebude záviset na tom, jak jsem si danou plochu zvolili.

P Příklad 3: Tok potrubím

Ukažte, že tok homogenního proudění $\mathbf{F}=f_0\hat{\mathbf{k}}$ trubkou o poloměru R je stejný, pokud budeme integrovat přes rovný disk nebo přes povrch polokoule (oba povrchy pokryjí celý průřez trubky).

Z definice proudění vidíme, že trubka jde podél osy z. Normála rovného disku bude paralelní se směrem proudění ($\hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{k}}$) a integrál je zřejmý

$$\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{A}=\iint_S f_0 dA=f_0\pi R^2\,.$$

Integrace přes hemisféru je o trošku obtížnější, protože normálový vektor je ve směru vektoru $\mathbf{r}$, tedy

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\iint_S f_0\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}}dA=f_0\iint_S \cos\theta dA=f_0\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\cos\theta R\sin\theta d\varphi R d\theta=$$

$$=f_0\pi R^2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta d\theta=f_0\pi R^2\left[\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}=f_0\pi R^2\,.$$

Dle očekávání je výsledek stejný, jak pro hemisféru, tak pro disk. Celkový tok trubkou musí být pořád stejný a je tedy jedno po jaké ploše integrujeme.

P Úloha 7: Tok elektrického pole

(a) Uvažme homogenní elektrické pole $\mathbf{E} = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}$, které teče plochou o obsahu A. Jaký je tok elektrického pole plochou, pokud plocha leží

(i) v rovině xz a normála je kladná v kladném směru osy y,

(ii) v rovině xy a normála míří do kladného směru osy z.

(b) Válec o poloměru R a výšce h je orientován svojí osou symetrie podél osy z. Homogenní elektrické pole $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{j}}$ vstupuje do válce. Určete tok $\iint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA$ pro tu stranu válce, kde $y > 0$ a normálový vektor míří z vnitřku válce ven.

Nápověda: Pokud ϕ je úhel v rovině xy měřený od osy x ke kladnému směru osy y, jak vyjádříme vektor $\hat{\mathbf{n}}$ na straně válce $y > 0$ za použití ϕ, $\hat{\mathbf{i}}$ a $\hat{\mathbf{j}}$? Jak vyjádříme součin $\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}$? Jak vyjádříme diferenciál plošky pláště válce za použití R, dz a ϕ?

Ř Úloha 7: Tok elektrického pole

(a)

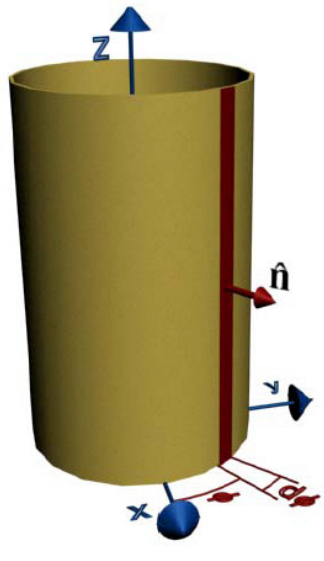
$$\Phi_E = \iint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} =$$

(i)

$$= \iint_A \left(a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot dA\hat{\mathbf{j}} = \iint_A b\,dA = bA\,,$$

(ii)

$$= \iint_A \left(a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot dA\hat{\mathbf{k}} = 0\,.$$



(b)

$$\Phi_E = \iint_{\text{válec } y>0} \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = \int_{\phi=0}^{\pi} E_0\hat{\mathbf{j}}\cdot\left(\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{j}}\right)hR\,d\phi =$$

$$= E_0 hR\int_{\phi=0}^{\pi}\sin\phi\,d\phi = 2E_0 hR\,.$$

Tok vyšel kladný, protože elektrické pole, stejně jako vektor $\hat{\mathbf{n}}$ míří do kladného směru osy y.