# ÚLOHY Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU
# SADA 3

**Peter Dourmashkin**



## Obsah

# Sada 3

## Úloha 1: Vysokonapěťové elektrické vedení

Odhadněte nejvyšší napětí použitelné pro vysokonapěťový rozvod elektřiny. Potom si prohlédněte klip natočený v 500 kV rozvodně Eldorado v blízkosti města Boulder City v Nevadě.

## Úloha 2: Fúze a štěpení

O fúzi a štěpení můžeme uvažovat mimo jiné z pohledu elektrických jevů. Představme si, že proton je například homogenně nabitá koule s poloměrem přibližně fermi ($10^{-15}$ m)

(a) Jak rychle se musí dva protony přibližovat v případě fúze (aby došlo k jejich kontaktu)?

(b) Představte si, že máte 1 kilogram ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ (poloměr je přibližně 7 fm) a ten se rozštěpí, přičemž každé mateřské jádro se rozpadne na dvě jádra těsně vedle sebe, každé s polovičním nábojem a polovičním objemem. Kolik energie se uvolní? Převeďte výsledek na kilotuny TNT (1 kilotuna TNT = $4{,}18\times10^{12}$ J).

## Úloha 3: Kde to zajiskří?

Představte si dvě kovové koule o poloměrech $R = 1$ cm a $10R = 10$ cm spojené velice dlouhým vodičem (jinými slovy máme dvě koule na stejném potenciálu, ale jsou velice daleko jedna od druhé). Začněme pomalu nabíjet tuto soustavu až do zapálení korónového výboje (průraz vzduchu v blízkosti jedné z kovových koulí). Zapálí se výboj na obou koulích zároveň nebo na jedné z koulí dříve? Pokud platí druhý případ, na které kouli se zapálí jako první? Jaký náboj musíte do soustavy dodat do okamžiku, než uvidíte výboj?

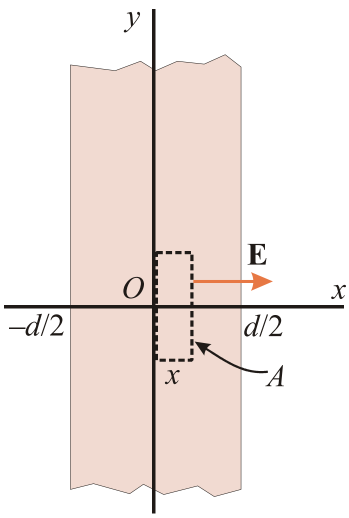
## Úloha 4: Nabitá deska

Představte si desku z izolantu, která je nekonečně velká ve dvou rozměrech a v třetím rozměru má tloušťku $d$. Pohled na destičku ze strany je na obrázku. Deska je homogenně nabita s prostorovou hustotou náboje $\rho$.

(a) Vypočítejte pole v celém prostoru, jak uvnitř, tak vně desky.

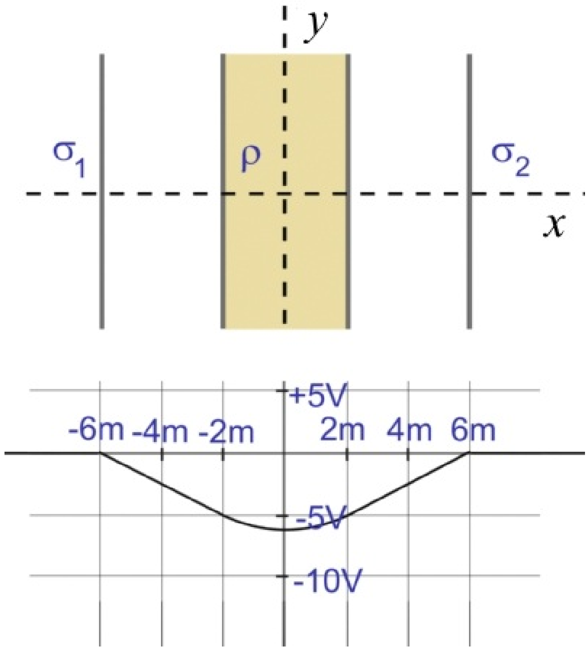
(b Nyní desku provrtáme podél osy $z$, takže uvnitř vznikne válcová dutina o poloměru $D$ ($D < d$). Jaké bude elektrické pole na ose $x$ pro $|x| < d/2$?

(c) Malý náboj $q$ o hmotnosti $m$ nyní umístíme na levé straně dutiny na osu $x$. Jak velký a jaké znaménko musí mít náboj $q$, aby se choval jako harmonický oscilátor a proběhnul skrze dutinu (od $x = -D/2$ do $x = D/2$ v zadaném čase $T_{\text{napříč}}$?



## 🅿 Úloha 5: Nabitá deska a nabité plochy

Mějme nekonečnou desku tvořenou prostorovým nábojem o hustotě $\rho$, nalevo od níž se nachází plocha nabitá povrchovým nábojem $\sigma_1$ a napravo plocha nabitá povrchovým nábojem $\sigma_2$ (viz horní část náčrtku). Na dolní části náčrtku je ukázáno rozložení potenciálu $V(x)$ způsobené náboji uvnitř desky a na obou plochách. Deska je 4 metry široká ve směru osy $x$ a její hranice jsou v místech $x$ = –2 metry a $x$ = = +2 metry, jak je označeno. Deska je nekonečná ve směru os $y$ a $z$. Nabité plochy jsou umístěny v místech $x$ = –6 m a $x$ = +6 m.




(a) Potenciál $V(x)$ je lineární funkcí $x$ v oblasti $-6\ \text{m} < x < -2\ \text{m}$. Jaká je intenzita elektrického pole v této oblasti?

(b) Potenciál $V(x)$ je lineární funkcí $x$ v oblasti $6\ \text{m} > x > 2\ \text{m}$. Jaká je intenzita elektrického pole v této oblasti?

(c) V oblasti $-2\ \text{m} < x < 2\ \text{m}$ je potenciál $V(x)$ kvadratickou funkcí $x$ danou rovnicí $V(x) = +\frac{5}{16}\frac{\text{V}}{\text{m}^2}x^2 - \frac{25}{4}\text{V}$. Jaká je intenzita elektrického pole v této oblasti?

(d) Pomocí Gaussovy věty a předchozích výsledků najděte výraz pro objemovou hustotu náboje v desce. Načrtněte použitou uzavřenou plochu do obrázku.

(e) Pomocí Gaussovy věty a předchozích výsledků najděte výraz pro plošné hustoty náboje na obou plochách. Načrtněte použité uzavřené plochy do obrázku.

## Řešení úloh

### Ř Úloha 1: Vysokonapěťové elektrické vedení

Při odpovědi se zamyslíme nad tím, co se stane, když budeme pracovat s velmi vysokými napětími. Kde je slabé místo? V předchozích příkladech jsme se tím už zabývali. Problém s vysokými napětími je v tom, že vedou k silným polím. A silná pole způsobují průraz.

Považujme vodič vedení za válec o poloměru *R*. Z Gaussova zákona (použijeme válec délky *L* a poloměr *r*>*R*) odvodíme elektrické pole:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \cdot 2\pi r L = Q / \varepsilon_0 = \lambda L / \varepsilon_0 \Rightarrow E = \lambda / 2\pi r \varepsilon_0$$

a potenciál:

$$\Delta V = V(r) - V(R) = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_R^r \lambda / 2\pi r' \varepsilon_0 dr' = \lambda / 2\pi r \varepsilon_0 \ln(R/r),$$

ze kterého můžeme dostat hodnotu pro maximální napětí:

$$\Delta V_{\max} = E_{\max} R \ln(r/R)$$

V argumentu logaritmu jsme prohodili *r/R* tak, aby rozdíl potenciálů vyšel kladný. Platí, že $E = E_{\max}$ pro *r*=*R*, neboť v tomto místě je poloměr nejmenší. K průrazu dochází při intenzitě $E_{\max} \sim 3\times10^6$ V/m a poloměr vodiče je $R \sim 1$ cm (může to být třikrát nebo čtyřikrát víc, ale asi ne desetkrát). Napětí je dáno relativně vůči jakési zemi, buď vůči sousednímu vodiči (vzdálený asi $r \sim 1$ m) nebo většinou vůči skutečné zemi (vzdálené $r \sim 10$ m). Proto platí

$$\Delta V_{\max} \sim E_{\max} R \ln(r/R) \sim 2\times10^5 \text{ V}.$$

Ukázalo se, že typická napětí rozvodných sítí, která jsou kolem 250 kV, jsou větší než náš odhad. Existují však i rozvody na 600 kV (nebo dvojnásobku tohoto napětí pro střídavé rozvody). Ty už musí mít pořádně tlusté dráty!

Mimochodem, mohlo by se vám zdát, že průraz, to už je pěkné nadělení. Za vlhkého počasí (třeba za bouřky) občas můžete slyšet praskot jdoucí od elektrického vedení. Jedná se o korónový výboj, vysokonapěťový, ale nízkoproudový průraz, podobný praskání, které můžete slyšet u Van de Graaffova generátoru. Film zachycuje obloukový výboj, silnoproudý jev, který může být velice nebezpečný.

### Ř Úloha 2: Fúze a štěpení

(a) Na úlohu je nejsnazší jít z úvahy o energii. Jsou-li protony v kontaktu, překonají potenciální energii

$$U = qV = q\left(\frac{kq}{r}\right) \approx 10^{-13} \text{ J}.$$

Z rovnosti kinetické a potenciální energie najdeme rychlost:

$$K = mv^2 = U \to v \approx 8\times10^6 \text{ m/s}.$$

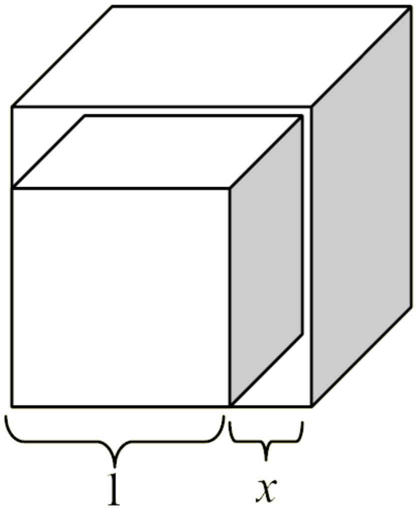
To už je slušná část rychlosti světla. Ty protony se ale musí hýbat rychle!

(b) Dceřiná jádra musí mít takový poloměr, aby jejich objem byl polovina objemu mateřského jádra, takže $r$ =7 fm/$2^{1/3}$~ 5 fm. Máme tedy dvě jádra, každé s nábojem 46$e$ a $r$ =5 fm, která se dotýkají, tedy mají

$$U \approx \frac{kq^2}{r} \approx 5 \times 10^{-11} \text{ J (na jádro U)}$$

Máme kilogram materiálu, takže po vydělení atomovou hmotností 236 a vynásobení Avogadrovou konstantou dostáváme energii zhruba $10^{14}$ J, což odpovídá zhruba 25 kilotunám TNT.

**Poznámka:** Jak spočítat třetí odmocninu bez kalkulačky? Můžete například použít několik členů Taylorova rozvoje: $2^{1/3} = (1+1)^{1/3} = 1 + 1/3 - 1/9... = 1{,}22$. To by šlo, ale není to nejvhodnější, protože $x = 1$ není právě malá veličina a členy řady se pak nezmenšují dostatečně rychle (skutečná hodnota je zhruba 1,26, takže by se daly použít dokonce jen první dva členy).




Jiný přístup je pomocí geometrie. Třetí odmocnina je délka strany krychle o objemu 2. Vyjměme z tohoto objemu menší krychličku se stranou 1. Objem zbytku je o něco více než 3$x$ (tři kvádry o stranách (1, 1, $x$) sousedící s jednotkovou krychlí a ještě něco zbude), což ovšem musí být rovno 1. Výsledně $x$ musí být menší než 1/3. I v tomto případě nejsme příliš přesní, neboť zbytkový objem není zrovna malý. Zkuste si tuto metodu na výpočet $28^{1/3}$ a dospějete ke krásnému výsledku.

Třetí možnost je použít logaritmy. Nejprve odhadněme dekadický logaritmus dvojky. $\log 2 = \log \sqrt[10]{2^{10}} = 0{,}1 \cdot \log 1024 \approx 0{,}1 \cdot \log 1000 = 0{,}3$. Skutečná hodnota je 0,30103, takže toto přiblížení je dostatečné, a tento postup stojí za zapamatování.

$$\sqrt[3]{2} = 10^{\frac{1}{3}\log 2} \approx 10^{\frac{1}{3}0{,}3} = 10^{0{,}1} = 10^{1-3\times 0{,}3} = \frac{10}{\left(10^{0{,}3}\right)^3} \approx \frac{10}{2^3} = 1{,}25\,.$$

## Ř Úloha 3: Kde to zajiskří?

Spojení koulí vodičem odpovídá stejnému potenciálu na koulích. Pokud tomu tak je, koule NEMOHOU být nabity stejným nábojem, velká koule má na sobě více náboje:

$$\frac{kq_{\mathrm{R}}}{R} = \frac{kq_{10\mathrm{R}}}{10R} \to q_{10\mathrm{R}} = 10q_{\mathrm{R}}\,.$$

Pole na povrchu menší koule je však desetkrát silnější:

$$E_{\mathrm{R}} = \frac{kq_{\mathrm{R}}}{R^2} = 10\frac{kq_{10\mathrm{R}}}{(10R)^2}$$

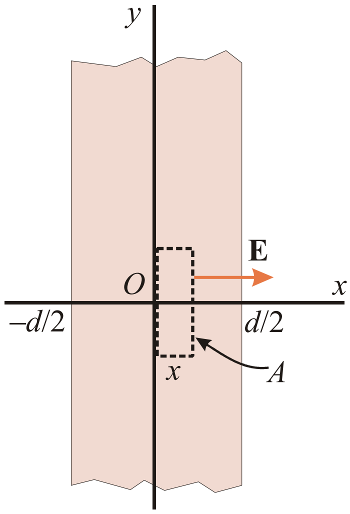
Je patrné, že na povrchu menší koule se zapálí korónový výboj dříve. Výboj je pozorovatelný od okamžiku, kdy pole překročí průrazné napětí $3 \times 10^6$ V/m:

$$E_R = \frac{kq_R}{R^2} \approx 3\times 10^6 \text{ V/m} \qquad \Rightarrow \qquad q_R \approx 3\times 10^{-8} \text{ C}.$$

Do celé soustavy (nabíjíme i velkou kouli) musíme dodat celkový náboj

$$q_R + q_{10R} = 11 q_R \approx 3\times 10^{-7} \text{ C}.$$

## Ř Úloha 4: Nabitá deska




a) Máme dvě oblasti, v nichž potřebujeme spočítat elektrické pole: uvnitř a vně desky. V obou případech použijeme pomyslný válec o průřezu $A$, s osou kolmo k rovině $yz$, jedna základna leží v rovině $yz$. Druhá základna je popsána průběžnou souřadnicí $x$>0, jak je ukázáno na obrázku. S ohledem na symetrii musí být elektrické pole v rovině $yz$ nulové a vpravo od této roviny musí směřovat doprava. Výsledně z povrchového integrálu zůstává nenulový pouze plošný integrál přes základnu obsahující bod $x$. Použijeme Gaussovu větu:

$$\oiint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

přičemž $q = \rho V = \rho A x$, takže $EA = \varepsilon_0^{-1}(\rho A x)$, z čehož získáme intenzitu uvnitř desky:

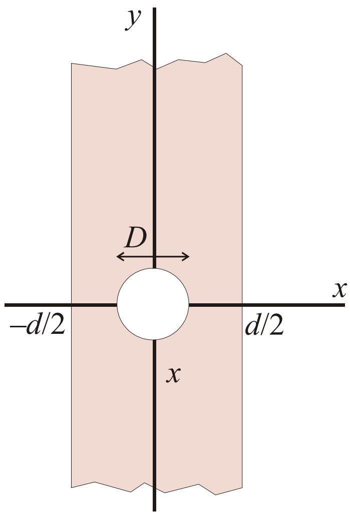
$$E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}.$$

Mimo desku $(|x| > d/2)$ nezávisí náboj ohraničený uzavřenou plochou na $x$: $q = \rho A d/2$. Z Gaussovy věty obdržíme

$$EA = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho A d/2) \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}.$$

Shrneme-li výsledek:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}; & x > d/2, \\ \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}; & -d/2 < x < d/2, \\ -\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}; & x < -d/2. \end{cases}$$




b) Na první pohled se řešení může zdát složité. Avšak už jsme dost práce věnovali nabité desce. Vytvoření dutiny je stejné jako přidání stejného náboje co do velikosti, ale s opačným znaménkem. Na již nalezené pole superponujeme pole válce o poloměru $R$ a s hustotou náboje $\rho$. Výpočet opět rozdělíme na řešení uvnitř a vně válce a použijeme válcovou uzavřenou plochu o průběžném poloměru $x$ a délce $L$.

**Uvnitř platí:**

$$\oiint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\cdot 2\pi xL = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi x^2 L(-\rho) \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{-\rho x}{2\varepsilon_0}$$

To znamená, že intenzita pole roste lineárně spolu naším pohybem k okrajům dutiny. Znaménko minus označuje, že pole směřuje dovnitř, k počátku.

**Vně dostáváme:**

$$\oiint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\cdot 2\pi xL = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\pi D^2 L}{4}(-\rho) \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{-\rho D^2}{8\varepsilon_0 x}.$$

Rychlou zkoušku správnosti řešení můžeme provést dosazením $x = D/2$ do obou rovnic, pole musí vyjít stejné. Pole v celé desce lze tedy kombinací obou výsledků zapsat jako:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0} - \dfrac{\rho x}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}} = \dfrac{\rho x}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}; & |x| < D/2, \\[2ex] \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0} - \dfrac{\rho D^2}{2\varepsilon_0 x}\hat{\mathbf{i}}; & D/2 < |x| < d/2. \end{cases}$$

c) Opět tu máme problém, na který se těšíme: lineární harmonický oscilátor. Jako vždy, musíme zjistit, zda je síla přímo úměrná výchylce $x$.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q\frac{\rho x}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}.$$

Ano, v tomto případě je síla úměrná výchylce $x$. Znaménko náboje $q$ musí být záporné, abychom dostali vratnou sílu. Řešení zapíšeme ve tvaru:

$$x(t) = \frac{D}{2}\cos(\omega t), \qquad \text{kde } \omega = \sqrt{\frac{\rho|q|}{2\varepsilon_0 m}}$$

Kosinus jsme použili s ohledem na počáteční podmínku, kdy náboj byl na hranici dutiny. I když v této úloze to nehraje roli, je dobré si tuto úvahu zapamatovat pro případ, že byste potřebovali explicitně vyjádřenou časovou závislost.

S použitím zadaného času, který je roven polovině periody, neboli $\pi/\omega$, najdeme hledaný náboj $q$:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho|q|}{2\varepsilon_0 m}} = \frac{\pi}{T_{\text{napříč}}} \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{2\varepsilon_0 m}{\rho}\left(\frac{\pi}{T_{\text{napříč}}}\right)^2.$$

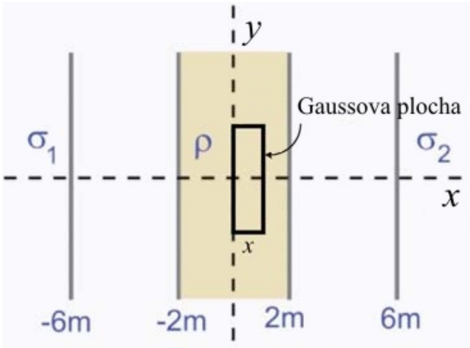
## Ř Úloha 5: Nabitá deska a nabité plochy

a) $\mathbf{E} = -\dfrac{\Delta V}{\Delta x}\hat{\mathbf{i}} = +1{,}25\ \text{V/m}\ \hat{\mathbf{i}}$.

b) $\mathbf{E} = -\dfrac{\Delta V}{\Delta x}\hat{\mathbf{i}} = -1{,}25\ \text{V/m}\,\hat{\mathbf{i}}$.

c) V oblasti uvnitř desky je intenzita elektrického pole $\mathbf{E} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} = -\dfrac{5}{8}\dfrac{\text{V}}{\text{m}^2}x\,\hat{\mathbf{i}}$.

d) $\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = EA = \left(-\frac{5}{8}\frac{\text{V}}{\text{m}^2}x\right)A = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho A x}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = -\frac{5}{8}\frac{\text{V}}{\text{m}^2}\varepsilon_0 .$




e) Elektrické pole není přítomné v oblastech $x$>6 m a $x$<–6 m (potenciál tam je nulový a zůstává nulový).

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = (1,25\ \text{V/m})A = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 A}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_1 = (1,25\ \text{V/m})\varepsilon_0 .$$

Stejným způsobem zjistíme, že $\sigma_2 = (1,25\ \text{V/m})\varepsilon_0$.

Častou chybou je úvaha, že znaménko musí být opačné, protože intenzita elektrického pole mění znaménko. Všimněte si, že vektor udávající orientaci uzavřené plochy je také orientovaný opačným směrem, takže tato úvaha NEPLATÍ. Proto je důležité si nakreslit náčrtek a vyznačit si orientaci vektorů. Jestliže orientace vektorů (**E** a **A**) je shodná, pak jejich skalární součin (a tím i náboj ohraničený plochou) je kladný. Navíc stále platí, že vektor intenzity elektrického pole směřuje od kladného náboje, takže směřují-li v obou případech vektory **E** od plochy, musí být každá tato plocha nabita kladně.