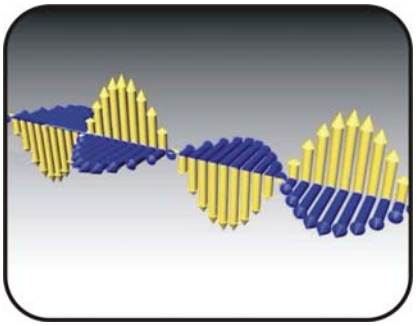
ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

XIII. Maxwellovy rovnice a elektromagnetické vlny



Obsah

13 Maxwellovy rovnice a elektromagnetické vlny

13.1 Posuvný proud

V kapitole 9 jsme se naučili, že pokud vodičem s určitou symetrií prochází proud, můžeme určit magnetické pole pomocí Ampérova zákona:

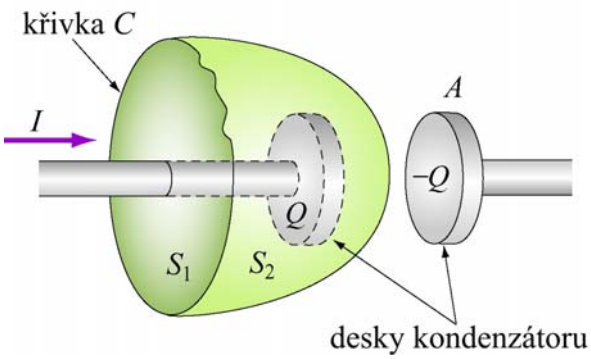
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\mathrm{uz}} \ . \tag{13.1.1}$$

Tato rovnice říká, že křivkový integrál magnetického pole podél jakékoliv uzavřené křivky je roven $\mu_0 I_{\mathrm{uz}}$, kde I_{uz} je vodivostní (kondukční) proud procházející skrze plochu ohraničenou uzavřenou křivkou. Dále jsme se také v 10. kapitole naučili, že následkem Faradayova indukčního zákona vzniká změnou magnetického pole elektrické pole, v souhlase s rovností

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \ . \tag{13.1.2}$$

Můžeme se pak také zajímat o to, zda podobný zákon platí i obráceně, tj. zda časová změna elektrického pole vytváří magnetické pole. Jestliže ano, budeme muset pravou stranu (13.1.1) upravit tak, aby odrážela tuto „symetrii“ mezi poli **E** a **B**.

K tomu, abychom viděli, jak magnetická pole mohou být vytvářena časově proměnným elektrickým polem, uvažujme kondenzátor, který je nabíjen. Během procesu nabíjení roste elektrické pole úměrně s množstvím náboje shromážděného na deskách kondenzátoru. Vodivý proud, který přináší náboje, vytváří také magnetické pole. Velikost tohoto magnetického pole můžeme spočítat pomocí Ampérova zákona. Nechť křivka *C* znázorněná na obrázku 13.1.1 je naše Ampérova smyčka.



Obr. 13.1.1: Plochy S_1 a S_2 ohraničené křivkou *C*.

Jestliže povrchem ohraničeným křivkou je plochý povrch S_1, pak uzavřený proud je $I_{\mathrm{uz}} = I$. Na druhou stranu ale, jestliže zvolíme, aby povrchem, který je uzavřen naší křivkou byla plocha S_2, pak bude uzavřený proud $I_{\mathrm{uz}} = 0$, protože plochou S_2 žádný proud neprochází. Tudíž vidíme, že zde existuje jistá dvojznačnost ve výběru příslušné plochy uzavřené křivkou *C*.

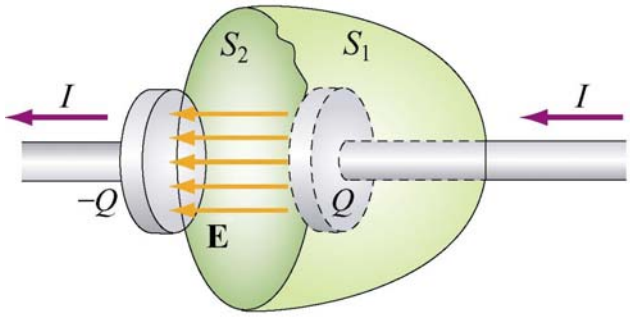
Maxwell ukázal, že tato dvojznačnost se dá vyřešit přidáním dalšího členu na pravou stranu Ampérova zákona

$$I_{\mathrm{d}} = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \ , \tag{13.1.3}$$

který je nazýván „*posuvným proudem*“. Tento člen zahrnuje časovou změnu elektrického toku. Zobecněný Ampérův (nebo Ampérův-Maxwellův) zákon nyní zní

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \mu_0\left(I + I_\mathbf{d}\right)\ . \tag{13.1.4}$$

Původu posuvného proudu můžeme porozumět z následujícího obrázku:



Obr. 13.1.2: Posuv skrze S_2

Na obrázku 13.1.2 je elektrický tok procházející skrze plochu S_2 dán výrazem

$$\phi_E = \oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{13.1.5}$$

kde A je plocha desky kondenzátoru. Z (13.1.3) můžeme okamžitě vidět, že posuvný proud I_d je dán rychlostí změny náboje na desce kondenzátoru

$$I_\mathrm{d} = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \frac{dQ}{dt}\ . \tag{13.1.6}$$

Nicméně pravá strana tohoto výrazu, dQ/dt, je jednoduše rovna vodivostnímu proudu I. Tudíž můžeme říci, že vodivostní proud procházející skrze plochu S_1 je přesně roven posuvnému proudu procházejícímu skrze plochu S_2, tj. $I = I_\mathrm{d}$. S Ampérovým-Maxwellovým zákonem se dvojznačnost vzniklá při výběru ploch ohraničených Ampérovou smyčkou zcela vytratí.

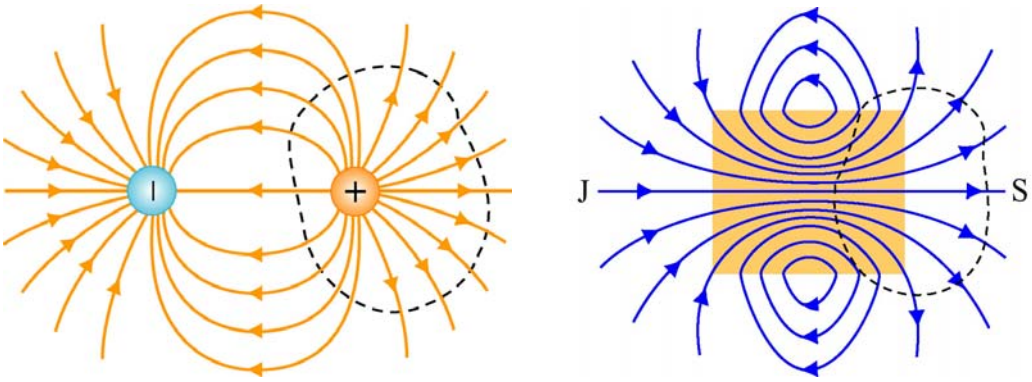
13.2 Gaussův zákon pro magnetizmus

V předchozím jsme viděli, že Gaussův zákon pro elektrostatiku říká, že elektrický tok skrze uzavřenou plochu je úměrný náboji touto plochou uzavřeném (obrázek 13.2.1a). Silokřivky elektrického pole vycházejí z kladného náboje (zdroje) a končí v záporném náboji (propadu). Zadá se přirozené zapsat ekvivalent tohoto zákona pro magnetické pole ve tvaru

$$\phi_B = \oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_\mathrm{m}}{\mu_0}\ , \tag{13.2.1}$$

kde Q_m je magnetický náboj (monopól) uzavřený pod povrchem Gaussovy plochy. Nicméně navzdory značnému vynaloženému úsilí nebyl nikdy žádný izolovaný magnetický monopól pozorován. Tudíž $Q_\mathrm{m} = 0$ a Gaussův zákon pro magnetizmus bude

$$\boxed{\phi_B = \oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0}\ . \tag{13.2.2}$$



Obr. 13.2.1: Gaussův zákon elektrostatiky (nalevo) a magnetizmu (napravo).

Z toho vyplývá, že počet silokřivek magnetického pole vstupujících do libovolné uzavřené plochy je přesně stejný jako počet silokřivek z této plochy vystupujících. To znamená, že zde nejsou ani žádné zdroje, ani žádné propady. Navíc silokřivky musí být spojité a nemají žádné počáteční ani koncové body. Ve skutečnosti, jak je pro případ tyčového magnetu znázorněno na obrázku 13.2.1 (napravo), proudí silokřivky magnetického pole ze severního pólu do jižního pólu vně magnetu, vrací se vnitřkem magnetu a vytvářejí tak uzavřené křivky.

13.3 Maxwellovy rovnice

Nyní máme čtyři rovnice, které popisují podstatu elektromagnetických jevů:

Zákon	Rovnice	Fyzikální interpretace
Gaussův zákon pro **B**	$\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	Elektrický tok uzavřenou plochou je úměrný uzavřenému náboji
Faradayův zákon	$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	Změna magnetického toku vytváří elektrické pole
Gaussův zákon pro **E**	$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0$	Celkový magnetický tok uzavřenou plochou je nulový
Ampérův-Maxwellův zákon	$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$	Elektrický proud a změna elektrického toku vytvářejí magnetické pole

Dohromady jsou tyto vztahy známy jako Maxwellovy rovnice. Tyto rovnice také mohou být napsány v diferenciálním tvaru jako

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0, \\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned} \qquad (13.3.1)$$

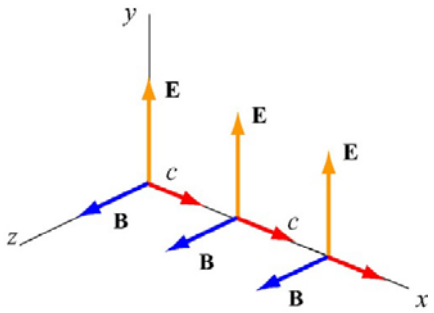
kde ρ a $\mathbf{J}$ jsou hustoty volného náboje resp. vodivostního proudu. Při nepřítomnosti zdrojů, kdy $Q = 0$, $I = 0$, přejdou předchozí rovnice do tvaru

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 0\,, \qquad \oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0\,,$$
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\phi_B}{dt}\,, \qquad \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\phi_E}{dt}\,. \tag{13.3.2}$$

Velmi důležitý důsledek Maxwellových rovnic, jak uvidíme dále, je předpověď existence elektromagnetických vln, které se šíří rychlostí světla $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. Příčinou toho je fakt, že změna elektrického pole vytváří magnetické pole a naopak. Propojení mezi těmito dvěma poli vede k vytvoření elektromagnetických vln. Tato předpověď byla potvrzena H. Hertzem roku 1887.

13.4 Rovinné elektromagnetické vlny

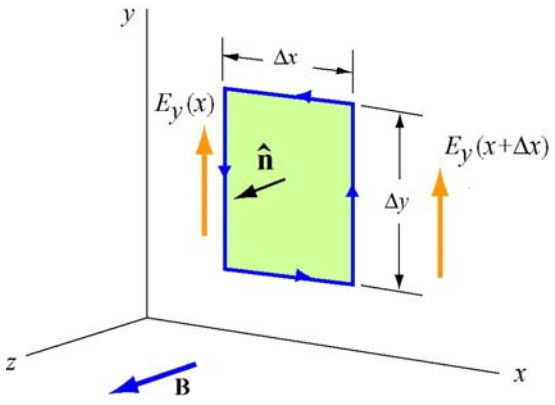
Abychom prozkoumali vlastnosti elektromagnetických vln, uvažujme pro jednoduchost elektromagnetickou vlnu, která se šíří prostorem v kladném směru osy $+x$ s elektrickým polem **E** mířícím ve směru $+y$ a magnetickým polem **B** ve směru $+z$ tak, jak je znázorněno na obrázku 13.4.1.



Obr. 13.4.1: Rovinná elektromagnetická vlna.

Na obrázku je příklad rovinné vlny, protože v libovolném okamžiku jsou vektory **E** a **B** homogenní v jakékoli rovině kolmé na směr šíření vlny. Navíc je vlna *transverzální* (=*příčná*), protože obě pole jsou kolmá ke směru šíření vlny, který míří ve směru vektorového součinu **E**×**B**.

S použitím Maxwellových rovnic můžeme získat vztah mezi velikostmi obou polí. Abychom tento vztah získali, uvažujme čtvercovou smyčku, která leží v rovině xy s levou stranou v x a pravou v $x + \Delta x$. Spodní strana smyčky je v y a horní je v $y + \Delta y$, viz obrázek 13.4.2. Nechť jednotkový vektor normály této smyčky míří v kladném směru osy $+z$, tj. $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$.



Obr. 13.4.2: Prostorová změna elektrického pole **E**.

S použitím Faradayova zákona

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\iint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} \tag{13.4.1}$$

můžeme levou stranu přepsat

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} &= E_y\left(x+\Delta x\right)\Delta y - E_y\left(x\right)\Delta y = \\ &= \left[E_y\left(x+\Delta x\right) - E_y\left(x\right)\right]\Delta y = \frac{\partial E_y}{\partial x}\left(\Delta x \Delta y\right),\end{aligned} \tag{13.4.2}$$

kde jsme využili rozvoje

$$E_y\left(x+\Delta x\right) = E_y\left(x\right) + \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x + \cdots \tag{13.4.3}$$

Dále můžeme na pravé straně (13.4.1) použít pro změnu magnetického toku vztah

$$-\frac{d}{dt}\iint \mathbf{B}d\mathbf{A} = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)\left(\Delta x \Delta y\right) . \tag{13.4.4}$$

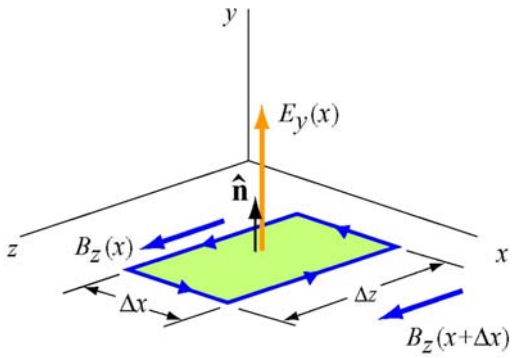
Porovnáním obou výsledků získáme po jejich dělení elementem plochy $\Delta x \Delta y$ výsledek

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}} . \tag{13.4.5}$$

Druhou podmínku vztahu mezi elektrickými a magnetickými poli můžeme získat užitím Ampérovy-Maxwellovy rovnice:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} \ . \tag{13.4.6}$$

Uvažujme pravoúhlou smyčku ležící v rovině *xz* znázorněnou na obrázku 13.4.3. Jednotkový vektor normály této plošky je $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{j}}$.



Obr. 13.4.3: Prostorová změna magnetického pole **B**.

Křivkový integrál magnetického pole je

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} &= B_z\left(x\right)\Delta z - B_z\left(x+\Delta x\right)\Delta z = \left[B_z\left(x\right) - B_z\left(x+\Delta x\right)\right]\Delta z = \\ &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\left(\Delta x \Delta z\right).\end{aligned} \tag{13.4.7}$$

Dále pak, časová derivace elektrického toku je

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)(\Delta x\Delta z)\,. \tag{13.4.8}$$

Porovnáním těchto dvou rovnic a jejich vydělením $\Delta x\Delta z$, získáme

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right). \tag{13.4.9}$$

Tento výsledek říká, že časově proměnné elektrické pole je generováno prostorovou změnou magnetického pole.

Užitím rovnic (13.4.4) a (13.4.8) si snadno můžeme ověřit, že obě pole, elektrické i magnetické, splňují jednodimenzionální (1D) vlnovou rovnici.

Dokážeme si to tak, že nejprve provedeme parciální derivaci (13.4.5) podle x a pak parciální derivaci (13.4.9) podle času t:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \tag{13.4.10}$$

kde jsme využili záměnnost parciálních derivací

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right). \tag{13.4.11}$$

Podobně po provedení parciální derivace (13.4.9) podle x a poté parciální derivace (13.4.5) podle t obdržíme

$$\frac{\partial B_z}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}. \tag{13.4.12}$$

Výsledky můžeme shrnout do tvaru

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{Bmatrix} E_y(x,t) \\ B_z(x,t) \end{Bmatrix} = 0\,. \tag{13.4.13}$$

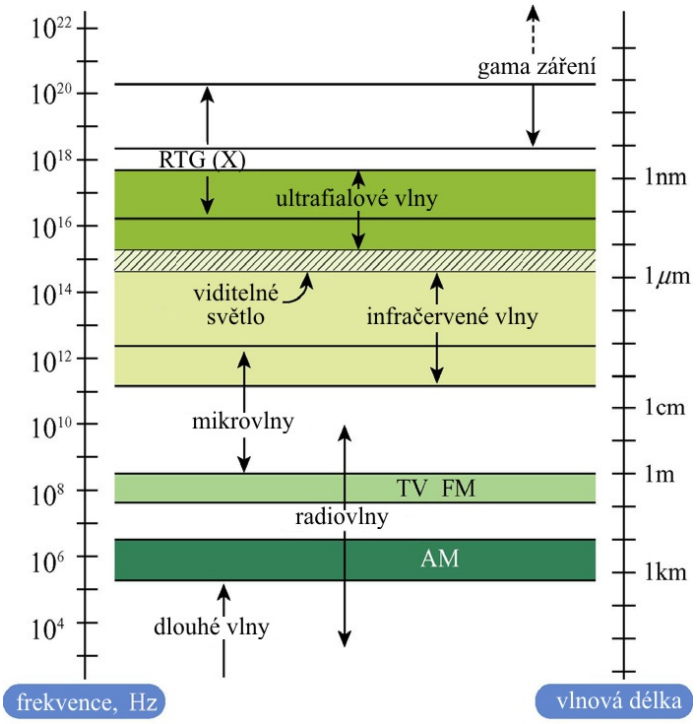
Vzpomeňte si, že obecný tvar jednodimenzionální vlnové funkce je dán

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = 0\,, \tag{13.4.14}$$

kde v je rychlost šíření vlny a $\psi(x, t)$ je vlnová funkce. Pak také snadno nahlédneme, že obě pole, jak E_y tak B_z, splňují vlnovou rovnici a šíří se rychlostí světla:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 2{,}997\times10^8\,\mathrm{m/s} = c\,. \tag{13.4.15}$$

Závěrem můžeme proto říci, že světlo je elektromagnetická vlna. Spektrum elektromagnetických vln je znázorněno na obrázku 13.4.4.



Obr. 13.4.4: Elektromagnetické spektrum.

13.4.1 Jednodimenzionální vlnová rovnice

Snadno si lze ověřit, že jakákoliv funkce ve tvaru $\psi(x \pm vt)$ splňuje jednorozměrnou vlnovou rovnici (13.4.14) Důkaz provedeme následujícím způsobem:

Nechť $x' = x \pm vt$, což splňuje $\partial x'/\partial x = 1$ a $\partial x'/\partial t = \pm v$. S použitím tohoto výsledku vidíme, že první dvě parciální derivace podle x jsou

$$\frac{\partial \psi(x')}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x'} \tag{13.4.16}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x'}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}\,. \tag{13.4.17}$$

Podobně jsou parciální derivace podle t dány vztahy

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = \pm v\frac{\partial \psi}{\partial x'}, \tag{13.4.18}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\pm v\frac{\partial \psi}{\partial x'}\right) = \pm v\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}\,. \tag{13.4.19}$$

Porovnáním (13.4.17) s (13.4.19) máme

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\,, \tag{13.4.20}$$

což dokazuje, že $\psi(x \pm vt)$ splňuje jednorozměrnou vlnovou rovnici. Vlnová rovnice je příkladem lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, což znamená, že pokud $\psi(x_1)$ a $\psi(x_2)$ jsou řešeními vlnové rovnice, pak $\psi(x_1) \pm \psi(x_2)$ je také řešení. Důsledkem toho je, že elektromagnetické vlny splňují princip superpozice.

Jedním z možných řešení vlnové rovnice je

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_y(x,t) = E_0 \cos\left[k(x-vt)\right]\hat{\mathbf{j}} = E_0 \cos(kx-\omega t)\hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{B} &= B_z(x,t) = B_0 \cos\left[k(x-vt)\right]\hat{\mathbf{k}} = B_0 \cos(kx-\omega t)\hat{\mathbf{k}}, \end{aligned} \tag{13.4.21}$$

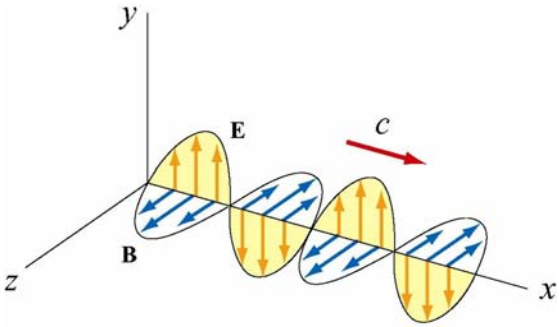
kde pole jsou sinusová s amplitudami E_0 a B_0. Vztah mezi velikostí vlnového vektoru k a vlnovou délkou λ je dán jednoduchým vztahem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{13.4.22}$$

a úhlová frekvence ω je

$$\omega = kv = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 2\pi f, \tag{13.4.23}$$

kde f je frekvence. V prázdném prostoru, tj. ve vakuu, se vlny šíří rychlostí světla $v = c$. Charakteristický průběh sinusové elektromagnetické vlny je nakreslen na obrázku (13.4.5).



Obr. 13.4.5: Rovinná elektromagnetická vlna. Vlna se šíří v kladném směru osy $+x$

Vidíme, že pole **E** a **B** jsou vždy ve fázi (dosahují maxim a minim ve stejných časech). K získání vztahu mezi amplitudami polí E_0 a B_0 použijeme rovnice (13.4.4) a (13.4.8). Provedením parciálních derivací získáme

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -kE_0 \sin(kx-\omega t) \tag{13.4.24}$$

a

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \omega B_0 \sin(kx-\omega t), \tag{13.4.25}$$

z čehož obdržíme $E_0 k = \omega B_0$, čili

$$\boxed{\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c}. \tag{13.4.26}$$

Z rovnic (13.4.20) a (13.4.21) snadno odvodíme, že velikosti polí v libovolném čase splňují

$$\frac{E}{B} = c \ . \tag{13.4.27}$$

Shrňme nyní důležité vlastnosti elektromagnetických vln popsaných (13.4.21):

1. Vlny jsou příčné (transverzální), protože pole **E** a **B** jsou kolmé ke směru šíření. Směr šíření míří ve směru vektorového součinu **E**×**B**.
2. Pole **E** a **B** jsou k sobě navzájem kolmá. Tudíž jejich skalární součin **E**·**B** = 0.
3. Poměr velikostí polí a amplitud polí je
$$\frac{E}{B} = \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c \ .$$
4. Rychlost šíření ve vakuu je rovna rychlosti světla, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.
5. Elektromagnetické vlny splňují princip superpozice.

13.5 Stojaté elektromagnetické vlny

Prozkoumejme nyní situaci, ve které máme dvě sinusové rovinné elektromagnetické vlny, jedna se šíří ve směru kladné osy x

$$E_{1y}(x,t) = E_{10}\cos(k_1 x - \omega_1 t), \quad B_{1z}(x,t) = B_{10}\cos(k_1 x - \omega_1 t) \tag{13.5.1}$$

a druhá se šíří v záporném směru osy x

$$E_{2y}(x,t) = -E_{20}\cos(k_2 x + \omega_2 t), \quad B_{2z}(x,t) = B_{20}\cos(k_2 x + \omega_2 t) \ . \tag{13.5.2}$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že mají tyto elektromagnetické vlny stejné amplitudy ($E_{10} = E_{20} = E_0$, $B_{10} = B_{20} = B_0$) a vlnové délky ($k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$). S užitím principu superpozice můžeme elektrická a magnetická pole zapsat ve tvaru

$$E_y(x,t) = E_{1y}(x,t) + E_{2y}(x,t) = E_0\left[\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)\right] \tag{13.5.3}$$

a

$$B_z(x,t) = B_{1z}(x,t) + B_{2z}(x,t) = B_0\left[\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)\right]. \tag{13.5.4}$$

S použitím identit

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \ , \tag{13.5.5}$$

můžeme rovnice přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} E_y(x,t) &= E_0\left[\cos kx\cos\omega t + \sin kx\sin\omega t - \cos kx\cos\omega t + \sin kx\sin\omega t\right] = \\ &= 2E_0\sin kx\sin\omega t \end{aligned} \tag{13.5.6}$$

a

$$\begin{aligned} B_z(x,t) &= B_0\left[\cos kx\cos\omega t + \sin kx\sin\omega t + \cos kx\cos\omega t - \sin kx\sin\omega t\right] = \\ &= 2B_0\cos kx\cos\omega t \end{aligned} \ . \tag{13.5.7}$$

Snadno si můžeme ověřit, že celková pole $E_y(x, t)$ a $B_z(x, t)$ stále splňují vlnovou rovnici (13.4.13), přestože již nejsou ve tvaru funkce $kx \pm \omega t$. Vlny popsané v (13.5.6) a (13.5.7) jsou tzv. *stojaté vlny*, které se nešíří, ale jenom jednoduše oscilují v prostoru a čase.

Snadno můžeme zjistit prostorovou závislost polí. Rovnice (13.5.6) ukazuje, že celkové elektrické pole zůstává nulové pro všechny časy v místech, kde $\sin kx = 0$, čili

$$x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{2\pi/\lambda} = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13.5.8}$$

Roviny, které obsahují tyto body, se nazývají *uzlové plochy* elektrického pole. A naopak pro $\sin kx = \pm 1$, čili pro

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2\pi/\lambda} = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{13.5.9}$$

je amplituda pole v maximu $2E_0$. Roviny, které obsahují tyto body, jsou tzv. *antiuzlové plochy* elektrického pole. Všimněme si, že mezi dvěmi uzlovými plochami je jedna antiuzlová plocha a naopak.

Pro magnetické pole musí bod v uzlové ploše splňovat podmínku $\cos kx = 0$. Tj.

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{13.5.10}$$

A podobně antiuzlové plochy pole **B** obsahují body, které splňují $\cos kx = \pm 1$, čili

$$x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{2\pi/\lambda} = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13.5.11}$$

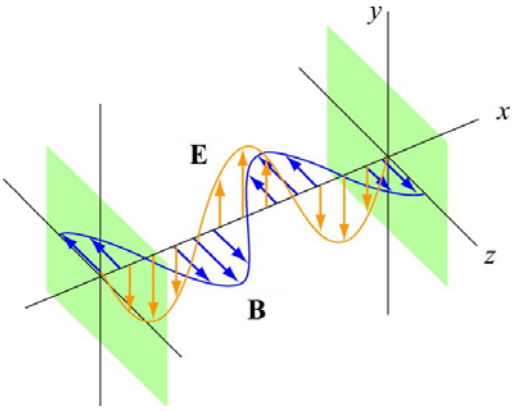
Vidíme tedy, že uzlové plochy **E** odpovídají antiuzlovým plochám **B** a naopak.

Z časové závislosti (13.5.6) vidíme, že pokud $\sin \omega t = 0$, pak je elektrické pole je nulové všude, čili

$$t = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{n\pi}{2\pi/T} = \frac{nT}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13.5.12}$$

kde $T = 1/f = 2\pi/\omega$ je perioda. Nicméně ale, toto je přesně podmínka pro maximum magnetického pole. Tudíž, na rozdíl od putující elektromagnetické vlny, ve které jsou elektrická a magnetická pole vždy ve fázi, ve stojaté elektromagnetické vlně jsou fáze těchto dvou polí posunuty o 90°.

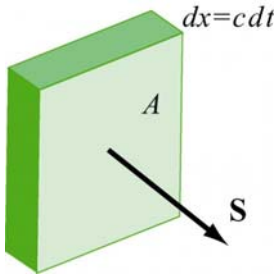
Stojaté elektromagnetické vlny mohou být vytvořeny ohraničením elektromagnetických vln dvěma dokonale odrážejícími vodiči tak, jak je znázorněno na obrázku 13.4.6.



Obr. 13.4.6: Vytvoření stojatých elektromagnetických vln pomocí dokonale odrážejících vodičů.

13.6 Poyntingův vektor

V kapitolách 5 a 11 jsme viděli, že elektrická a magnetická pole uchovávají energii. Tudíž energie také může být přenášena elektromagnetickými vlnami, které se z obou polí skládají. Uvažujme rovinnou elektromagnetickou vlnu procházející skrze malý objemový element s plochou A a tloušťkou dx. Viz obrázek 13.6.1



Obr. 13.6.1: Elektromagnetická vlna procházející skrze objemový element

Celková energie obsažená v tomto objemovém elementu je dána vztahem

$$dU = uA\,dx = \left(u_E + u_B\right) A\,dx = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) A\,dx\,, \tag{13.6.1}$$

kde

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2, \qquad u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{13.6.2}$$

jsou hustoty energií příslušné k elektrickým a magnetickým polím. Protože se elektromagnetické vlny šíří rychlostí světla c, je velikost časového intervalu potřebného k průchodu skrze objemový element rovna $dt = dx/c$. Snadno tedy můžeme získat energii proteklou za jednotku času jednotkovou plochou. Označme tuto veličinu symbolem S:

$$S = \frac{dU}{A\,dt} = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right). \tag{13.6.3}$$

Jednotkou v SI je W/m^2. Protože $E = cB$ a $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, můžeme tento výraz přepsat do tvaru

$$S = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{cB^2}{\mu_0} = c\varepsilon_0 E^2 = \frac{EB}{\mu_0}\,. \tag{13.6.4}$$

Obecně, průtok energie skrze jednotku plochy můžeme popsat Poyntingovým vektorem **S** (pojmenovaného na počest britského fyzika Johna Poyntinga) jehož definice zní

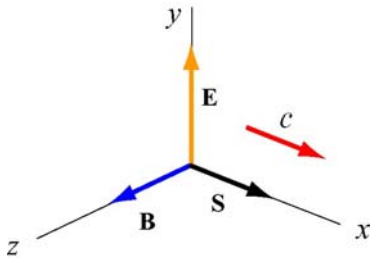
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}\,, \tag{13.6.5}$$

kde vektor **S** míří ve směru šíření vlny. Jelikož jsou pole **E** a **B** k sobě navzájem kolmá, můžeme se snadno přesvědčit, že velikost **S** je

$$\left|\mathbf{S}\right| = \frac{\left|\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right|}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} = S\ . \tag{13.6.6}$$

Jako příklad uvažujme, že elektrická komponenta rovinné elektromagnetické vlny je $\mathbf{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{j}}$. Odpovídající magnetická komponenta je $\mathbf{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{k}}$ a směr šíření je v kladném směru osy *x*. Poyntingův vektor pak získáme ve tvaru

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{j}}\right) \times \left(B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{k}}\right) = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(kx - \omega t)\hat{\mathbf{i}} \,. \qquad (13.6.7)$$



Obr. 13.6.2: Poyntingův vektor rovinné vlny.

Podle očekávání vektor **S** míří ve směru šíření vlny (viz obrázek 13.6.2). Intenzita vlny *I* je definována jako časová střední hodnota *S*. Platí tedy

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \left\langle \cos^2(kx - \omega t) \right\rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \frac{cB_0^2}{2\mu_0} \,, \qquad (13.6.8)$$

kde jsme využili

$$\left\langle \cos^2(kx - \omega t) \right\rangle = \frac{1}{2} \,. \qquad (13.6.9)$$

Abychom získali vztah mezi intenzitou a hustotou energie, všimněme si nejprve rovnosti mezi elektrickou a magnetickou hustotou energie v elektromagnetické vlně:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2c^2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = u_E \,. \qquad (13.6.10)$$

Střední celková hustota energie je potom

$$\langle u \rangle = \langle u_E + u_B \rangle = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{1}{\mu_0} \langle B^2 \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \,. \qquad (13.6.11)$$

Odtud vidíme, že vztah mezi střední hustotou energie a intenzitou je

$$I = \langle S \rangle = c \langle u \rangle \,. \qquad (13.6.12)$$

P Příklad 13.1: Solární konstanta

Ve vrchních vrstvách atmosféry Země je střední hodnota velikosti Poyntingova vektoru $\langle S \rangle = 1{,}35 \times 10^3$ W/m^2. Tato hodnota se nazývá *solární konstantou*.

(a) Jaké jsou velikosti elektrického a magnetického pole za předpokladu, že sluneční elektromagnetické záření je rovinná sinusová vlna?

(b) Jaký je celkový průměrný výkon vyzářený Sluncem? Střední vzdálenost Země-Slunce je $R = 1{,}5\times10^{11}$ m.

Řešení:

(a) Střední hodnota Poyntingova vektoru souvisí s amplitudou elektrického pole vztahem

$$\langle S\rangle = \frac{c}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \ .$$

Tudíž amplituda elektrického pole je

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\langle S\rangle}{c\varepsilon_0}} = = 1{,}01\times10^3 \text{ V/m} \ .$$

Odpovídající velikost magnetického pole je

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 3{,}4\times10^{-6} \text{ T} \ .$$

Poznamenejme jen, že toto magnetické pole je menší než jedna desetina magnetického pole Země.

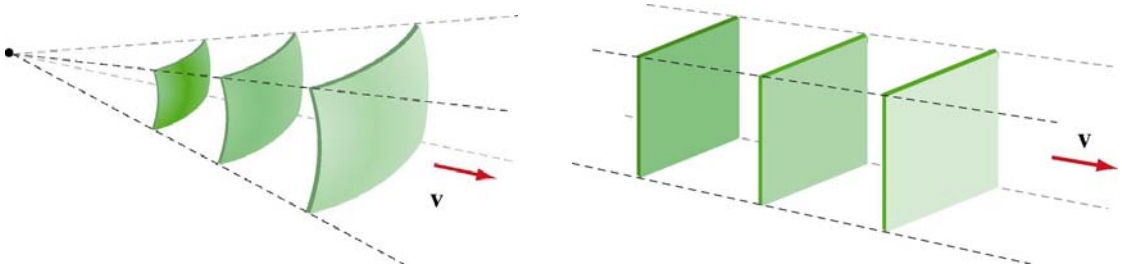
(b) Celková střední hodnota výkonu vyzářeného Sluncem ve vzdálenosti R je

$$\langle P\rangle = \langle S\rangle A = \langle S\rangle 4\pi R^2 = 3{,}8\times10^{26} \text{ W} \ .$$

Typ vlny, o které se v tomto příkladě bavíme, je sférická vlna (viz obrázek 13.6.3a). Taková vlna vychází z „bodového“ zdroje. Intenzita ve vzdálenosti r od zdroje je

$$I = \langle S\rangle = \frac{\langle P\rangle}{4\pi r^2} \qquad (13.6.13)$$

a ubývá jako $1/r^2$. Na druhou stranu intenzita rovinné vlny (obrázek 13.6.3 napravo) zůstává konstantní a nejsou zde žádné ztráty energie.



Obr. 13.6.3: *Nalevo* – sférická vlna. *Napravo* – rovinná vlna

P Příklad 13.2: Intenzita stojaté vlny

Spočtěte intenzitu stojaté elektromagnetické vlny dané vztahem

$$E_y(x,t) = 2E_0 \cos kx \cos\omega t, \quad B_z(x,t) = 2B_0 \sin kx \sin\omega t \ .$$

Řešení:

Poyntingův vektor stojaté vlny je

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left(2E_0\cos kx\cos\omega t\hat{\mathbf{j}}\right)\times\left(2B_0\sin kx\sin\omega t\hat{\mathbf{k}}\right) =$$

$$= \frac{4E_0B_0}{\mu_0}\left(\sin kx\cos kx\sin\omega t\cos\omega t\right)\hat{\mathbf{i}} = \tag{13.6.14}$$

$$= \frac{E_0B_0}{\mu_0}\left(\sin 2kx\sin 2\omega t\right)\hat{\mathbf{i}}\,.$$

Časová střední hodnota S je

$$\langle S\rangle = \frac{E_0B_0}{\mu_0}\sin 2kx\langle\sin 2\omega t\rangle = 0\,. \tag{13.6.15}$$

Tento výsledek jsme mohli očekávat, protože stojatá vlna se nešíří. Jiným způsobem také můžeme říci, že energie, které jsou přenášeny dvěma vlnami šířícími se v opačných směrech tak, že vytvoří stojaté vlny, se navzájem vyruší. Tudíž zde není žádný přenos energie.

13.6.1 Přenos energie

Protože Poyntingův vektor **S** představuje množství energie prošlé jednotkou plochy za jednotku času, můžeme časovou změnu energie v systému vyjádřit jako

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = -\oiint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{A}}\,, \tag{13.6.16}$$

kde $d\mathbf{A} = dA\hat{\mathbf{n}}$, vektor $\hat{\mathbf{n}}$ je normála k uzavřené ploše mířící směrem *ven*. Předchozí výraz nám umožňuje interpretovat **S** jako tok hustoty energie, analogicky s proudovou hustotou **J** ve vztahu

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint \mathbf{J}\cdot d\mathbf{A}\,. \tag{13.6.17}$$

Jestliže energie odtéká ze systému pryč, pak $\mathbf{S} = S\hat{\mathbf{n}}$ a $dU/dt < 0$, což vyjadřuje celkový úbytek energie ze systému. Naopak, jestliže energie do systému přitéká, pak $\mathbf{S} = S\left(-\hat{\mathbf{n}}\right)$ a $dU/dt > 0$, což vyjadřuje nárůst celkové energie v systému.

Za příklad, který nám pomůže osvětlit fyzikální význam rovnice uvedené výše, uvažujme cívku, skládající se z velmi dlouhého solenoidu bez jádra. Cívka má délku l, poloměr r a n závitů na jednotku délky. Předpokládejme, že v daném okamžiku se proud mění rychlostí $dI/dt > 0$. S použitím Ampérova zákona zjistíme, že magnetické pole uvnitř solenoidu je

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = Bl = \mu_0\left(NI\right)$$

čili

$$\mathbf{B} = \mu_0 nI\,\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{13.6.18}$$

Rychlost přírůstku magnetického pole proto je

$$\frac{dB}{dt} = \mu_0 n\frac{dI}{dt}\,. \tag{13.6.19}$$

Podle Faradayova zákona

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\phi_B}{dt} \tag{13.6.20}$$

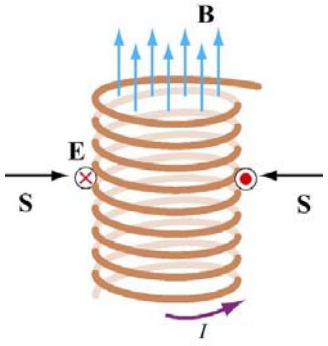
se změna magnetického toku projeví jako indukované elektrické pole, které snadno určíme z rovnosti

$$E\left(2\pi r\right) = -\mu_0 n\left(\frac{dI}{dt}\right)\pi r^2$$

neboli

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0 nr}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\ . \tag{13.6.21}$$

Vektor **E** směřuje ve směru hodinových ručiček, ve stejném směru jako indukovaný proud, jak je znázorněné na obrázku 13.6.4.



Obr. 13.6.4: Poyntingův vektor v solenoidu s $dI/dt > 0$

Odpovídající Poyntingův vektor pak můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{\mu_0 nr}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\times\left(\mu_0 nI\hat{\mathbf{k}}\right) = -\frac{\mu_0 n^2 rI}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\hat{\mathbf{r}}\ , \tag{13.6.22}$$

ze kterého je vidět, že míří radiálně směrem dovnitř k ose, tj. směrem k $-\hat{\mathbf{r}}$. Směry polí a Poyntingova vektoru jsou znázorněny na obrázku 13.6.4.

Magnetická energie uchovaná v cívce je

$$U_B = \left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)\left(\pi r^2 l\right) = \frac{1}{2}\mu_0 \pi n^2 I^2 r^2 l\ , \tag{13.6.23}$$

a proto můžeme rychlost změny U_B zapsat jako

$$P = \frac{dU_B}{dt} = \mu_0 \pi n^2 I r^2 l\left(\frac{dI}{dt}\right) = I\left|\varepsilon\right|\ , \tag{13.6.24}$$

kde

$$\varepsilon = -N\frac{d\phi_B}{dt} = -\left(nl\right)\left(\frac{dB}{dt}\right)\pi r^2 = -\mu_0 n^2 l\pi r^2\left(\frac{dI}{dt}\right) \tag{13.6.25}$$

je indukované elektromotorické napětí. Snadno si můžeme ověřit, že jde o tentýž vztah jako

$$-\oint \mathbf{S}d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n^2 rI}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\cdot(2\pi rl) = \mu_0 \pi n^2 I r^2 l\left(\frac{dI}{dt}\right) . \qquad (13.6.26)$$

Tudíž máme

$$\frac{dU_B}{dt} = -\oint \mathbf{S}d\mathbf{A} > 0 . \qquad (13.6.27)$$

Podle očekávání, pokud $dI/dt > 0$, energie systému narůstá. A na druhou stranu, pokud $dI/dt < 0$, pak energie systému ubývá a $dU_B/dt < 0$.

13.7 Hybnost a tlak záření

Elektromagnetická vlna nepřenáší pouze energii, ale také hybnost a tudíž může působit *radiačním tlakem (tlakem záření)* na povrch důsledkem absorpce a odrazu hybnosti. Maxwell ukázal, že jestliže je rovinná elektromagnetická vlna nějakou plochou zcela absorbována, je vztah mezi energií a přenesenou hybností dán jako

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c} \quad \text{(kompletní absorpce)} . \qquad (13.7.1)$$

Naopak, pokud je elektromagnetická vlna zcela odražena od povrchu např. zrcadla, výsledkem je pak

$$\Delta p = \frac{2\Delta U}{c} \quad \text{(dokonalý odraz)} . \qquad (13.7.2)$$

Pro případ dokonalé absorpce je střední tlak záření (síla na jednotku plochy) dán vztahem

$$P = \frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{1}{A}\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \frac{1}{Ac}\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle . \qquad (13.7.3)$$

Jelikož velikost energie dodaná ploše je

$$\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = \langle S \rangle A = IA ,$$

získáváme pro dokonalou absorpci vztah

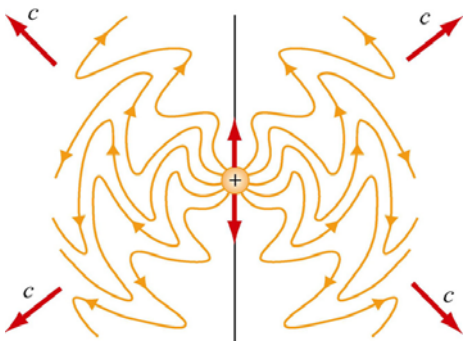
$$P = \frac{I}{c} . \qquad (13.7.4)$$

Podobně, jestliže záření je zcela odraženo, je tlak záření dvakrát větší než v případě dokonalé absorpce. Pro dokonalý odraz tedy máme:

$$P = \frac{2I}{c} . \qquad (13.7.5)$$

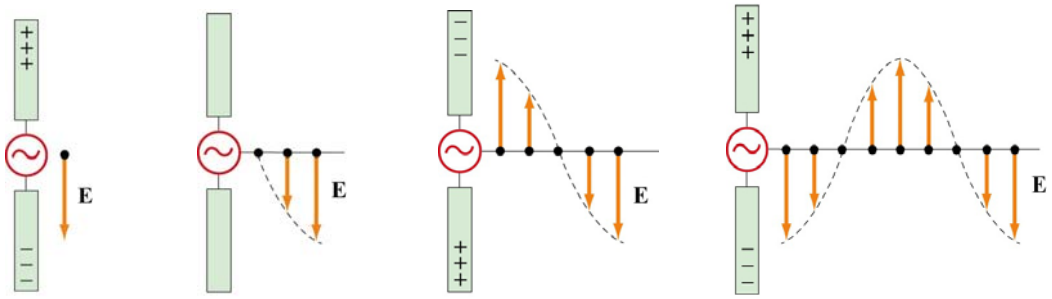
13.8 Vznik elektromagnetických vln

Pokud jsou elektrické náboje urychlovány, tvoří se elektromagnetické vlny. Jinými slovy, náboj musí vyzařovat energii, když prochází procesem urychlování. Vyzařovat nemůže statický náboj ani stejnosměrný proud. Na obrázku 13.8.1 jsou zakresleny (v daném okamžiku) silokřivky elektrického pole generované oscilujícím nábojem.



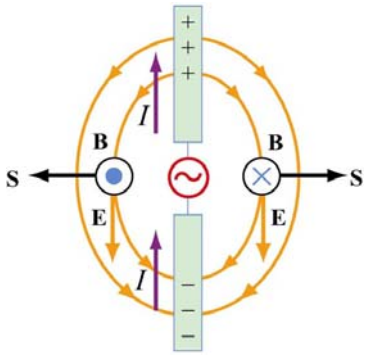
Obr. 13.8.1: Silokřivky elektrického pole oscilujícího bodového náboje.

Častý způsob, jak získat elektromagnetické vlny, je přivést zdroj sinusového elektrického napětí na anténu, což způsobí, že se náboje začnou shromažďovat v blízkosti konců antény. Výsledným efektem je vznik oscilujícího elektrického dipólu. Vznik elektrického dipólového záření je znázorněn na obrázku 13.8.2.



Obr. 13.8.2: Elektrické pole vytvořené elektrickou dipólovou anténou

V čase $t = 0$ jsou konce tyčí nabity tak, že horní tyč má maximální množství kladného náboje a spodní tyč má stejné množství náboje záporného. V tomto okamžiku elektrické pole v blízkosti antény míří dolů. Náboje posléze začínají ubývat. Po uplynutí jedné čtvrtiny periody $t = T/4$, náboje na okamžik vymizí a velikost elektrického pole je nulová. Následně se začne polarita tyčí obracet s narůstajícím záporným nábojem na horní tyči a kladným na dolní. To vše až do $t = T/2$, kdy dosáhne množství nábojů maximum. V tomto okamžiku elektrické pole v blízkosti tyčí míří vzhůru. Jak náboje pokračují v oscilacích mezi tyčemi, vzniká elektrické pole a šíří se pryč rychlostí světla. Pohyb nábojů ale také způsobuje vznik proudu, který následně generuje magnetické pole obtáčející tyče. Nicméně očekáváme, že chování polí v blízkosti antény je velmi odlišné od chování polí daleko od antény.

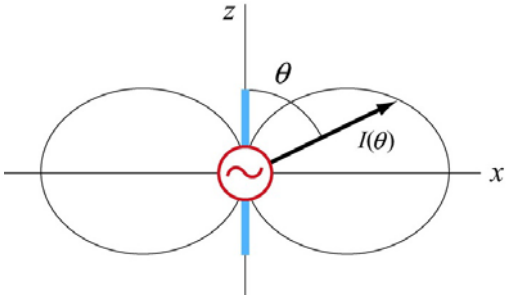


Obr. 13.8.3: Silokřivky elektrického a magnetického pole vytvořených elektrickou dipólovou anténou.

Nyní uvažujme půlvlnnou anténu, která má délku každé tyče stejnou jako je jedna čtvrtina vlnové délky emitovaného záření. Poněvadž jsou náboje nuceny k oscilaci dopředu a vzad mezi tyčemi střídavým napětím, může být anténa aproximována oscilujícím elektrickým dipólem. Na obrázku 13.8.3 jsou znázorněny silokřivky elektrického a magnetického pole v okamžiku, kdy proud směřuje vzhůru. Všimněme si, že Poyntingovy vektory míří ze znázorněného umístění směrem pryč.

Obecně je vzniklý vyzařovací diagram velmi složitý. Nicméně ve vzdálenostech, které jsou mnohem větší než rozměry antény a vlnových délek emitovaného záření, vykazují pole velmi odlišné chování. V těchto „vzdálených oblastech“ je radiace způsobena nepřetržitou indukcí magnetického pole časovou změnou elektrického pole a naopak. Obě pole oscilují ve fázi a amplituda se vzdáleností ubývá jako $1/r$.

Dá se ukázat, že se intenzita mění jako funkce $\sin^2\theta/r^2$, kde θ je úhel měřený od osy antény. Úhlová závislost intenzity $I(\theta)$ je ukázána na obrázku 13.8.4. Z obrázku je patrné, že intenzita je maximální v rovině, která je kolmá k anténě a prochází jejím středem.



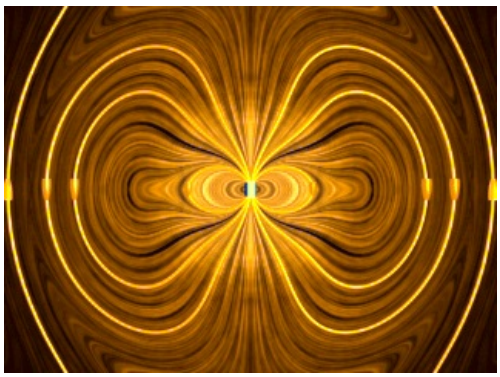
Obr. 13.8.4: Úhlová závislost intenzity vyzařování.

Animace 13.1: Záření elektrického dipólu 1

Uvažujme elektrický dipól, jehož dipólový moment se mění v čase podle vztahu

$$\mathbf{p}(t) = p_0\left[1+\frac{1}{10}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]\hat{\mathbf{k}}\ . \qquad (13.8.1)$$

Obrázek 13.8.5 ukazuje snímek z animace generovaných polí. V blízkosti dipólu jsou elektrické silokřivky v pohybu, a tudíž Poyntingův vektor míří jednou směrem dovnitř, podruhé směrem ven. Energie teče směrem ven ve chvíli, kdy energie dipólu narůstá a směrem dovnitř, když pole dipólu klesá.



Obr. 13.8.5: Záření elektrického dipólu, jehož dipólový moment se mění o 10 %.

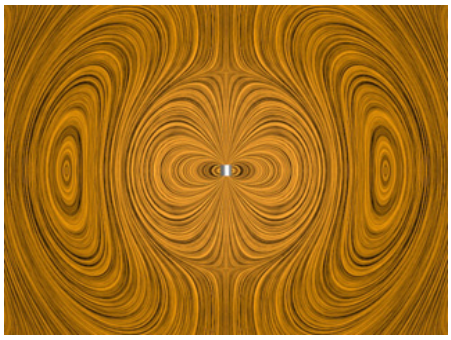
Přestože směr toku energie v této oblasti mění znaménko, existuje v průměru stále malé množství energie, které z oblasti odtéká pryč úplně. Toto malé množství toku energie představuje množství energie vyzářené do nekonečna. Silokřivky polí ve vnější oblasti se oddělují od dipólu a šíří se od něho směrem pryč. Vidíme, že kromě blízké oblasti je směr pohybu silokřivek a tedy i toku elektromagnetické energie vždy ve směru od dipólu. V této oblasti dominují zářivá pole, která odnášejí energii do nekonečna.

Animace 13.2: Záření elektrického dipólu 2

Obrázek 13.8.6 ukazuje snímek animace elektrického dipólu charakterizovaného průběhem

$$\mathbf{p}(t) = p_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\hat{\mathbf{k}} \quad . \tag{13.8.2}$$

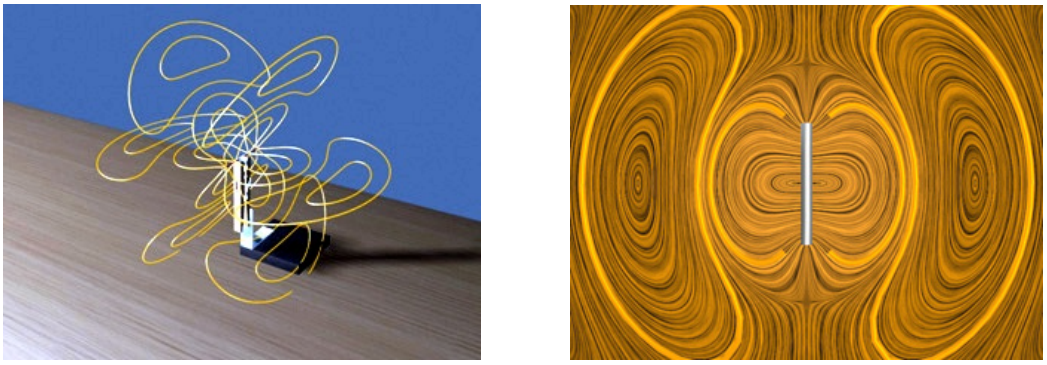
Z rovnice vidíme, že směr dipólu osciluje mezi $+\hat{\mathbf{k}}$ a $-\hat{\mathbf{k}}$.



Obr. 13.8.6: Záření elektrického dipólu, který zcela mění svojí orientaci.

Animace 13.3: Záření čtvrtvlnné antény

Obrázek 13.8.7 (nalevo) ukazuje charakter záření čtvrtvlnné antény pro jeden daný časový okamžik. Na obrázku 13.8.7 (napravo) je charakteristika tohoto záření v rovinném řezu pro celou periodu vyzařování. Čtvrtvlnná anténa generuje záření, jehož vlnová délka je dvakrát větší než je délka antény. To je také patrné z obrázku 13.8.7 (napravo).



Obr. 13.8.7: Vyzařovací charakteristika čtvrtvlnné antény. ***Nalevo*** – azimutální vyzařovací charakteristika v daném okamžiku. ***Napravo*** – vyzařovací charakteristika v jedné rovině během jedné celé periody.

13.8.1 Rovinné vlny

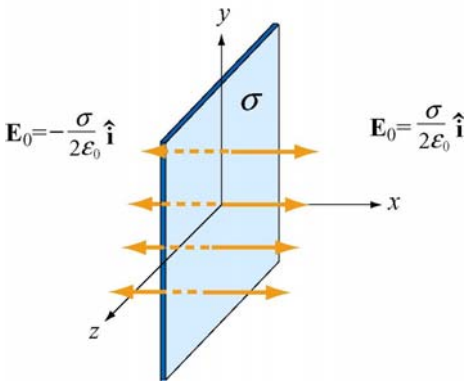
Viděli jsme, že rovinné elektromagnetické vlny se šíří prázdným prostorem rychlostí světla. Dále ukážeme, jak se dá vytvořit taková vlna v obzvláště jednoduché dvojrozměrné geometrii.

Ačkoliv fyzikálně v reálném světě to není nijak zvláště použitelné, je velmi jednoduché pozorovat, jak jsou elektromagnetické vlny generovány, *proč musíme vynaložit práci na jejich vytvoření* a jak mnoho energie přenášejí.

K tomu, abychom vytvořili elektromagnetickou rovinnou vlnu, musíme postupovat podobně, jako bychom postupovali, když bychom vytvářeli vlny na struně. Někde strunu zachytíme, rozechvějeme ji a tím na struně vytvoříme vlny. Tím jak pracujeme proti tahu struny, když ji rozechvíváme, vykonáváme práci a tato práce je pak vlnou odváděna jako tok energie. Elektromagnetické vlny jsou téměř ten samý problém. Silokřivky elektrického pole slouží jako „struny“. A jak uvidíme dále, existuje zde i tah spojený se silokřivkou elektrického pole. V případě, že s polem „zatřeseme“ (například změníme počáteční polohu), vzniknou síly, které se snaží systém uvést do původního stavu, a které se tedy změnám brání. Vlny, které se pak šíří podél silokřivek polí, jsou důsledkem počátečních změn. Abychom detailně porozuměli, co se v tomto procesu děje, budeme muset použít téměř vše, co jsme se již o elektromagnetizmu naučili od Gaussova zákona k Ampérovu zákonu a předpoklad, že se elektromagnetické vlny šíří ve vakuu rychlostí světla c.

Jak rozechvějeme silokřivky elektrického pole a za co je uchopit? To co uděláme je, že rozechvějeme elektrické náboje, které jsou se silokřivkami propojeny. Konečně, jsou to přece tyto náboje, které vytvářejí elektrické pole a v určitém smyslu jsou elektrická pole „zakořeněna“ v nábojích, které je generují. Když pochopíme toto, pak s předpokladem, že ve vakuu se elektromagnetický signál šíří rychlostí světla, můžeme rychle přijít na to, jak vytvořit rovinnou elektromagnetickou vlnu rozechvěním nábojů. Nejprve si rozmysleme, jak vyrobit na elektrické silokřivce *záhyby* a potom z nich sestavíme sinusovou vlnu.

Předpokládejme, že máme nekonečnou plochu v rovině yz rovnoměrně pokrytou nábojem. Náboje jsou na počátku v klidu s povrchovou hustotou σ, viz obrázek 13.8.8.

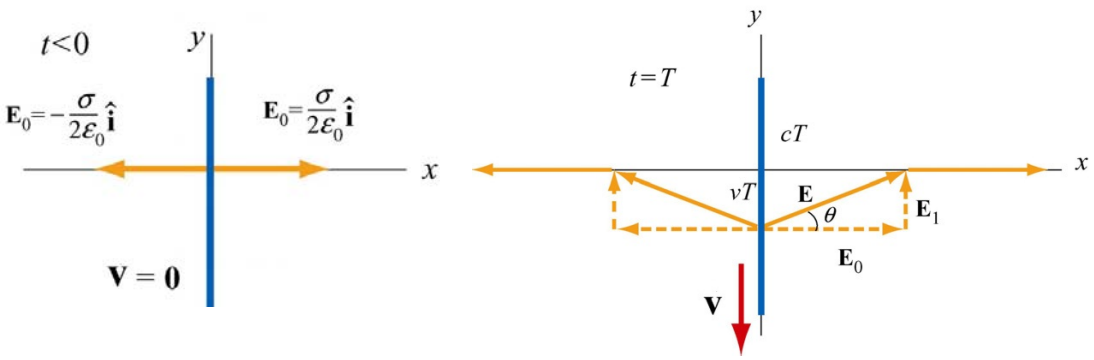


Obr. 13.8.8: Elektrické pole nekonečné desky s plošnou nábojovou hustotou σ.

Z diskusí nad Gaussovým zákonem v kapitole 4 víme, že tato nabitá plocha generuje homogenní elektrické pole $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{E}_0 = \begin{cases} +(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{i}}, & x>0 \\ -(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{i}}, & x<0 \end{cases}. \qquad (13.8.3)$$

Nyní, v čase $t=0$, uchopíme desku a začneme jí tlačit *dolů* s *konstantní* rychlostí $\mathbf{v}=-v\hat{\mathbf{j}}$. Vyšetříme teď, jak bude vše vypadat o něco později v čase $t=T$. Především vidíme, že dříve než se deska začala pohybovat, jdou pro $t<0$ silokřivky kolmo z $y=0$. Viz obrázek 13.8.9 (nalevo).



Obr. 13.8.9: Silokřivky elektrického pole. *Nalevo* – míří kolmo na $y = 0$ pro $t < 0$. *Napravo* – situace pro $t = T$.

„Začáttky“ této silokřivky elektrického pole, tj. body, kde jsou silokřivky „ukotveny“ v elektrických nábojích, které pole generují, se pohybují směrem dolů stejnou rychlostí, jako se pohybuje celá nabitá deska. Tudíž poloha „začátku“ naší elektrické silokřivky, která byla nejprve v $y = 0$, se změní za čas $t = T$ směrem dolů podél osy y o vzdálenost $y = -vT$.

Předpokládali jsme, že informace, kterou strhává dolů tažená silokřivka pole, se bude šířit od $x = 0$ rychlostí světla c. Proto části našich silokřivek ležících ve vzdálenosti $x > ct$ podél osy x od počátku ještě neví, že se náboje pohybují, a tudíž se také ještě nezačaly pohybovat dolů. Naše silokřivky musí v čase T vypadat tak, jak je znázorněno na obrázku 13.8.9 (napravo). Nic se nemění mimo oblast $|x| > cT$. Začátek silokřivky v $x = 0$ je ve vzdálenosti $y = -vT$ dole na ose y a snadno odhadneme, jak silokřivka bude vypadat pro $0 < |x| < cT$. Spojíme jednoduše oba konce ve známých polohách v čase T ($x = 0$ a $|x| = cT$) rovnou úsečkou. K tomuto výsledku bychom také přesně dospěli, pokud bychom místo silokřivky elektrického pole uvažovali strunu. Ukáže se, že jde o vynikající analogii.

Tím že posuneme nabitou desku směrem dolů, vytvoříme perturbaci (= poruchu, výchylku) elektrického pole $\mathbf{E}_1$ od statického původního pole $\mathbf{E}_0$. Celkové pole $\mathbf{E}$ pak v oblasti $0 < |x| < cT$ je

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \ . \tag{13.8.4}$$

Jak je ukázáno na obrázku 13.8.9 (napravo), musí být vektor pole $\mathbf{E}$ rovnoběžný s úsečkou spojující počátek silokřivky a polohu silokřivky v $|x| = cT$. Z toho vyplývá, že

$$\tan\theta = \frac{E_1}{E_0} = \frac{vT}{cT} = \frac{v}{c} \ , \tag{13.8.5}$$

kde $E_1 = |\mathbf{E}_1|$ a $E_0 = |\mathbf{E}_0|$ jsou velikosti polí a θ je úhel svíraný s osou x. Užitím rovnice (13.8.5) můžeme perturbaci pole vyjádřit jako

$$E_1 = \left(\frac{v}{c}E_0\right)\hat{\mathbf{j}} = \left(\frac{v\sigma}{2\varepsilon_0 c}\right)\hat{\mathbf{j}} \ , \tag{13.8.6}$$

kde jsme dosadili za $E_0 = \sigma/2\varepsilon_0$. Vytvořili jsme tak perturbaci elektrického pole a tento výraz nám říká, jak velká je výchylka pole $\mathbf{E}_1$ v závislosti na dané hustotě náboje desky a její rychlosti v.

To také vysvětluje, proč je podél silokřivek elektrického pole *tah* podobný, jako vytváří struna. Směr pole $\mathbf{E}_1$ je takový, že jeho síly působící na náboj na desce *brání* pohybu *dolů*.

Pro nekonečně malou plochu dA na desce obsahující náboj $dq = \sigma\, dA$ je „tah“ elektrického pole působící vzhůru dán jako

$$d\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = dq\mathbf{E}_1 = (\sigma dA)\left(\frac{v\sigma}{2\varepsilon_0 c}\right)\hat{\mathbf{j}} = \left(\frac{v\sigma^2 dA}{2\varepsilon_0 c}\right)\hat{\mathbf{j}} \ . \tag{13.8.7}$$

Proto, aby byl překonán tento tah, musí vnější zdroj působit silou stejně velkou, ale opačně orientovanou (*směrem dolů*)

$$d\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = -d\mathbf{F}_e = -\left(\frac{v\sigma^2 dA}{2\varepsilon_0 c}\right)\hat{\mathbf{j}} \ . \tag{13.8.8}$$

Protože množství vykonané práce je $dW_{\mathrm{ext}} = \mathbf{F}_{\mathbf{ext}} \cdot d\mathbf{s}$, bude externí práce vykonaná vnějším činitelem na jednotku plochy za jednotku času dána vztahem

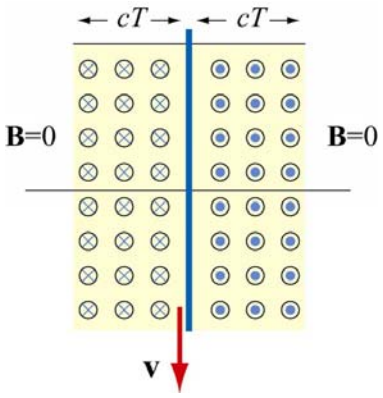
$$\frac{d^2 W_{\mathrm{ext}}}{dA\,dt} = \frac{d\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}}{dA}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \left(-\frac{v\sigma^2}{2\varepsilon_0 c}\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(-v\hat{\mathbf{j}}\right) = \frac{v^2\sigma^2}{2\varepsilon_0 c} \ . \tag{13.8.9}$$

Stalo se ještě něco při pohybu nabité desky směrem dolů? Ano. Když je nabitá deska v pohybu, vytváří se tím proudová plocha s plošnou proudovou hustotou (proudem na jednotku délky) $\mathbf{K} = -\sigma v\hat{\mathbf{j}}$. Z Ampérova zákona víme, že kromě pole $\mathbf{E}_1$ je generováno také *magnetické pole*. Proudová deska vytvoří magnetické pole (viz příklad 9.4)

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} +(\mu_0\sigma v/2)\hat{\mathbf{k}}\,; & x > 0\,, \\ -(\mu_0\sigma v/2)\hat{\mathbf{k}}\,; & x < 0\,. \end{cases} \ . \tag{13.8.10}$$

Když se pohybujeme ze záporných hodnot x do kladných (přes nabitou plochu), mění magnetické pole směr. Konfigurace pole generované proudem tekoucím směrem dolů je pro $|x| < cT$ ukázána na obrázku 13.8.10. Zopakujme, že informace, že se nabitá deska začala pohybovat dolů, vytvářet plošný proud a generovat tak magnetické pole, se šíří od $x = 0$ rychlostí c. Tudíž je magnetické pole stále nulové, $\mathbf{B} = 0$ pro $|x| > cT$. Poznamenejme, že

$$\frac{E_1}{B_1} = \frac{v\sigma/2\varepsilon_0 c}{\mu_0\sigma v/2} = \frac{1}{c\mu_0\varepsilon_0} = c \ . \tag{13.8.11}$$



Obr. 13.8.10: Magnetické pole pro $t = T$.

Magnetické pole $\mathbf{B}_1$ generované proudovou deskou je kolmé k $\mathbf{E}_1$ a má velikost $B_1 = E_1/c$, jak jsme pro příčnou elektromagnetickou vlnu očekávali.

Promysleme si nyní, jaká energie bude unášena pryč těmito perturbacemi polí. Tok energie sdružený s elektromagnetickým polem je dán Poyntingovým vektorem **S**. Pro $x > 0$ je to tok energie směrem *doprava*

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{v\sigma}{2\varepsilon_0 c}\hat{\mathbf{j}}\right)\times\left(\frac{\mu_0 \sigma v}{2}\hat{\mathbf{k}}\right) = \left(\frac{v^2\sigma^2}{4\varepsilon_0 c}\right)\hat{\mathbf{i}} \ . \qquad (13.8.12)$$

Toto je pouze polovina práce, kterou musíme působit za jednotku času na jednotku plochy, abychom stlačili nabitou plochu směrem dolů. Protože pole vlevo přenáší stejné množství toku energie *směrem nalevo* (protože magnetické pole $\mathbf{B}_1$ mění směr při přechodu roviny $x = 0$, zatímco elektrické pole $\mathbf{E}_1$ nikoliv, bude se Poyntingův vektor také měnit při přechodu plochy v $x = 0$).

Tudíž celkový tok odnášené energie způsobený perturbací elektrického a magnetického pole je *přesně stejný* jako intenzita práce, kterou je třeba vydat na jednotku plochy při pohybu desky směrem dolů k překonání tahu silokřivek elektrického pole. Jinými slovy, k vytvoření perturbace elektromagnetických polí jsme vynaložili přesně stejnou energii, jaká je poli odnesena pryč.

Odkud se vzala energie, kterou elektromagnetické pole odneslo pryč? Původně to byl nějaký vnější činitel, který „zatřásl“ náboji a vytvořil tak vlnu. Musel vykonat práci proti perturbaci elektrického pole, která se zatřesením vytvořila. Tento činitel je prapůvodní zdroj energie, kterou vlna odnáší. Úplně stejná situace nastává, když se ptáme, odkud se bere energie, která rozezní strunu. Vnější zdroj, který původně rozechvěl strunu, aby vytvořil vlnu, musel pracovat proti tahu struny, který se snaží uvést ji do původního stavu. Tento činitel je také původním zdrojem energie, která je odnášena vlněním struny.

13.8.2 Sinusová elektromagnetická vlna

A jak generovat sinusovou vlnu s úhlovou frekvencí ω? Abychom vytvořili takovouto vlnu, budeme namísto posouvání nabitou deskou směrem dolů, s ní třást nahoru a dolů s rychlostí $\mathbf{v}(t) = -v_0 \cos\omega t\, \hat{\mathbf{j}}$. Oscilující nabitý povrch bude generovat pole, která jsou dána vztahem

$$\mathbf{E}_1 = \frac{c\mu_0\sigma v_0}{2}\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0\sigma v_0}{2}\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (13.8.13)$$

pro $x > 0$ a pro $x < 0$

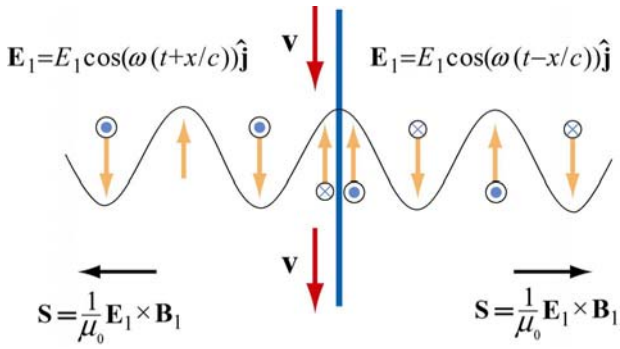
$$\mathbf{E}_1 = \frac{c\mu_0\sigma v_0}{2}\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0\sigma v_0}{2}\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\hat{\mathbf{k}} \ . \qquad (13.8.14)$$

V rovnicích (13.8.13) a (13.8.14) jsme zvolili *amplitudy* těchto členů tak, aby byly stejné jako byly amplitudy vln vytvořených dříve konstantní rychlostí desky s $E_1/B_1 = c$. Nyní jsme ale také zahrnuli fakt, že rychlost se mění sinusově v čase s frekvencí ω. Co ale dělají v argumentech kosinů v (13.8.13) a (13.8.14) členy $(t - x/c)$ a $(t + x/c)$?

Uvažujme nejprve $x > 0$. Jestliže se nacházíme v místě $x > 0$ v čase t a v tomto místě provádíme měření elektrického pole, zjistíme, že pole, které pozorujeme, nezávisí na proudu, který protéká plochou *v tom samém* čase t. Informace o tom, jaký proud protéká plochou, se k pozorovateli v místě $x > 0$ dostane za dobu x/c. Proto pozorovatel v $x > 0$ v čase t pozoruje to, jak se nabitá deska chovala *v dřívějším čase*, konkrétně v čase $t - x/c$. Elektrické pole jako funkce času by mělo odrážet časové zpoždění vzniklé konečnou rychlostí šíření signálu od počátku do místa $x > 0$. To je důvod, proč se v rovnici (13.8.13) objeví člen $(t - x/c)$ a ne čas t

samotný. Pro $x < 0$ bude argumentace téměř stejná, až na to, že pro $x < 0$ bude výraz pro dřívější čas $(t + x/c)$ a ne $(t - x/c)$. Toto bude přesně ten časově zpožděný efekt, který bychom dostali při měření vln na struně. Jestliže měříme amplitudy vln na struně v nějaké vzdálenosti od zdroje, který se strunou třese a vytváří tak vlnu, pak to, co budeme měřit v čase t, závisí jednak na chování zdroje v dřívějším čase a jednak na vzdálenosti pozorovatele a zdroje a samozřejmě také na rychlosti šíření vlny.

Poznamenejme, že $\cos\omega(t - x/c) = \cos(\omega t - kx)$, kde $k = \omega/c$ je vlnové číslo, tj. velikost vlnového vektoru. Vidíme, že (13.8.13) a (13.8.13) jsou přesně tím druhem rovinných elektromagnetických vln, které jsme studovali. Všimněme si, že se snadno můžeme zbavit stacionárního pole $\mathbf{E}_0$ tím, že jednoduše vložíme do $x = 0$ nabitou desku s plošným nábojem $-\sigma$. Tato nabitá plocha vyruší statické pole generované plochou s kladným plošným nábojem, ale nebude mít žádný efekt na perturbaci pole, kterou jsme počítali, poněvadž záporně nabitá plocha se nepohybuje. Ve skutečnosti to je důvod, proč se elektromagnetické vlny mohou generovat i v prostředí navenek neutrálním. V takovém prostředí jsou náboje s jedním znaménkem (obyčejně elektrony) urychleny, zatímco stejný počet nábojů s opačným znaménkem zůstává v podstatě v klidu. Proto pozorovatel může vidět pouze vlnové pole, ale nepozoruje žádné pole statické. V následujícím proto můžeme předpokládat, že pole $\mathbf{E}_0$ je nulové.



Obr. 13.9.4: Elektrické pole generované oscilací proudové stěny.

Co jsme vlastně vykonali v této myšlenkové konstrukci, která opravdu jen předpokládá, že počátky silokřivek elektrických polí se pohybují společně s náboji a že tato informace se šíří rychlostí světla c? Ukázali jsme, že můžeme vytvořit vlnu sinusových oscilací nabité plochy. Vlna, kterou jsme takto generovali, má elektrická a magnetická pole navzájem k sobě kolmá a kolmá ke směru šíření. Poměr velikosti elektrického a magnetického pole je c, rychlost světla. A navíc jsme viděli, že energie je odnášena vlnou pryč energetickým tokem $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$. Systému dodává energii zdroj, který pohybuje náboji a tak generuje elektromagnetické vlny. Pokud bychom uvažovali komplikovanější geometrii, budou tyto výsledky v detailech také mnohem komplikovanější, ale celkově to co jsme popsali, bude platit i nadále.

Nyní mírně přepišme výrazy (13.8.13) a (13.8.14) pro pole generované naší oscilující nabitou stěnou pomocí členu popisujícího proud jednotky délky této plochy, $\mathbf{K}(t) = \sigma v(t)\hat{\mathbf{j}}$. Protože $\mathbf{v}(t) = -v_0 \cos\omega t\, \hat{\mathbf{j}}$, bude $\mathbf{K}(t) = -\sigma v_0 \cos\omega t\, \hat{\mathbf{j}}$. Tudíž

$$\mathbf{E}_1 = \frac{c\mu_0}{2}\mathbf{K}(t - v/c), \quad \mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{i}} \times \frac{\mathbf{E}_1(x,t)}{c} \tag{13.8.15}$$

pro $x > 0$ a

$$\mathbf{E}_1 = \frac{c\mu_0}{2}\mathbf{K}\left(t + v/c\right), \quad \mathbf{B}_1 = -\hat{\mathbf{i}} \times \frac{\mathbf{E}_1\left(x,t\right)}{c} \tag{13.8.16}$$

pro $x < 0$. Poznamenejme, že $\mathbf{B}_1(x, t)$ obrací směr při průchodu proudovou stěnou se skokem $\mu_0|\mathbf{K}(t)|$ ve stěně v souladu s Ampérovým zákonem. *Jakákoliv* oscilace proudové plochy *musí* generovat rovinné elektromagnetické vlny popsané těmito rovnicemi, právě tak, jako *jakýkoliv* elektrický náboj *musí* generovat Coulombické elektrické pole.

Poznámka: Abychom se vyhnuli možným budoucím zmatkům, poukazujeme na to, že v pokročilejším kurzu elektromagnetizmu, ve kterém budete studovat radiační pole generované *jedním* oscilujícím nábojem, zjistíte, že toto pole je úměrné *zrychlení* náboje. Je to poněkud odlišné od případů, které jsme sledovali zde, kdy radiační pole naší oscilující stěny byla úměrná *rychlosti* nábojů. Nicméně zde k žádnému rozporu nedochází, protože, pokud sečteme radiační pole všech jednotlivých nábojů tvořících naši nabitou stěnu, obdržíme ten samý výsledek, který jsme dostali v rovnicích (13.8.15) a (13.8.16).

13.9 Shrnutí

- **Ampérův-Maxwellův zákon** říká, že integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \, d\phi_E/dt = \mu_0\left(I + I_\mathrm{d}\right)$, kde $I_\mathrm{d} = \varepsilon_0 \, d\phi_E/dt$ je tzv. **posuvný proud**. Změna elektrického toku s časem může indukovat magnetické pole.
- Gaussův zákon pro magnetizmus zní $\phi_B = \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$. Tento zákon říká, že magnetický tok skrze uzavřenou plochu musí být nulový. To také vyjadřuje neexistenci magnetických monopólů.
- Elektromagnetické jevy jsou popsány **Maxwellovými rovnicemi**:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0, \qquad \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\phi_B}{dt}, \qquad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}.$$

- V prázdném prostoru se elektrické a magnetické komponenty elektromagnetické vlny řídí vlnovou rovnicí:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{Bmatrix} E_y\left(x,t\right) \\ B_z\left(x,t\right) \end{Bmatrix} = 0$$

- Velikosti a amplitudy elektrických a magnetických polí splňují relaci

$$\frac{E}{B} = \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- **Stojatá elektromagnetická vlna** se nešíří prostorem, namísto toho vykonávají elektrická a magnetická pole jednoduchý harmonický pohyb kolmý k případnému směru šíření. Příkladem stojatých vln je $E_y\left(x,t\right) = 2E_0 \sin kx \sin \omega t, \quad B_z\left(xt\right) = 2B_0 \cos kx \cos \omega t$.

- Rychlost změny energie elektromagnetické vlny tekoucí skrze uzavřenou plochu je dána vztahem $dU/dt = -\oiint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{A}$, kde $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$ je **Poyntingův vektor**, který míří ve směru šíření vlny.
- **Intenzita** elektromagnetické vlny je ve vztahu k toku energie astřední hustotě energie dána vztahem $I = \langle S\rangle = c\langle u\rangle$.
- Přenesená hybnost je funkcí absorbované energie

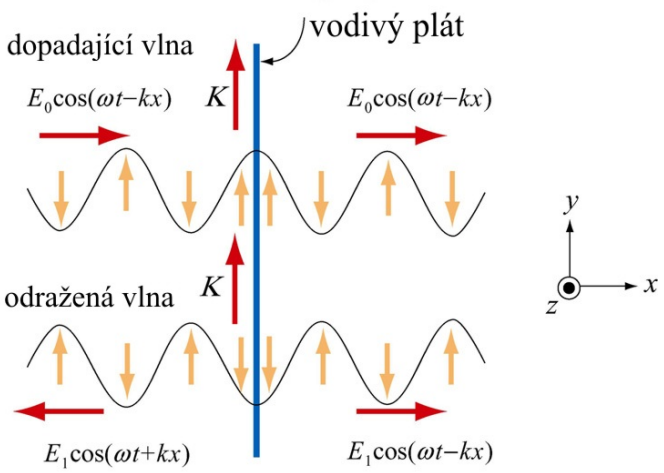
$$\Delta p = \begin{cases} \dfrac{\Delta U}{c} & \text{(dokonalá absorpce)}, \\ 2\dfrac{\Delta U}{c} & \text{(dokonalý odraz)}. \end{cases}$$

- Střední **tlak záření** působící na plochu od kolmo dopadající elektromagnetické vlny je

$$P = \begin{cases} \dfrac{I}{c} & \text{(dokonalá absorpce)}, \\ \dfrac{2I}{c} & \text{(dokonalý odraz)}. \end{cases}$$

13.10 Dodatek: Odraz elektromagnetických vln od vodivých ploch

Jak odráží velmi dobrý vodič elektromagnetické vlny, které na něj dopadají? To co se děje, je slovy následující. Časově proměnné elektrické pole dopadající vlny vybudí na povrchu vodiče oscilující proud popsaný Ohmovým zákonem. Tato oscilující proudová plocha musí nutně generovat vlny, které se šíří na obě strany od nabité stěny. Jedna z těchto vln je odražená vlna. Druhá vlna zcela vyruší vlnu, která do vodiče dopadá. Nyní popišme tento kvalitativní popis kvantitativně.



Obr. 13.10.1: Odraz elektromagnetických vln od vodivého povrchu.

Předpokládejme, že máme nekonečnou rovinnou vlnu šířící se prostorem ve směru osy x

$$\mathbf{E}_0 = E_0\cos(\omega t - kx)\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{B}_0 = B_0\cos(\omega t - kx)\hat{\mathbf{k}}, \tag{13.10.1}$$

jak je ukázáno na horní části obrázku 13.10.1. Vložme do počátku ($x = 0$) vodivou plochu šířky D, která je mnohem menší než je vlnová délka příchozí vlny.

Tato vodivá stěna bude *odrážet* naší příchozí vlnu. Jak? Elektrické pole příchozí vlny generuje proud $\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$ tekoucí vodivou stěnou, kde ρ je rezistivita (nespleťte si ji s objemovou hustotou náboje) a je rovna převrácené hodnotě konduktivity σ (nespléťe si ji s plošnou hustotou náboje). Navíc, jak je vidět na obrázku, bude směr **J** *ve stejném směru jako elektrické pole příchozí vlny*. Tudíž naše příchozí vlna vyvolá oscilující proudovou plochu s proudem na jednotku délky $\mathbf{K} = \mathbf{J}D$. Jak jsme již řekli v úvodu k této kapitole, bude tento proud *generovat elektromagnetické vlny*, které se budou šířit oběma směry doleva a doprava (viz spodní část obrázku 13.10.1) pryč od oscilující proudové stěny. Užitím (13.8.15) pro $x > 0$ bude vlna generovaná tímto proudem

$$\mathbf{E}_1(x,t) = -\frac{c\mu_0 JD}{2}\cos(\omega t - kx)\hat{\mathbf{j}} \ , \tag{13.10.2}$$

kde $J = |\mathbf{J}|$. Pro $x < 0$ získáme podobný výsledek, až na to, že v argumentu bude $(\omega t + kx)$ (viz obrázek 13.10.1). Všimněme se znaménka elektrického pole $\mathbf{E}_1$ v $x = 0$: pole míří *dolů* $(-\hat{\mathbf{j}})$, když plošný proud míří *vzhůru* (a $\mathbf{E}_0$ míří vzhůru, $+\hat{\mathbf{j}}$) a naopak, tak jak jsme viděli dříve. Tudíž pro $x > 0$ bude generované elektrické pole $\mathbf{E}_1$ vždy mířit v *opačném* směru než míří vektor dopadající vlny a *tím bude mít tendenci dopadající pole v oblasti $x > 0$ vyrušit*. Pro velmi dobrý vodič budeme mít (viz následující sekce)

$$K = |\mathbf{K}| = JD = \frac{2E}{c\mu_0} \ , \tag{13.10.3}$$

takže pro $x > 0$ obdržíme

$$\mathbf{E}_1(x,t) = -E_0\cos(\omega t - kx)\hat{\mathbf{j}} \ . \tag{13.10.4}$$

To znamená, že pro velmi dobrý vodič proudem vygenerované elektrické pole *zcela vyruší* elektrické pole dopadající vlny *v oblasti* $x > 0$! A to je přesně to, co velmi dobrý vodič dělá. Vytváří přesně stejné množství proudu na jednotce délky $K = 2E_0/c\mu_0$, které je potřebné k vyrušení příchozí vlny v $x > 0$. V oblasti $x < 0$ *tento samý proud* vytváří „odraženou" vlnu šířící se zpět do směru, ze kterého původní vlna přišla. Vlna bude mít *stejnou amplitudu jako původní dopadající vlna*. Tímto způsobem dokonalý vodič *zcela* odráží elektromagnetické vlny. Dále ukážeme, že K se bude ve skutečnosti této hodnotě blížit až v limitě, ve které se rezistivita ρ blíží nule.

V procesu odrazu vzniká síla působící na jednotku plochy vodiče. Je to síla $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ způsobená proudem **J** protékajícím vodičem díky přítomnosti magnetického pole dopadající vlny. Tudíž síla působící na jednotku objemu je $\mathbf{J}\times\mathbf{B}_0$. Když počítáme celkovou sílu působící na válcový objem vodiče s plochou dA a výškou D, nalezneme, že její velikost je v kladném směru x

$$dF = D|\mathbf{J}\times\mathbf{B}_0|dA = DJB_0 dA = \frac{2E_0 B_0 dA}{c\mu_0} \ , \tag{13.10.5}$$

tudíž síla působící na jednotku plochy bude

$$\frac{dF}{dA} = \frac{2E_0 B_0}{c\mu_0} = \frac{2S}{c} \ , \tag{13.10.6}$$

což je radiační tlak. Je to přesně dvojnásobek Poyntingova vektoru dělený rychlostí světla c.

V následujícím ukážeme, že dokonalý vodič bude také dokonale odrážet dopadající vlnu. Abychom se přiblížili k vlastnostem dokonalého vodiče, nejprve budeme uvažovat případ s konečnou rezistivitou a teprve poté půjdeme v limitě s rezistivitou k nule.

Pro jednoduchost předpokládejme, že tloušťka stěny je srovnatelná s vlnovou délkou, takže celá stěna pociťuje v podstatě stejné elektrické pole. To znamená, že proudová hustota **J** bude stejná po cele tloušťce stěny a mimo stěnu budeme pozorovat pole odpovídající povrchovému proudu $\mathbf{K}(t) = D\mathbf{J}(t)$. Tato proudová stěna bude vytvářet další elektromagnetické vlny, které se budou šířit na obě strany, vpravo a vlevo, pryč od oscilující nabité stěny. Celkové elektrické pole $\mathbf{E}(x, t)$ bude součtem dopadajícího elektrického pole a elektrického pole generovaného proudovou stěnou. S použitím (13.8.15) a (13.8.16), obdržíme pro celkové elektrické pole následující výrazy:

$$\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{E}_0(x,t) + \mathbf{E}_1(x,t) = \begin{cases} \mathbf{E}_0(x,t) - \dfrac{c\mu_0}{2}\mathbf{K}(t - x/c), & x > 0 \\ \mathbf{E}_0(x,t) - \dfrac{c\mu_0}{2}\mathbf{K}(t + x/c), & x < 0 \end{cases} . \qquad (13.10.7)$$

Mezi proudovou hustotou **J** a elektrickým polem **E** je jednoduchý vztah, který nazýváme diferenciální (mikroskopický) Ohmův zákon: $\mathbf{J}(t) = \mathbf{E}(0,t)/\rho$, kde $\mathbf{E}(0,t)$ je celkové elektrické pole v místě $x = 0$, tj. ve vodivé stěně. Poznamenejme, že je nyní vhodné použít v Ohmově zákonu celkové elektrické pole. Vznikající proudy jsou důsledkem celkového elektrického pole bez ohledu na původ tohoto pole. Tudíž máme

$$\mathbf{K}(t) = D\mathbf{J}(t) = \frac{D\mathbf{E}(0,t)}{\rho} . \qquad (13.10.8)$$

Pro $x = 0$ získáme pro výraz (13.10.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0,t) &= \mathbf{E}_0(0,t) + \mathbf{E}_1(0,t) = \mathbf{E}_0(0,t) - \frac{c\mu_0}{2}\mathbf{K}(t) \\ &= \mathbf{E}_0(0,t) - \frac{Dc\mu_0\mathbf{E}(0,t)}{2\rho} \end{aligned} , \qquad (13.10.9)$$

kde jsme v posledním kroku použili (13.10.8). Řešením pro **E**(0, t) obdržíme

$$\mathbf{E}(0,t) = \frac{\mathbf{E}_0(0,t)}{1 + Dc\mu_0/2\rho} . \qquad (13.10.10)$$

S použitím tohoto výrazu, můžeme povrchovou proudovou hustotu v (13.10.8) vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{K}(t) = D\mathbf{J}(t) = \frac{D\mathbf{E}_0(0,t)}{\rho + Dc\mu_0/2} . \qquad (13.10.11)$$

V limitě, kdy $\rho \simeq 0$ (žádný odpor, dokonalý vodič), $\mathbf{E}(0,t) = 0$, jak vidíme z (13.10.8) a povrchový proud přejde na

$$\mathbf{K}(t) = \frac{2\mathbf{E}_0(0,t)}{c\mu_0} = \frac{2E_0}{c\mu_0}\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{2B_0}{\mu_0}\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}} . \qquad (13.10.12)$$

V této limitě pak také můžeme vyjádřit celková elektrická pole

$$\mathbf{E}(x,t)=\begin{cases}(E_0-E_0)\cos(\omega t-kx)\hat{\mathbf{j}}=0\,, & x>0\\ E_0\left[\cos(\omega t-kx)-\cos(\omega t+kx)\right]\hat{\mathbf{j}}=2E_0\sin\omega t\sin kx\,\hat{\mathbf{j}}\,, & x<0\end{cases}\,. \quad (13.10.13)$$

Obdobně zjistíme, že celkové magnetické pole je v této limitě dáno

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(x,t)&=\mathbf{B}_0(x,t)+\mathbf{B}_1(x,t)=B_0\cos(\omega t-kx)\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{i}}\times\left(\frac{\mathbf{E}_1(x,t)}{c}\right)\\ &=B_0\cos(\omega t-kx)\hat{\mathbf{k}}-B_0\cos(\omega t-kx)\hat{\mathbf{k}}=0\end{aligned} \quad (13.10.14)$$

pro $x > 0$ a

$$\mathbf{B}(x,t)=B_0\left[\cos(\omega t-kx)-\cos(\omega t+kx)\right]\hat{\mathbf{k}}=2B_0\cos\omega t\cos kx\,\hat{\mathbf{k}} \quad (13.10.15)$$

pro $x < 0$. Z rovnic (13.10.13) až (13.10.15) vidíme, že v oblasti $x > 0$ není žádné elektromagnetické pole a v oblasti pro $x < 0$ vzniká stojatá elektromagnetická vlna. Všimněme si, že v $x = 0$ celkové pole vymizí. Proud na jednotku délky v $x = 0$ je

$$\mathbf{K}(t)=\frac{2B_0}{\mu_0}\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}}, \quad (13.10.16)$$

což je přesně ta hodnota, kterou potřebujeme, abychom magnetické pole z jeho hodnoty v $x < 0$ přivedli na nulovou v $x > 0$.

Možná jste znepokojeni faktem, že v limitě dokonalého vodiče vymizí elektrické pole v $x = 0$, protože je to právě elektrické pole, které tam pohání proud! V limitě velmi malého odporu je elektrické pole nutné ke generování proudu velmi malé. V limitě, kdy $\rho = 0$, je elektrické pole nulové, ale jak se přibližujeme k této limitě, máme stále konečnou a dobře definovanou hodnotu $\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$, kterou jsme nalezli použitím této limity v (13.10.8) a (13.10.12).

13.11 Algoritmy řešení úloh: šířící se elektromagnetická vlna

V této kapitole vyšetříme různé vlastnosti elektromagnetických vln. Elektrická a magnetická pole vlny se řídí vlnovou rovnicí. Jakmile je dána funkční forma jednoho pole, je již druhé pole určeno Maxwellovými rovnicemi. Jako příklad uvažujme sinusovou elektromagnetickou vlnu s elektrickým polem

$$\mathbf{E}(z,t)=E_0\sin(kz-\omega t)\hat{\mathbf{i}}\,.$$

Tato rovnice obsahuje kompletní informaci o elektromagnetické vlně:

1. *Směr šíření vlny*: argument v sinu v elektrickém poli můžeme přepsat jako $(kz - \omega t) = k(z - vt)$, což nám říká, že se vlna šíří kladném směru osy z.
2. *Vlnová délka*: vlnová délka λ souvisí s vlnovým číslem k vztahem $\lambda = 2\pi / k$.
3. *Frekvence*: frekvence vlny f souvisí s úhlovou frekvencí vlny ω vztahem $f = \omega / 2\pi$.
4. *Rychlost šíření*: rychlost vlny je dána relací

$$v=\lambda f=\frac{2\pi}{k}\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\omega}{k}\,.$$

Ve vakuu je rychlost elektromagnetické vlny rovna rychlosti světla c.

5. *Magnetické pole* **B**: magnetické pole **B** je kolmé k vektorům **E**, který míří ve směru *x* a jednotkovému vektoru $\hat{\mathbf{k}}$, který míří podél kladného směru osy *z*, který je také směrem šíření elektromagnetické vlny, jak jsme již určili dříve. Navíc, protože se vlna šíří ve stejném směru, jako je vektorový součin **E**×**B**, dospějeme k závěru, že **B** musí směřovat do směru +*y* (protože $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$).

   Vzhledem k tomu, že **B** je vždy ve stejné fázi jako **E**, budou obě pole mít stejný tvar funkce, tudíž magnetické pole můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{B}(z,t) = B_0 \sin(kz - \omega t)\hat{\mathbf{j}} \ ,$$

   kde B_0 je amplituda. Užitím Maxwellových rovnic obdržíme pro $B_0 = E_0(k/\omega) = E_0/c$ ve vakuu.

6. *Poyntingův vektor*: užitím (13.6.5) získáme Poyntingův vektor ve tvaru

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[E_0 \sin(kz-\omega t)\hat{\mathbf{i}}\right]\times\left[B_0 \sin(kz-\omega t)\hat{\mathbf{j}}\right] = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}\sin^2(kz-\omega t)\hat{\mathbf{k}} .$$

7. *Intenzita*: intenzita vlny je rovna střední hodnotě *S*:

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}\left\langle \sin^2(kz-\omega t)\right\rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \frac{cB_0^2}{2\mu_0} \ .$$

8. *Tlak záření*: jestliže elektromagnetické vlna dopadá kolmo k povrchu je zcela odražená, pak je velikost tlaku záření

$$P = \frac{2I}{c} = \frac{E_0 B_0}{c\mu_0} = \frac{E_0^2}{c^2\mu_0} = \frac{B_0^2}{\mu_0} .$$

13.12 Řešené úlohy

P 13.12.1: Rovinná elektromagnetická vlna

Předpokládejme, že elektrické pole rovinné elektromagnetické vlny je dáno vztahem

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz-\omega t)\hat{\mathbf{i}} \ . \qquad (13.12.1)$$

Určete následující hodnoty:

(a) Směr šíření vlny.

(b) Odpovídající magnetické pole **B**.

Řešení:

(a) Po přepsání argumentu funkce kosinus ($kz - \omega t$) = k(z – *ct*), kde $\omega = ck$, vidíme, že směr šíření vlny je +*z*.

(b) Směr šíření elektromagnetické vlny je stejný jako směr Poyntingova vektoru, který je dán $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$. Navíc víme, že pole **E** a **B** jsou k sobě navzájem kolmá. Tudíž $\mathbf{E} = E(z,t)\hat{\mathbf{i}}$ a $\mathbf{S} = S\hat{\mathbf{k}}$. Potom bude $\mathbf{B} = B(z,t)\hat{\mathbf{j}}$. Znamená to, že **B** míří v kladném směru osy +*y*. Protože **E** a **B** jsou navzájem ve stejné fázi, můžeme psát

$$\mathbf{B}(z,t) = B_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\mathbf{j}}. \tag{13.12.2}$$

K nalezení velikosti **B** použijeme Faradayův zákon:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\phi_B}{dt}, \tag{13.12.3}$$

což vede k

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}. \tag{13.12.4}$$

Z těchto rovnic obdržíme

$$-E_0 k \sin(kz - \omega t) = -B_0 \omega \sin(kz - \omega t) \tag{13.12.5}$$

neboli

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c \ . \tag{13.12.6}$$

Magnetické pole bude tedy dáno vztahem

$$\mathbf{B}(z,t) = (E_0 / c)\cos(kz - \omega t)\hat{\mathbf{j}} \tag{13.12.7}$$

P 13.12.2: Jednodimenzionální vlnová rovnice

Ověřte, že pro $\omega = kc$, pole

$$\begin{aligned} E(x,t) &= E_0 \cos(kx - \omega t), \\ B(x,t) &= B_0 \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \tag{13.12.8}$$

splňují jednodimenzionální vlnovou rovnici:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} E(x,t) \\ B(x,t) \end{Bmatrix} = 0 \tag{13.12.9}$$

Řešení:

Derivováním $E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$ podle x obdržíme

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -kE_0 \sin(kx - \omega t), \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(kx - \omega t) \ . \tag{13.12.10}$$

Obdobně, derivováním E podle t získáme

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \omega E_0 \sin(kx - \omega t), \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(kx - \omega t). \tag{13.12.11}$$

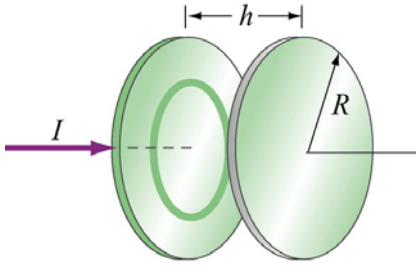
Tudíž

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left(-k^2 + \omega^2 / c^2\right) E_0 \cos(kx - \omega t) = 0 \ , \tag{13.12.12}$$

kde jsme použili relaci $\omega = kc$. Pro magnetické pole snadno obdržíme obdobný vztah.

P 13.12.3: Poyntingův vektor nabíjeného kondenzátoru

Kondenzátor sestávající z rovnoběžných kruhových desek o poloměru R, oddělených vzdáleností h je nabíjen přímým vodičem. Vodičem protéká proud I tak, jak je znázorněné na obrázku 13.12.1:



Obr. 13.12.1: Kondenzátor s rovnoběžnými deskami.

(a) Ukažte, že v průběhu nabíjení kondenzátoru míří Poyntingův vektor **S** radiálně dovnitř směrem k ose kondenzátoru.

(b) Integrací **S** přes válcový povrch dokažte, že rychlost, se kterou energie vstupuje do kondenzátoru je stejná, jako rychlost s jakou se elektrostatická energie ukládá v elektrickém poli.

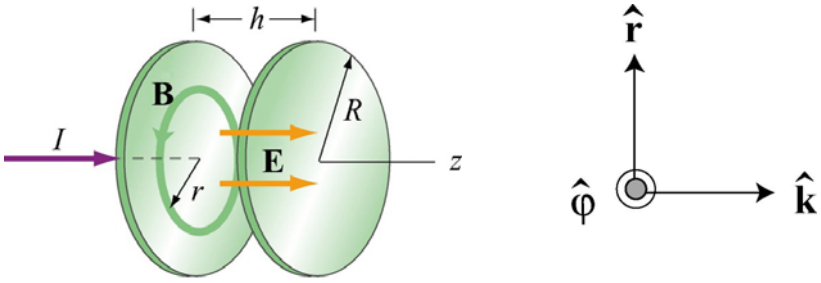
Řešení:

(a) Nechť osa kruhových desek je ztotožněná s osou z a proud protéká ve směru $+z$. Předpokládejme, že v daném okamžiku je množství náboje akumulovaného na kladné desce $+Q$. Elektrické pole je

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}} = \frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}} \ . \qquad (13.12.13)$$

Podle Ampérovy-Maxwellovy rovnice je magnetické pole indukované změnou elektrického toku dáno:

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\mathrm{uz}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{E}d\mathbf{A} \ .$$



Obr. 13.12.2.

Z válcové symetrie systému vidíme, že magnetické pole bude kruhové se středem v ose z, tj. $\mathbf{B} = B\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ (viz obrázek 13.12.2).

Uvažujme kruhovou křivku mezi deskami s poloměrem $r < R$. Užitím předchozího vztahu obdržíme

$$B(2\pi r) = 0 + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0}\pi r^2\right) = \frac{\mu_0 r^2}{R^2}\frac{dQ}{dt}, \tag{13.12.14}$$

neboli

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2}\frac{dQ}{dt}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \,. \tag{13.12.15}$$

Poyntingův vektor **S** můžeme psát jako

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{Q}{\pi R^2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2}\frac{dQ}{dt}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) \\ &= -\left(\frac{Qr}{2\pi^2 R^4 \varepsilon_0}\right)\left(\frac{dQ}{dt}\right)\hat{\mathbf{r}}\end{aligned} \,. \tag{13.12.16}$$

Všimněte si, že pro $dQ/dt > 0$ bude **S** mířit v záporném směru vektoru **r**, čili radiálně směrem k ose kondenzátoru.

(b) Energie v jednotce objemu přenášená elektrickým polem je $u_E = \varepsilon_0 E^2 / 2$. Celková energie uchována v elektrickém poli je

$$U_E = u_E V = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\left(\pi R^2 h\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{\pi R^2\varepsilon_0}\right)^2 \pi R^2 h = \frac{Q^2 h}{2\pi R^2\varepsilon_0} \,. \tag{13.12.17}$$

Derivováním tohoto výrazu podle t obdržíme rychlost, se kterou se energie akumuluje

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2 h}{2\pi R^2\varepsilon_0}\right) = \frac{Qh}{\pi R^2\varepsilon_0}\left(\frac{dQ}{dt}\right). \tag{13.12.18}$$

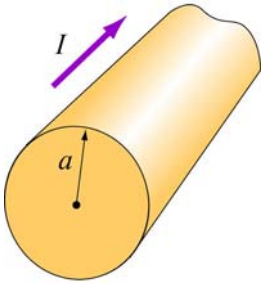
Na druhou stranu, rychlost s jakou energie přitéká do kondenzátoru skrze válec s $r = R$ můžeme obdržet integrací **S** přes povrch:

$$\oint \mathbf{S}d\mathbf{A} = SA_R = \left(\frac{Qr}{2\pi\varepsilon_0 R^4}\frac{dQ}{dt}\right)(2\pi Rh) = \frac{Qh}{\varepsilon_0\pi R^2}\left(\frac{dQ}{dt}\right), \tag{13.12.19}$$

což je stejný výsledek, jako v předešlém výpočtu.

P 13.12.4: Poyntingův vektor vodiče

Válcovým vodičem o poloměru a a vodivosti σ prochází stejnosměrný proud I. Proud prochází rovnoměrně celým průřezem znázorněným na obrázku 13.12.3.



Obr. 13.12.3

(a) Spočtěte elektrické pole **E** uvnitř vodiče.

(b) Spočtěte magnetické pole **B** vně vodiče.

(c) Spočtěte Poyntingův vektor **S** na povrchu vodiče. Do kterého směru bude **S** mířit?

(d) Integrací **S** přes povrch vodiče ukažte, že rychlost s jakou elektromagnetická energie vstupuje do vodiče je stejná jako rychlost, s jakou se energie pohlcuje.

Řešení:

(a) Nechť proud protéká vodičem podél osy *z*. Elektrické pole je pak dáno

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I}{\sigma \pi a^2}\hat{\mathbf{k}} \ . \tag{13.12.20}$$

(b) Magnetické pole můžeme určit z Ampérova zákona

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\mathrm{uz}} \ . \tag{13.12.21}$$

Zvolíme-li Ampérovu smyčku jako kružnici s poloměrem *r*, máme $B(2\pi r) = \mu_0 I$, čili

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \ . \tag{13.12.22}$$

(c) Poyntingův vektor na povrchu vodiče ($r = a$) je

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{I}{\sigma\pi a^2}\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) = -\left(\frac{I^2}{2\pi^2\sigma a^3}\right)\hat{\mathbf{r}} \ . \tag{13.12.23}$$

Všimněme si, že **S** míří radiálně do středu vodiče.

(d) Rychlost, s jakou elektromagnetické pole protéká vodičem, je dána

$$P = \frac{dU}{dt} = \oiint_S \mathbf{S} d\mathbf{A} = \left(\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^3}\right) 2\pi a l = \frac{I^2 l}{\sigma \pi a^2} \ , \tag{13.12.24}$$

kde *l* je délka vodiče. Jelikož vodivost σ souvisí s odporem *R* vztahem

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{AR} = \frac{l}{\pi a^2 R} \ , \tag{13.12.25}$$

můžeme výraz (13.12.24) přepsat na

$$P = I^2 R \ . \tag{13.12.26}$$

Tento výraz je stejný jako velikost rozptýlené (disipované) energie ve vodiči s odporem *R*.

13.13 Tématické otázky

1. Je možné, že v Ampérově-Maxwellově rovnici budou oba členy, jak posuvný tak vodivostní proud, nenulové?
2. Co způsobuje elektromagnetické záření?
3. Když se dotknete pokojové televizní antény, signál se zlepší. Proč?

4. Vysvětlete, proč se příjem mobilního telefonu obvykle zhorší, pokud jste uvnitř železobetonové budovy.
5. Porovnejte zvukové a elektromagnetické vlny.
6. Mohou paralelní elektrická a magnetická pole vytvořit ve vakuu vlnu?
7. Jaká bude intenzita elektromagnetické vlny, když amplituda elektrické vlny bude poloviční? Dvojnásobná?

13.14 Neřešené úlohy

P 13.14.1: Solární plachetnice

Předpokládá se, že kosmická loď může být poháněna skrze Sluneční soustavu tlakem záření na velikou plachtu vyrobenou z lehké folie. Jak velká musí být radiační síla, aby se vyrovnala gravitační přitažlivosti Slunce? Předpokládejme, že hmotnost lodě s plachtou je 1 650 kg, že plachta dokonale odráží a záření dopadá na plachtu od Slunce kolmo. Záleží odpověď na tom, kde se ve sluneční soustavě loď nalézá?

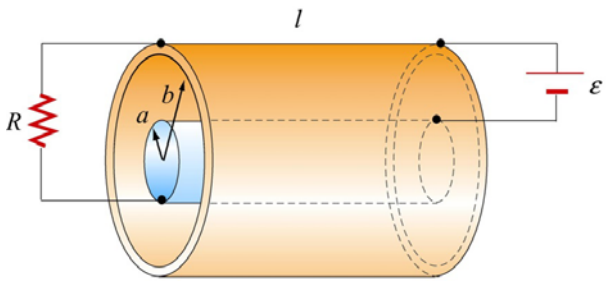
P 13.14.2: Odlesk pravé lásky

(a) Světelná žárovka vyzáří 100 W elektromagnetického záření. Jaká je střední vzdálenost intenzity záření ve vzdálenosti jednoho metru od žárovky? Jaké jsou maximální hodnoty elektrického a magnetického pole E_0 a B_0 v této vzdálenosti od žárovky? Předpokládejte rovinnou vlnu.

(b) Tvář vaší pravé lásky se nachází jeden metr od této 100 W žárovky. Jaký maximální povrchový proud musí téci na tváři vaší lásky, aby odrazila světlo do vašich obdivujících očí? Předpokládejme, že tvář vaší jediné lásky je (jak jinak) dokonale hladká a dokonale odrážející. Předpokládejme také, že dopadající a odražená světla jsou kolmé k povrchu.

P 13.14.3: Koaxiální kabel a tok energie

Koaxiální kabel se skládá ze dvou soustředných dlouhých dutých válců s nulovým odporem. Vnitřní má poloměr a, a vnější má poloměr b. Jejich délka je l taková, že $l >> b$. Kabelem prochází stejnosměrný proud napájený baterií. Baterie poskytuje elektromotorické napětí ε mezi oběma vodiči na jednom konci kabelu a zátěží je odpor R připojený k oběma vodičům na druhém konci kabelu. Proud I vtéká vnitřním vodičem a vrací se zpět vnějším. Baterie nabíjí vnitřní vodič nábojem $-Q$ a vnější vodič nábojem $+Q$.



Obr. 13.14.1

(a) Nalezněte všude směr a velikost elektrického pole **E**.

(b) Nalezněte všude směr a velikost magnetického pole **B**.

(c) Spočtěte Poyntingův vektor v kabelu.

(d) Integrací **S** přes příslušný povrch nalezněte výkon, který vtéká do koaxiálního kabelu.

(e) Jaký bude váš výsledek (d) ve srovnání s výkonem disipovaným na odporu?

P 13.14.4: Superpozice elektromagnetických vln

Elektromagnetická vlna je emitována ze dvou rozdílných zdrojů s

$$\mathbf{E}_1(x,t) = E_{10}\cos(kx-\omega t)\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{E}_2(x,t) = E_{20}\cos(kx-\omega t+\phi)\hat{\mathbf{j}}$$

(a) Nalezněte Poyntingův vektor příslušný k výsledné elektromagnetické vlně.

(b) Nalezněte intenzitu výsledné elektromagnetické vlny.

(c) Zopakujte tyto výpočty pro případ, kdy směr šíření druhé elektromagnetické vlny bude obrácený, tj.

$$\mathbf{E}_1(x,t) = E_{10}\cos(kx-\omega t)\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{E}_2(x,t) = E_{20}\cos(kx+\omega t+\phi)\hat{\mathbf{j}}$$

P 13.14.5: Sinusová elektromagnetická vlna

Elektrické pole elektromagnetické vlny je dáno

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0\cos(kz-\omega t)\left(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}\right)$$

(a) Jaká je maximální amplituda elektrického pole?

(b) Spočtěte odpovídající magnetické pole **B**

(c) Nalezněte Poyntingův vektor **S**

(d) Jaký je radiační tlak, jestliže vlna dopadá kolmo na povrch a je dokonale odražená?

P 13.14.6: Radiační tlak elektromagnetické vlny

Rovinná elektromagnetická vlna je popsána

$$\mathbf{E} = E_0\sin(kx-\omega t)\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{B} = B_0\sin(kx-\omega t)\hat{\mathbf{k}},$$

kde $E_0 = cB_0$.

(a) Ukažte, že pro bod vlny je hustota vázané energie elektrického pole stejná jako hustota vázané energie magnetického pole. Jaká je časová střední hodnota *celkové* (elektrické a magnetické) hustoty energie této vlny vyjádřená pomocí E_0? A pomocí B_0?

(b) Předpokládejte, že takováto vlna dopadá na nějaký objekt a je jím zcela *absorbována*. Za předpokladu dokonalé absorpce ukažte, že tlak záření na objekt je přesně dán střední hodnotou celkovou střední hustotou energie vlny. Všimněte si, že fyzikální rozměr hustoty energie je stejný jako rozměr tlaku.

(c) Střední intenzita slunečního záření dopadajícího na Zemi, resp. na svrchní vrstvy atmosféry, má hodnotu 1 350 W/m^2 . Jaká je časová střední celková hustota energie slunečního záření? Objekt na oběžné dráze okolo Země zcela pohlcuje sluneční záření. Jaký radiační tlak pociťuje?

P 13.14.7: Energie elektromagnetických vln

(a) Jestliže elektrické pole elektromagnetické vlny má efektivní intenzitu $3{,}0 \times 10^{-2}$ V/m, kolik energie je přeneseno plochou 1,0 cm^2 za jednu hodinu?

(b) Intenzita slunečního záření dopadajícího na svrchní vrstvy atmosféry Země je přibližně 1 350 W/m^2. S využitím této informace odhadněte energii slunečního záření obsaženou v 1 m^3 objemu v blízkosti povrchu Země.

P 13.14.8: Vlnová rovnice

Uvažujte rovinnou elektromagnetickou vlnu s elektrickými a magnetickými poli danými vztahy

$$\mathbf{E}(x,t) = E_z(x,t)\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{B}(x,t) = B_y(x,t)\hat{\mathbf{j}} .$$

Užitím stejné argumentace jako v 13.4, ukažte, že pole splňuje následující relace:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} .$$

P 13.14.9: Elektromagnetická rovinná vlna

Elektromagnetická rovinná vlna, která se šíří ve vakuu, má magnetické pole

$$\mathbf{B} = B_0 f(ax+bt)\hat{\mathbf{j}}; \qquad f(u) = \begin{cases} 1 & 0 < u < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} .$$

Vlna se sráží s nekonečnou dielektrickou stěnou v $x = 0$ s takovou tloušťkou, že jedna polovina energie vlny je odrážena a druhá polovina prochází a vystupuje na druhé straně stěny. Vektor $\hat{\mathbf{k}}$ směřuje ven ze stěny.

(a) Jaké musí být podmínky mezi *a* a *b* aby vlna splňovala Maxwellovy rovnice?

(b) Jaká je velikost a směr pole **E** příchozí vlny?

(c) Jaká je velikost a směr toku energie (výkon na jednotku plochy) přenášené dopadající vlnou vyjádřené pomocí B_0 a univerzálních konstant?

(d) Jaký je tlak (síla na jednotku plochy) jakým dopadající vlna působí na stěnu?

P 13.14.10: Sinusová elektromagnetická vlna

Elektromagnetická rovinná vlna má elektrické pole dané

$$\mathbf{E} = (300\ \text{V/m})\cos\left(\frac{2\pi}{3}x - 2\pi \times 10^6 t\right)\hat{\mathbf{k}} ,$$

kde *x* a *t* jsou v jednotkách SI a $\hat{\mathbf{k}}$ je jednotkový vektor ve směru +*z*. Vlna se šíří skrze ferit, feromagnetický izolátor, který má relativní magnetickou permeabilitu $\kappa_\text{m} = 1\,000$ a dielektrickou konstantu $\kappa = 10$.

(a) Jakým směrem se vlna šíří?

(b) Jaká je vlnová délka vlny (v metrech)?

(c) Jaká je frekvence vlny (v Hz)?

(d) Jaká je rychlost vlny (v m/s)?

(e) Napište výraz pro příslušnou magnetickou vlnu. Vyjděte z Maxwellových rovnic. Uveďte směr vektoru **B** pomocí jednotkového vektoru s + nebo –, a najděte numerickou hodnotu amplitudy v jednotkách tesla.

(f) Vlna vychází z prostředí, skrze které prošla a pokračuje do vakua. Jaká bude nová vlnová délka vlny (v metrech)?