ÚLOHY Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU
SADA 7

Peter Dourmashkin

Obsah

SADA 7 **2**

P ÚLOHA 1: HMOTNOSTNÍ SPEKTROMETR 2
P ÚLOHA 2: LEVITACE CÍVKY 2
P ÚLOHA 3: STŘELKA KOMPASU 3

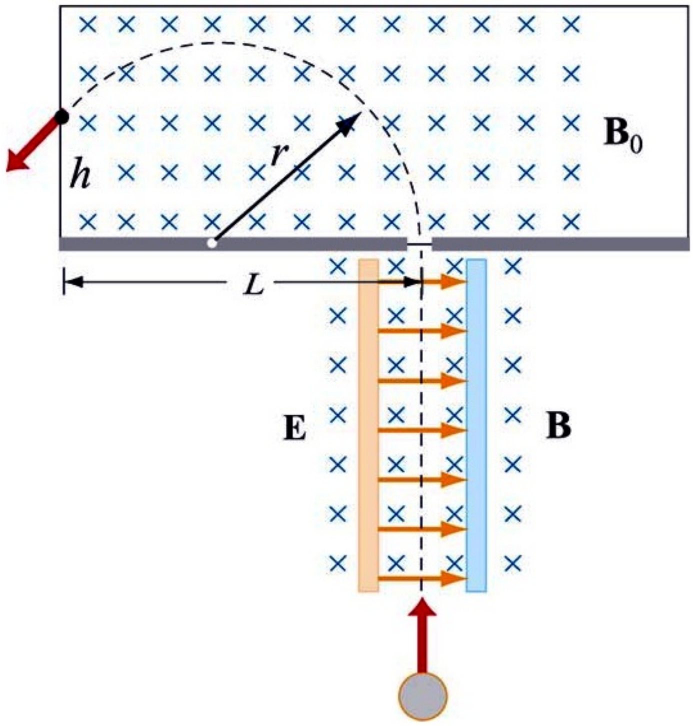
ŘEŠENÍ ÚLOH **4**

Ř ÚLOHA 1: HMOTNOSTNÍ SPEKTROMETR 4
Ř ÚLOHA 2: LEVITACE CÍVKY 4
Ř ÚLOHA 3: STŘELKA KOMPASU 5

Sada 7

P Úloha 1: Hmotnostní spektrometr

Na obrázku je znázorněno schéma hmotnostního spektrometru. Nabitá částice s hmotností m, nábojem q, a rychlostí $\mathbf{V}$ vstupuje ze spodní části obrázku a prolétá v ukázaných polích po vyznačené dráze. Magnetické pole $\mathbf{B}_0$ je všude homogenní. Jediná oblast, kde působí vnější elektrické pole, je část spektrometru, kde se náboj pohybuje po přímce.



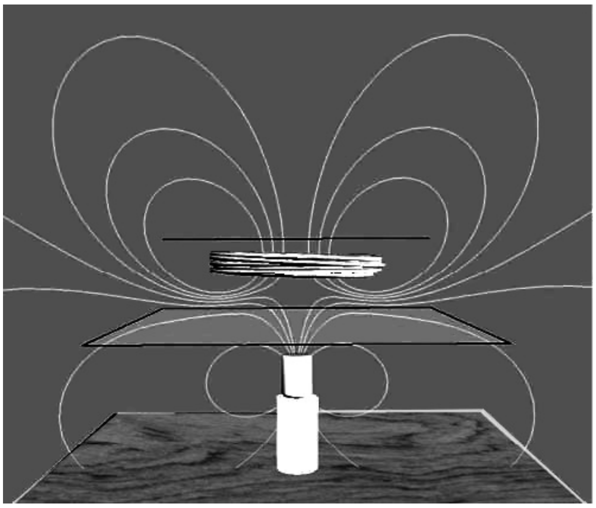
(a) Je znaménko náboje kladné nebo záporné? Zdůvodněte svoji odpověď.

(b) Jakou rychlost musí mít částice, aby se pohybovala po přímce v dolní oblasti; kde na ní působí zkřížené elektrické a magnetické pole?

(c) Najděte vzorec pro poloměr r oblouku, po kterém se pohybuje nabitá částice v druhé části své dráhy.

P Úloha 2: Levitace cívky

Mějme drát stočený do cívky s poloměrem R, která má N závitů a hmotnost m. Chcete, aby vám levitovala v určité výšce nad magnetem s magnetickým dipólovým momentem $\mathbf{M}$ (viz obrázek). Severní pól magnetu je nahoře, jižní dole.



(a) Po připojení k proudovému zdroji cívkou poteče proud I. V jakém směru při pohledu shora musí protékat proud cívkou (po směru nebo proti směru hodinových ručiček) tak, aby síla působící na cívku směřovala vzhůru?

(b) Spočítejte celkovou sílu, kterou na cívku působí magnetického pole dipólového magnetu, které je ve válcových souřadnicích dáno předpisem

$$\mathbf{B}(r,z)=\frac{\mu_0 M_\mathrm{d}}{4\pi}\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{3rz}{\left(r^2+z^2\right)^{5/2}}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\left(2z^2-r^2\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{5/2}}\right].$$

Šumovou texturu si můžete zobrazit pomocí apletu **Mapování polí**. V nabídce EXAMPLES (Ukázky) zvolte položku DIPOLE IN NO FIELD (Samotný dipól).

(c) Pokud byste tímto způsobem chtěli něco nadnášet (třeba sebe) musíte optimalizovat parametry. Jaká bude *optimální* výška levitace? Všimněte si, že máte k dispozici pouze jedinou vstupní veličinu, která rozměrem odpovídá délce, takže výsledek vyjádřete jako násobek či zlomek této veličiny. Pod pojmem optimální rozumíme výšku, která vyžaduje minimální proud. Jaký proud to bude?

P Úloha 3: Střelka kompasu

Možná jste si všimli, že střelka kompasu se chová jako lineární harmonický oscilátor, pokud ji přemisťujete z jednoho místa na druhé. Vycházeje z vašeho pozorování tohoto pohybu, odhadněte magnetizaci (magnetický dipólový moment v jednotkovém objemu) střelky kompasu. *Návod*: Předpokládejte, že ukazatel je z oceli, což vám sice přímo nepomůže k nalezení magnetizace, ale přesto vám může tento údaj pomoci ($\rho_\mathrm{oceli} \sim 7\,000\ \mathrm{kg/m^3}$).

Řešení úloh

Ř Úloha 1: Hmotnostní spektrometr

(a) Znaménko náboje je kladné. Můžete se o tom přesvědčit, když se podíváte, jak se částice zakřivuje v horní části zařízení. Pole směřuje do nárysny, součin $\mathbf{V}\times\mathbf{B}_0$ směřuje doleva a nabitá částice se tímto směrem pohybuje. Proto musí být kladná.

(b) Má-li se náboj pohybovat po přímce, musí být celková elektromagnetická síla rovna nule:

$$\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}_0=0 \qquad \Rightarrow \qquad V=\frac{E}{B_0}$$

(c) Magnetické pole působí vždy kolmo na rychlost, takže nabité částici uděluje pouze normálové zrychlení $a_n=F_n/m=qVB_0/m=V^2/r$, takže poloměr je $r=mV/qB_0$.

Ř Úloha 2: Levitace cívky

(a) Jelikož nejblíže k cívce je severní pól, chceme, aby severní pól našeho dipólu směřoval dolů. Tak se budou navzájem odpuzovat a cívka bude levitovat. Při pohledu shora poteče požadovaný proud ve směru hodinových ručiček.

(b) Výpočet můžeme provést dvěma způsoby. První spočívá v integraci elementů síly $d\mathbf{F}$, které působí na každou část proudovodiče $d\mathbf{s}$ ze strany pole $d\mathbf{F}=Id\mathbf{s}\times\mathbf{B}$. Zajímá nás svislá složka síly a vzhledem k tomu, že $d\mathbf{s}$ směřuje v azimutálním směru, je z magnetického pole magnetu zajímavá pouze radiální složka. Axiální složka pole magnetu po vektorovém součinu s azimutálně orientovaným proudovodičem cívky vede k radiálním silám, které se s ohledem na symetrii při integrování po uzavřené křivce vyruší. Takže:

$$dF_z=IdlB_r=Idl\frac{\mu_0M_\mathrm{d}}{4\pi}\left[\frac{3Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}\right],$$

(kde $r\to R$, protože nás zajímá síla působící na cívku, kde $r=R$). Nyní zbývá výraz integrovat. Vše jsou konstanty s výjimkou elementu dl, jehož integrál dává $2\pi NR$, kde N je počet závitů cívky. Síla působící na cívku proto je

$$\mathbf{F}=\hat{\mathbf{k}}I2\pi RN\frac{\mu_0M_\mathrm{d}}{4\pi}\left[\frac{3Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}\right]=\boxed{\hat{\mathbf{k}}\frac{3\mu_0M_\mathrm{d}zR^2NI}{2\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}}.$$

Druhou možností je vyšetřovat cívku jako dipól s momentem $\hat{\boldsymbol{\mu}}=-NIA\,\hat{\mathbf{k}}$. Tento předpoklad v sobě skrývá určité přiblížení, protože vnější pole, které na cívku působí, se na jejím průřezu mění, ale měli bychom dostat podobný výsledek:

$$\mathbf{F}=\left(\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}=-NIA\frac{d}{dz}\left(\frac{\mu_0M_\mathrm{d}}{4\pi}\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{3rz}{\left(r^2+z^2\right)^{5/2}}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\left(2z^2-r^2\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{5/2}}\right]\right)$$

Přísně vzato by tam neměl být radiální člen, tak co tam dělá? Je to tím, že „dipól“ smyčky se nachází na ose r = 0. Dosadíme r = 0 a budeme derivovat:

$$\mathbf{F} \approx -\hat{\mathbf{k}} NIA \frac{\mu_0 M_\mathrm{d}}{4\pi} \frac{d}{dz}\left(\frac{2z^2}{z^5}\right) = -\hat{\mathbf{k}} 2NI\pi R^2 \frac{\mu_0 M_\mathrm{d}}{4\pi}\left(-3z^{-4}\right) = \boxed{\hat{\mathbf{k}} \frac{3\mu_0 M_\mathrm{d} R^2 NI}{2z^4}}$$

Dostáváme velice podobný výsledek, který dává totéž v limitním případě $z >> R$. To je rozumné – je to totéž, jako když nejsou důležité změny **B** s poloměrem r.

(c) Při nadnášení potřebujete magnetickou silou přinejmenším kompenzovat tíhu.

$$\frac{3\mu_0 M_\mathrm{d} z R^2 NI}{2\left(R^2+z^2\right)^{5/2}} = mg$$

Použili jsme první způsob (s R^2 ve jmenovateli), protože nás zajímá oblast malých z. Vyjádříme potřebný proud:

$$I_\mathrm{levitace} = \frac{2mg\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}{3\mu_0 M_\mathrm{d} z R^2 N}.$$

Chceme minimalizovat tento proud, a jelikož nejsme nijak omezeni, co se týče výšky levitace, chceme si vybírat optimální z (s ohledem na to, jaké máme R). Abychom toho dosáhli, musí platit

$$\frac{\partial I_\mathrm{levitace}}{\partial \mathrm{z}} \propto \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} z^{-1}\left(R^2+z^2\right)^{5/2} = z^{-2}\left(R^2+z^2\right)^{5/2} + 5\left(R^2+z^2\right)^{3/2} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$z^{-2}\left(R^2+z^2\right) - 5 = 0 \Rightarrow 4z^2 = R^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{z_\mathrm{optim} = R/2}.$$

Nyní určíme minimální proud potřebný pro levitaci v závislosti na výšce z_optim:

$$I_\mathrm{levitace} = \frac{2mg\left(R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)^{5/2}}{3\mu_0 M_\mathrm{d}\left(\frac{R}{2}\right) R^2 N} = \frac{4mgR^5\left(5/4\right)^{5/2}}{3\mu_0 M_\mathrm{d} R^3 N} = \frac{mgR^2 5^{5/2}}{24\mu_0 M_\mathrm{d} N}.$$

Ř Úloha 3: Střelka kompasu

Opět se zabýváme lineárním harmonickým oscilátorem, a podobně jako v úloze 4 sady 2 vykonává úhlové kmity. Pohybová rovnice je $\tau = -|\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}| = -\mu B \sin\theta = I\ddot{\theta}$. Jako obvykle, budeme uvažovat přiblížení pro malé úhly, které nám umožní zbavit se funkce sinus, a úpravou najdeme výraz pro nalezení úhlové rychlosti malých oscilací: $\ddot{\theta} = -\mu B\theta / I = -\omega^2\theta$. Okamžitě vidíme, že frekvence narůstá s indukcí magnetického pole. Možná jste si všimli, že kompasy umístěné blízko tyčových magnetů kmitají rychleji, než pokud jsou dál od nich. Abychom našli magnetický moment μ potřebujeme odhadnout B a I. Uvažme, co dělá kompas v zemském poli, které je přibližně B ~ 5×10^{-5} T. Není to úplně přesné, protože kompas reaguje pouze na složku pole v rovině stolu, ale je to dobré přiblížení.

Moment setrvačnosti tenké tyče délky L a hmotnosti m je $I = ML^2/12$. Hledáme magnetizaci (magnetický moment dělený objemem). Hmotnost přepíšeme jako $M = \rho_{\text{oceli}} V$ a za předpokladu, že střelka je dlouhá asi centimetr:

$$I = \frac{1}{12} ML^2 = \frac{1}{12} \rho_{\text{oceli}} V L^2 \approx 0{,}05 \; V \; \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Nakonec musíme odhadnout frekvenci oscilací. Daleko od magnetu je kolem 1 Hz, takže $\omega \sim 6 \text{ s}^{-1}$. Najděme nyní magnetizaci:

$$\frac{\mu}{V} = \frac{I\omega^2}{VB} \approx 4 \times 10^4 \; \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Jak si ověříme, že je výsledek rozumný? Zamysleme se nad magnetickým polem tvořeným magnetem s touto magnetizací. Mějme tyčový magnet, například 10 cm dlouhý, 1 cm široký a 1 mm tlustý, který má objem $V = 10^{-6}$ m^3 a následně má magnetický dipólový moment $\mu = 4 \times 10^{-2}$ A·m^2. Ve vzdálenosti jednoho centimetru vyvolá přibližně pole

$$B_{\text{axial}} \approx \frac{\mu_0 \mu}{z^3} \approx \; 5 \times 10^{-2} \; \text{T}$$

Tato hodnota leží v oblasti očekávaných hodnot, pole je silnější než zemské, což má být, protože může převládat nad zemským polem, jak ukazuje střelka, ale zase není přehnaně velké. To že je jen tisíckrát silnější znamená, že deset centimetrů od magnetu budou pole souměřitelná, což odpovídá experimentu. Všimněte si, že výše uvedený vzorec je pouhou aproximací (něco takového byste napsali z rozměrové analýzy ve snaze dostat správné jednotky, což je přesně to, co potřebujete pro hrubý odhad).