ÚLOHY Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU
SADA 2

Peter Dourmashkin

Obsah

Sada 2

P Úloha 1: Hloupé koníčky…

Jsou lidi, co rádi dělají neuvěřitelně nebezpečné věci. Jako chlapík, se kterým jsem chodil na vysokou, Austin Richards (známý též coby Dr. Megavolt – jen se podívejte na jeho stránky a filmy na adrese http://www.drmegavolt.com/). Nebo Criss Angel, který předvedl podobný kousek během písně „Teslův transformátor“ ve svém vystoupení. Tady jsou obrázky:

http://www.mindfreakconnection.com/

Všimněte si, že zatímco Dr. Megavolt tahal výboje rovnou z Teslova transformátoru (zařízení schopného vyrábět šíleně vysoká napětí), Criss Angel se místo toho rozhodl dostávat elektrické rány z malé koule spojené s transformátorem – což se nám hodí k této otázce: Jaké bylo zhruba napětí na Teslově transformátoru nutné pro výboje zobrazené výše a jaký nevykompenzovaný náboj byl na jeho ruce (viz pravý obrázek) okamžik před zapálením výboje.

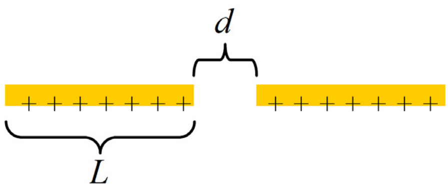
(Nápověda: Suchý vzduch se prorazí při intenzitách kolem 3×10^6 V/m.)

P Úloha 2: Ben Franklin

Jelikož je 300. výročí narození Benjamina Franklina, bylo by na místě se zeptat na pár otázek spojených s blesky. Teslův transformátor dělá „blesky“ v malém měřítku. Bouřkové mraky je dělají ve velkém. Jaký je zhruba rozdíl potenciálů mezi dolním okrajem bouřkového mraku a zemí těsně před úderem blesku a jaký volný náboj musí být soustředěn v dolní části mraku aby k němu došlo? Napovím: Možná si myslíte, že nemáte ponětí o rozměrech a hmotnosti mraků. Ale popřemýšlejte, co byste se o tom mohli vědět. Už jste někdy letěli?

P Úloha 3: Odpuzování tyčí

Dvě tenké tyče délky L jsou nabity shodnými náboji Q rovnoměrně rozprostřenými podél jejich délky. Tyče jsou umístěny podélně za sebou, přičemž jsou odděleny mezerou širokou d. Jak velká je síla, kterou jedna tyč působí na druhou? Jak se zjednoduší situace v limitním případě $d >> L$?



P Úloha 4: Dipól

Posuzujte dva náboje stejné velikosti a opačného znaménka oba s hmotností m ležící na ose y, $+Q$ v bodě $(0, a)$ a $-Q$ v bodě $(0, -a)$. Jsou spojeny tuhou nehmotnou nevodivou tyčí, která má ve svém středu čep spojený se středem souřadnic umožňující otáčení bez tření. Jde tedy o dipól. Nyní necháme působit homogenní pole $\mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{j}}$.

(a) Jaká síla působí na dipól ze strany vnějšího pole?

(b) Nyní pootočíme dipól o malý úhel θ_0 (ve směru hodinových ručiček). Jaká síla teď působí na dipól?

(c) Jak se změní potenciální energie při natočení dipólu?

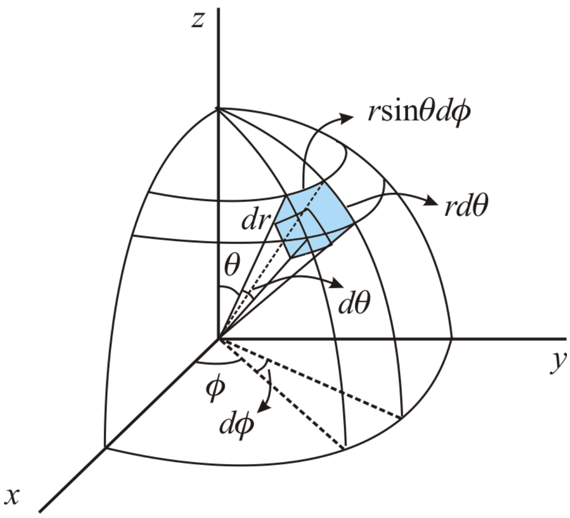
(d) Jaký moment síly působí na dipól?

(e) Teď dipól uvolníme a necháme jej, ať se otáčí pod vlivem momentu síly. Popište, jak se bude pohybovat (tj. jak se bude měnit úhel natočení $\theta(t)$?)

(f) Kde se nachází kladný náboj, když se pohybuje nejrychleji? Jak rychle se pohybuje?

P Úloha 5: Kulová skořepina

Skořepina ve tvaru polokoule o poloměru R z plexiskla je pokryta nábojem Q rovnoměrně rozloženým na jejím povrchu.



(a) Najděte elektrické pole ve „středu“ polokoule (tj. ve středu koule, z níž byla polokoule vyříznuta). Návod: Rozdělte si náboj na ploše na elementární náboje dq a vyjádřete si svou polohu na polokouli pomocí úhlů θ a φ.

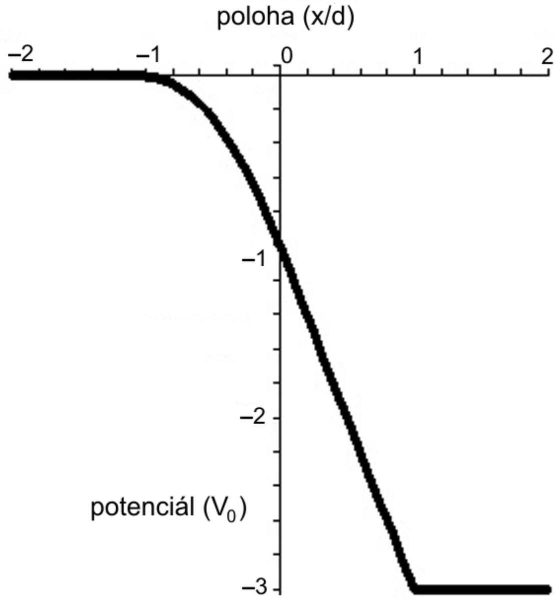
(b) Jaký potenciál bude ve středu, jestliže předpokládáme nulový potenciál v nekonečnu? Návod: Než budete vyjadřovat řešení matematicky, hledejte nejprve *jednoduché* řešení.

P Úloha 6: Potenciál nabité roviny

Rozložení elektrického potenciálu $V(x,y,z)$ nabité roviny je dáno vztahem

$$V = \begin{cases} 0; & \text{pro } x < -d\,, \\ -V_0\left(1+\dfrac{x}{d}\right)^2; & \text{pro } -d \le x \le 0\,, \\ -V_0\left(1+2\dfrac{x}{d}\right); & \text{pro } 0 \le x \le d\,, \\ -3V_0\,; & \text{pro } x > d\,, \end{cases}$$

kde $-V_0$ je potenciál v počátku a d je vzdálenost. Tato funkce je na obrázku vyjádřena na ose x v násobcích d, na ose y v násobcích V_0.



(a) Jaká je intenzita elektrického pole v této úloze?

(b) Sestrojte graf intenzity elektrického pole, kterou jste právě vypočítali. Pozorně si na svislé ose vyznačte mezní hodnoty velikosti intenzity pole **E.**

Řešení úloh

Ř Úloha 1: Hloupé koníčky…

Podle obrázku je Criss asi metr od koule, když z ní vytáhne oblouk. Možná dva, ale s jedním se lépe pracuje, použiji tedy metr. Při jednoduchém předpokladu, že $V = E\,d$ je pak potenciálový rozdíl dán:

$$3\times10^6 \text{ V/m} \times 1 \text{ m} = 3 \text{ MV}$$

(proto Dr.Megavolt!). Můžete namítnout, že uspořádání odpovídá více nabité kouli, než deskovému kondenzátoru, takže bychom měli použít potenciál bodového náboje, kQ/r. Ale všimněte si, že i v tomto případě je $V \sim E\,r$, takže výsledek je zhruba správně. Naštěstí, toto je okrajová otázka a detaily nás tudíž až tolik nezajímají.

Můžeme určit minimální náboj, který je potřebný k tomu, aby pole mělo průraznou intenzitu právě vně jeho ruky (nebo koule). Předpokládejme, že jsou to koule o poloměru 5 cm. Pak:

$$E = kQ/r^2 \qquad \Rightarrow \qquad Q = r^2E/k \sim 5\times10^{12}\ e.$$

Řekl jsem, že toto je minimum, neboť pole je bezpochyby průrazné i na mnohem větších vzdálenostech (metr), což předpokládá náboj 400 × (= 20^2 ×) větší. Skutečný náboj je někde mezi těmito dvěma extrémy, takže odhaduji

$$Q \sim 10^{-4}\,\text{C} \sim 5\times10^{14}\ e.$$

Ř Úloha 2: Ben Franklin

Jde o velice podobnou úlohu jako v předchozím případě až na to, že nemáte obrázek, z něhož byste odhadli rozměry. Budeme předpokládat, že základna bouřkového mraku je rovná deska, takže elektrické pole je mezi oblakem a zemí konstantní a $V = E\,d$ (což není špatné přiblížení) Tak už jen potřebujeme jeho výšku. Pravděpodobně víte, že při letu na komerčních spojích je dolní hranice mraků pod vámi, takže je níž než letová hladina 10 km. O kolik je níž? Je to různé mrak od mraku, ale typicky se dolní hranice nachází ve výšce 2÷3 km. Odhad dolní hranice kupovité oblačnosti můžete sami provést na základě pozorování vrcholků velehor zahalených do mraků. Použiji 2 km:

$$V = 3\times 10^6\ \text{V/ m} \times 2\ \text{km} = 6\times 10^9\ \text{V}.$$

Páni! To už je VELKÉ napětí, ale pochopitelně i vzdálenosti jsou velké, takže není nerozumné. Ve skutečnosti je Země v průměru záporně nabitá a na povrchu planety se vyskytuje za pěkného počasí elektrické pole s intenzitou 100 V/m. To dokonce vede k (velice malému) proudu mezi Zemí a atmosférou, který je pak vyrovnáván blesky navracejícími záporný náboj zemskému povrchu.

Na závěr chceme znát náboj v mraku, takže potřebujeme zjistit plochu jeho základny. Opět to bude jen odhad. Oblaka obvykle vypadají dlouhé stejně, jako jsou vysoko nad zemí, případně trochu větší (1÷10 km). Vyberu si „malý“ obláček s lineárním rozměrem 1 km a tudíž 1 km^2. Tím dostaneme náboj z hustoty náboje:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \sigma A = \varepsilon_0 E A \sim 30\ \text{C}.$$

Proč σ/ε_0 a ne polovina z tohoto poměru? Faktor dva neovlivní výsledek odhadu. Ve skutečnosti, bouřkové mraky vypadají spíše jako elektrické dipóly (mají nabité rovněž vrchní oblasti) a tak celý tento výpočet je pěkně hrubý odhad, ale pravděpodobně se správným řádem výsledku.

Ř Úloha 3: Odpuzování tyčí

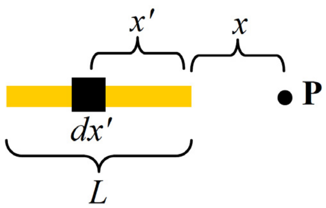
K řešení můžeme přistupovat dvěma různými způsoby. Jeden z nich je jít na to přímo. Každý elementární náboj dq v levé tyči působí na každý náboj dq' v tyči pravé.

$$d\mathbf{F} = \frac{k\ dq\ dq'}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Sílu získáme prostou integrací tohoto výrazu. Půjdu na to však tak, že spočítám elektrické pole v celém prostoru od jedné tyče (levé) a potom spočítám účinek elektrického pole na tyč pravou.

Elektrické pole levé tyče

Tyč sestává z elementárních nábojů $dq = \lambda\, dx'$, kde x' je proměnná, která prochází tyč od 0 do L a lineární hustota náboje je $\lambda = Q/L$. Počítáme elektrické pole v bodě P, ve vzdálenosti x od pravého okraje tyče. Vzdálenost od dq k P je $\mathbf{r} = (x + x')\hat{\mathbf{i}}$.



Takže,

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\mathbf{r} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \int_0^L d\mathbf{E} = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{(x+x')^3}(x+x')\hat{\mathbf{i}} = \frac{\hat{\mathbf{i}}\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_x^{x+L}\frac{du}{u^2} = \left[\frac{\hat{\mathbf{i}}\lambda}{4\pi\varepsilon_0}u^{-1}\right]_x^{x+L} =$$

$$= -\hat{\mathbf{i}}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x+L}-\frac{1}{x}\right) = -\hat{\mathbf{i}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{x+L}-\frac{1}{x}\right)$$

Všimněte si, že pole směřuje doprava, což bychom očekávali. Teď pojďme spočítat sílu působící na pravou tyč působením elektrického pole.

Síla působící na pravou tyč

$$d\mathbf{F} = \mathbf{E}q\,dq \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int_{q(d)}^{q(d+L)}\mathbf{E}\,dq = -\hat{\mathbf{i}}\int_d^{d+L}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x+L}-\frac{1}{x}\right)\lambda dx\,.$$

Integrujeme přes proměnnou x od levého okraje pravé tyče, $x = d$, do pravého okraje, $x = d+L$.

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{i}}\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^{d+L}\left(\frac{1}{x+L}-\frac{1}{x}\right)dx = -\hat{\mathbf{i}}\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln|x+L|-\ln|x|\right)\Big|_d^{d+L} = -\hat{\mathbf{i}}\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left|\frac{x+L}{x}\right|\right]_d^{d+L}$$

kde jsme využili skutečnosti, že rozdíl logaritmů je logaritmus podílu. Nyní dosadíme meze

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{i}}\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left|\frac{d+2L}{d+L}\right|-\ln\left|\frac{d+L}{d}\right|\right) = -\hat{\mathbf{i}}\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left|\frac{(d+2L)d}{(d+L)^2}\right|\right) = \hat{\mathbf{i}}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left(\ln\left|\frac{(1+L/d)^2}{(1+2L/d)}\right|\right)$$

Prohozením čitatele a jmenovatele v argumentu se změní znaménko, čímž zdůrazníme, že síla je kladná a obě tyče se odpuzují. Všimněte si, že čitatel je větší než jmenovatel.

Nakonec přejděme k meznímu případu $d<<L$. Označme si malou veličinu $u=L/d$ a rozepišme logaritmus.

$$\ln\left|\frac{(1+u)^2}{(1+2u)}\right| = 2\ln(1+u)-\ln(1+2u) \approx 2\left(u-\frac{u^2}{2}\right)-\left(2u-\frac{(2u)^2}{2}\right) = u^2\,.$$

Všimněte si, že jsme museli ponechat kvadratické členy, neboť lineární se vzájemně vyrušily. Shrnuto:

$$\mathbf{F}(d >> L) \approx \hat{\mathbf{i}}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left(\frac{L}{d}\right)^2 = \hat{\mathbf{i}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\,,$$

což je síla mezi dvěma bodovými náboji Q ležící ve vzdálenosti d!

Ř Úloha 4: Dipól

(a) Dipól v homogenním poli nepociťuje žádnou sílu (síla působící na kladný náboj je rovna síle působící na náboj záporný).

(b) Pole je homogenní takže síla je jako v předchozím případě rovna nule.

(c) Změna potenciální energie náboje q je dána vztahem

$$\Delta U = q\Delta V = -q\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}\,.$$

Například, změna potenciální energie našeho náboje je:

$$\Delta U = -Q\int_0^{\theta_0} E\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}\,a\,d\theta = -QaE\int_0^{\theta_0}\hat{\mathbf{j}}\cdot\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)d\theta = QaE\int_0^{\theta_0}\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -QEa\left[\cos\theta\right]_0^{\theta_0} = QEa\left(1-\cos\theta_0\right).$$

Všimněte si, že definice θ je trošku nestandardní (obvykle je úhel definován od osy x proti směru hodinových ručiček) a následně i vyjádření jednotkového vektoru $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ je nestandardní, ovšem bude jasné (mělo by být) při pohledu na obrázek. Podobně se mění při pohybu od $\theta = \pi$ do $\theta = \pi + \theta_0$ energie záporného náboje:

$$\Delta U = \left(-Q\right)Ea\left(\cos\pi - \cos\left(\pi+\theta_0\right)\right) = -QEa\left(-1+\cos\left(\theta_0\right)\right) = QEa\left(1-\cos\theta_0\right)$$

Oba náboje mění svou potenciální energii o tutéž hodnotu, takže celková energie dipólu je

$$\boxed{\Delta U_{\text{dipólu}} = 2QEa\left(1-\cos\theta_0\right)}$$

Všimněte si, že tento výraz můžeme přepsat:

$$\Delta U_{\text{dipólu}} = -2QEa\left(\cos\theta_0 - \cos 0\right) = -pE\left(\cos\theta_0 - \cos 0\right) = U_{\text{konečná}} - U_{\text{počáteční}}$$

a počáteční energie dipólu je $U_{\text{dipólu}} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$.

(d) Budeme vycházet ze vzorce pro výpočet momentu síly

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}\times\mathbf{E} \quad\Rightarrow\quad \tau = pE\sin\theta_0$$

Všimněte si, že tento výraz lze odvodit rovnou z výrazu pro potenciální energii. Stejně tak, jak velikost síly je derivace potenciální energie podle polohy, velikost momentu síly je derivace potenciální energie podle úhlu

$$\tau = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-pE\cos\theta\right) = pE\sin\theta\,.$$

(e) Prostou úvahou zjistíme, že dipól se snaží zorientovat podle směru pole, takže se začne otáčet směrem k $\theta = 0$. Avšak jelikož pohyb probíhá bez tření, překmitne přes rovnovážnou polohu, případně se otočí dokola a vrátí se zpět. Chová se jako lineární harmonický oscilátor. Rozdíl je v tom, že tentokrát jde o rotaci. Situace je podobná úloze 5 z předchozí sady. Musíme ukázat, že moment síly lineárně závisí na úhlu vychýlení: $\tau = pE\sin\theta \approx pE\theta$, kde používáme aproximaci pro malé úhly, abychom linearizovali sinusovou závislost. Zapíšme rotační ekvivalent zákona síly $F = ma, \tau \approx pE\theta = I\alpha = I\ddot{\theta}$, kde I je moment setrvačnosti, $I = 2ma^2$. Máme tedy

$$\ddot{\theta} = -\frac{pE}{I}\theta = -\frac{2QaE}{2ma^2}\theta = -\frac{2QE}{2ma}\theta$$

Znaménko minus bylo do rovnice zapsáno, neboť moment vždy navrací dipól do rovnovážné polohy $\theta = 0$. Řešení této diferenciální rovnice druhého řádu již známe:

$$\theta(t) = \theta(0)\cos\left(\omega t\right),\quad \text{kde } \omega = \sqrt{\frac{QE}{ma}}\,.$$

(f) Náboj se pohybuje nejrychleji, když prochází rovnovážnou polohou. Proč? V tomto místě má nejnižší potenciální energii, tudíž kinetická musí být nejvyšší. Navíc je to vlastnost lineárních harmonických oscilátorů. Jak rychle se pohybuje? To snadno zjistíme, uvědomíme-li si, že náboj se pohybuje po oblouku ($\Delta s = a\Delta\theta$) a rychlost má

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right| = a\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = a\theta_0\omega\left|\sin(\omega t)\right|$$

Maximální rychlost je při hodnotě sinu rovné jedné:

$$\boxed{v_{\max} = a\theta_0\sqrt{\frac{QE}{ma}}}$$

Pojďme se podívat, nakolik je výsledek rozumný. Jestliže je náboj větší, pohybuje se rychleji. Jestliže je větší rameno, také se pohybuje rychleji (i když kmitá pomaleji) .Větší intenzita pole znamená vetší rychlost, to dá rozum. Stejně tak je to se závislostí na θ_0.

Totéž můžeme získat z rovnosti potenciální a kinetické energie (při vědomí, že obě hmoty se musí pohybovat stejnou rychlostí):

$$\Delta U_{\text{dipólu}} = 2QEa(1-\cos\theta_0) \approx 2QEa\cdot\frac{1}{2}\theta_0^2 = \text{ kinetické energii} = \frac{1}{2}(2m)v^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \theta_0\sqrt{\frac{QEa}{m}}},$$

kde jsme opět využili aproximace pro malé úhly: $\cos\theta_0 \approx 1-\theta_0^2/2$.

Ř Úloha 5: Kulová skořepina

Náboj je rovnoměrně rozložený po povrchu polokoule, takže povrchová hustota je

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi R^2}$$

Nyní potřebujeme spočítat elektrické pole. V souladu s návodem použijeme kulové souřadnice a vyjádříme dq: $dq = \sigma(R\sin\theta\, d\varphi)(Rd\theta) = \sigma R^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$. Situaci zjednodušuje skutečnost, že všechny elementární náboje dq se nacházejí na té samé vzdálenosti R od počátku. Také si můžeme zjednodušit výpočet E, když si uvědomíme, že díky symetrii se nevyruší pouze složka ve směru z.

$$dE_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R^2 \sin\theta d\varphi d\theta}{R^3}(R\cos\theta) = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta(\cos\theta)d\varphi d\theta$$

$$E_z = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} dE_z = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta(\cos\theta)d\varphi d\theta =$$

$$= -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta(2\pi)d\theta = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

(a) $\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{k}}\,\sigma/4\varepsilon_0$, kde osa z je osou polokoule. Osy si můžete označit libovolně, ale vždy bude u kladně nabité polokoule v počátku intenzita směřovat od polokoule.

(b) Výraz pro elektrický potenciál je jednoduchý, všechny body polokoule jsou na téže vzdálenosti od počátku a to jediné je pro potenciál důležité:

$$\boxed{V = k\frac{Q}{R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}\,.$$

Ř Úloha 6: Potenciál nabité roviny

(a) Oblast I: $-d > x$: $\mathbf{E} = -\nabla V = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} = 0$.

Oblast II: $-d \le x \le 0$: $\mathbf{E} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-V_0\left(1+\dfrac{x}{d}\right)^2\right)\hat{\mathbf{i}} = 2\dfrac{V_0}{d}\left(1+\dfrac{x}{d}\right)\hat{\mathbf{i}}$.

Oblast III: $0 \le x \le d$: $\mathbf{E} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-V_0\left(1+2\dfrac{x}{d}\right)\right)\hat{\mathbf{i}} = 2\dfrac{V_0}{d}\hat{\mathbf{i}}$.

Oblast IV: $x > d$: $\mathbf{E} = -\nabla V = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} = 0$.

(b)