

ÚLOHY Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU

SADA 11

Peter Dourmashkin

© MIT 2006, překlad: Vítězslav Kříha (2007)



Obsah

SADA 11	2
P ÚLOHA 1: LC OBVOD	2
P ÚLOHA 2: FM ROZHLASOVÝ PŘIJÍMAČ	2
P ÚLOHA 3: FILTRY	2
P ÚLOHA 4: ZAPOJENÍ REPRODUKTORU	4
P ÚLOHA 5: SOLENOID	4
ŘEŠENÍ ÚLOH	5
Ř ÚLOHA 1: LC OBVOD	5
Ř ÚLOHA 2: FM ROZHLASOVÝ PŘIJÍMAČ	5
Ř ÚLOHA 3: FILTRY	7
Ř ÚLOHA 4: ZAPOJENÍ REPRODUKTORU	10
Ř ÚLOHA 5: SOLENOID	11

Sada 11

Úloha 1: LC obvod

- (a) Ve výchozím stavu sériového zapojení LC obvodu je kondenzátor nabitý. Spínač je uzavřený, čímž dovoluje kondenzátoru vybíjet se, a po čase T je nakumulovaná energie rovna polovině výchozí hodnoty. Najděte L , znáte-li C a T !
- (b) Kondenzátor v sériově zapojeném LC obvodu má ve výchozím stavu náboj Q a je vybíjen. Vyjádřete pomocí L , C a Q celkový tok indukce magnetického pole v čase t , kdy je náboj na kondenzátoru $Q(t)$!
- (c) V LC obvodu je $2,0$ mH cívka a $5,0$ μF kondenzátor. Maximální okamžitý proud je $0,1$ A, jaký je největší potenciálový rozdíl na kondenzátoru?

Úloha 2: FM rozhlasový přijímač

Pomocí RLC obvodu chcete vyladit svou oblíbenou rozhlasovou stanicí vysílanou na frekvenci $89,5$ MHz. Chcete se zabavit rušení stanicí vysílanou na frekvenci $89,7$ MHz. Abyste toho dosáhli, musíte mít obvod naladěný na rezonanci při $89,5$ MHz tak, aby proud při $89,7$ MHz byl alespoň $100\times$ nižší než váš signál při $89,5$ MHz. Nemůžete se zbavit odporu $0,1$ Ω a z praktických důvodů se snažíte nastavit co možná nejmenší L (což znamená, že nemůžete snížit proud na frekvencích mimo rezonanční více než stokrát – jste omezeni na 1 % signálu vedlejší stanice).

- (a) Vyjádřete pomocí parametrů L , R a C amplitudu proudu jako funkci úhlové frekvence vstupního signálu!
- (b) Jaká je úhlová frekvence vstupního signálu pro který chcete dosáhnout rezonance?
- (c) Jaké hodnoty L a C musíte použít?
- (d) Určete poměr amplitudy napětí na cívce a amplitudy budícího signálu. Tuto hodnotu nazýváme činitel jakosti a značíme Q . Činitel jakosti nám ukazuje, jak úzká je rezonanční křivka. (vyšší hodnota Q značí užší rezonanční křivku a tím pádem vyšší frekvenční selektivitu obvodu).
- (e) Ukažte, že při rezonanci dává poměr amplitudy napětí na kondenzátoru a amplitudy budícího signálu také činitel jakosti.
- (f) Jaký průměrný výkon dodává při rezonanci do obvodu anténa, na které je napětí $V_0 = 100$ μV ?
- (g) Jaký je fázový posun pro vstupní signál na $89,7$ MHz?
- (h) Jaký průměrný výkon je dodáván na frekvenci $89,7$ MHz?
- (i) Je obvod na frekvenci $89,7$ MHz induktivní nebo kapacitní?

Úloha 3. Filtry

Jednou z možností, jak využít pochopení pasivních reaktivních obvodů a impedance, je návrh pasivních filtrů. Filtr je obvod, který signál ze vstupu v určitém rozsahu frekvencí na výstupu oslabí. Existují čtyři základní typy: **dolní propust** (nízké frekvence projdou neoslabené, vysoké filtr zablokuje), **horní propust** (s opačnou funkcí), **pásmová propust** (kombinace obou předchozích propustí, propouští pouze omezené pásmo frekvencí a ostatní potlačí),

pásmová zadrž (s opačnou funkcí). Existují ještě selektivní filtry, které fungují stejně jako pásmové zadržky, ale snaží se odstranit vybranou frekvenci (například 50 Hz, která má tu nepříjemnou vlastnost díky všudypřítomným rozvodům, že se vplíží do všech signálů).

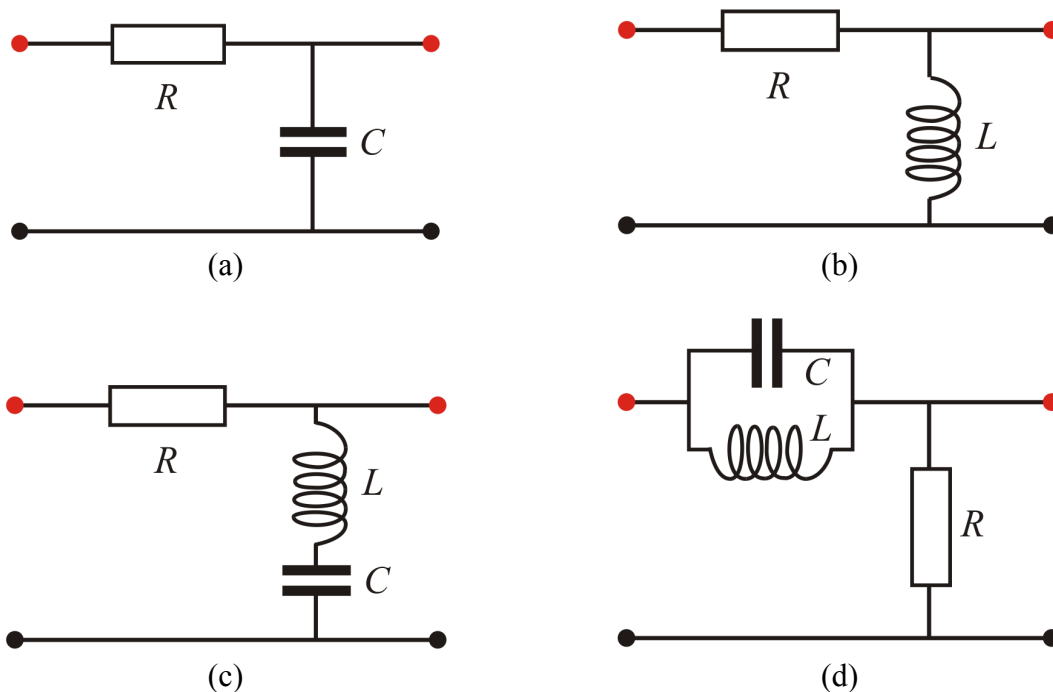
Pokoušíme-li se analyzovat filtry, musíme udělat několik jednoduchých kroků. Především si musíme ujasnit, co má filtr dělat, a to zjistíme podle horní a dolní frekvenční meze. Připomínáme, že na nízkých frekvencích se cívky chovají jako vodič a kondenzátory jako velké odpory (nebo otevřený obvod), zatímco na vysokých frekvencích je to přesně naopak.

Při výpočtu chování obvodu použijte reaktance indukčních a kapacitních prvků a všimněte si, že se skládají jako paralelně či sériově zapojené rezistory. Pokud je kombinujete s rezistory, musíte je skládat podle Pythagorovy věty (odmocnina ze součtu čtverců). Pracujete-li radši s komplexními čísly, situace se mnohem zjednoduší, pokud rovnou používáte komplexní hodnoty – impedance.

Dalším krokem je výpočet přenosové funkce filtru (poměr amplitud napětí na výstupu vůči amplitudám na vstupu při nezátženém výstupu – jinak řečeno připojenému k velikému odporu) a zakreslení přenosové charakteristiky – závislosti přenosové funkce na frekvenci v logaritmickém měřítku na obou osách. Oslabení většinou zapisujeme v decibelech (dB), kde decibel je dvacetinásobek dekadického logaritmu zeslabení silových veličin (např. napětí, proud) a desetinásobek dekadického logaritmu zeslabení energetických veličin (např. výkon).

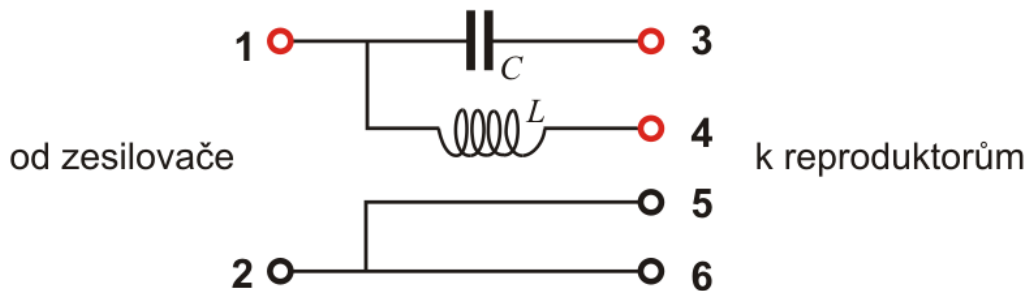
Při popisu chování filtru se typicky udává zlomová frekvence, „3 dB bod“, tedy kmitočet, při kterém se propouští polovina energie (napětí je tím pádem sníženo na $\sqrt{2}$ vstupní hodnoty).

Pro každé schéma filtru najdete: typ filtru, zlomovou frekvenci (nebo frekvence, případně u selektivního filtru filtrovaný kmitočet) a u propustí spočítejte mezní sklon zeslabení. Nakreslete přenosovou charakteristiku.



Úloha 4: Zapojení reproduktoru

Koupili jste si novou dvoupásmovou reproduktorovou soustavu s výškovým a basovým reproduktorem. Naneštěstí byly reproduktory odpojeny. Vidíte, že je tam pár vodičů, jeden s kondenzátorem a jeden s cívkou, ale ke vši smůle nemůžete přečíst, jaké mají nominální hodnoty. Také vidíte, že jsou tam dvě zdířky prostě označené „od zesilovače“ a čtyři s nápisem „k reproduktoru“, ale není tam řečeno k jakému. Pro lepší orientaci si tyto zdířky označíme čísly 1 až 6.



- Rozhodnete se, že se seznámíte s reproduktory, než je zapojíte. Oba jsou označeny „ $8\ \Omega$ “, avšak pokud je přeměříte svým ohmmetrem, získáte hodnotu $R = 6\ \Omega$. Čím to je? Kam se poděly ztracené ohmy?
- Zesilovač má dva výstupy, které zapojíte do zdířek 1 a 2. Oba reproduktory mají dva výstupy. Kam je zapojíte?
- Jaké zhruba jsou hodnoty indukčnosti a kapacity? K odpovědi vám pomůže nakreslit si očekávané přenosové charakteristiky, abyste pochopili, k čemu oba reaktivní prvky slouží.

Úloha 5: Solenoid

Představte si dlouhý solenoid dlouhý D , s N závitů a s poloměrem a umístěný podél osy z (je centrováný podle bodu $z = 0$). Solenoid je zapojený do série s kondenzátorem C , rezistorem R a zdrojem, který obvod napájí na rezonanční frekvenci. V čase $t = 0$ je proud protékající skrze solenoid maximální I_0 .

- V tento moment ($t = 0$), spočítejte magnetické pole B_0 v prostoru solenoidu.
- Spočítejte vlastní indukčnost solenoidu.
- Zapište rovnici pro časovou závislost magnetického pole.
- Zapište rovnici pro časovou závislost napětí na zdroji.

Řešení úloh

Ř Úloha 1: LC obvod

- (a) Pokud se energie zmenší na polovinu, pak se napětí zmenší na $\sqrt{2}$ výchozí hodnoty ($U = CV^2/2$). Takže

$$V(T) = V_0 \cos(\omega T) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega T = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow$$
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\pi}{4T} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{16T^2}{\pi^2 C}.$$

- (b) Tok závisí na proudu a indukčnosti $LI = \Phi_{\text{celkový}}$. Takže potřebujeme přepsat proud v závislosti na náboji. Ze zákona zachování energie

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{Q_0^2}{2C}.$$

$$\Phi_{\text{celkový}} = LI = L \sqrt{\frac{Q_0^2 - Q(t)^2}{LC}}.$$

- (c) Ze zákona zachování energie

$$\frac{LI_{\text{max}}^2}{2} = \frac{CV_{\text{max}}^2}{2},$$
$$V_{\text{max}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_{\text{max}} = 2 \text{ V}.$$

Ř Úloha 2: FM rozhlasový přijímač

(a) $I_0(\omega) = V_0/Z = V_0/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$.

(b) $\omega_0 = 2\pi f_0 = 5,62 \text{ rad/s}$.

- (c) $\omega_1 = 2\pi f_1 = 5,63 \text{ rad/s}$. Chceme, aby na této frekvenci relativní snížení hodnoty proudu bylo $h = 10^{-2}$:

$$h = \frac{I_0(\omega_0)}{I_0(\omega_1)} = \frac{V_0/R}{V_0/Z(\omega_1)} = \frac{Z(\omega_1)}{R} = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega_1 L - 1/\omega_1 C)^2}{R^2}}$$
$$\frac{R^2 + (\omega_1 L - 1/\omega_1 C)^2}{R^2} = h^2 \Rightarrow (\omega_1 L - 1/\omega_1 C)^2 = (h^2 - 1)R^2$$

Jinak zapsáno

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \sqrt{(h^2 - 1)}R.$$

Všimněte si, že jsme si vybrali kladné znaménko, protože jsme nad rezonancí. Vycházejí z faktu, že $C = 1/L\omega_0^2$, kde ω_0 je rezonanční frekvence, získáme

$$\omega_1 L \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 \right] = \sqrt{(h^2 - 1)} R,$$

což nám dává

$$L = \frac{\sqrt{(h^2 - 1)} R}{\omega_1 \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 \right]} = 3,99 \mu\text{H}.$$

Kapacitu získáme jako

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 0,791 \text{ pF}.$$

(d) $V_{L0} = X_L I_0 = L\omega_0 I_0$. Takže

$$\frac{V_{L0}}{V_0} = \frac{L\omega_0 I_0}{I_0 R} = \frac{L\omega_0}{R} = 22\,400 = Q.$$

(e) $V_{C0} = X_C I_0 = I_0/\omega_0 C$. Takže

$$\frac{V_{C0}}{V_0} = \frac{\frac{I_0}{\omega_0 C}}{I_0 R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{\omega_0 R} (L\omega_0^2) = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L\omega_0 I_0}{I_0 R} = \frac{V_{L0}}{V_0} = Q.$$

(f) Jelikož při rezonanci je $\phi = 0$, platí

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} = 50 \text{ nW}.$$

(g) $\phi = \arctg \left[\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right) / R \right] = \arctg \left(\sqrt{(h^2 - 1)} \right) \approx \frac{\pi}{2,01} \text{ rad} \approx 89,4^\circ$.

(h) Jelikož je na této frekvenci $100\times$ nižší proud, platí

$$\langle P(t) \rangle = I^2 R = \left(\frac{I}{h} \right)^2 R = \frac{\langle P_{\text{rezonance}} \rangle}{h^2} = 50 \text{ pW}$$

(i) Je induktivní, protože jsme na vyšší frekvenci, než je rezonanční (vyšší frekvence znamená rychlejší změny v čase a tím je indukčnost méně průchozí pro signál, u kapacity to platí naopak a v rezonanci jsou oba protichůdné vlivy vyrovnány).

Ř Úloha 3. Filtry

- (a) Jde o *dolní propust*. Pro vyšší frekvence je kondenzátor průchozí a zkratuje výstup, zatímco pro nižší frekvence se „plní“ a dává velký díl vstupního napětí (část úbytku zůstane na rezistoru) na výstup. Výstupní napětí je:

$$V_{0, \text{Výst}} = I_0 X_C = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} V_{0, \text{Vstup}} = \frac{1}{\sqrt{(R/X_C)^2 + 1}} V_{0, \text{Vstup}}$$

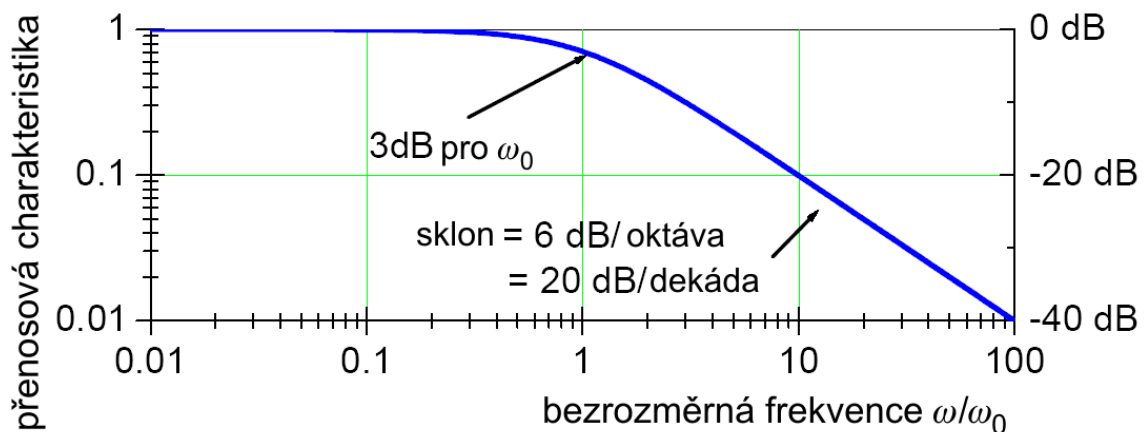
$$\text{Přenosová funkce} = \frac{V_{0, \text{Výst}}}{V_{0, \text{Vstup}}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_0)^2 + 1}},$$

kde $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ je zlomová frekvence.

K nalezení sklonu půjdeme do oblasti vysokých frekvencí:

$$\text{Přenosová funkce} = \frac{V_{0, \text{Výst}}}{V_{0, \text{Vstup}}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_0)^2 + 1}} \approx \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Sklon přenosové charakteristiky nám odpovídá na otázku, kolikrát se změní přenosová amplituda při zdvojnásobení frekvence. V tomto případě pochopitelně $2\times$, což odpovídá $20 \log 2 = 6 \text{ dB}$ na oktávu. Prohlédněte si přenosovou charakteristiku:



- (b) Jde o *horní propust*. Pro nižší frekvence je indukčnost průchozí a zkratuje výstup, zatímco pro vyšší frekvence indukční prvek získává velkou impedanci a tím na něm padá významná část vstupního napětí. Výstupní napětí je:

$$V_{0, \text{Výst}} = I_0 X_L = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} V_{0, \text{Vstup}} = \frac{1}{\sqrt{(R/X_L)^2 + 1}} V_{0, \text{Vstup}}$$

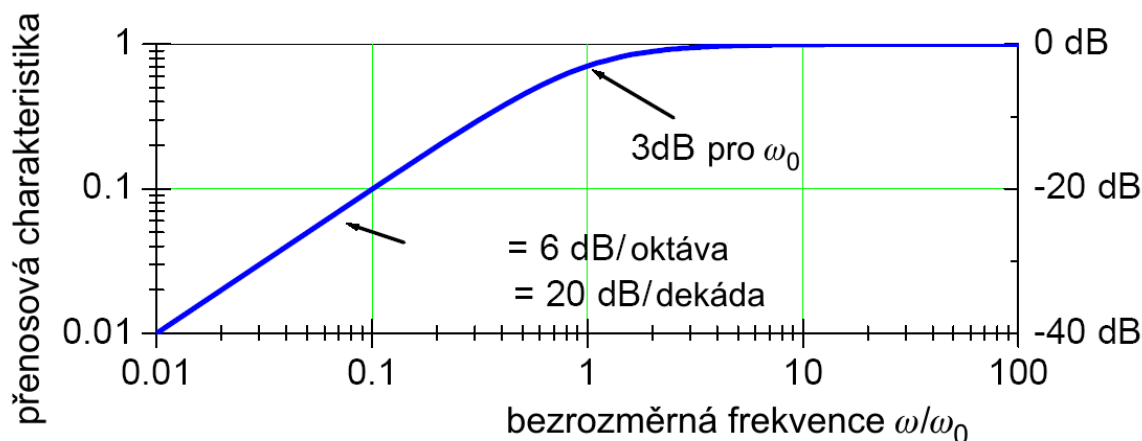
$$\text{Přenosová funkce} = \frac{V_{0, \text{Výst}}}{V_{0, \text{Vstup}}} = \frac{1}{\sqrt{(R/\omega L)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0/\omega)^2 + 1}},$$

kde $\omega_0 = \frac{R}{L}$ je zlomová frekvence.

K nalezení sklonu půjdeme do oblasti vysokých frekvencí:

$$\text{Přenosová funkce} = \frac{V_{0,\text{Výst}}}{V_{0,\text{Vstup}}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_0)^2 + 1}} \approx \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Prohlédněte si přenosovou charakteristiku. Tento průběh je typický pro všechny jednoduché filtry s rezistorem a indukčním nebo kapacitním prvkem.

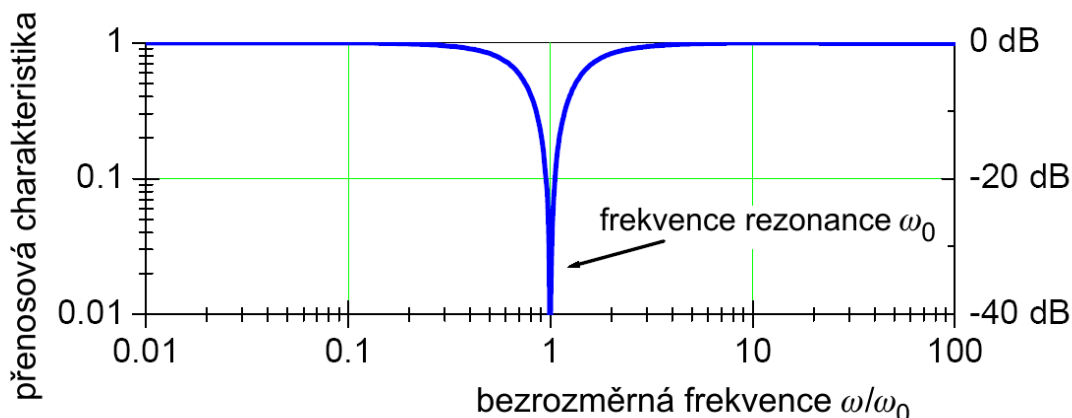


- (c) Jde o *selektivní filtr*. Na vysokých frekvencích je impedance indukčního prvku dominantní a výstup filtru je pochopitelně daný úbytkem napětí na něm. Na nízkých frekvencích platí totéž pro kapacitní prvek a opět je na výstupu většina napětí. V rezonanci kombinace impedancí indukčního a kapacitního prvku dává nulu a výstupní napětí klesne k nule. Provedeme výpočet. Výstupní napětí je:

$$V_{0,\text{Výst}} = I_0 (X_L + X_C) = \frac{X_L + X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}} V_{0,\text{Vstup}} = \frac{1}{\sqrt{(R/(X_L + X_C))^2 + 1}} V_{0,\text{Vstup}}$$

$$\begin{aligned} \text{Přenosová funkce} &= \frac{V_{0,\text{Výst}}}{V_{0,\text{Vstup}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(R/(\omega L - (\omega C)^{-1})\right)^2 + 1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{Q[(\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega)]}\right)^2 + 1}}, \end{aligned}$$

kde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ je odfiltrovaná frekvence a $Q = \omega_0 L/R$ je činitel jakosti (ostrost zářezu). Prohlédněte si přenosovou charakteristiku. V grafu byla použita hodnota $Q = 1$. Z grafu vidíte, že u tohoto typu filtru pojem sklonu ztrácí smysl.

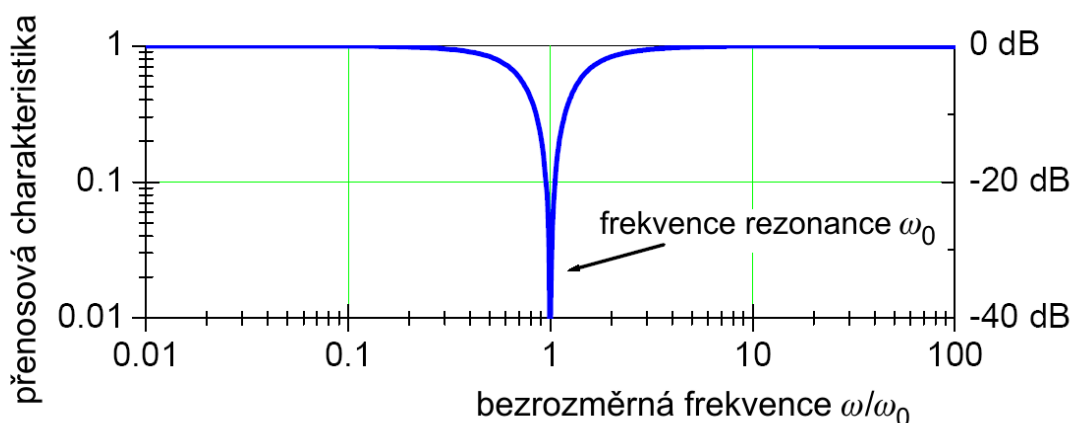


- (d) Jde opět o *selektivní filtr*. Na nízkých frekvencích se indukční prvek chová jako vodič a výstup filtru je daný dominantním úbytkem napětí na odporu. Na nízkých frekvencích platí totéž pro kapacitní prvek a opět je na výstupu většina napětí. V rezonanci kombinace impedancí paralelního zapojení indukčního a kapacitního prvku dává vysokou hodnotu a výstupní napětí na rezistoru klesne k nule. Provedeme výpočet. Výstupní napětí je:

$$V_{0,Výst} = IR = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L^{-1} + X_C^{-1})^{-2}}} V_{0,Vstup} = \frac{1}{\sqrt{\left(R(X_L^{-1} + X_C^{-1})\right)^{-2} + 1}} V_{0,Vstup} \cdot$$

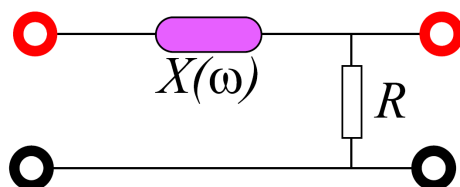
$$\begin{aligned} \text{Přenosová funkce} &= \frac{V_{0,Výst}}{V_{0,Vstup}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(R(\omega C - (\omega L)^{-1})\right)^2 + 1}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{Q}{\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]}\right)^2 + 1}}, \end{aligned}$$

kde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ je odfiltrovaná frekvence a $Q = \omega_0 L/R$ je činitel jakosti (ostrost zářezu). Prohlédněte si přenosovou charakteristiku. Graf je stejný jako v podotázce (c), avšak všimněte si, že Q má opačnou roli: má-li vyšší hodnotu, je zářez širší.



Ř Úloha 4: Zapojení reproduktoru

- (a) Reprodaktor má jak stejnosměrnou hodnotu odporu, která odpovídá jeho rezistenci, tak frekvenčně závislou induktanci, impedance je tudíž také frekvenčně závislá. Označení 8Ω vám jen napomáhá k výběru použitelné výstupní impedance zesilovače, ale nelze se na ni dívat jako na výsledek reálného měření impedance, která na určité frekvenci sice může být rovna 8Ω , ale v celém akustickém rozsahu se mění o jeden až dva řády.
- (b) Basový reproduktor přehrává nízké frekvence, takže ho připojíme k cívce (mezi 4 a 6), což zablokuje vysoké frekvence. Výškový reproduktor musí být připojen mezi 3 a 5. Pochopitelně země je společná, takže jsou možná i zapojení 4 – 5 a 3 – 6.
- (c) V zjednodušené pohledu si představíme reproduktor jako rezistor – prostě ignorujeme jeho indukčnost. V tomto případě máme RL obvod pro basový a RC pro výškový reproduktor. Oba tvoří dělič napětí, kde $X(\omega) = \omega L$ pro cívku a $X(\omega) = (\omega C)^{-1}$ pro kondenzátor.

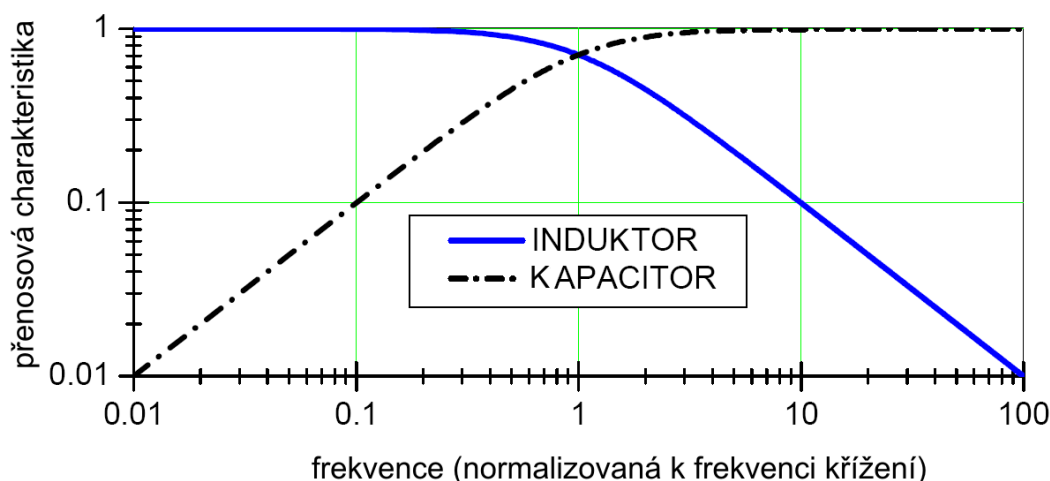


Amplituda napětí na výstupu je

$$V_{0, \text{výst}} = I_0 R = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} V_{0, \text{vstup}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (X/R)^2}} V_{0, \text{vstup}}$$

Co je to frekvence překřížení? Je to kmitočet, na kterém jsou si obě přenosové funkce rovny. Tedy

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega L/R)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/\omega CR)^2}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Proč se to vůbec dělá? Protože při buzení výškového reproduktoru intenzivním nízkofrekvenčním signálem jej můžete zničit, a protože fázový posun v basovém reproduktoru na vysokých frekvencích vede ke zkreslenému zvuku. Překřížení

potřebujeme na nějaké střední frekvenci jako třeba 300 Hz (vyhovovat bude jakákoli veličina řádově stovek hertzů).

$$\omega_C = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{R\omega_C} \approx 100 \mu\text{F},$$

$$\omega_L = \frac{R}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{R}{\omega_L} \approx 3 \text{ mH}.$$

Ř Úloha 5: Solenoid

(a) K výpočtu magnetického pole potřebujeme jenom proud. V čase $t = 0$ je proud $I = I_0$. Použijeme zákon celkového proudu $B_0 D = \mu_0 N I \Rightarrow B_0 = \mu_0 N I / D$.

$$(b) \Phi_{\text{jednoho}} = B_0 A = \frac{\mu_0 N I}{D} \pi a^2 \Rightarrow L = \frac{\Phi_{\text{celkové}}}{I} = \frac{N \Phi_{\text{jednoho}}}{I} = \frac{\mu_0 N^2}{D} \pi a^2$$

(c) Obvod je napájený na rezonanční frekvenci $\omega = 1/\sqrt{LC}$, kde C je dáno a L dostanete z podotázky (b). Magnetické pole je maximální v čase $t = 0$ (protože tehdy je proud největší), takže $B = B_0 \cos(\omega t)$, kde B_0 je z (a). Kosinová závislost vychází z počáteční podmínky.

(d) Jelikož jsme v rezonanci, impedance je jen R a to ve fázi s proudem: $V_Z = I_0 R \cos(\omega t)$.