ÚLOHY Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU
SADA 1

Peter Dourmashkin

Obsah

Sada 1

🅿 Úloha 1: Je libo pizzu?

Kolik kilogramů pizzy sní studenti MIT za semestr? (*Návod*: Uvažujte, že MIT má 10 000 studentů.)

🅿 Úloha 2: Nerovnováha nábojů

Víme, že v rámci přesnosti měření jsou si velikosti záporného náboje elektronu a kladného náboje protonu rovny. Předpokládejme však, že se tyto velikosti budou lišit o 0,0000001 % (miliardtinu). Jaká bude síla působící mezi vámi a vaším sousedem v učebně? Budete jím přitahování či odpuzováni? Na základě těchto úvah odhadněte, s jakou přesností se musí rovnat náboje elektronu a protonu. (např. mohou se lišit o 1 díl z $10^{?}$)?

🅿 Úloha 3: Millikanova olejová kapka

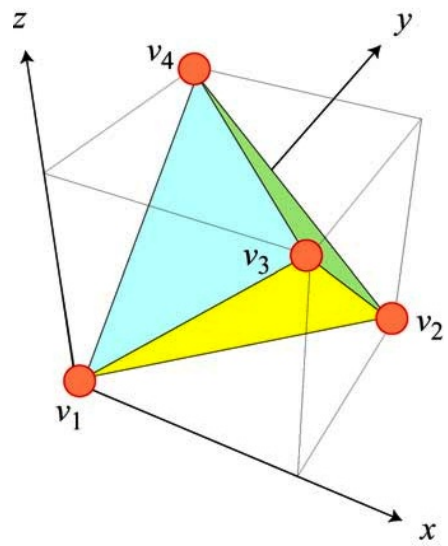
V Millikanově experimentu s olejovými kapkami, je atomizérem (rozprašovačem s jemnou tryskou) zaváděna spousta jemných olejových kapiček mezi dvě opačně nabité rovnoběžné kovové desky. Některé kapičky zachytí jeden či více volných elektronů. Náboj na deskách je nastaven tak, že elektrická síla působící na zachycené elektrony přesně vyrovná tíži kapiček. Myšlenka experimentu spočívá ve sledování kapiček, na které působí nejmenší elektrická síla a předpokládá se, že jsou nabité pouze jediným nadbytečným elektronem. To umožní pozorovateli měřit náboj elektronu. Předpokládejme, že používáme elektrické pole o intenzitě 3×10^{4} N/C. Náboj připadající na jeden elektron je zhruba $1{,}6\times10^{-19}$ C. Odhadněte poloměr olejové kapičky, jejíž tíže je kompenzována elektrickou silou působící ze strany pole na jeden elektron. (*Návod*: Budete potřebovat odhadnout hustotu oleje. Měli byste vědět, že hustota vody je 1 g/cm^3. Je olej hustší či řidší? Trochu nebo hodně?)

🅿 Úloha 4: Hmotné body ve vrcholech čtyřstěnu

Představte si pravidelný čtyřstěn, jehož vrcholy leží, jak je ukázáno na obrázku, ve vrcholech jednotkové krychle (každá hrana krychle má délku 1 cm).

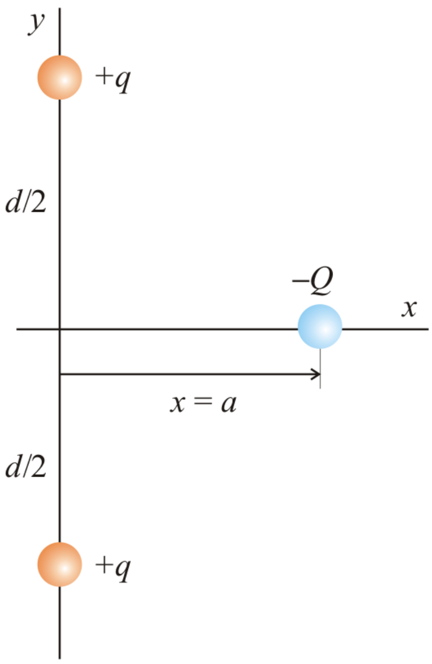
(a) Ověřte, že každá stěna čtyřstěnu je rovnostranný trojúhelník tím, že ukážete rovnost vzdáleností libovolné dvojice vrcholů.

(b) Předpokládejte hmotnost m umístěnou v každém vrcholu čtyřstěnu. Najděte výslednou gravitační sílu působící na hmotu v počátku ze strany zbývajících tří.



Úloha 5: Kmity náboje

Dva stejné bodové náboje mají každý náboj $+q$. Jsou zachyceny v prostoru tak, že je mezi nimi vzdálenost d a leží na svislé ose y symetricky vůči počátku. Třetí bodový náboj $-Q$ s hmotností m je volně pohyblivý podél vodorovné osy x a ve výchozí poloze je v klidu ve vzdálenosti $x = a$ od počátku, jak je ukázáno na obrázku.



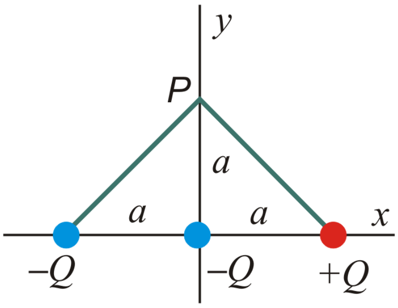
(a) Ukažte, že pokud je a malé ve srovnání s d ($a << d$), se záporného náboje pohybuje podél osy x jako lineární harmonický oscilátor. [*Poznámka*: U lineárního harmonického oscilátoru je zrychlení úměrné velikosti výchylky a působí směrem do rovnovážné polohy. Matematický popis je daný pohybovou jednoduchou rovnicí $d^2x / dt^2 = -\omega^2 x$, kde ω je kruhová frekvence. Lineárnímu harmonickému oscilátoru se budeme věnovat často.]

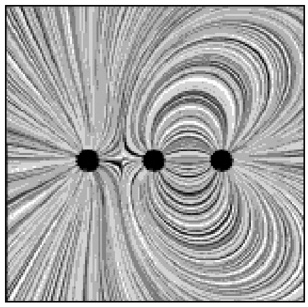
(b) Určete frekvenci pohybu.

(c) Jak rychle se bude náboj $-Q$ pohybovat při průchodu počátkem souřadnic $x = 0$?

Úloha 6: Náboje

Tři náboje rovné $-Q$, $-Q$, a $+Q$ jsou umístěny ve vzdálenosti a od sebe podél osy x (viz obrázek). Bod P je umístěn na kladné poloose y ve vzdálenosti a od počátku.





(a) Jaká je intenzita elektrického pole **E** v bodě P?

(b) Je na šumové textuře napravo správné vykreslení silokřivek této úlohy?

Řešení úloh

Ř Úloha 1: Je libo pizzu?

Při řešení budeme vycházet z následujících odhadů:

Počet studentů (magisterských i doktorandů):	10 000 studentů
Počet týdnů za semestr:	15 týdnů
Kolikrát týdně si student zajde na pizzu:	3 jídla/týden/studenta
Počet spořádaných dílků během jednoho jídla:	4 dílky/jídlo
Průměrná hmotnost pizzy (∅40 cm):	2 kg/pizzu
Hmotnost dílku pizzy (rozdělená na 10 dílků):	0,2 kg/dílek
Množství spořádané pizzy:	10^4*15*3*4*0,2 kg = = 4×10^5 kg (400 tun)

Nezapomeňte na zaokrouhlování – nikdy byste na tento typ úloh neměli potřebovat používat kalkulačku. Nemusíte nutně dospět k témuž výsledku, ale měli byste být blízko. Možná si myslíte, že průměrný student si denně dá pět dílků pizzy. Všimněte si, že to pouze ztrojnásobí náš výsledek, takže se stále budeme pohybovat v tomtéž řádu veličiny. Možná nevíte, kolik může taková pizza vážit. Můžete to odhadnout, předpokládejte hustotu vody, válcový tvar a výšku dva centimetry. $M \sim \rho\, \pi\, r^2\, h \sim 2$ kg.

Ř Úloha 2: Nerovnováha nábojů

Náboj elektronu je $1{,}6\times10^{-19}$ C (vypalte si toto číslo za čelo, je užitečné ☺). V podstatě sestáváte z vody, jejíž molekulární hmotnost je 18 (to je 18 g/mol, kde mol tvoří $6{,}023\times10^{23}$ molekul – další číslo hodné zapamatování, pokud jste tak již neučinili). Molekula vody obsahuje 10 protonů/elektronů. Provedeme odhad:

Hmotnost člověka:	100 kg (je to hezké číslo)
Počet molekul v těle:	100 kg/(18 g/mol) = 5000 molů = 3×10^{27} molekul
Počet elektronů v těle:	3×10^{27} * 10 e^-/molekula ~3×10^{28} e^-
Nadbytek náboje v těle:	3×10^{28} e^-*$1{,}6\times10^{-19}$ C*10^{-9}= 6 C navíc

Nyní pouze potřebujeme zjistit, jakou silou na sebe budou působit studenti s nábojem 6C sedící vedle sebe (zhruba metr vzdáleni):

$$F = \frac{k_e Q^2}{r^2} \sim 3\times10^{11}\,\mathrm{N}$$

Síla musí být odpudivá neboť ať má nadbytek náboje elektron či proton, znaménko vašeho náboje i náboje vašeho souseda bude totéž.

Pro případ, že byste to netušili, tato síla je ENORMNÍ. Srovnejme si ji s gravitací, která je zhruba 10^3 N pro 100 kg. To znamená, že rovnost nábojů musí platit s mnohem větší přesností. Řekl bych, že dva lidé 10 cm od sebe necítí žádnou patrnou odpudivou sílu (v důsledku elektrostatiky pochopitelně), pod „patrnou“ míním například odpovídající tíži sponky na papír, $mg \sim 10^{-2}$ N. Ačkoli není jasné, zdali byste cítili tíži kancelářské sponky, pokud by byla rozprostřena po celém vašem těle, je to zhruba kolem správné hodnoty. Se snížením vzdálenosti o řád se síla zvětší o dva řády, takže potřebujeme snížení síly o 15 řádů (z 10^{13} N na 10^{-2} N) což znamená, že potřebujeme snížit případnou nerovnost nábojů o 7 řádů. Rovnost nábojů tedy platí přinejmenším s přesností do 1 dílu z 10^{16}.

Poznámka překladatele: Autor řešení se dopustil určité nepřesnosti. Coulombův zákon v uvedeném tvaru popisuje interakci mezi ***bodovými*** *náboji. Tento popis můžete použít, pokud jsou buď vzdálenosti mezi nabitými tělesy řádově větší než charakteristické rozměry samotných těles nebo jsou tělesa středově symetrická (a na to u průměrně vysokého člověka ani metrák živé váhy nestačí…).*

Ř Úloha 3: Millikanova olejová kapka

Hustota oleje je menší než vody (proto plavou olejové skvrny na vodě). Avšak pravděpodobně není výrazně nižší. Odhadneme hodnotu $\rho = 0{,}9\ \mathrm{g/cm^3}$. Tudíž pro zachování rovnováhy musí platit:

$$F = qE = mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \qquad \Rightarrow \qquad R = \left(\frac{3qE}{4\pi\rho g}\right)^{1/3} \sim 5\times10^{-5}\,\mathrm{cm}\,.$$

Ř Úloha 4: Hmotné body ve vrcholech čtyřstěnu

(a) Snadno se lze přesvědčit, že vzdálenosti mezi vrcholy jsou stejné:

$$r_{12} = r_{13} = r_{14} = r_{23} = r_{24} = r_{34} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\ \mathrm{cm}$$

(b) Výsledná gravitační síla působící na hmotu v počátku ze strany ostatních tří hmot je

$$\mathbf{F}_g = -G\frac{m^2}{r_{21}^{'3}}\mathbf{r}_{21} - G\frac{m^2}{r_{31}^{'3}}\mathbf{r}_{31} - G\frac{m^2}{r_{41}^{'3}}\mathbf{r}_{41} = -G\frac{m^2}{r^3}\left(\mathbf{r}_{21}+\mathbf{r}_{31}+\mathbf{r}_{41}\right) =$$

$$= -G\frac{m^2}{r^2}\left(\left(-\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}\right)+\left(-\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{k}}\right)+\left(-\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}\right)\right) = G\frac{m^2}{4\times10^{-4}\mathrm{m}^2}\left(2\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}\right) =$$

$$= G\frac{m^2}{2\times10^{-4}\mathrm{m}^2}\left(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\right).$$

Ř Úloha 5: Kmity náboje

(a) Abychom se přesvědčili, že jde o lineární harmonický oscilátor, musíme ukázat, že zrychlení (a tím i návratná síla) náboje $-Q$ je úměrné výchylce. Působící síla ve směru osy x je dána kombinací vlivu obou kladných nábojů. Díky symetrii má síla pouze x-ovou složku (a je dvakrát větší než síla způsobená jedním nábojem):

$$\mathbf{F} = 2k_\mathrm{e}\frac{-Qq}{\left(x^2+(d/2)^2\right)^{3/2}}\,x\,\hat{\mathbf{i}}$$

Omezme se na přiblížení pro $x \ll d$ a proveďme Taylorův rozvoj pro případ malých čísel daných poměrem x/d:

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{i}}\,\frac{16k_\mathrm{e}x}{d^3}\frac{Qq}{\left((x/d)^2+1\right)^{3/2}} \approx -\hat{\mathbf{i}}\,\frac{16k_\mathrm{e}Qqx}{d^3}\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{x}{d}\right)^2+O\left((x/d)^4\right)\right\} \approx -\hat{\mathbf{i}}\,\frac{16k_\mathrm{e}Qq}{d^3}x\,,$$

kde ponecháváme pouze lineární člen vzhledem k x/d. Povšimněte si, že nyní popisujeme lineární harmonický oscilátor! Síla je lineárně úměrná výchylce (a opačně orientovaná).

(b) Z výrazu $F = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ dostáváme výraz $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{16k_e Qq}{md^3}x$

Úhlová frekvence je prostě druhá odmocnina z konstanty před x, z níž získáme frekvenci (pokud necháte výsledek zapsaný pro úhlovou frekvenci, je také v pořádku):

$$\omega = \sqrt{\frac{16k_e Qq}{md^3}} \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{k_e Qq}{md^3}}.$$

(c) Jelikož ω je úhlová frekvence pohybu záporného náboje, jeho výchylku $x(t)$ můžeme popsat jako

$$x(t) = a\cos(\omega t)$$

kde a je výchylka při $t = 0$. K nalezení rychlosti derivujme tuto rovnici podle t:

$$v(t) = dx(t)/dt = -a\omega \sin \omega t$$

Jelikož platí $-1 < -a\omega \sin \omega t < 1$, maximální rychlost je $v_{max} = a\omega$, což je rychlost náboje v počátku souřadnic.

Ř Úloha 6: Náboje

(a) Očíslujeme-li náboje zleva doprava, pak v bodě P bude intenzita

$$\mathbf{E}_1 = k_e \frac{-Q}{\left(\sqrt{2}a\right)^3}\left(a\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}}\right) = -k_e \frac{Q}{2\sqrt{2}a^2}\left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\mathbf{E}_2 = k_e \frac{-Q}{a^2}\left(\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\mathbf{E}_3 = k_e \frac{Q}{\left(\sqrt{2}a\right)^3}\left(-a\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}}\right) = -k_e \frac{Q}{2\sqrt{2}a^2}\left(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}\right)$$

Tedy výsledná intenzita elektrického pole je $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = -k_e \dfrac{Q}{\sqrt{2}a^2}\hat{\mathbf{i}} - k_e \dfrac{Q}{a^2}\hat{\mathbf{j}}$.

(b) Zakreslení silokřivek je správné, protože dvojice nábojů vpravo mají opačná znaménka (silokřivky začínají na jednom a končí na druhém náboji), zatímco levá dvojice má shodné znaménko (náboje se odpuzují a mezi nimi je nulové pole).