

ÚLOHY Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU

SADA 6

Peter Dourmashkin

© MIT 2006, překlad: Vítězslav Kříha (2007)



Obsah

SADA 6	2
P ÚLOHA 1: PATÁLIE S MAGNETICKÝM POLEM	2
P ÚLOHA 2: ARCHIMÉDOVA SPIRÁLA	2
P ÚLOHA 3: ROTUJÍCÍ VÁLEC	3
P ÚLOHA 4: PROVRTANÝ VODIČ	3
P ÚLOHA 5: KABEL	3
ŘEŠENÍ ÚLOH	4
Ř ÚLOHA 1: PATÁLIE S MAGNETICKÝM POLEM	4
Ř ÚLOHA 2: ARCHIMÉDOVA SPIRÁLA	5
Ř ÚLOHA 3: ROTUJÍCÍ VÁLEC	5
Ř ÚLOHA 4: PROVRTANÝ VODIČ	6
Ř ÚLOHA 5: KABEL	6

Sada 6

Úloha 1: Patálie s magnetickým polem

Přítel vás poprosí o pomoc. Má problémy s magnetickým polem ve svém novém domě. Řekl vám k celé věci toto:

Do svého nového domu jsem si pozval odborníka na mikroklima interiérů a ten dospěl k závěru, že hladina elektromagnetických polí v mém domě je nevyhovující. Pohybovaly se od dolní hranice $0,30 \mu\text{T}$ do nejvyšších kolem $0,58 \mu\text{T}$ v ložnici, která je nejbližší k elektrickému vedení nataženému rovnoběžně se zadní stěnou domu ve vzdálenosti asi 10 metrů. Odborník mne upozornil, že hodnoty nad $0,2 \mu\text{T}$ jsou nepříjemné a doporučil mi, že je žádoucí snížit je pod $0,1 \mu\text{T}$. Mohl bych vedení nechat zakopat. Šance na oslabení elektromagnetického pole je však nejistá: Pracovník energetické společnosti mi řekl, že to situaci ještě zhorší, protože vedení bude blíže domu a země nezadrží ani neoslabí elektromagnetické pole. Jenomže ten odborník tvrdil, a sám jsem to někde četl, že když jsou vodiče těsně blízko sebe, elektromagnetické pole se navzájem vyruší. Cena za vykopání těch zhruba 16 metrů, co je potřeba, přesahuje 500 000 Kč. Taky to mohu nechat být a riskovat u sebe i své rodiny zdraví a možná i život, včetně ještě nenarozených dětí, které mohou být během nitroděložního vývoje zvláště citlivé k škodlivým vlivům.

Co si o tom myslíte? Vycházejte z udaných čísel a ze svých životních zkušeností a odhadněte, jak daleko od sebe jsou vodiče teď (k tomuto účelu předpokládejte, že jsou to prostě dva rovnoběžné dráty, kterými protékají tytéž proudy v opačných směrech – víceméně je to správně) a jaký proud jimi protéká? Pokud je zakopáte, o co blíže budou k domu (jak hluboký je asi příkop, do kterého se zakopává vedení?) a jak blízko od sebe budou vodiče? Jak se takhle změna projeví na poli v ložnici? A co je ze všeho nejdůležitější: Co si myslíte o udaných hodnotách? Připomínám, že drtivá většina z vás se narodila matkám, které i v těhotenství běžně používaly elektrickou žehličku, u mladších i matky vašich matek používaly elektrickou žehličku po celý život, těhotenství nevyjímaje. Je krajně nepravděpodobné, že by při takto rozsáhlém biologickém pokusu zůstaly škodlivé účinky způsobené žehlením elektrickou žehličkou nepovšimnuty. Porovnejte pole způsobené žehličkou s výše zmíněnými!

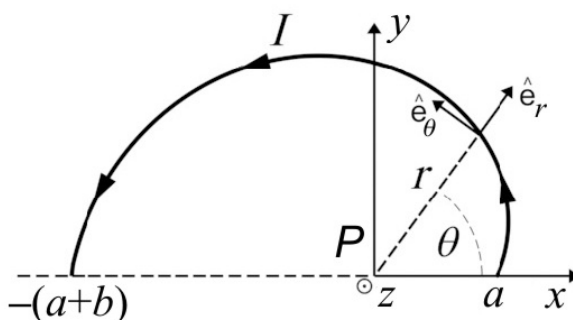
Úloha 2: Archimédova spirála

Kus drátu je ohnutý do tvaru Archimédovy spirály (viz obrázek). Rovnice popisující křivku v rozsahu $0 \leq \theta \leq \pi$ je

$$r(\theta) = a + \frac{b}{\pi}\theta, \text{ pro } 0 \leq \theta \leq \pi,$$

kde θ je odklon od osy x v radiánech. Bod P je umístěn do počátku naší

souřadné soustavy xy . Vektory \hat{e}_r a \hat{e}_θ jsou jednotkové vektory v radiálním a azimutálním směru, jak je ukázáno na obrázku. Vodičem protéká proud I v ukázaném směru. Jaká bude indukce magnetického pole v bodě P ?



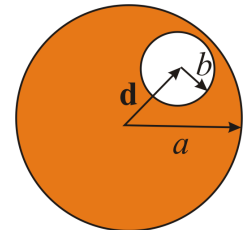
Úloha 3: Rotující válec

Velice dlouhý rovnoměrně objemově nabitý válec s nábojem $+Q$, poloměrem R a délkou L , má osu koaxiálně s osou z a rotuje kolem ní proti směru hodinových ručiček s úhlovou rychlostí ω . Pokud zanedbáte okrajové jevy dané konečnou délkou vodiče, jakou velikost a směr bude mít indukce magnetického pole uvnitř a vně válce?

Návod: Nepřipomíná vám to něco? Kde bude pole nulové?

Úloha 4: Provrtaný vodič

Dlouhý přímý měděný vodič o poloměru a je excentricky provrtaný tak, že je v něm válcová dutina o poloměru b . Vektor \mathbf{d} udává rovnoběžné posunutí osy díry z osy vodiče. Vodičem teče proud I . Najděte magnetické pole v libovolném místě dutiny.

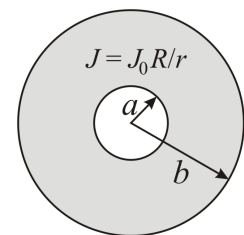


Úloha 5: Kabel

Dlouhý válcový kabel sestává z vodivé válcové vrstvy s vnitřním poloměrem a a vnějším poloměrem b . Proudová hustota \mathbf{J} uvnitř vrstvy směřuje ven z nárysny (viz obrázek) a mění se s poloměrem jako $J(r) = J_0 R/r$ pro $a < r < b$ a mimo tento interval je nulová.

Uveďte, jakou uzavřenou křivku používáte při výpočtu cirkulace podle zákona celkového proudu.

- Najděte velikost a směr indukce magnetického pole pro $r < a$.
- Najděte velikost a směr indukce magnetického pole pro $a \leq r \leq b$.
- Najděte velikost a směr indukce magnetického pole pro $r > b$.
Diskutujte případ $r = b$.
- Zakreslete výsledky do grafu.



Řešení úloh

Ř Úloha 1: Patálie s magnetickým polem

Myslím si, že onen „odborník“ byl úplně mimo. (Že by si přivydělával u firmy zakopávající kabely?) Pojdme se na to podívat z objektivního hlediska. Ze zkušenosti víme, že dráty jsou od sebe asi metr a od stavení je to k nim po zemi zhruba deset metrů a vysoko budu také tak deset metrů. Pole těchto vodičů bude sice záviset na jejich přesné vzájemné pozici, ale děláme odhad, takže budu předpokládat, že oba leží na přímce s referenčním místem v domě, jeden vzdálený $10\sqrt{2} \approx 14$ metrů a druhý, kterým protéká proud v opačném směru, 15 metrů.

Pole dlouhého přímého vodiče je $B = \mu I / 2\pi r$ (ze zákona celkového proudu). Máme dva vodiče ve vzdálenostech r_1 a r_2 , kde $r_2 = r_1 + \delta r$, takže:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\delta r}{r_1 r_2} \right).$$

Ze vztahu vyjádříme I :

$$I = \frac{2\pi B r_1 r_2}{\mu_0 \delta r} \approx 600 \text{ A}.$$

Je to možné? Neřekl mi, co je to za vedení. Kdyby to byla jen jeho přípojka, bylo by to hodně, kdyby bylo určeno pro napájení místní trafostanice, je to přiměřené. Před trafostanicí je napětí zhruba 2 kV, což znamená, že vedení dodává zhruba megawatt, což zásobuje asi tak sto domů (počítáno 10 kW na dům).

Další část otázky se týká toho, co se stane, když kabely zakopeme. Obvykle se kabely zakopávají 2 až 3 metry pod zem (nejlépe pod linii zamrzání půdy, ale to vždy nejde). U tak malé hloubky nebudeme brát v potaz zakopání a prostě budeme uvažovat, že vodiče jsou deset metrů od domu. Také jsou k sobě blíž, řekněme 30 cm. Dostáváme:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\delta r}{r_1 r_2} \right) \approx 4 \times 10^{-7} \text{ T}$$

Pracovník energetické společnosti se ve své práci vyznal, zakopání opravdu nepomůže. Můžete kopat hodně hluboko, nebo dát vodiče k sobě blíž. Každopádně bude obtížné dosáhnout řádové změny velikosti indukce.

To nás přivádí k hlavní otázce – jak silné pole je? Víte, že magnetické pole Země je zhruba 50 μT , takže asi stokrát větší. Vodiče však na rozdíl od magnetické pole Země budí střídavé pole na 50 Hz. Je správné předpokládat, že biologický účinek konstantních a střídavých polí se liší. Pojdme k žehličce. Příkon žehličky je kolem kilowattu, nicméně nežehlíme stále jenom len, řekněme, že žehličkou protékají 4 A. Ať už je vnitřek žehličky uspořádán jakkoli, faktem zůstává, že v přívodní šňůře jsou tři nestíněné kabely. Zemnicím by neměl protékat žádný proud, fázovým a nulovým, řekněme 3 mm od sebe, protékají proudy proti sobě. Přívodní šňůru budeme uvažovat deset centimetrů od těla:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\delta r}{r_1 r_2} \right) \approx 2 \times 10^{-7} \text{ T}.$$

Žádný velký rozdíl, co? Pole v domě nejsou silná. Jistě bychom dokázali dostat jejich hodnoty „doporučenou“ pomyslnou zdraví neškodnou hranici 0,1 μT . Ale není žádný odborný důvod se domnívat, že tato pole jsou škodlivá (jsou i jiné, výkonnější přístroje než žehlička) a tomu příteli určitě vysvětlím, že nemá vyhazovat půl miliónu z okna.

Ř Úloha 2: Archimédova spirála

Začneme výpočtem pole vyvolaného elementem proudovodiče ds (například v místě znázornění jednotkových vektorů na obrázku). Podle Biotova-Savartova zákona vytváří tento element magnetické pole:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} (dr \hat{\mathbf{e}}_r + r d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) \times (-\hat{\mathbf{e}}_r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{rd\theta}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{rd\theta}{r^2} \hat{\mathbf{k}},$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{r} \hat{\mathbf{k}}.$$

Stačí dosadit za $r(\theta)$ a integrovat podél spirály

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{r} = \hat{\mathbf{k}} \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{\left(a + \frac{b}{\pi} \theta\right)} = \hat{\mathbf{k}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\pi}{b} \ln \left(a + \frac{b}{\pi} \theta \right) \Big|_0^\pi = \hat{\mathbf{k}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{b} \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right).$$

Zkusíme si, nakolik je výsledek reálný. Budeme-li předpokládat, že b je malé, použijeme přiblížení $\ln(1+b/a) \cong b/a$ a náš výraz přejde na

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{b} \frac{b}{a} = \hat{\mathbf{k}} \frac{\mu_0 I}{4\pi a}.$$

Tento výsledek je očekávaný, protože toto je polovina pole ve středu kružnice, a v limitním případě malých b spirála přechází na polokružnici.

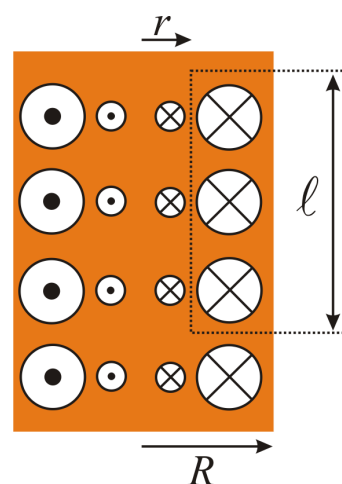
Ř Úloha 3: Rotující válec

Nejprve považujeme o dané radě. Co nám to připomíná? Když válec rotuje, nutí své náboje k pohybu po kružnicích a tak tvoří sadu proudových smyček – vlastně na sebe navlečené solenoidy. Jelikož tyto solenoidy jsou dlouhé (připomínám, že máme zanedbat okrajové jevy dané konečnou délkou), můžeme prohlásit, že vně válce je magnetické pole nulové. Takže můžeme použít zákon celkového proudu k výpočtu pole uvnitř válce. Ze symetrie, stejně jako u solenoidů, má pole pouze osovou složku, indukce směřuje nahoru podle pravidla pravé ruky.

Při integrování podél uzavřené smyčky (na obrázku je znázorněna tečkovaně) ze zákona celkového proudu:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\ell + 0 + 0 + 0 = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 I / \ell.$$

Jaký proud protéká smyčkou? Náboj je rozložen rovnoměrně, takže hustota náboje je $\rho = Q / \pi R^2 L$. Válec si můžeme představit složený z prstenců o poloměru r a s průřezem $dr dz$, které se otáčejí s periodou $T = 2\pi / \omega$.



$$dI_{\text{prstence}} = \frac{dQ_{\text{prstence}}}{T} = 2\pi r dr dz \rho \frac{\omega}{2\pi} = \rho \omega r dr dz \quad \Rightarrow$$

$$I = \int_r^R \int_0^\ell \rho \omega r dr dz = \frac{1}{2} \rho \omega \ell (R^2 - r^2) \quad \Rightarrow$$

$$B(r < R) = \frac{\mu_0 I}{2\ell} = \frac{\mu_0}{2} \rho \omega (R^2 - r^2) = \frac{\mu_0 Q \omega (R^2 - r^2)}{2\pi R^2 L} = \boxed{\frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi L} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}$$

Pole, jak již bylo řečeno výše, směřuje rovnoběžně s osou válce vzhůru.

Ř Úloha 4: Provrtaný vodič

Úlohu budeme řešit pomocí superpozice, v tomto případě s jedním vodičem o poloměru a , ve kterém proud teče z nákresny, a druhým pomyslným vodičem o poloměru b v místě dutiny, kterým proud teče do nákresny. Oba mají proudovou hustotu $J = I / \pi (a^2 - b^2)$.

Zjednodušíme si situaci a pootočíme si souřadnicový systém tak, aby osa dutiny ležela na ose x , poté bude $\mathbf{d} = d \hat{\mathbf{i}}$. Pak si spočítáme pole v libovolném místě $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$ uvnitř dutiny, bráno od středu vodiče.

Pole plného válcového vodiče má pouze azimutální složku, jejíž amplitudu získáme ze zákona celkového proudu (jako uzavřenou křivku použijeme kružnici s poloměrem $r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B 2\pi r = \mu_0 I = \mu_0 J \pi r^2 \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 J r \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2} \mu_0 J r \left(-\frac{y}{r} \hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{r} \hat{\mathbf{j}} \right) = -\frac{1}{2} \mu_0 J (y \hat{\mathbf{i}} - x \hat{\mathbf{j}})$$

Analogicky řešíme pro dutinu v místě $\mathbf{r}_d = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$:

$$\mathbf{B}_d = -\frac{1}{2} \mu_0 J r_d \hat{\boldsymbol{\theta}}_d = -\frac{1}{2} \mu_0 J r \left(-\frac{y}{r} \hat{\mathbf{i}} + \frac{x-d}{r} \hat{\mathbf{j}} \right) = \frac{1}{2} \mu_0 J (y \hat{\mathbf{i}} - (x-d) \hat{\mathbf{j}}).$$

Znaménkem minus jsme vyjádřili opačný směr proudu v pomyslném vodiči v místě dutiny. Prostým součtem získáme celkové pole:

$$\mathbf{B}_{\text{celk}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_d = -\frac{1}{2} \mu_0 J (y \hat{\mathbf{i}} - x \hat{\mathbf{j}}) + \frac{1}{2} \mu_0 J (y \hat{\mathbf{i}} - (x-d) \hat{\mathbf{j}}) = \frac{1}{2} \mu_0 J d \hat{\mathbf{j}} = \boxed{\frac{\mu_0 I d}{2\pi (a^2 - b^2)} \hat{\mathbf{j}}}$$

Všimněte si, že nesejde na tom, kde v dutině jste, jen když jste uvnitř.

Ř Úloha 5: Kabel

Jako uzavřenou křivku při výpočtu cirkulace budeme používat kružnici se středem na ose vrstvy, která leží v rovině kolmé na tuto osu.

(a) Pro $r < a$ uzavřenou křivkou neprotéká žádný proud, podle zákona celkového proudu bude $B = 0$.

(b) Pro $a \leq r \leq b$ si nejprve spočítáme proud, který protéká uzavřenou křivkou:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \int_a^r \frac{J_0 R}{r} 2\pi r dr = 2\pi J_0 R \int_a^r dr = 2\pi J_0 R(r-a).$$

Podle zákona celkového proudu

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B(2\pi r) = \mu_0 2\pi J_0 R(r-a).$$

Výsledně

$$\mathbf{B} = B \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0 J_0 R(r-a)}{r} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \mu_0 J_0 R \left(1 - \frac{a}{r}\right) \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Magnetické pole směřuje v azimutálním směru. Upřímně řečeno, neplyne to přímo ze zákona celkového proudu, ale snadno se o tom přesvědčíte sami. Pole přímého válcového vodiče znáte, má uvnitř i vně nenulovou pouze azimutální složku. Tento vodič si podobně jako v předchozí úloze můžete vyjádřit pomocí superpozice dvou přímých koaxiálních válcových vodičů, takže i jeho pole bude mít nenulovou pouze azimutální složku.

(c) Pro $r > b$ si nejprve spočítáme proud, který protéká uzavřenou křivkou:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \int_a^b \frac{J_0 R}{r} 2\pi r dr = 2\pi J_0 R \int_a^b dr = 2\pi J_0 R(b-a).$$

Podle zákona celkového proudu

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B(2\pi r) = \mu_0 2\pi J_0 R(b-a).$$

Výsledně

$$\mathbf{B} = B \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0 J_0 R(b-a)}{r} \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Magnetické pole opět směřuje v azimutálním směru.

(d) Prohlédněte si graf. Uvědomte si, že uvnitř přímého válcového vodiče indukce lineárně narůstá s poloměrem a vně ubývá jako $1/r$. Pokud si představíte superpozici popsanou v odpovědi na podotázku (b), bude graf mnohem srozumitelnější.

