ÚLOHY Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU
SADA 4

Peter Dourmashkin

Obsah

Sada 4

P Úloha 1: Lidský kondenzátor

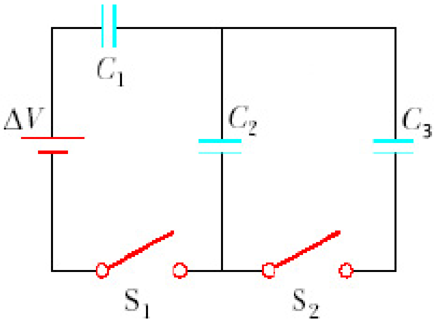
Jaká je přibližně kapacita typického studenta?

P Úloha 2: Udělejte si kondenzátor

Máte roličku alobalu a roličku plastové balící fólie. Jakou maximální kapacitu může mít kondenzátor, který se vám pohodlně vejde do kapsy?

P Úloha 3: Kondenzátory

V obvodu ukázaném na obrázku je $C_1 = 2{,}0\ \mu\text{F},\ \ C_2 = 6{,}0\ \mu\text{F},\ \ C_3 = 3{,}0\ \mu\text{F}$ a $\Delta V = 10{,}0\ \text{V}$.



Ve výchozím stavu jsou všechny kondenzátory vybity a spínače jsou rozpojené. V čase $t = 0$ se sepne spínač S_2. V čase $t = T$ se spínač S_2 rozpojí a téměř okamžitě se sepne spínač S_1. V čase $t = 2T$ se spínač S_1 rozpojí a téměř okamžitě se sepne spínač S_2.

Spočítejte:

(a) Náboj na C_2 během $0 < t < T$ (po sepnutí S_2).

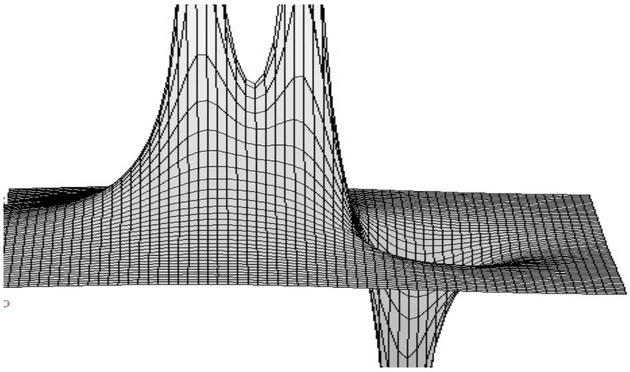
(b) Náboj na C_1 během $T < t < 2T$.

(c) Výsledné náboje na kondenzátorech ($t > 2T$).

P Úloha 4: Pět krátkých otázek

Otázka A

Tři náboje leží na ose x ve vzdálenosti a od sebe a jsou očíslovány od 1 do 3 zleva doprava. Rozložení potenciálu je ukázáno na obrázku. Které tvrzení je pravdivé?



Intenzita elektrického pole je nulová…

1. … v jistém bodě mezi náboji 1 a 2 a taktéž v jistém bodě mezi náboji 2 a 3.
2. … v jistém bodě mezi náboji 1 a 2, ale nikde mezi náboji 2 a 3.
3. … nikde mezi náboji 1 a 2, avšak v jistém bodě mezi náboji 2 a 3.
4. … nikde mezi náboji 1 a 2 ani mezi náboji 2 a 3.

Otázka B

Představte si tři stejné hmotnosti, které se nacházejí v různých gravitačních potenciálech:

A) V lineárním potenciálu $(V \propto x)$, ale v místě s $V = 0$

B) V konstantním nenulovém potenciálu

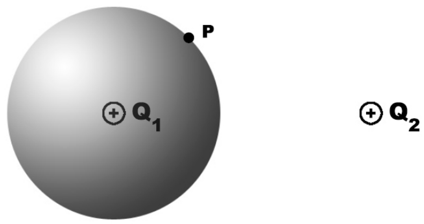
C) V konstantním nulovém potenciálu

Které tvrzení je pravdivé?

1. Ani jedna hmota se nebude urychlovat.
2. Pouze A se urychluje.
3. Pouze B se urychluje.
4. Pouze C se urychluje.
5. A a B se urychluje, ale A získá větší zrychlení.
6. Všechny hmoty se urychlují, ale B získá větší zrychlení.
7. Všechny hmoty se urychlují, ale C získá větší zrychlení.

Otázka C

Na obrázku je bodový náboj + Q_1 ve středu pomyslné kulové Gaussovy plochy a jiný bodový náboj + Q_2 je mimo tuto plochu. Bod P leží na povrchu kulové plochy. Které tvrzení je pravdivé?



1. Oba náboje + Q_1 a + Q_2 přispívají k celkovému toku intenzity plochou, ale pouze náboj + Q_1 přispívá k intenzitě elektrického pole v bodě P.
2. Oba náboje + Q_1 a + Q_2 přispívají k celkovému toku intenzity plochou, ale pouze náboj + Q_2 přispívá k intenzitě elektrického pole v bodě P.
3. Pouze náboj + Q_1 přispívají k celkovému toku intenzity plochou, ale oba náboje + Q_1 a + Q_2 přispívají k intenzitě elektrického pole v bodě P.
4. Pouze náboj + Q_2 přispívají k celkovému toku intenzity plochou, ale oba náboje + Q_1 a + Q_2 přispívají k intenzitě elektrického pole v bodě P.
5. Pouze náboj + Q_1 přispívají k celkovému toku intenzity plochou i k intenzitě elektrického pole v bodě P.
6. Pouze náboj + Q_2 přispívají k celkovému toku intenzity plochou i k intenzitě elektrického pole v bodě P.

Otázka D

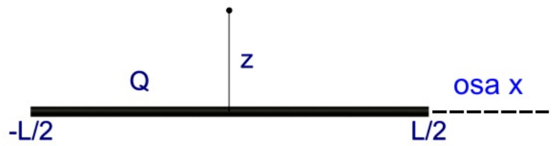
Představte si dipól umístěný v homogenním elektrickém poli. Který z následujících výrazů týkající se síly **F** a momentu síly τ je pravdivý nehledě na orientaci dipólu?

1. **F**≠ **0** a τ≠ **0**.
2. **F**= **0** a τ≠ **0**.
3. **F**≠ **0** a τ= **0**.
4. **F**≠ **0** a τ= **0**.
5. **F**≠ **0,** ale τ může nebo nemusí být nulová.
6. **F** může nebo nemusí být nulová, ale τ= **0**.

Otázka E

Tyč délky L je homogenně nabita s liniovou hustotou náboje λ .Velikost intenzity elektrického pole ve vzdálenosti z od středu tyče podél kolmice k tyči procházející středem tyče je dána výrazem

1. $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{xdx}{\left[x^2+z^2\right]^{3/2}}$.
2. $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{xdx}{\left[x^2+z^2\right]}$.
3. $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{zdx}{\left[x^2+z^2\right]^{3/2}}$.
4. $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{zdx}{\left[x^2+z^2\right]}$.
5. $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dx}{\left[x^2+z^2\right]}$.

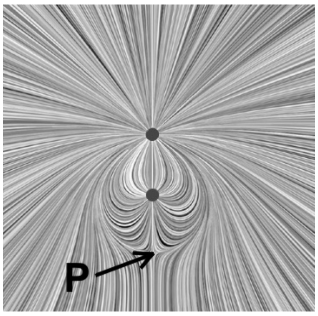


Úloha 5: Van de Graaffův generátor

Při výuce jsem používal malý Van de Graaffův generátor, při plném nabití praskal. Jaký náboj na něm byl? Udělejte co nejlepší odhad neznámých, přičemž si rozmyslete, co vlastně odhadujete.

Úloha 6: Náboje

Na obrázku je pomocí šumové textury znázorněno elektrické pole vytvořené dvojicí nábojů ležících na ose y v místech $y = 0$ a $y = d$. Náboj v $y = 0$ je $+Q$.



(a) Jaké je znaménko náboje v $y = d$?

(b) Kam směřuje elektrické pole v dolní části obrázku na ose y?

(c) Nyní zvažte elektrické pole v bodě P (na ose v místě $y = -d$). Jaké je v tomto bodě elektrické pole? Kladné, záporné nebo nulové?

(d) Vypočítejte znaménko a velikost náboje Q_d v místě $y = d$.

(e) Nyní si představte třetí bodový náboj q aktuálně umístěný ve značné vzdálenosti na ose x. Jaká práce musí být vykonána, aby se tento náboj přesunul ze své pozice do bodu P. Poznámka: Pokud jste nevyřešili část (d), ale potřebujete její výsledky, prostě používejte Q_d.

P Úloha 7: Kulový potenciál

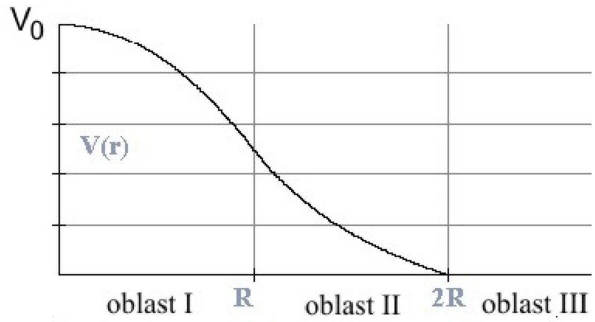
Elektrický potenciál pro kulově symetrické rozložení náboje je dán vztahem:

$$\text{Oblast I.} \quad V(r) = \frac{Vr^2}{2R^2} + V_0; \qquad 0 < r < R,$$

$$\text{Oblast II.} \quad V(r) = \frac{VR}{r} + \frac{V_0}{2}; \qquad R < r < 2R,$$

$$\text{Oblast III.} \quad V(r) = 0; \qquad r > R,$$

kde V_0 je potenciál v počátku a R je vzdálenost v radiálním směru. Graf je na obrázku.



P Úloha 8: Kondenzátor

Deskový kondenzátor má kapacitu C. Je připojen ke zdroji elektromotorického napětí ε, dokud se zcela nenabije a pak je odpojen. Desky jsou poté odtaženy na vzdálenost d, během tohoto děje se naměřený rozdíl potenciálů mezi nimi změní 4×. Níže je sada otázek, jak se mění ostatní veličiny. I když jsou navazující, odpovědi na předchozí otázky neovlivní možnost správné odpovědi na následující otázky.

a) Rozdíl potenciálů se 4× zvýší nebo sníží?

b) Kolikrát se změní intenzita elektrického pole v důsledku zvětšení vzdálenosti? Nezapomeňte uvést, zdali dojde ke zesílení či zeslabení pole.

c) Kolikrát se změní energie akumulovaná v elektrickém poli v důsledku zvětšení vzdálenosti? Nezapomeňte uvést, zdali dojde ke zvětšení či zmenšení energie.

d) Dielektrikum s relativní permitivitou κ bude zcela vyplňovat objem mezi deskami. Kolikrát se změní energie akumulovaná v elektrickém poli? Vzroste nebo se zmenší?

e) Jaký je objem dielektrika nutný k vyplnění oblasti mezi deskami? Mějte v patrnosti, že vaše odpověď musí být vyjádřena pomocí proměnných definovaných výše, fyzikálních konstant a čísel.

Řešení úloh

Ř Úloha 1: Lidský kondenzátor

Dá se na to jít různě. Jedna z možností je předpokládat, že jste zhruba válec s hustotou vody, jehož rozměry odpovídají vaší hmotnosti. Osobně se cítím spíše jako koule. Vše, co potřebuji vědět, je můj poloměr. V prvním přiblížení je to zhruba metr. (Určitě budu menší než deset metrů a větší než deset centimetrů.) Takže má kapacita bude kolem

$$C \approx 4\pi\varepsilon_0 a \approx 100\,\mathrm{pF}.$$

To není špatná aproximace, podle skutečného měření mám kapacitu kolem 170 pF.

Ř Úloha 2: Udělejte si kondenzátor

Při realizaci budete přirozeně vyrábět deskový kondenzátor (alobal, plast, alobal) a potom ho srolujete nebo poskládáte, abyste vyplnili objem vaší kapsy. Zamysleme se nad kapacitou deskového kondenzátoru: $C = \varepsilon A / d$, kde $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$. Plocha A záleží na tom, kolik si myslíte, že můžete do kapsy nacpat, zatímco permitivita a tloušťka d závisí na fólii. Budu předpokládat, že tloušťka bude o trochu menší než u listu papíru, $d \approx 30\,\mu\mathrm{m}$ a permitivita je $\kappa = 3$. Uhádnout obě tyto hodnoty je snadné. Vím, že tloušťka papíru je kolem $60\,\mu\mathrm{m}$ (štos papíru o 500 listech je tlustý asi 3 cm) a jsem si docela jistý, že obal je tenčí, ale jen tak dvakrát, třikrát, nikoli řádově. Také vím, že běžná dielektrika, jako plasty či sklo, mají relativní permitivitu mezi jedničkou a šestkou, tak jsem si zvolil hodnotu z tohoto rozsahu.

Nežli se pokoušet o odhad A, raději budu uvažovat o objemu. Objem tohoto sendviče je $V = A\left(d + 2d_{\mathrm{Al}}\right) \approx 3Ad$, za předpokladu, že alobal je stejně tlustý jako obalová fólie (soudě podle tuhosti hliníku, alobal nebude tlustější než papír). Zbývá odhadnout objem kapsy. Ten se pochopitelně může měnit, odhadnu ji na 10 cm ×10 cm ×2cm. Pak je přibližně

$$C = \varepsilon A / d \approx \kappa\varepsilon_0 V / 3d^2 \approx 2\,\mu\mathrm{F}.$$

Ř Úloha 3: Kondenzátory

(a) Spínač S_1 je rozepnutý, baterie není připojena k obvodu a tudíž na kondenzátorech není žádný náboj.

(b) Spínač S_1 je sepnutý, baterie je připojena do série s C_1 a C_2 a tudíž na kondenzátorech bude stejný náboj rovný náboji na ekvivalentním kondenzátoru.

$$C_{\mathrm{ekviv}} = \left(C_1^{-1} + C_2^{-1}\right) = 1{,}5\ \mu\mathrm{F},$$

$$Q_2\left(T < t < 2T\right) = Q_{\mathrm{ekviv}} = C_{\mathrm{ekviv}}\Delta V_{\mathrm{ekviv}} = 15\ \mu\mathrm{C}.$$

(c) Rozpojením S_1 se z obvodu odpojí baterie. To znamená, že náboj na C_1 zůstane, jaký byl

$$Q_1 = 15\,\mu\mathrm{C}.$$

Náboj na C_2 se rozdělí mezi C_2 a C_3, protože jsou na stejném napětí (jsou zapojeny paralelně). Takže platí

$$V_2 = Q_2 / C_2 = V_3 = Q_3 / C_3; \quad Q_2 + Q_3 = Q_2 \left(t = 2T \right)$$

$$\frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_3} = \frac{C_2}{C_3}$$

Náboj se rozdělí v poměru kapacit obou kondenzátorů:

$$Q_2 = 10\ \mu\mathrm{C}, \quad Q_3 = 5\ \mu\mathrm{C}.$$

Ř Úloha 4: Pět krátkých otázek

Správné odpovědi jsou: A2, B2, C3, D5, E3.

Ř Úloha 5: Van de Graaffův generátor

Praskání Van de Graffova generátoru je způsobeno korónovým výbojem na jeho povrchu, což nastane, pokud intenzita elektrického pole překročí průrazné napětí vzduchu, $E \sim 3 \times 10^6$ V/m. Poloměr je kolem $R \sim 10$ cm (možná míň, ale s takhle pěkným kulatým číslem se dobře pracuje).

$$E = k_\mathrm{e} \frac{q}{R^2} \Rightarrow q = \frac{ER^2}{k_\mathrm{e}} \approx 3\ \mu\mathrm{C}$$

Ř Úloha 6: Náboje

(a) Náboj je záporný. Je zřejmé, že jejich znaménka jsou opačná.

(b) Elektrické pole směřuje vzhůru. Silnější záporný náboj účinkuje jako propad.

(c) Pole v bodě P je nulové. Je to zřejmé z tvaru silokřivek.

(d) Víme, že v bodě P je intenzita nulová, tak pouze potřebujeme najít náboj, který by to způsobil:

$$E_y = -k_\mathrm{e} \frac{(+Q)}{d^2} - k_\mathrm{e} \frac{(Q_d)}{\left(2d^2\right)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_d = -4Q.$$

(e) K výpočtu práce potřebujeme znát změnu potenciální energie, jinak řečeno potřebujeme znát změnu potenciálu. Potenciál v bodě P můžeme vypočítat superpozicí potenciálů bodových nábojů

$$V(P) = k_\mathrm{e} \frac{(+Q)}{d} + k_\mathrm{e} \frac{(Q_\mathrm{d})}{(2d)} = k_\mathrm{e} \frac{(+Q)}{d} + k_\mathrm{e} \frac{(-4Q)}{(2d)} = k_\mathrm{e} \frac{Q}{d}$$

Práce potřebná k přenesení náboje z nekonečna (to, že je náboj na ose x je nepodstatné, potenciál v jakémkoli nekonečnu je nulový!) je:

$$W = \Delta U = q\Delta V = qV(P) = k_\mathrm{e} \frac{qQ}{d}.$$

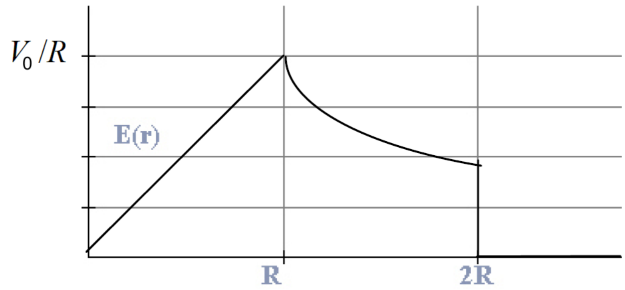
Úloha 7: Kulový potenciál

a) Intenzita je dána záporně vzatou derivací potenciálu a proto platí

Oblast I: $0 < r < R$: $$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{V_0 r}{R^2}$$

Oblast II: $R < r < 2R$: $$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{V_0 R}{r^2}$$

Oblast III: $r > 2R$: $$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 0$$



(b) Soustava je kulově symetrická, jako uzavřené plochy použijeme kulové plochy.

$\boxed{r > 2R}$

Na povrchu koule je pole nulové, celkový náboj uvnitř uzavřené plochy je tak nulový.

$\boxed{R < r < 2R}$

V této oblasti je $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{V_0 R}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi V_0 R$.

Pro libovolné r z rozsahu $R < r < 2R$ je proto náboj uvnitř kulové plochy roven $Q = 4\pi\varepsilon_0 V_0 R$ (konstantní kladný) a pro $r > 2R$ je náboj roven nule. To je možné jen tehdy, když celkový náboj $-4\pi\varepsilon_0 V_0 R$ bude rozložen na ploše $r = 2R$:

$$\sigma(r = 2R) = \frac{4\pi\varepsilon_0 V_0 R}{4\pi(2R)^2} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{4R}.$$

Skutečnost, že v oblasti $R<r< 2R$ se náboj uvnitř uzavřené plochy nemění, znamená, že v této oblasti žádný náboj není.

$\boxed{r < R}$

V této oblasti platí $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{V_0 r}{R^2} 4\pi r^2 = 4\pi \frac{V_0 r^3}{R^2}$.

Na rozdíl od předchozí oblasti, kde byl náboj uvnitř plochy konstantní, nyní máme plynule narůstající náboj uvnitř plochy se zvětšujícím se poloměrem r. Jelikož množství náboje narůstá stejně jako objem s r^3, rozložení náboje musí být homogenní a hustota náboje tudíž bude konstantní:

$$Q = 4\pi \frac{V_0 r^3}{R^2} \varepsilon_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho(r) \qquad \Rightarrow \qquad \rho(r < R) = 3\frac{V_0}{R^2}\varepsilon_0.$$

Ř Úloha 8: Kondenzátor

a) Rozdíl potenciálů se 4× zvýší.

b) Jelikož náboj se nemění (zdroj je odpojen), nemůže se měnit ani elektrické pole. K žádné změně nedojde!

c) Elektrické pole je konstantní, ale objem, ve kterém se vyskytuje se zvětšil, takže i energie musí narůst. Kolikrát? Energie je $U = QV/2$. Náboj se nezměnil, napětí se zvětšilo čtyřikrát, výsledně se proto energie zvětšila 4×.

d) Umístěním dielektrika se κ × zeslabí pole, takže i potenciál se κ× zeslabí. Takže, s použitím téhož vzorce $U = QV/2$. Energie poklesne κ ×.

e) Jak jenom přijít na objem? Musíme si představit průřez a vzdálenost mezi deskami. První vztah vychází z výrazu pro kapacitu: $C = \varepsilon_0 A/x$, kde x je původní vzdálenost mezi deskami. Typickou proměnnou d nemůžeme použít, již jsme jí označili vzdálenost při oddálení desek. Dále máme původní napětí $V_0 = E\,x$, které se čtyřikrát zvětšilo při oddálení desek, takže $4V_0 = E(x+d)$. Z těchto dvou rovnic získáme vztah $4V_0 = 4Ex = E(x+d) \;\Rightarrow\; x = d/3$. Nyní můžeme použít kapacitu k získání plochy a vynásobením vzdáleností mezi deskami (teď už $x + d$) získáme objem

$$\text{Objem} \equiv A \cdot (x+d) = \frac{xC}{\varepsilon_0}(x+d) = \frac{dC}{3\varepsilon_0}\left(\frac{d}{3}+d\right) = \frac{4d^2C}{9\varepsilon_0}.$$