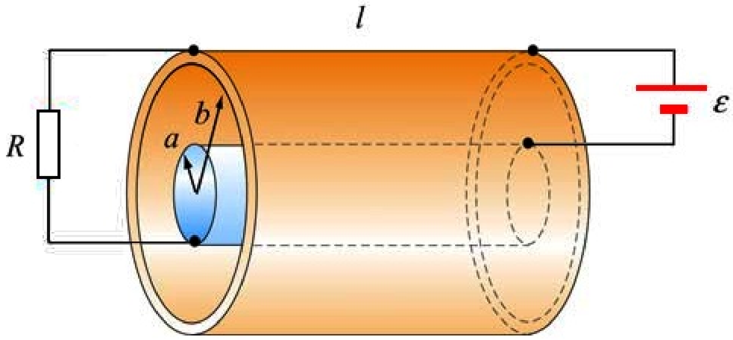
ÚLOHY Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU
SADA 12

Peter Dourmashkin

Obsah

Sada 12

P Úloha 1: Koaxiální kabel



Koaxiální kabel sestává ze dvou dlouhých válců s koncentrickými kruhovými průřezy. Vnitřní vodič má poloměr a, vnější má poloměr b, délka obou je l, s délkou $l >> b$. Schéma je znázorněno na obrázku. Odpor obou vodičů je tak malý, že jej považujeme za nulový. Kabel přenáší stejnosměrnou energii z baterie do zátěže. Baterie dodává elektromotorické napětí $\mathcal{E}$ mezi oba vodiče na jednom konci kabelu a zátěž je rezistor R propojující druhý konec kabelu. Proud I teče vnitřním vodičem a vrací se zpět vnějším. Baterie nabíjí vnitřní vodič nábojem $-Q$ a vnější nábojem $+Q$.

(a) Najděte rozložení velikosti a směru elektrického pole.

(b) Najděte rozložení velikosti a směru magnetického pole.

(c) Spočítejte Poyntingův vektor v kabelu.

(d) Integrací Poyntingova vektoru najděte výkon, který protéká koaxiálním kabelem.

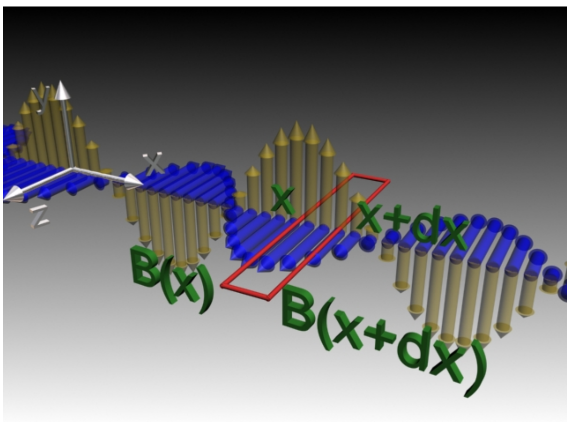
(e) Porovnejte výsledek vašeho výpočtu s energií rozptýlenou na rezistoru.

P Úloha 2: Vlnová rovnice

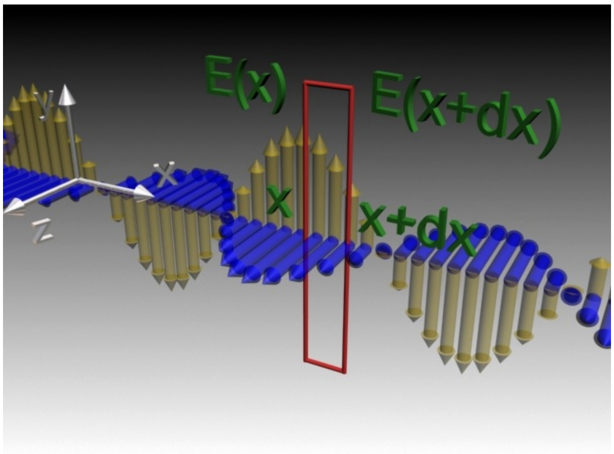
V této úloze si odvodíte vlnovou rovnici. Ukážeme si tím, že elektromagnetické záření je přirozeným výsledkem Maxwellových rovnic.

Představte si vlnu šířící se podél osy, jejíž magnetické pole je polarizováno podél osy z a elektrické pole podél osy y.

(a) Použijte zákon celkového proudu (podle obdélníkové smyčky zobrazené na obrázku) k výpočtu vztahu mezi prostorovou derivací magnetického pole a časovou derivací elektrického pole.



(b) Použijte Faradayův indukční zákon (podle obdélníkové smyčky zobrazené na obrázku) k výpočtu vztahu mezi prostorovou derivací elektrického pole a časovou derivací magnetického pole.



(c) Nyní máte dvě diferenciální rovnice v parciálních derivacích spojující prostorové a časové derivace **E** a **H**. Naneštěstí jsou provázané (tedy **E** závisí na **B** a **B** závisí na **E**). Abyste vyřešili rovnice tohoto typu, musíte je separovat – získat jednu rovnici pouze pro **E** a jinou, která obsahuje jen **B**. K tomuto účelu jednu rovnici budete derivovat podle x a druhou podle času t. Jelikož derivace komutují (časová derivace následovaná prostorovou derivací je totéž jako prostorová derivace následovaná časovou derivací), zjistíte, že můžete jednu rovnici dosadit do druhé a získáte rovnici jen pro **E** nebo jen pro **B**, Změníte-li pořadí výchozího derivování Maxwellových rovnic, dostanete druhou rovnici.

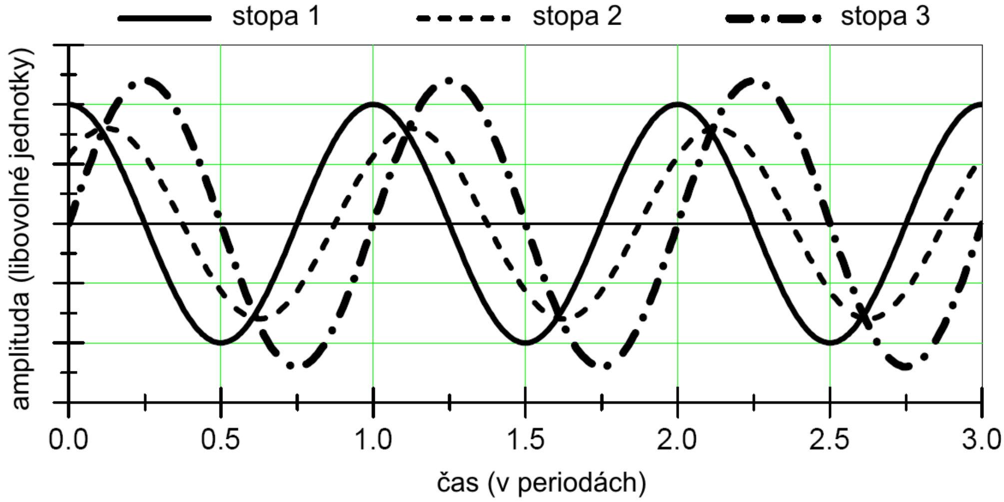
Tyto nové rovnice jsou vlnové rovnice! Jde o diferenciální rovnice druhého řádu, druhá prostorová derivace na jedné straně, druhá časová derivace na druhé.

(d) Nakonec proveďte zkoušku, že zobrazená vlna je opravdu řešením právě odvozené rovnice. Budeme se věnovat elektrickému poli. Napište rovnici (při pohledu na obrázek) vyjadřující **E** jako funkci času a polohy. Mějte na mysli, že jde o běžící vlnu (z obrázku byste měli být schopni říci, na kterou stanu se šíří). Neznáte amplitudu, periodu ani vlnovou délku vlny, pro tyto parametry použijte proměnné, ale ujistěte se, že vyhovují vaší vlnové rovnici. Měly by vést k obecně známému vztahu mezi periodou a vlnovou délkou.

🅿 Úloha 3: Pět krátkých otázek

Otázka A

Máte RLC obvod na kterém měříte tři průběhy: proud, napětí na kapacitním článku a napětí na zdroji, ale nevíte, který je který. V myšleném experimentu máte nastavenu frekvenci zdroje na rezonanční frekvenci obvodu a potom buď zasunete jádro do cívky nebo z ní jádro vytáhnete. Nato naměříte tři ukázané průběhy (a jako ve skutečném experimentu má každá křivka jiné měřítko).



Které z následujících tvrzení je pravdivé?

(a) Průběh 2 je

1) proud,
2) napětí na zdroji,
3) napětí na kondenzátoru.

(b) Jádro jste

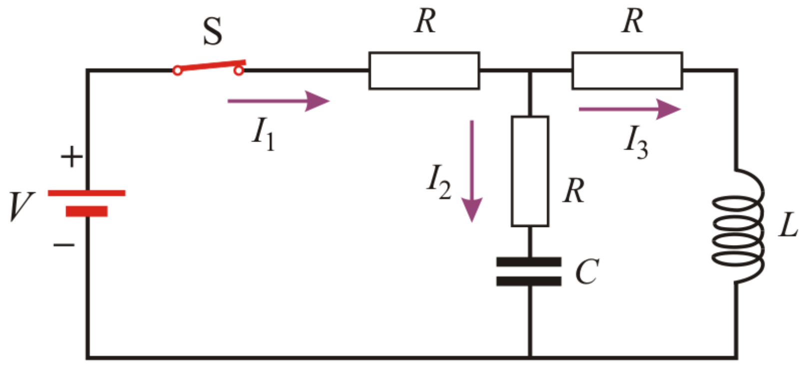
1) zasunuli do cívky,
2) vysunuli z cívky.

(c) Frekvence se tím z původní rezonanční

1) zvýšila,
2) snížila.

Otázka B

Obvod je tvořen baterií s elektromotorickým napětím V, cívkou s indukčností L, kondenzátorem s kapacitou C a trojicí rezistorů se stejnou hodnotou odporu R, viz náčrtek. Kondenzátor není ve výchozím stavu nabitý, v obvodu netečou žádné proudy a spínač S je rozpojený. Najděte proudy v ustáleném stavu po sepnutí spínače do stavu ukázaného na obrázku!



Otázka C

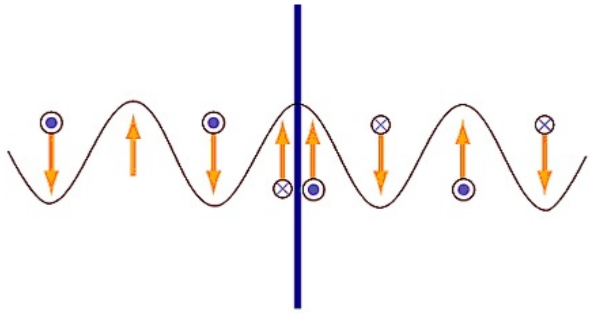
Kladně nabitá fólie kmitající nahoru a dolů vytváří rovinnou elektromagnetickou vlnu. V zobrazeném okamžiku:

(a) kolmo k nárysně kmitá

1) elektrické pole,
2) magnetické pole.

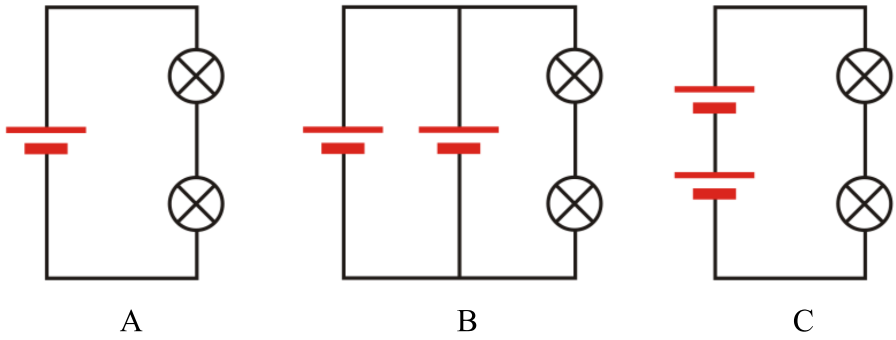
(b) stránka se pohybuje

1) nahoru,
2) dolů.



Otázka D

V zobrazených obvodech jsou použity identické zdroje i žárovky. Pro všechny tři obvody seřaďte vzestupně podle velikosti výkon rozptýlený na horní z dvojice žárovek.



Otázka E

Indukce magnetického pole rovinné elektromagnetické vlny je vyjádřena vztahem

$$\mathbf{B} = 10^{-6}\hat{\mathbf{j}}\cos\left(3x + 6\times 10^{8} t\right)$$

Číselné hodnoty jsou udány v jednotkách SI.

(a) V jakém směru se vlna pohybuje?

(b) Jaká je fázová rychlost vlny?

(c) Najděte amplitudu intenzita elektrického pole.

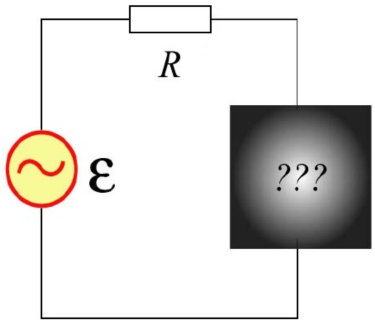
(d) V jakém směru kmitá intenzita elektrického pole?

P Úloha 4: Solární laboratoř

Navrhněte solární observatoř. Požadavkem je, že se nemá pohybovat po žádné dráze, prostě si má klidně sedět zavěšena nad Sluncem. Musíte mít v rovnováze gravitaci a tlak záření. Odhadněte hmotnost observatoře a vyberte pro ni použitelné rozměry.

Návod: Materiál na plachty musí velice lehký. Současné materiály mají plošnou hustotu kolem $1\ \mathrm{g/m^2}$, ale jsou vyvíjeny materiály s hustotou nižší než $0{,}05\ \mathrm{g/m^2}$. Slunce má hmotnost 2×10^{30} kg a poloměr 7×10^{8} m. Vyzařuje výkon $3{,}9\times10^{26}$ W. Perioda rotace Slunce je zhruba 30 dní.

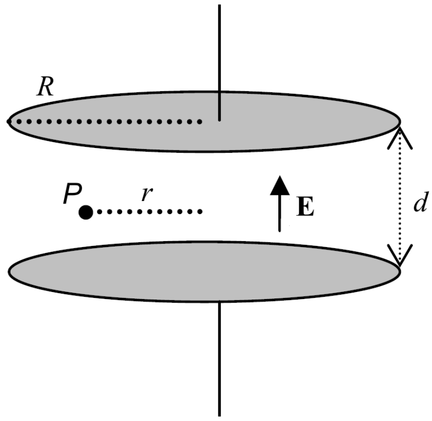
P Úloha 5: Obvod s neznámým reaktivním prvkem



Obvod ukázaný na obrázku je napájený střídavým zdrojem, který dodává elektromotorické napětí $\mathcal{E}(t) = \varepsilon_{\mathrm{m}} \sin(\omega t)$, obsahuje rezistor s odporem $R = 1\ \Omega$, a „černou skříňku“, ve které je buď indukční prvek, nebo kapacitní prvek, nebo oboje. Amplituda elektromotorického napětí $\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = 1$ V. Nejprve měříme proud v obvodu na frekvenci $\omega = 1$ rad/s a zjistíme, že proud předchází napětí přesně o $\pi/4$ radiánů. Potom měříme proud v obvodu na frekvenci $\omega = 2$ rad/s a zjistíme, že se proud vůči napětí zpožďuje přesně o $\pi/4$ radiánů.

Nakonec nastavíte frekvenci tak, aby úbytek napětí na rezistoru byl maximální. Najděte tuto frekvenci a časovou závislost napětí na neznámém prvku na této frekvenci. *Poznámka*: Pokud je neznámý prvek složen z dvou prvků, najděte závislost napětí na čase pro každý z nich zvlášť. Výsledek zapište nejprve obecně pomocí proměnných a pak najděte číselné hodnoty těchto proměnných.

P Úloha 6: Kondenzátor



Deskový kondenzátor je tvořený dvěma rovnoběžnými kruhovými deskami, každá má poloměr R ve vzdálenosti d. Elektrické pole mezi deskami směřuje vzhůru.

(a) Předpokládejme, že elektrické pole je homogenní mezi deskami a nulové mimo ně (zanedbáváme okrajové jevy). Jaká celková energie je nakumulovaná v elektrickém poli kondenzátoru?

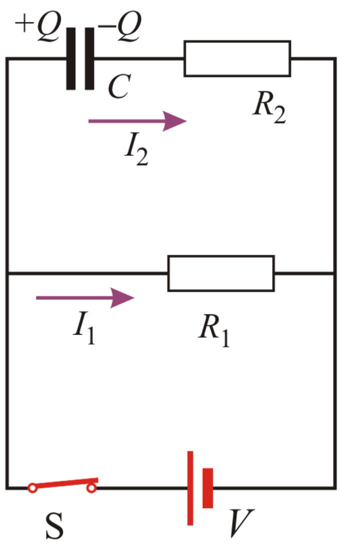
(b) Předpokládejme dále, že elektrické pole narůstá s časem. ($dE/dt > 0$). Bod P leží mezi deskami na poloměru $r < R$ (viz obrázek). Odvoďte výraz pro velikost indukce magnetického pole B v bodě P a najděte směr $\mathbf{B}$ v bodě P.

(c) Najděte amplitudu a směr Poyntingova vektoru.

(d) Odvoďte výraz pro celkovou elektromagnetickou energii protékající kondenzátorem za jednotku času skrze poloměr $r = R$. Zapište rovnici spojující tuto hodnotu s energií elektrického pole nakumulovanou v kondenzátoru (viz podotázka (a)).

Úloha 7: RC obvod

V obvodu je kondenzátor s kapacitou C, dva rezistory R_1 a R_2, zdroj s elektromotorickým napětím V a spínač S. Kondenzátor je ve výchozím stavu vybitý a spínač je rozpojený. V čase $t = 0$ se sepne spínač. Náboj na kondenzátoru v čase $t > 0$ je $Q(t)$.



(a) Zapište druhý Kirchhoffův zákon pro dolní smyčku v souladu se směry proudů vyznačených v obrázku při obcházení obvodu ve směru hodinových ručiček.

(b) Zapište druhý Kirchhoffův zákon pro vnější smyčku (přes zdroj, kondenzátor a R_2) v souladu se směry proudů vyznačených v obrázku při obcházení obvodu ve směru hodinových ručiček. Jaký bude vztah mezi I_2 a $Q(t)$?

(c) Zapište hodnoty I_1, I_2 a Q přesně v okamžiku sepnutí spínače.

(d) Zapište hodnoty I_1, I_2 a Q v ustáleném stavu.

(e) Zapište časovou závislost $I_2(t)$ a $Q(t)$ pro $t > 0$.

(f) Spínač nyní rozpojíme. Za jak dlouho klesne náboj na kondenzátoru na e^{-1} z původní hodnoty?

Řešení úloh

Úloha 1: Koaxiální kabel

(a) Představíme si uzavřenou plochu danou povrchem válce s poloměrem r a délkou l souose s kabelem. Uvnitř vnitřního vodiče $(r < a)$ a vně vnějšího vodiče $(r > b)$ je uvnitř plochy nulový náboj a pole je tudíž nulové. Mezi oběma vodiči $(a < r < b)$ je náboj uvnitř plochy $-Q$, celkový tok je

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(2\pi r l) .$$

Výsledně podle Gaussovy věty

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\hat{\mathbf{r}} ; & \text{pro } a < r < b , \\ 0 ; & \text{jinde} . \end{cases}$$

V nenulové oblasti směřuje pole dovnitř.

(b) Podobně jako v případě elektrického pole, představíme si uzavřenou křivku s poloměrem r se středem na ose kabelu, kolmo na ni. Uvnitř vnitřního vodiče $(r < a)$ a vně vnějšího vodiče $(r > b)$ je uvnitř křivky nulový proud a pole je tudíž nulové. Mezi oběma vodiči $(a < r < b)$ je proud protékající křivkou $-I$. Podle zákona celkového proudu

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(2\pi r) = \mu_0 I .$$

Výsledně podle Gaussovy věty

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}; & \text{pro } a < r < b, \\ 0; & \text{jinde}. \end{cases}$$

V rozmezí $a < r < b$ směřuje pole ve směru hodinových ručiček.

(c) V rozmezí $a < r < b$ je Poyntingův vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rl}\hat{\mathbf{r}}\right)\times\left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) = \frac{QI}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2 l}\hat{\mathbf{k}}$$

a směřuje zprava doleva. Mimo toto rozmezí je Poyntingův vektor nulový.

(d) Element plochy zvolíme $d\mathbf{A} = 2\pi\, rdr\,\hat{\mathbf{k}}$ (u myšleného koaxiálního válce výkon protéká pouze základnami, nikoli pláštěm), takže výkon je

$$P = \oiint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{A} = \frac{QI}{4\pi^2\varepsilon_0 l}\int_a^b r^2\left(2\pi\, rdr\right) = \frac{QI}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(e) Z rovnice pro elektromotorické napětí

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi r\varepsilon_0 l}dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = IR$$

zjistíme, že náboj Q je spojený s odporem vztahem

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 lIR}{\ln(b/a)}.$$

Po dosazení za Q do výrazu pro P získáme finální vztah

$$P = \frac{2\pi\varepsilon_0 lIR}{\ln(b/a)}\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = I^2 R$$

který odpovídá rychlosti rozptylování energie na rezistoru s odporem R.

Ř Úloha 2: Vlnová rovnice

(a) Ze zákona celkového proudu

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$$

si rozepíšeme obě strany rovnice pro infinitezimální smyčku:

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B_z(x,t)l - B_z(x+dx,t)l \quad \text{(levá strana)},$$

$$\frac{d}{dt}\iint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t}\left(E_y l dx\right) = ldx\frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \text{(pravá strana)}.$$

Porovnáme obě strany a vydělíme ldx:

$$\frac{B_z(x,t) - B_z(x+dx,t)}{dx} = -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

(b) Z Faradayova indukčního zákona

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\iint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}$$

si rozepíšeme obě strany rovnice pro infinitezimální smyčku:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E_y\left(x+dx,t\right)l - E_y\left(x,t\right)l \text{ (levá strana),}$$

$$\frac{d}{dt}\iint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = l\,dx\frac{\partial B_z}{\partial t} \text{ (pravá strana).}$$

Porovnáme obě strany a vydělíme ldx:

$$\frac{E_y\left(x+dx,t\right)-E_y\left(x,t\right)}{dx} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

(c) Začněme derivací $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ podle x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

po dosazení získáme

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Pokud začneme derivací rovnice $-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}$ podle x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right),$$

po dosazení získáme

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

(d) Vektor elektrického pole směřuje podél osy y a vlna se šíří ve směru vektorového součinu $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$, tedy podél osy x v kladném směru:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{j}}\, f\left(x-vt\right) = \hat{\mathbf{j}}\, E_0\sin\left(kx-\omega t\right) = \hat{\mathbf{j}}\, E_0\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Můžete si vybrat libovolnou formu, případně sinus nahradíte kosinem. První z nich s $f(x-vt)$ je zcela obecná, další dvě předpokládají sinusovou variantu. Vzhledem k tomu, že není zadaný čas, je fáze neurčena a tudíž nám sinusová verze vyhoví a dosadíme ji do vlnové rovnice, přičemž si zvlášť vyjádříme levou a pravou stranu:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 E_y\,,$$

podobně

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\mu_0\varepsilon_0\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 E_y\,.$$

Obě takto vyjádřené strany vlnové rovnice nyní porovnáme

$$-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 E_y = -\mu_0\varepsilon_0\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 E_y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c\,.$$

Poměr vlnové délky k periodě je fázová rychlost vlny a vychází nám rychlost světla.

Ř Úloha 3: Pět krátkých otázek

Otázka A

(a) Správná odpověď je: 2) napětí na zdroji.

(b) Správná odpověď je: 2) vysunuli z cívky.

(c) Správná odpověď je: 2) snížila.

Klíčové u tohoto typu otázek je nalezení průběhů s fázovým posunem $\pi/2$ (zde 1 a 3), protože musí být proudem a napětím na reaktivním prvku, zde kondenzátoru. Jelikož proud předbíhá napětí, průběh 1 musí být proud a průběh 3 napětí na kondenzátoru, tudíž zbývající průběh 2 je napětí na zdroji.

Jelikož proud přebíhá napětí na zdroji, obvod je kapacitní a frekvence je nižší než rezonanční, což znamená, že jsme něčím museli zvýšit rezonanční frekvenci (byli jsme v rezonanci a teď jsme pod ní) a touto akcí bylo snížení indukčnosti vysunutím jádra.

Otázka B

$$I_1 = \frac{V}{2R}\,, \quad I_2 = 0\,, \quad I_3 = \frac{V}{2R}\,.$$

V ustáleném stavu je kondenzátor zcela nabitý a tudíž jeho větví neprotéká proud ($I_2 = 0$). Indukčnost se bude chovat jako spojovací vodič, protože proud je ustálený. Takže máme jen baterii a dva rezistory.

Otázka C

(a) Správná odpověď je: 2) magnetické pole

(b) Správná odpověď je: 2) dolů

Vlna se musí šířit od fólie, takže šipky jsou elektrické pole a kroužky magnetické. Proud směřující nahoru a dolů vyvolá magnetické pole směřující z a do nárysny. Nakonec, aby indukce vlevo od fólie směřovala do nárysny, musí se kladný náboj fólie pohybovat dolů.

Otázka D

$$P_A = P_B < P_C.$$

Jak v případě A), tak v případě B) máme ke dvěma rezistorům v sérii připojeno identické napětí baterie, tudíž na každé z nich musí být úbytek rovný polovině napětí baterie. V případě C) zapojení baterií zdvojnásobí napětí oproti jedné baterii. Na každém rezistoru je tak úbytek napětí rovný napětí na jedné baterii. Všimněte si, že paralelní zapojení baterií, jako v případě B) sice nezvýší napětí, ale možní v případě potřeby získat ze zdroje více proudu.

Otázka E

(a) Vlna se pohybuje ve směru $-x$. Vyplývá to z členu kx, vlna se podle něj šíří podél osy x. Znaménko je dané tím, že oba členy se sčítají. (jak t roste, x se musí zmenšovat, aby argument zůstal konstantní).

(b) Fázová rychlost vlny je $v = \omega/k = 2\times10^8$ m/s.

(c) Amplituda intenzity elektrického pole je $E_0 = B_0 v = 2\times10^2$ V/s.

(d) Intenzita elektrického pole směřuje podél osy z. ($\mathbf{k} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}$ a platí $-\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}$)

Ř Úloha 4: Solární laboratoř

Přinejmenším musíme vyrovnat gravitaci tlakem slunečního záření (zároveň můžeme omezit sílu radiace prostým složením plachty).

$$F_{\text{záření}} = PA = \frac{2S}{c}A = \frac{2A}{c}\frac{P_{\text{Slunce}}}{4\pi r^2} \overset{?}{\geq} F_{\text{grav}} = \frac{GM_{\text{Slunce}} m_{\text{observatoře}}}{r^2}.$$

Všimněte si, že vzdálenost se vykrátila, takže máme

$$\frac{m_{\text{observatoře}}}{A} \overset{?}{\leq} \frac{2}{c}\frac{P_{\text{slunce}}}{4\pi GM_{\text{slunce}}} \approx 1{,}5\ \frac{\text{g}}{\text{m}^2}.$$

Jelikož je to vyšší hustota, než hustota plachet, mohlo by to pracovat. Hmotnost rozdělíme na hmotnost vlastní observatoře (řekněme 100 tun) a samotných plachet, pro které odhadneme vcelku realistickou hustotu 0,5 g/m^2.

To odpovídá čtvercové plachtě se stranou 10 km. Je to sice veliké, ale nikoli absolutně nerealistické. Pochopitelně se může snížit hmotnost zátěže observatoře a může se použít lehčí materiál na plachty (1 tuna a 0,05 g/m^2 zmenší plachty stranu plachty pod kilometr).

Speciální poznámka: Snadno můžete získat energii ze slunečního záření. Můžete potřebovat 100 kW, ale i tak daleko od Slunce, jako je Země, máte 1,4 kW/m^2, což znamená, že vaše plachty zachytí kolem 10^{11} Wattů. I kdybyste z ní zachytili jen malou část, máte jí stále spoustu!

Ř Úloha 5: Obvod s neznámým reaktivním prvkem

Především víme, že neznámý prvek musí mít jak indukční, tak kapacitní vlastnosti. Pokud by to byl pouze kapacitní nebo pouze indukční prvek, musel by se proud stále předbíhat nebo pozdit vůči napětí, ale jelikož u tohoto prvku se proud na jedné frekvenci předchází a na jiné pozdí, musí obsahovat jak indukčnost, tak kapacitu.

Fázový posun je dán poměrem jalového k činnému odporu. Činný odpor musí být na obou frekvencích pochopitelně stejný.

$$\omega = 1\,\mathrm{s}^{-1}: \quad \mathrm{tg}\,\phi_1 = \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 = \frac{X_1}{R} \quad \Rightarrow \quad X_1 = -R = -1\,\Omega\,,$$

$$\omega = 2\,\mathrm{s}^{-1}: \quad \mathrm{tg}\,\phi_1 = \mathrm{tg}\left(+\frac{\pi}{4}\right) = +1 = \frac{X_1}{R} \quad \Rightarrow \quad X_1 = +R = +1\,\Omega\,,$$

$$X_1 = \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R \quad X_2 = \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R$$

Tyto rovnice přepíšeme do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & -\omega_1^{-1} \\ \omega_2 & -\omega_2^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L \\ C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \\ R \end{pmatrix}$$

a vyřešíme Kramerovou metodou:

$$\Delta = \frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \Delta_{\mathrm{L}} = \frac{R}{\omega_2} + \frac{R}{\omega_1} \quad \Delta_{\mathrm{C}^{-1}} = R\omega_1 + R\omega_2\,,$$

$$L = \frac{\Delta_{\mathrm{L}}}{\Delta} = R\frac{\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1\omega_2}}{\dfrac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1\omega_2}} = \frac{R}{\omega_2 - \omega_1} = 1\,\mathrm{H}\,,$$

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta_{\mathrm{C}^{-1}}}{\Delta} = R\frac{\omega_1 + \omega_2}{\dfrac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1\omega_2}} = \frac{R\omega_1\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}\ \mathrm{F}\,.$$

Frekvence, při které je na rezistoru maximální napětí musí odpovídat rezonanci, neboť při ní je proud maximální:

$$\omega_{\mathrm{rez}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2}\ \mathrm{rad/s}.$$

Jelikož je zdroj naladěný na rezonanční frekvenci, proud s amplitudou $I_0 = \varepsilon_{\mathrm{m}}/R = 1\ \mathrm{A}$, je ve fázi s napětím na zdroji. Napětí na indukčním prvku se předbíhá o $\pi/4$ a na kapacitním členu se zpožďuje o $\pi/4$:

$$V_{\mathrm{L}} = V_{0,\mathrm{L}} \sin\left(\omega_{\mathrm{rez}} t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$V_{\mathrm{C}} = V_{0,\mathrm{C}} \sin\left(\omega_{\mathrm{rez}} t - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$V_{0,\mathrm{L}} = I_0 X_{\mathrm{L}} = I_0 \omega_{\mathrm{rez}} L = \sqrt{2}\ \mathrm{V}\,,$$

$$V_{0,\mathrm{C}} = I_0 X_{\mathrm{C}} = I_0 \left(\omega_{\mathrm{rez}} C\right)^{-1} = \sqrt{2}\ \mathrm{V}\,.$$

Všimněte si, že amplitudy napětí jsou na obou reaktivních prvcích stejné. Je to tím, že jsou v rezonanci (reaktance jsou si rovny a mají opačné znaménko a tím pádem se navzájem vyruší).

Ř Úloha 6: Kondenzátor

(a) Energie je uložena v elektrickém poli. Jelikož intenzitu považujeme za konstantu, prostě vynásobíme hustotu energie objemem:

$$U_{\mathrm{E}} = u_{\mathrm{E}} \cdot V = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \pi R^2 d = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 d}{2} E^2 .$$

(b) Při zvětšování elektrického pole vzniká posuvný proud:

$$I_{\text{posuv}} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\left(E\pi r^2\right)}{dt} = \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} ,$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{posuv}} = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 r \frac{dE}{dt} .$$

Jelikož posuvný proud směřuje nahoru, v bodě P magnetické pole směřuje z nárysny.

(c) Vyjádříme tok energie (Poyntingův vektor)

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = -\frac{1}{\mu_0} E \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 r \frac{dE}{dt} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 r E \frac{dE}{dt} \hat{\mathbf{r}} .$$

(d) Časovou změnu energie získáme jako skalární součin Poyntingova vektoru s plochou

$$\frac{dU}{dt} = \mathbf{S}(R) \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 R E \frac{dE}{dt}\right) (2\pi R d) = \varepsilon_0 \pi d R E \frac{dE}{dt} .$$

Všimněte si, že to odpovídá časové derivaci U_{E} vypočtenou v podotázce (a).

Ř Úloha 7: RC obvod

(a) Výsledek je $-I_1 R_1 + V = 0$.

(b) Výsledek je $-Q/C - I_2 R_2 + V = 0$. Vztah mezi I_2 a Q je $dQ/dt = I_2$, tj. rychlost, se kterou se desky kondenzátoru nabíjejí je rovna proudu tekoucímu skrze rezistor R_2.

(c) V okamžiku sepnutí spínače $I_{1,\,0} = V/R_1$, $I_{2,\,0} = V/R_2$ a $Q = 0$.

(d) V ustáleném stavu $I_1 = V/R_1$, $I_2 = 0$ a $Q = CV$.

(e) Všimněte si, že jelikož R_1 je připojený přímo k oběma pólům baterie, je to pouze bočník, v žádném případě neovlivňuje proud tekoucí skrze kondenzátor. Vidíte to rovněž z odpovědi na podotázku (b):

$$0 = -\frac{Q}{C} - I_2 R_2 + V = -\frac{Q}{C} - R_2 \frac{dQ}{dt} + V .$$

Nyní již jen zapíšeme řešení pro narůstající časovou závislost (náboj) a klesající časovoun závislost (proud) s časovou konstantou $\tau = R_2 C$:

$$Q(t) = Q_{\text{ustál}}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \text{ a } I_2(t) = I_0 \mathrm{e}^{-t/\tau},$$

kde $Q_{\text{ustál}}$ závisí pouze na ustáleném napětí, které je rovno napětí na baterii, $Q_{\text{ustál}} = CV$. Výchozí proud byste získali při přemostění kondenzátoru vodičem.

(f) Po znovuotevření spínače se v horní smyčce vybíjí kondenzátor přes sériově zapojené odpory R_1 a R_2. Hledaný čas je z definice časová konstanta: $\tau = \left(R_1 + R_2\right)C$.