

ÚLOHY Z ELEKTRINY A MAGNETIZMU

SADA 9

Peter Dourmashkin

© MIT 2006, překlad: Vítězslav Kříha (2007)



Obsah

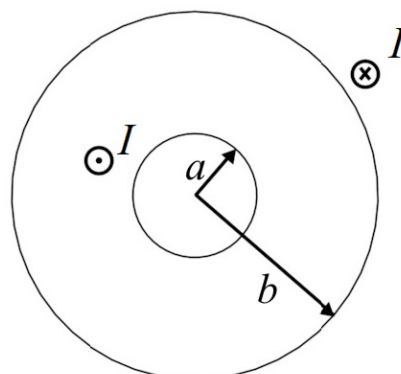
SADA 9	2
P ÚLOHA 1: INDUKTOR	2
P ÚLOHA 2: SUPRAVODIVÉ MAGNETY	2
P ÚLOHA 3: MIXÉR	2
ŘEŠENÍ ÚLOH	3
Ř ÚLOHA 1: INDUKTOR	3
Ř ÚLOHA 2: SUPRAVODIVÉ MAGNETY	4
Ř ÚLOHA 3: MIXÉR	4

Sada 9

Úloha 1: Induktor

Induktor je tvořen dvěma koncentrickými velice tenkými vodivými válcovými vrstvami, jedna s poloměrem a a druhá s poloměrem b obě dlouhé h .

Předpokládejte, že vnitřním vodičem teče proud I směrem z nárýsny a vnějším proud I směrem do nárýsny. Proudů jsou v obou případech rovnoměrně rozloženy po obvodu. Osa z jde z nárýsny podél společné osy obou válců.



- Pomocí zákona celkového proudu najděte velikost a směr indukce magnetického pole mezi vrstvami. Najděte hustotu energie magnetického pole jako funkci r v intervalu $a < r < b$!
- Spočítejte indukčnost tohoto dlouhého induktoru s použitím vztahu pro energii $U_B = LI^2/2$ a hustoty energie získané v podotázce (a).
- Spočítejte indukčnost tohoto dlouhého induktoru s použitím vztahu pro magnetický tok $\Phi = LI = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ a rozložení indukce získané v podotázce (a). Jakou plochu si vyberete pro výpočet toku? Souhlasí výsledek s odpovědí na podotázku (b)?

Úloha 2: Supravodivé magnety

Supravodivé cívky se často používají k získání silných homogenních polí. Jakmile byl jednou „natažen“ proud do solenoidu, oba konce mohou být spojeny a proud pokračuje v kroužení v solenoidu navždy. Jak se to dělá? To se dozvíte v první úloze sady 10. Spočítejte indukčnost a celkovou nakumulovanou energii (pokud jsou plně vybuzeny) pro tyto dva magnety:

- Nejsilnější, v současné době dostupné, laboratorní permanentní magnety vytvářejí pole kolem 45 T při proudu 150 A. Jejich dutina má průměr 5 cm a aktivní délku (kde je pole víceméně homogenní) mají kolem 10 cm.
- Magnety pro nukleární magnetickou rezonanci (MRI) jsou dlouhé dva metry, vnitřní průměr mají 0,75 m a vytvářejí pole 4 T, když jsou vybuzeny proudem 100 A. Návrh MRI magnetů, které v aktivní oblasti mají homogenní pole, je velice komplikovaný (jinými slovy, nejsou to jenom jednoduché solenoidy).

Úloha 3: Mixér

Navrhněte mixér. Přesněji: navrhněte motor mixéru.

- Potřebujete stejnosměrný motor s rozumným momentem a otáčející se s potřebnou frekvencí. Odhadněte tyto veličiny, ověřte si, odpovídají-li výkonu motoru, který také odhadněte (případně si můžete potřebné veličiny najít na webu).
- Vyjádrejte potřebný moment síly, průměrný nebo maximální, bude-li to snazší, pomocí rozměrů cívky (odhadněte), indukce permanentního magnetu (odhadněte), proudu a množství závitů (spočítejte jako součin NI).
- I přestože je motor napájený stejnosměrně, proud není konstantní. Proč?

- (d) Cívky jsou vyrobeny z měděného drátu (měrný odpor $1,7 \mu\Omega \text{ cm}$, tepelná kapacita 400 J/kg K , hustota $9\,000 \text{ kg/m}^3$ a bod tání $1\,340 \text{ K}$). Odpor cívky závisí na průřezu cívky a její délce (počtu závitů). Abyste si vybrali vhodný průřez vodiče (nesmí se vám přehřát, je pokrytý izolací!, případně roztavit, pokud jím protéká příliš velký proud), používáte tabulky, jako například [tuto](#) dostupnou na internetu. Při návrhu se souběžně optimalizuje: průřez vodičů, proud, počet závitů, celkový odpor cívky a výsledné rozměry cívky (které se odvíjí od průřezu vinutí). Parametry si buď vyberte sami, nebo použijte poloměr vodiče $0,5 \text{ mm}$, proud 2 A a najděte zbylé parametry: počet závitů, odpor vinutí a potřebné napájecí napětí.
- (e) Pokud vám parametry motoru nevyhovují, můžete použít mechanickou převodovku. Co se stane, když změníte převodový poměr? Jaký převod chcete uskutečnit? (Má se motor točit rychleji nebo pomaleji než nože?) Existuje nějaký důvod omezující nastavení převodového poměru do extrémně velkých hodnot?

Řešení úloh

Ř Úloha 1: Induktor

- (a) Nejdříve si vyjádříme proud protékající kružnicí s poloměrem r koncentrickou s průřezou obou vodičů:

$$I = \begin{cases} 0, & r < a \\ I, & a \leq r \leq b \\ 0, & r > b \end{cases}$$

Použijeme zákon celkového proudu $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(2\pi r) = \mu_0 I$ a dostaneme

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}, & a \leq r \leq b \\ 0, & r > b \end{cases}$$

Pole v oblasti mezi vodiči míří na obrázku proti směru hodinových ručiček. Hustota energie magnetického pole je v rozmezí $a < r < b$ rovna

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 = \boxed{\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}},$$

kdekoli jinde je nulová.

- (b) Element objemu je v tomto případě $2\pi r h dr$. Magnetická energie je rovna

$$U_B = \iiint_V u_B dV = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r h dr = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Po dosazení

$$U_B = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2} L I^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

- (c) Magnetické pole je orientováno kolmo k obdélníkové ploše zobrazené na obrázku. Magnetický tok skrze tenký proužek s plochou $dA = ldr$ je

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) (h dr) = \frac{\mu_0 I h}{2\pi r} dr.$$

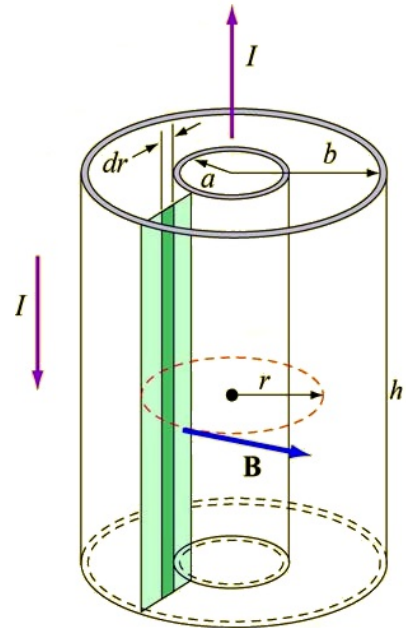
Magnetický tok je pak

$$\Phi = \int d\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I h}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Indukčnost je

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Což je stejný výsledek jako odpověď na podotázku (b).



Ř Úloha 2: Supravodivé magnety

- (a) Z indukce a objemu získáme energii, ze které vypočítáme indukčnost

$$U = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi R^2 l = 1,6 \times 10^5 \text{ J.}$$

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2U}{I^2} = 14 \text{ H.}$$

- (b) Opět z indukce a objemu získáme energii, ze které vypočítáme indukčnost

$$U = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi R^2 l = 5,6 \times 10^6 \text{ J.}$$

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2U}{I^2} = 1,1 \text{ kH.}$$

Ř Úloha 3: Mixér

- (a) Podle mého názoru je frekvence otáčení od 1 Hz do 10 Hz. Čísla na stránkách výrobců mixérů se pohybují obvykle kolem 50 ot/min do 300 ot/min (~ 1 Hz až ~ 5 Hz). Vezměme úhlovou frekvenci $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$.

S momentem je to složitější. Poloměr nožů je kolem 5 cm, ale s jakou silou musí být poháněny? Ze zkušenosti vím, že je trochu obtížné je pohánět rukou, což bude asi jako zvedat 20 kg, takže vezmeme 200 N. Moment tak odhadneme na 10 Nm. Také můžeme odhadnout moment pomocí výkonu (u translačních pohybů je výkon = síla \times rychlost, u otáčivých $P = \tau \omega$). Motory běžných mixérů mají výkon kolem 300 až 500 wattů, tak pro $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ dostáváme moment kolem 30 Nm. Tato hodnota je pochopitelně nadhodnocena, část energie není využita k točení, ale v prvním přiblížení tento odhad stačí, později jej můžeme upřesnit.

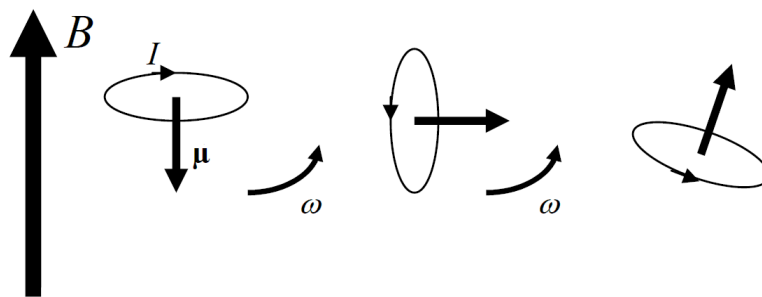
- (b) Motor je cívka s poloměrem a a N závitů. S proudem I má magnetický moment $\mu = NIA = \pi a^2 NI$. Umístíme cívku do magnetického pole permanentního magnetu s indukcí B . Pokud není moment cívky orientován podle pole, působí na něj moment

$$\tau = |\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}| = \mu B \sin \theta = \pi a^2 NIB \sin \theta \sim a^2 NIB$$

kde jsem se v posledním kroku zbavil úhlové závislosti, neboť se jí nemíním zabývat. Tohle je tudíž maximální moment. Průměrný, přesněji efektivní, bude $\sqrt{2} \times$ menší, což je při dané aproximaci zanedbatelné.

Odhadneme indukci magnetu ($B \sim 0,1$ T) a poloměr cívky ($a \sim 1$ cm). S těmito čísly získám odhad $NI \approx \tau / Ba^2 \approx 10^6$ A.

- (c) Na rotující cívce se indukuje elektromotorické napětí, jelikož tok skrze smyčku se mění v čase (funguje jako generátor!). Proberme si to nejprve na obrázcích:



V této poloze tok protéká vzhůru a klesá. Je indukováno elektromotorické napětí proti směru hodinových ručiček, proti směru proudu.

V této poloze tok protéká vzhůru a stoupá. Je indukováno elektromotorické napětí po směru hodinových ručiček, opět proti směru proudu.

Elektromotorické napětí se mění v čase, ale my použijeme pouze střední hodnotu. Nalezneme k tomuto účelu celkovou změnu toku za polovinu periody a vydělíme ji polovinou periody. Zhruba je polovina periody nastíněna na obrázcích, kde vidíme, že změna toku je dvojnásobek maximálního toku (první maximum bylo dosaženo při jedné orientaci, druhé při opačné). Průměrné elektromotorické napětí tedy je:

$$\mathcal{E}_{\text{průměr}} = -N \frac{\Delta \Phi_{\text{jednou cívkou}}}{\Delta t} = -N \frac{2BA}{\pi / \omega} = 2NBA^2 \omega.$$

Zapamatujete si, že elektromotorické napětí působí proti zdroji, takže celkové napětí je sníženo oproti napětí zdroje.

Jelikož tok osciluje, bude oscilovat i změna toku a tím i elektromotorické napětí a proud. Nadále budeme předpokládat konstantní průměrné elektromotorické napětí a tím i konstantní průměrný proud.

- (d) Spočítáme odpor vinutí:

$$R = \frac{\rho L}{A} = \rho (2\pi Na) / (\pi b^2) = 2N\rho a / b^2 \approx 700 \Omega,$$

kde $b = 0,5$ mm je poloměr vodiče. Najdeme počet závitů

$$NI \approx 10^6 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad N \approx 5 \times 10^5 \text{ závitů!}$$

Nyní vypočítáme elektromotorické napětí a napětí na zdroji:

$$\mathcal{E}_{\text{průměr}} = 2NBa^2\omega = 100 \text{ V},$$

$$V = IR + \mathcal{E}_{\text{průměr}} = 1500 \text{ V}.$$

Tahle čísla jsou vskutku trochu větší, ale ohmické ztráty v cívce mi vskutku kazí náladu

$$P = RI^2 \approx 3 \text{ kW}.$$

To je zlé. Desetinásobek užitečného výkonu zahřívá motor. Můžeme zvýšit N (a tím i R) a snížit I (a tím i P , je úměrné I^2) Jenomže už teď je N obrovské. Pokud se zamyslíte nad fyzickými rozměry cívky, je to prostě směšné řešení.

- (e) Z výsledků předchozí podotázky (d) plyne, že musíme snížit moment síly motoru, abychom mohli snížit součin NI . Tím bychom se mohli zbavit problému s ohmickým ohřevem. Snížení momentu τ se však musí kompenzovat zvýšením frekvence otáčení motoru ω . Převodový poměr však nemůžeme zvýšit do extrémních hodnot, protože s rostoucí hodnotou ω roste i indukované elektromotorické napětí. Tím roste podíl dodávaného napětí, které potřebujeme k překonání indukované elektromotorické síly ($V = IR + \mathcal{E}_{\text{průměr}}$ a proud nám klesá s nárůstem indukovaného elektromotorického napětí). To by ještě také tolik nevadilo, ale jakmile by se nám mixér zasekl, nože a následně motor se nám prudce zastaví, indukované napětí zmizí a následuje náhlý VELKÝ proudový náraz. Pak už se jen rozvine vůně spáleného vinutí a při výpočtu nového motoru už víte, s čím máte ještě počítat.

Pochopitelně nám v tomto může opět pomoci převodovka. Obvykle je navržena tak, že při zaklínění nožů raději prokluzuje, než by se zastavil motor. Jiné opatření (například u velkých profesionálních mixérů) je ochrana proti proudovým pulsům. Pokud zmizí indukované elektromotorické napětí, proud se zvýší a spálí pojistku ještě předtím, než shoří vinutí.