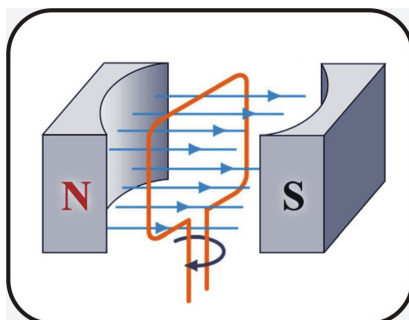


ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

X. Faradayův indukční zákon



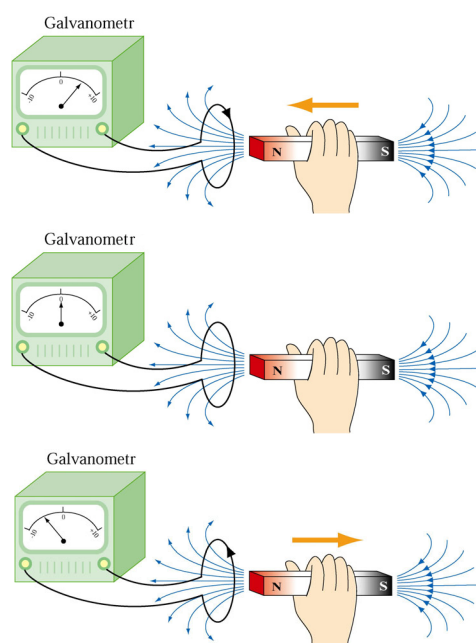
Obsah

10	FARADAYŮV INDUKČNÍ ZÁKON	2
10.1	FARADAYŮV INDUKČNÍ ZÁKON	2
10.1.1	MAGNETICKÝ TOK	2
10.1.2	LENZŮV ZÁKON	4
10.2	ELEKTROMOTORICKÉ NAPĚTÍ ZPŮSOBENÉ POHYBEM	6
10.3	INDUKOVANÉ ELEKTRICKÉ POLE	8
10.4	DYNAMO	10
10.4	VÍŘIVÉ PROUDY	11
10.6	SHRNUTÍ	12
10.7	DODATEK: INDUKOVANÉ ELEKTROMOTORICKÉ NAPĚTÍ A VZTAŽNÁ SOUSTAVA	13
10.8	ALGORITMY ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ, FARADAYŮV A LENZŮV ZÁKON	14
10.9	ŘEŠENÉ ÚLOHY	14
10.10	TÉMATICKÉ OTÁZKY	20
10.11	NEŘEŠENÉ ÚLOHY	21

10 Faradayův indukční zákon

10.1 Faradayův indukční zákon

Elektrická a magnetická pole, která jsme zatím popisovaly, byla tvořena stacionárními náboji v případě pole elektrického a pohybujícími se náboji (proudy) v případě pole magnetického. Pokud však necháme působit elektrické pole na vodič, náboje se začnou pohybovat a ve svém okolí vytvoří magnetické pole. V roce 1831 Michael Faraday zjistil, že elektrické pole může být generováno magnetickým polem, které se mění v čase. Tento jev je označován jako *elektromagnetická indukce*. Na obrázku 10.1.1 je zachycen jeden z Faradayových experimentů.



Obr. 10.1.1: Elektromagnetická indukce.

Faraday zjistil, že dokud je magnet vzhledem ke smyčce v klidu, nenaměří na ní žádný proud. Pokud se však magnet začne vůči smyčce pohybovat, začne se indukovat proud. A to tak, že pokud se magnet přibližuje, indukuje se proud opačné polarity, než když se magnet od cívky vzdaluje.

Faradayův experiment ukazuje, že v smyčce je indukován elektrický proud, pokud se v jejím okolí mění magnetické pole. Smyčka se tak chová, jakoby byla připojena ke zdroji elektromotorického napětí. Experimentálně se pak zjistilo, že indukované napětí je závislé na rychlosti změny magnetického toku skrz smyčku.

10.1.1 Magnetický tok

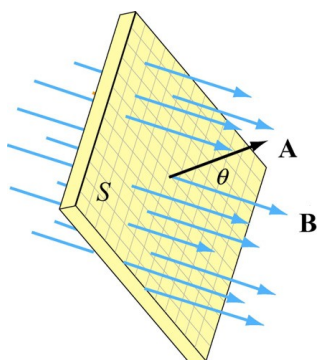
Uvažujme homogenní magnetické pole, procházející plochou S , jak je znázorněno na obrázku 10.1.2. Zavedme vektorový element plochy $\mathbf{A} = A\mathbf{n}$, kde A je obsah plochy a $\mathbf{n}$ je jednotkový normálový vektor. Magnetický tok danou plochou je pak dán vztahem

$$\phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = BA \cos \theta, \quad (10.1.1)$$

kde θ je úhel mezi vektory $\mathbf{B}$ a $\mathbf{n}$. V případě nehomogenního pole je magnetický tok ϕ_B dán vztahem

$$\phi_B = \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{A} . \quad (10.1.2)$$

SI jednotkou magnetického toku je Weber (Wb); $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2$



Obr. 10.1.2: Magnetický tok plochou.

Faradayův indukční zákon pak zní:

Indukované elektromotorické napětí ε na smyčce je přímo úměrné záporně vzaté změně magnetického toku

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} . \quad (10.1.3))$$

Pro cívku, která je složena z N závitů je indukované napětí N -krát vyšší, tedy

$$\varepsilon = -N \frac{d\phi_B}{dt} . \quad (10.1.4)$$

Pokud dosadíme do rovnice (10.1.3) rovnici (10.1.1), pro homogenní magnetické pole $\mathbf{B}$ dostaneme

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(BA\cos\theta) = -\left(\frac{dB}{dt}\right)A\cos\theta - B\left(\frac{dA}{dt}\right)\cos\theta + BA\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) . \quad (10.1.5)$$

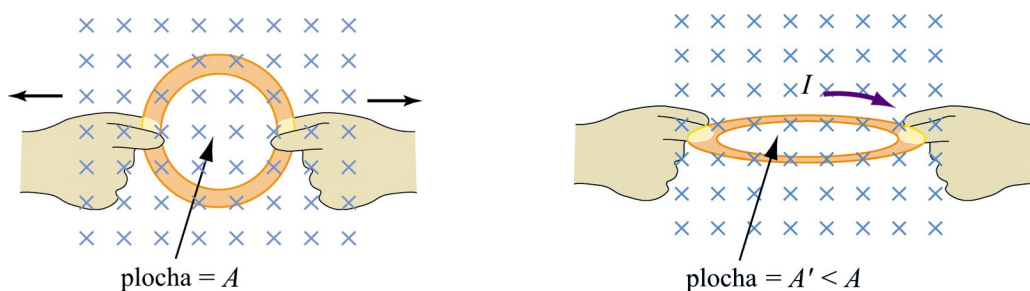
Tedy elektromotorické napětí může být indukováno následujícími způsoby:

1. změnou velikosti vektoru $\mathbf{B}$ v čase (viz Obr. 10.1.3).



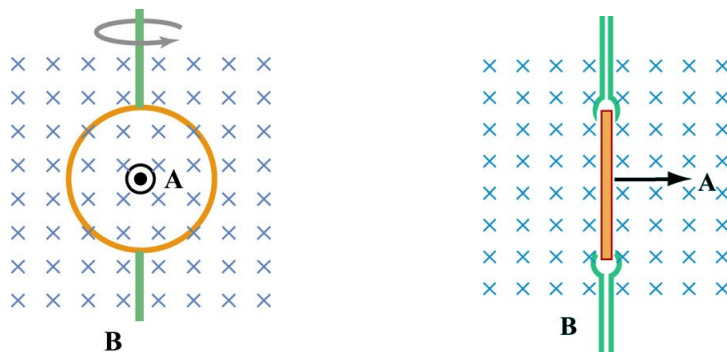
Obr. 10.1.3: Indukce elektromotorického napětí změnou velikosti $\mathbf{B}$.

- změnou velikosti vektoru $\mathbf{A}$, tedy například zvětšováním a zmenšováním plochy A (viz Obr. 10.1.4).



Obr. 10.1.4: Indukce elektromotorického napětí změnou plochy A .

- změnou úhlu mezi vektory $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ v čase (viz Obr. 10.1.5).



Obr. 10.1.5: Indukce elektromotorického napětí měnícím se úhlem mezi vektory $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$.

10.1.2 Lenzův zákon

Směr indukovaného proudu je dán Lenzovým zákonem:

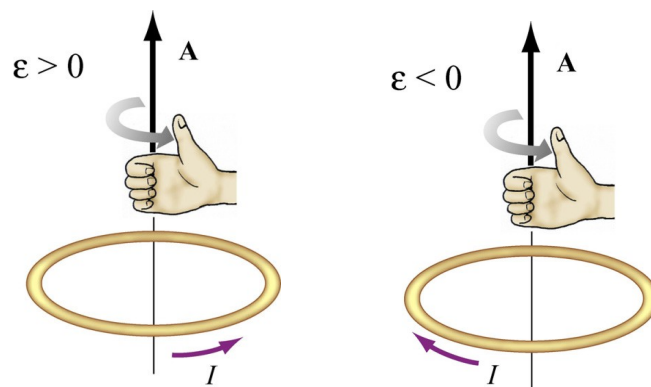
Změna toku magnetického pole generuje elektrický proud, jehož pole vytváří změnu toku opačného směru (indukované pole působí proti změně, která ho vyvolala).

Pro představu, jak určit směr proudu dle Lenzova zákona, se můžete řídit následujícími kroky:

- Definujeme kladný směr vektoru plochy $\mathbf{A}$.
- Za předpokladu, že $\mathbf{B}$ je homogenní, spočítáme skalární součin $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$. Tím zjistíme znaménko magnetického toku ϕ_B .
- Derivováním spočítáme změnu magnetického toku $d\phi_B/dt$, nastanou tři možnosti

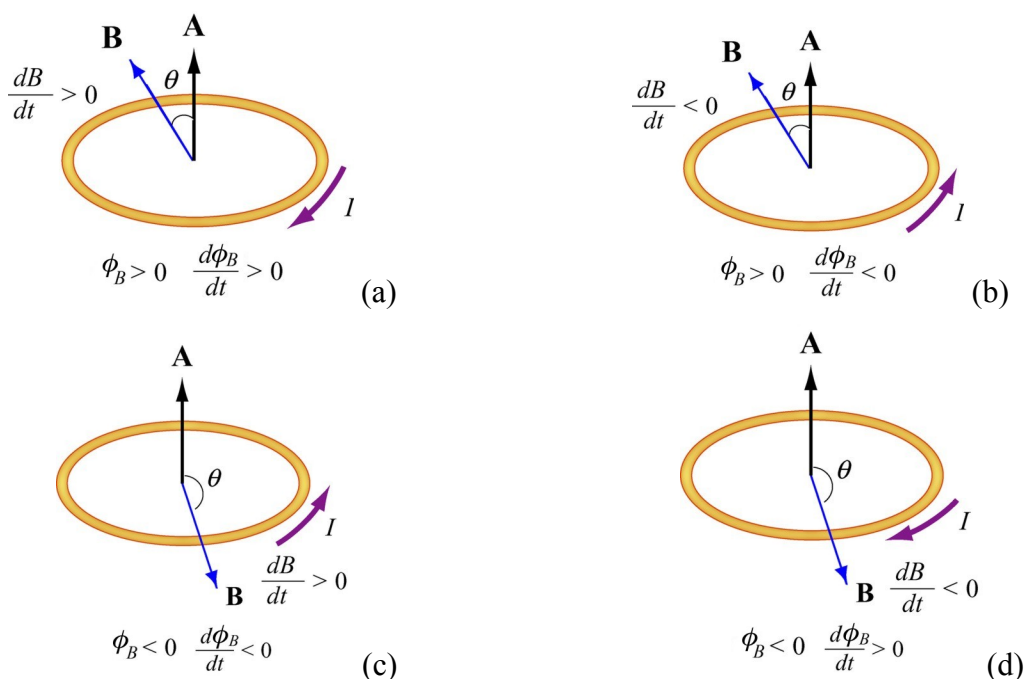
$$\frac{d\phi_B}{dt} : \begin{cases} > 0 & \Rightarrow & \text{indukované } \varepsilon < 0 \\ < 0 & \Rightarrow & \text{indukované } \varepsilon > 0 \\ = 0 & \Rightarrow & \text{indukované } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

- Směr indukovaného proudu určíme následujícím pravidlem pravé ruky: Pokud palec míří ve směru plochy $\mathbf{A}$ a elektromotorické napětí je kladné, prsty ukazují ve směru proudu. V případě že $\varepsilon < 0$, proud teče opačným směrem, než míří prsty, jak je ukázáno na obrázku 10.1.6.



Obr. 10.1.6: Určování směru indukovaného proudu pravidlem pravé ruky.

Na obrázku 10.1.7 ukazujeme všechny 4 možnosti, které mohou nastat při určování směru proudu I pomocí Lenzova zákona.



Obr. 10.1.7: Určování směru proudu pomocí Lenzova zákona.

Jednotlivé situace jsou shrnuty následující znaménkovou konvencí:

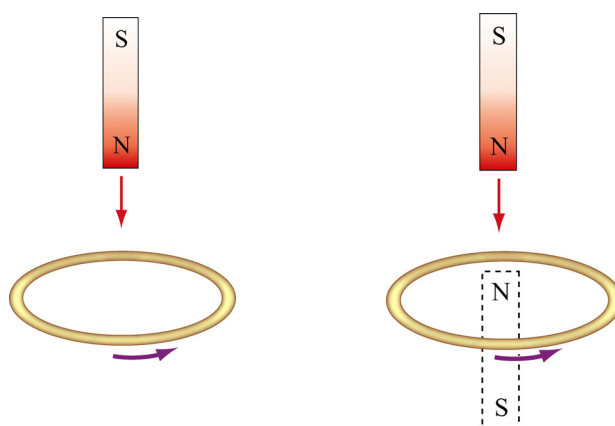
ϕ_B	$d\phi_B/dt$	ε	I
+	+	−	−
	−	+	+
−	+	−	−
	−	+	+

Kladné znaménko proudu I znamená, že proud teče proti směru hodinových ručiček, záporné znaménko znamená opak, tedy proud teče ve směru chodu hodinových ručiček.

Lenzův zákon můžeme také demonstrovat na příkladu, kdy k cívce svrchu budeme přibližovat magnet severním pólem směrem k cívce, jak je ukázáno na obrázku 10.1.8 nalevo. Vektor magnetické indukce tedy míří dolů, vektor plochy míří vzhůru, magnetický tok je záporný $\phi_B = -BA < 0$, kde A je plocha smyčky. Když budeme magnet ke smyčce přibližovat, vektor magnetické indukce se bude zvětšovat ($dB/dt > 0$) a bude tak vznikat větší magnetický tok

smyčkou. Proto $d\phi_B/dt = -A(dB/dt) < 0$ a indukované elektromotorické napětí je kladné, $\varepsilon > 0$ a proud I bude téci proti směru hodinových ručiček. Indukovaný proud pak vytváří *kladný* tok magnetického pole a snaží se vyrovnat změnu. Popisovaná situace odpovídá obrázku 10.1.7(c).

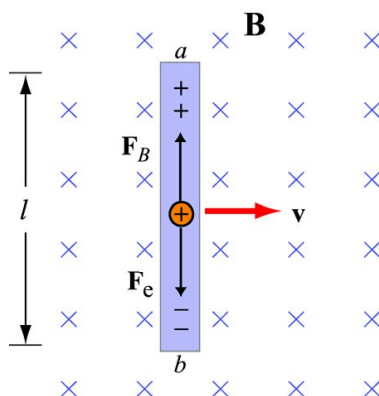
Směr indukovaného proudu můžeme také určit z pohledu magnetické síly. Podle Lenzova zákona se snaží indukovaný proud vyrovnávat změnu magnetického toku. Tedy, jak se magnet přibližuje k cívce, je brzděn indukovaným proudem. Cívku si můžeme představit jako tyčový magnet, který má sever směrem vzhůru, takže dojde k vzájemnému odpuzování. Použitím pravidla pravé ruky zjistíme, že směr indukovaného proudu musí být proti směru hodinových ručiček, jak bylo ukázáno výše. Na obrázku 10.1.8 napravo je znázorněn tento druhý přístup.



Obr. 10.1.8: *Nalevo* – tyčový magnet se pohybuje směrem k cívce. *Napravo* – určení směru indukovaného proudu ze vzájemného působení cívky a magnetu.

10.2 Elektromotorické napětí způsobené pohybem

Uvažujme vodivou tyčku délky l pohybující se homogenním magnetickým polem, které je orientováno směrem do nárýsny (viz Obr. 10.2.1). Na elektricky nabitě částice s nábojem $q > 0$ působí síla vyvolaná magnetickým polem $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, která působí směrem vzhůru. Záporně nabitě částice se tak hromadí ve spodní části.



Obr 10.2.1: Nabitá tyčka pohybující se homogenním magnetickým polem.

Takovéto rozdělení náboje vede ke vzrůstu elektrického pole $\mathbf{E}$ v tyčce, které je způsobeno elektrickou silou $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$, která míří směrem dolů. V rovnovážném stavu, kdy se tyto síly vyrovnají, musí proto platit $qvB = qE$, nebo $E = vB$. Mezi oběma konci tyčky pak vzniká rozdíl potenciálů daný vztahem

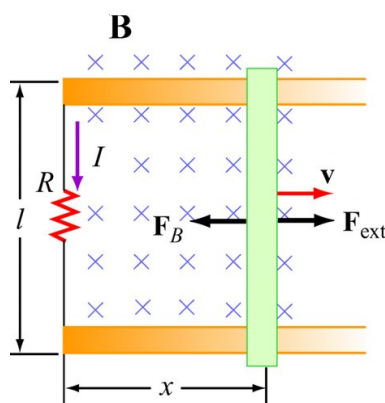
$$V_{ab} = V_a - V_b = \varepsilon = El = Blv. \quad (10.2.1)$$

Protože napětí ε vzniká pohybem vodiče, bývá tento potenciálový rozdíl označován jako elektromotorické napětí indukované pohybem. Obecně, napětí indukované na pohybující uzavřené smyčce můžeme napsat jako

$$\varepsilon = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}, \quad (10.2.2)$$

kde $d\mathbf{s}$ je diferenciální délkový element.

Nyní předpokládejme, že se vodivá tyčka pohybuje v oblasti homogenního magnetického pole $\mathbf{B} = -B \hat{\mathbf{k}}$ (mířící do nárysny), kde bez tření klouže po dvou vodivých drahách, které jsou od sebe vzdáleny l a jsou spojeny rezistorem o odporu R , jak je znázorněno na obrázku 10.2.2.



Obr 10.2.2: Vodivá tyčka, klouzající po vodivých drahách.

Nechť vnější síla $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ působí na vodič tak, aby se pohyboval konstantní rychlostí $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{i}}$. Tok magnetického pole uzavřenou smyčkou tvořenou rezistorem, vodivou drahou a pohybující se tyčkou je dán vztahem

$$\phi_B = BA = Blx. \quad (10.2.3)$$

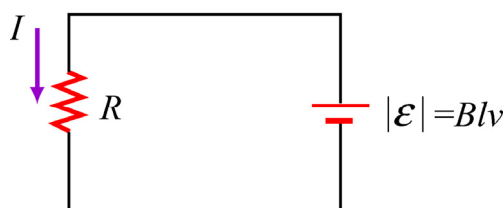
Z Faradayova zákona je indukované napětí dáno vztahem

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv, \quad (10.2.4)$$

kde výraz $dx/dt = v$ jednoduše vyjadřuje rychlost tyčky. Odpovídající proud, který byl indukován je dán vztahem

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R} \quad (10.2.5)$$

a jeho směr z Lenzova zákona míří proti chodu hodinových ručiček. Ekvivalentní zapojení je na obrázku 10.2.3:



Obr. 10.2.3: Zapojení odpovídající pohybující se tyčce.

Síla, působící na tyčku vyvolaná magnetickým pole je dána vztahem

$$\mathbf{F}_B = I(l \hat{\mathbf{j}}) \times (-B \hat{\mathbf{k}}) = -IlB \hat{\mathbf{i}} = -\left(\frac{B^2 l^2 v}{R}\right) \hat{\mathbf{i}} \quad (10.2.6)$$

a má opačný směr, než je rychlost pohybu tyčky $\mathbf{v}$. Aby se tyčka pohybovala rovnoměrně, přímočaře, musí být výslednice sil na ni působící nulová. To znamená, že na tyčku musí působit vnější síla

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}_B = +\left(\frac{B^2 l^2 v}{R}\right) \hat{\mathbf{i}}. \quad (10.2.7)$$

Výkon vytvořený silou $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ je roven Jouleovu teplu (výkonu) disipovanému na rezistoru

$$P = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = F_{\text{ext}} v = \left(\frac{B^2 l^2 v}{R}\right) v = \frac{(BLv)^2}{R} = \frac{\varepsilon^2}{R} = I^2 R, \quad (10.2.8)$$

což je důsledkem zákona zachování energie.

Z analýzy uvedené výše plyne, že pokud se má tyčka pohybovat, je nutné na ni působit vnější silou $\mathbf{F}_{\text{ext}}$. Co by se se systémem stalo, kdyby v čase $t = 0$ přestal působit zdroj vnější síly a tyčka by se pohybovala rychlostí v_0 ? V tomto případě by se tyčka zastavila silou magnetického pole, působící doleva. Z druhého Newtonova zákona plyne

$$F_B = -\frac{B^2 l^2 v}{R} = ma = m \frac{dv}{dt}, \quad (10.2.9)$$

což můžeme přepsat jako

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} dt = -\frac{dt}{\tau}, \quad (10.2.10)$$

kde $\tau = mr/B^2 l^2$. Integrací získáme

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}. \quad (10.2.11)$$

Za předpokladu, že na tyčku nepůsobí žádná síla, se bude rychlost exponenciálně snižovat. Principiálně se tyčka nikdy nezastaví, můžete si však ověřit, že dráha, kterou urazí je konečná.

10.3 Indukované elektrické pole

V kapitole 3 jsme si ukázali, že potenciál v elektrickém poli $\mathbf{E}$ mezi body A a B můžeme zapsat jako

$$\Delta V = V_A - V_B = -\int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{s}. \quad (10.3.1)$$

Elektrostatické pole je konzervativní a tak je výše napsaný integrál nezávislý na cestě, přes kterou integrujeme, z čehož plyne, že $\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$.

Faradayův zákon ukazuje, že se změnou magnetického toku se začnou indukovat proudy. Co však pohybuje nabitými částicemi? Je to indukované elektromotorické napětí, což je vlastně práce vztažená na jednotkový náboj. Magnetické pole, jak jsme si ukázali v kapitole 8,

nemůže konat žádnou práci, práce spojená s přesunem nábojů musí proto být způsobena elektrickým polem a toto pole není konzervativní – křivkový integrál není roven nule. Z toho vyvozujeme, že s indukovaným elektromotorickým napětím je spojeno nekonzervativní elektrické pole $\mathbf{E}_{nc}$

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E}_{nc} d\mathbf{s}. \quad (10.3.2)$$

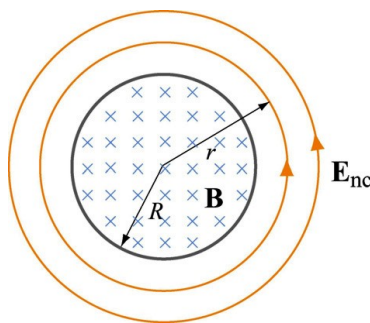
Z Faradayova zákona pak dostaneme

$$\oint \mathbf{E}_{nc} d\mathbf{s} = -\frac{d\phi_B}{dt}. \quad (10.3.3)$$

Z uvedeného výrazu plyne, že se měnícím se magnetickým tokem se indukuje nekonzervativní elektrické pole, které se mění s časem. Je důležité rozlišovat mezi konzervativním elektrickým polem, které se tvoří kolem nabitých částic, a nekonzervativním indukovaným elektrickým polem.

Jako příklad uveďme homogenní magnetické pole, jehož vektor magnetické indukce míří *do* nárysny a které je omezeno na kruhovou plochu o poloměru R , viz Obr. 10.3.1. Předpokládejme, že velikost $\mathbf{B}$ se zvyšuje s časem, tedy $dB/dt > 0$. Pokusme se spočítat nekonzervativní elektrické pole.

Protože je magnetické pole uzavřeno v kruhové oblasti, zvolme ze symetrie problému jako integrační cestu kružnici o poloměru r . Velikost vektoru elektrického pole $\mathbf{E}_{nc}$ bude po celé délce kružnice stejná. Z Lenzova zákona musí být směr $\mathbf{E}_{nc}$ takový, aby pole kolem indukovaného proudu vyrovnávalo časovou změnu magnetického toku. Pokud jednotkový vektor kolmý na plochu míří *před* nárysnu, magnetický tok je záporný, směřuje dovnitř. Pokud $dB/dt > 0$, dovnitř směřující tok se zvyšuje. Aby indukovaný proud působil proti této změně, musí indukovaný proud téci proti směru hodinových ručiček. Směr pole $\mathbf{E}_{nc}$ je znázorněn na obrázku 10.3.1.



Obr. 10.3.1: Elektrické pole indukované změnou magnetického toku.

Nyní můžeme spočítat i velikost vektoru $\mathbf{E}_{nc}$. V oblasti $r < R$ je změna magnetického toku

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = -\frac{d}{dt}(-BA) = \left(\frac{dB}{dt}\right)\pi r^2. \quad (10.3.4)$$

Použitím rovnice (10.3.3) dostaneme

$$\oint \mathbf{E}_{nc} d\mathbf{s} = E_{nc}(2\pi r) = -\frac{d\phi_B}{dt} = \left(\frac{dB}{dt}\right)\pi r^2, \quad (10.3.5)$$

z čehož plyne

$$E_{\text{nc}} = \frac{r}{2} \left(\frac{dB}{dt} \right). \quad (10.3.6)$$

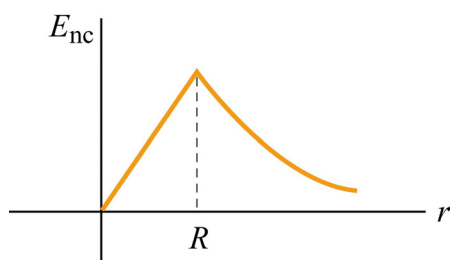
Obdobně pro $r > R$ dostáváme

$$E_{\text{nc}}(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \left(\frac{dB}{dt} \right) \pi R^2, \quad (10.3.7)$$

a tedy

$$E_{\text{nc}} = \frac{R^2}{2r} \left(\frac{dB}{dt} \right). \quad (10.3.8)$$

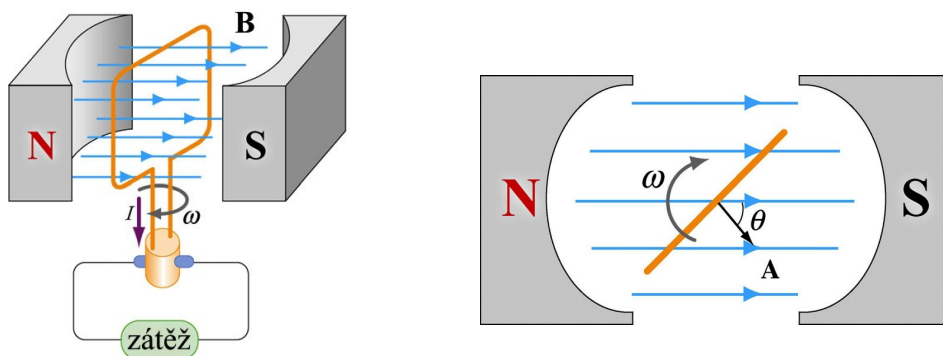
Velikost vektoru E_{nc} můžeme vynést do grafu v závislosti na r , jako je na obrázku 10.3.2.



Obr.. 10.3.2: Indukované elektrické pole jako funkce r .

10.4 Dynamo

Jednou z nejdůležitějších aplikací Faradayova zákona jsou dynamy a elektromotory. Dynamo (generátor) mění mechanickou energii na elektrickou, elektromotor pracuje na opačném principu, převádí tedy elektrickou energii na mechanickou.



Obr. 10.4.1: *Nalevo* – jednoduché dynamo. *Napravo* – rotující myčka shora.

Na obrázku 10.4.1 vpravo je zobrazeno jednoduché dynamo. Tvoří jej cívka o N závitů rotující v magnetickém poli, pro jednoduchost předpokládejme homogenním. Magnetický tok cívkou se mění s časem a v cívce je indukováno elektromotorické napětí. Podle obrázku 10.4.1 napravo můžeme magnetický tok smyčkou zapsat jako

$$\phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = BA \cos \theta = BA \cos \omega t, \quad (10.4.1)$$

změna magnetického toku je

$$\frac{d\phi_B}{dt} = -BA\omega \sin \omega t. \quad (10.4.2)$$

Cívka je složena z N závitů, celkové indukované elektromotorické napětí na obou stranách cívky je

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = NBA\omega \sin \omega t, \quad (10.4.3)$$

Pokud dynamo připojíme k zátěži o odporu R , bude obvodem téct proud I , který je dán vztahem

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{NBA\omega}{R} \sin \omega t. \quad (10.4.4)$$

Proud je střídavý, mění znaménko a jeho amplituda je $I_0 = NBA\omega/R$. Výkon dodaný do obvodu je

$$P = I\varepsilon = \frac{(NBA\omega)^2}{R} \sin^2 \omega t. \quad (10.4.5)$$

Na druhé straně moment síly působící na cívku je

$$\tau = \mu B \sin \theta = \mu B \sin \omega t \quad (10.4.6)$$

a mechanický výkon potřebný k otáčení cívkou lze zapsat jako

$$P_m = \tau\omega = \mu B\omega \sin \omega t. \quad (10.4.7)$$

Dipólový moment pro cívku o N závitěch je

$$\mu = NIA = \frac{N^2 A^2 B\omega}{R} \sin \omega t \quad (10.4.8)$$

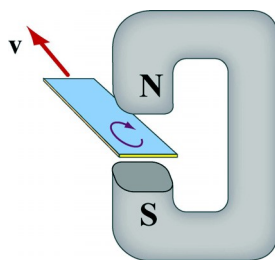
a mechanický výkon tak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$P_m = \left(\frac{N^2 A^2 B\omega}{R} \sin \omega t \right) B\omega \sin \omega t = \frac{(NBA\omega)^2}{R} \sin^2 \omega t. \quad (10.4.9)$$

Mechanický i elektrický výkon je tedy shodný.

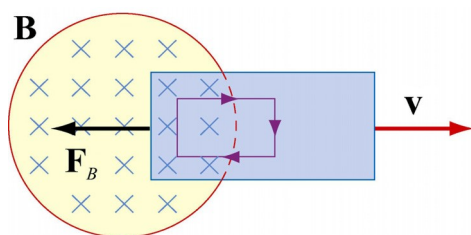
10.4 Vířivé proudy

Ukázali jsme si, že pokud vodivou smyčkou pohybujeme v magnetickém poli, indukuje se proud jako důsledek změny magnetického toku. Proud však můžeme indukovat také, vezmeme-li místo smyčky velký vodič, jako je znázorněno na obrázku 10.5.1. Indukované proudy ve vodiči víří, proto jsou označovány jako vířivé proudy.



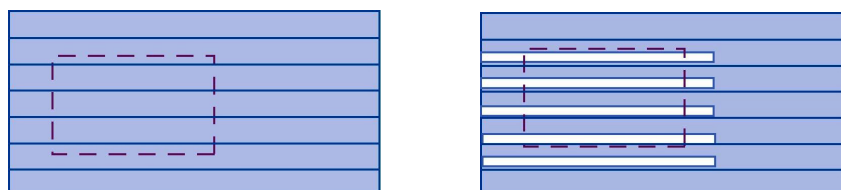
Obr. 10.5.1: Vířivý proud znázorněný na vodiči, který se pohybuje v magnetickém poli.

Indukované vířivé proudy generují magnetickou sílu, která působí proti pohybu a ztěžuje pohybování vodičem v magnetickém poli (viz Obr. 10.5.2).



Obr. 10.5.2: Magnetická síla způsobená vířivými proudy, která působí proti pohybu vodivé desky.

Protože vodič má nenulový vnitřní odpor R , Jouleovo teplo způsobuje ztrátu výkonu ve výši $P = \varepsilon^2 / R$. Ztráty ve vodiči lze redukovat vyšším odporem R . Odpor vodiče můžeme zvětšit rozřezáním na tenké proužky a slepením nevodivým lepidlem (viz Obr. 10.5.3 nalevo), případně nařezáním tenkých drážek do vodiče a přerušením vodivých drah (viz Obr. 10.5.3 napravo).



Obr. 10.5.3: Vířivé proudy můžeme redukovat rozřezáním na tenké plátky a nevodivým spojením (nalevo) nebo zářezy, které přerušují vodivé dráhy (napravo).

Vířivé proudy mají také některé důležité aplikace. Mohou být například využity pro tlumení nežádoucích mechanických oscilací. Vířivé proudy jsou také využívány v brzdných systémech nákladních automobilů.

10.6 Shrnutí

- **Magnetický tok** plochou S je definován vztahem $\phi_B = \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{A}$.
- **Faradayův indukční zákon** říká, že indukované elektromotorické napětí ε na cívce o N závitů je přímo úměrné záporně vzaté časové změně magnetického toku $\varepsilon = -Nd\phi_B/dt$.
- Směr indukovaného proudu je určen **Lenzovým** zákonem: indukovaný proud vytváří magnetické pole, které se snaží působit proti změnám magnetického toku generovaného tímto proudem.
- **Elektromotorické napětí způsobené pohybem** ε je indukováno, pokud se vodič pohybuje v magnetickém poli. Obecně jej lze vyjádřit jako vztahem $\varepsilon = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{s}$. V případě vodivé tyče o délce l pohybující se rychlostí $\mathbf{v}$ v magnetickém poli, které míří kolmo na směr pohybu a vlastní tyč je indukované elektromotorické napětí $\varepsilon = -Bvl$.
- Indukované elektromotorické napětí je spojeno s **nekonzervativním elektrickým polem** $\mathbf{E}_{nc}$, $\varepsilon = \oint \mathbf{E}_{nc} d\mathbf{s} = -d\phi_B/dt$.

10.7 Dodatek: Indukované elektromotorické napětí a vztažná soustava

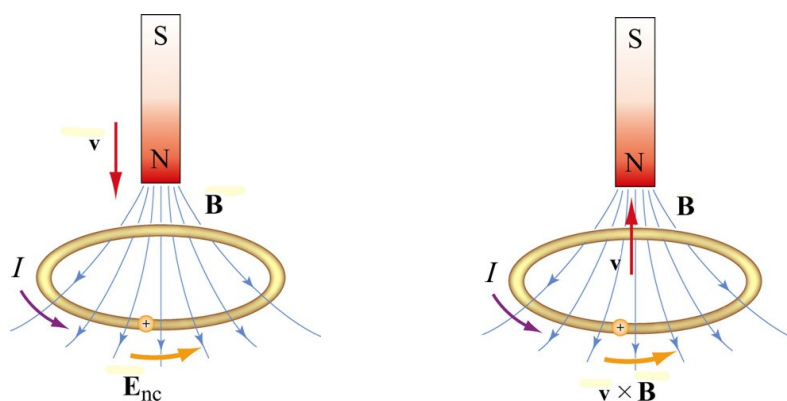
V kapitole 10.2 jsme ukázali, že indukované elektromotorické napětí způsobené pohybem je vyjádřeno vztahem

$$\varepsilon = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s},$$

kde $\mathbf{v}$ je rychlost délkového elementu $d\mathbf{s}$ *pohybujícího* se vodiče. Rovněž jsme v kapitole 10.4 ukázali, že indukované elektromotorické napětí na *stacionárním* vodiči můžeme napsat jako křivkový integrál nekonzervativního elektrického pole

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E}_{\text{nc}} d\mathbf{s}.$$

Z Galileova principu relativity však víme, že to, zda se objekt pohybuje, či nikoliv, závisí na použité vztažné soustavě. Například můžeme zkoumat situaci, kdy se tyčový magnet blíží k vodivé smyčce. Pozorovatel O ve vztažné soustavě smyčky vidí přibližující se tyčový magnet, který se pohybuje k cívce. Elektrické pole $\mathbf{E}_{\text{nc}}$ indukuje na smyčce proud a na náboj v cívce působí síla daná vztahem $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}_{\text{nc}}$. Náboj je vzhledem k pozorovateli O v klidu a nepůsobí na něj žádná síla způsobená magnetickým polem. Na druhé straně se na systém můžeme podívat ze vztažné soustavy pozorovatele O' , která je spojena s přibližujícím se tyčovým magnetem. V této soustavě je magnet v klidu a smyčka se blíží k magnetu rychlostí $\mathbf{v}$. V této soustavě se náboj q pohybuje rychlostí $\mathbf{v}$ a působí tedy na něj magnetická síla $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.



Obr. 10.7.1: Indukovaný proud na smyčce ve dvou různých vztažných soustavách. *Nalevo* se magnet přibližuje k cívce, *napravo* se cívka přibližuje k magnetu.

Indukovaný proud by neměl záležet na volbě vztažné soustavy a síla působící na náboj musí být stejná, takže $\mathbf{F}_E = \mathbf{F}_B$, z čehož plyne

$$\mathbf{E}_{\text{nc}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (10.7.1)$$

Obecně v důsledku relativity může být jev související s elektrickým polem ve vztažné soustavě O spojen s jevem magnetickým v jiné vztažné soustavě O' , která se vůči vztažné soustavě O pohybuje rychlostí $\mathbf{v}$.

10.8 Algoritmy řešení problémů, Faradayův a Lenzův zákon

V této kapitole jsme si ukázali, že podle Faradayova indukčního zákona indukuje změna toku magnetického pole elektromotorické napětí

$$\varepsilon = -N \frac{d\phi_B}{dt}.$$

Vodičem, který tvoří uzavřenou smyčku, teče proud $I = |\varepsilon|/R$, kde R je odpor smyčky. Následující algoritmus vede k spočítání velikosti a směru proudu I :

1. Pro uzavřenou smyčku o obsahu A definujeme vektor $\mathbf{A}$. Pro jednoduchost jeho směr zvolíme stejně, jako při použití pravidla pravé ruky – tj. ve směru palce. Spočítáme magnetický tok plochou A s využitím

$$\phi_B = \begin{cases} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, & \mathbf{B} \text{ je homogenní,} \\ \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, & \mathbf{B} \text{ není homogenní.} \end{cases}$$

Určíme znaménko ϕ_B .

2. Spočítáme změnu magnetického toku $d\phi_B/dt$, ta může nastat třemi způsoby:
 - (a) měnícím se magnetickým polem $dB/dt \neq 0$,
 - (b) měnící se velikostí plochy, pokud se vodič pohybuje $dA/dt \neq 0$, nebo
 - (c) měnící se orientací smyčky vzhledem k magnetickému poli $d\theta/dt \neq 0$.

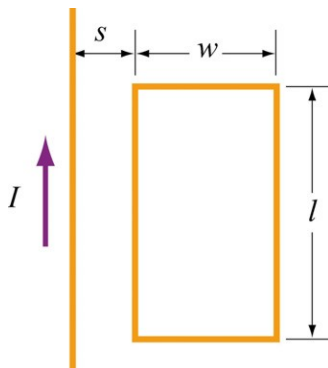
Určíme znaménko $d\phi_B/dt$.

3. Polarita indukovaného elektromotorického napětí ε je opačná, než je znaménko výrazu $d\phi_B/dt$. Směr indukovaného proudu pak najdeme použitím Lenzova zákona, dle kapitoly 10.1.2.

10.9 Řešené úlohy

P 10.9.1: Obdélníková smyčka v blízkosti drátu

Mějme nekonečně dlouhý vodič, kterým teče proud I . Ve vzdálenosti s od něho je obdélníková smyčka o délce l a šířce w , viz Obr. 10.9.1.



Obr. 10.9.1: Obdélníková smyčka ve vzdálenosti s od vodiče.

- (a) Určete magnetický tok smyčkou, způsobený proudem I .
- (b) Předpokládejte, že proud ve drátu je funkcí času, která je dána předpisem $I(t) = a + bt$, kde a a b jsou kladné konstanty. Jaké je indukované elektromotorické napětí a jaký je směr indukovaného proudu?

Řešení:

- (a) Z Ampérova zákona plyne

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I, \quad (10.9.1)$$

magnetická indukce generovaná proudem ve vodiči ve vzdálenosti r od vodiče je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (10.9.2)$$

Celkový tok magnetického pole ϕ_B obdélníkovou smyčkou dostaneme sečtením všech příspěvků z diferenciálních plošek $dA = l dr$:

$$\phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_s^{s+w} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{s+w}{w}\right). \quad (10.9.3)$$

Jednotkový vektor kolmý na plochu smyčky jsme zvolili směrem *do* nárýsny.

- (b) Z Faradayova zákona můžeme indukované elektromotorické napětí vyjádřit jako

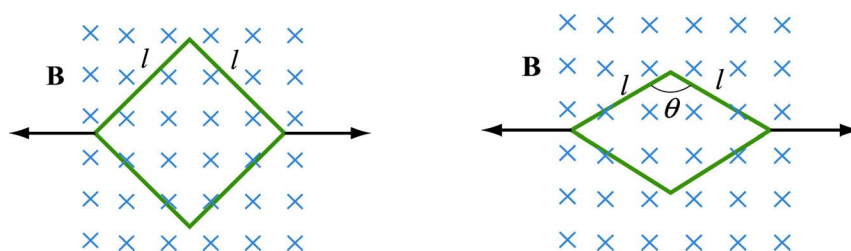
$$\begin{aligned} \varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{s+w}{w}\right) \right] = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{s+w}{w}\right) \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow \\ \varepsilon &= \frac{\mu_0 b l}{2\pi} \ln\left(\frac{s+w}{w}\right), \end{aligned} \quad (10.9.4)$$

kde jsme derivaci proudu označili $dI/dt = b$.

Kolem nekonečně dlouhého, rovného drátu, se vytváří magnetické pole, které je závislé na proudu I . Z Lenzova zákona proud, který teče smyčkou teče proti směru hodinových ručiček, tak aby vzniklé pole mířilo před nárýsnu a vyrovnávalo tak změny toku magnetického pole drátu, které míří za nárýsnu.

P 10.9.2: Smyčka měnící svoji plochu

Čtvercová smyčka o hraně l je umístěna do homogenního magnetického pole, které míří směrem do nárýsny. Na protilehlých vrcholech čtverce začne působit síla a během časového intervalu Δt deformuje čtverec v kosočtverec, jak je vidět na obrázku 10.9.2. Za předpokladu, že celkový odpor smyčky je R , spočítejte průměrný proud, který smyčkou tekl, a jeho směr.



Obr. 10.9.2: Vodivá smyčka, která mění svoji plochu.

Řešení

Z Faradayova zákona získáme

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -B\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right). \quad (10.9.5)$$

Počáteční plocha smyčky je $A_p = l^2$ a plocha výsledného kosočtverce je $A_v = l^2 \sin \theta$ (plochu kosočtverce můžeme jednoduše spočítat, když si uvědomíme, že velikost vektoru, který vznikne vektorovým součinem je plocha rovnoběžníku ohraničeného dvěma vektory $\mathbf{l}_1$ a $\mathbf{l}_2$, tedy $|\mathbf{A}| = A = |\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2| = l_1 l_2 \sin \theta$), průměrná změna plochy je

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A_v - A}{\Delta t} = -\frac{l^2(1 - \sin \theta)}{\Delta t} < 0, \quad (10.9.6)$$

z čehož plyne

$$\varepsilon = \frac{Bl^2(1 - \sin \theta)}{\Delta t} > 0. \quad (10.9.7)$$

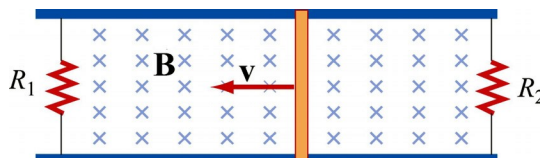
Průměrný indukovaný proud tak je

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bl^2(1 - \sin \theta)}{R\Delta t} > 0. \quad (10.9.8)$$

Protože $(\Delta A / \Delta t) < 0$, tok magnetického pole mířící do nárysny se zmenšuje. Proud proto teče ve směru hodinových ručiček tak, aby kompenzoval zmenšující se magnetický tok.

P 10.9.3: Klouzající tyč

Vodivá tyč délky l klouže po dvou vodivých drahách, viz Obr. 10.9.3.



Obr 10.9.3: Klouzající tyč

Vodivé kolejnice jsou spojeny dvěma rezistory R_1 a R_2 . Celý systém je umístěn v homogenním magnetickém poli, které míří směrem do nárysny. Předpokládejte, že externí síla působí na vodivou tyč tak, aby se pohybovala konstantní rychlostí v . Spočítejte následující veličiny:

- (a) Proud tekoucí oběma rezistory.
- (b) Celkový výkon na rezistorech.
- (c) Sílu, kterou musíme působit na vodič, aby se pohyboval rovnoměrně, přímočaře.

Řešení

(a) Elektromotorické napětí indukované pohybem tyče je

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -Blv. \quad (10.9.9)$$

Proudy na rezistorech spočítáme jako

$$I_1 = \frac{|\varepsilon|}{R_1}, \quad I_2 = \frac{|\varepsilon|}{R_2}. \quad (10.9.10)$$

Protože magnetický tok mířící do nárysny v levé smyčce ubývá, proud I_1 smyčkou teče ve směru hodinových ručiček, aby vzniklý tok pole mířil do nárysny. Na druhé straně, v pravé smyčce, tok magnetického pole vzrůstá, proud tedy bude téci proti směru hodinových ručiček, aby dle Lenzova zákona tuto změnu vyrovnával.

(b) Celkový výkon odevzdaný rezistorům je dán vztahem

$$P_R = I_1 |\varepsilon| + I_2 |\varepsilon| = (I_1 + I_2) |\varepsilon| = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = B^2 l^2 v^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (10.9.11)$$

(c) Celkový proud tekoucí tyčí je součtem jednotlivých proudů $I = I_1 + I_2$. Proto magnetická síla působící na tyč je dána vztahem

$$F_B = I l B = |\varepsilon| l B \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = B^2 l^2 v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (10.9.12)$$

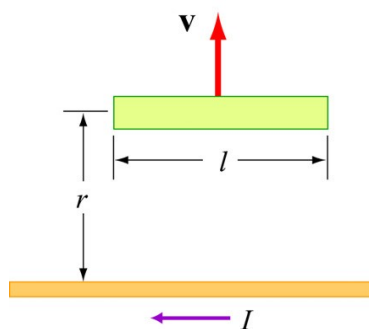
vektor síly míří doprava. Vnější síla působící na tyč musí působit stejnou silou, v opačném směru, tedy $\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}_B$ a míří doleva.

Výkon dodaný touto silou musí být stejný, jako výkon ztracený na rezistorech, jak můžeme snadno ověřit dosazením do následujícího vztahu

$$P_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = F_{\text{ext}} v. \quad (10.9.13)$$

P 10.9.4: Pohybující se tyč

Vodivá tyč délky l se pohybuje konstantní rychlostí v kolmo na nekonečně dlouhý vodič, kterým teče proud I , viz Obr. 10.9.4. Jaké je elektromotorické napětí indukované na koncích tyče?



Obr. 10.9.4: Tyč vzdalující se od vodiče s proudem.

Řešení

Z Faradayova zákona je indukované elektromotorické napětí dáno vztahem

$$|\varepsilon| = Blv, \quad (10.9.14)$$

kde v je rychlost tyče. Magnetická indukce ve vzdálenosti r od nekonečně dlouhého vodiče je dle Ampérova zákona

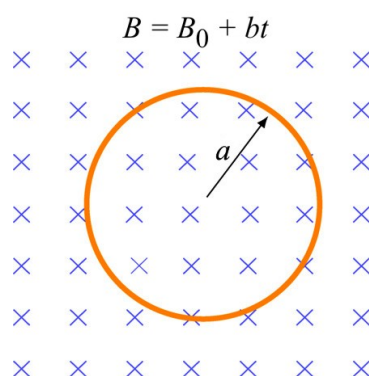
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (10.9.15)$$

Indukované elektromotorické napětí je pak dáno vztahem

$$|\varepsilon| = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) l v. \quad (10.9.16)$$

P 10.9.5: Magnetické pole proměnné v čase

Kruhová smyčka o poloměru a je umístěna do homogenního magnetického pole, rovina smyčky je kolmá na směr magnetické indukce, viz Obr. 10.9.5



Obr. 10.9.5: Kruhová smyčka v proměnlivém magnetickém poli.

Velikost vektoru magnetické indukce se s časem mění podle vztahu $B(t) = B_0 + bt$, kde B_0 i b jsou kladné konstanty.

- Spočítejte magnetický indukční tok v čase $t = 0$.
- Spočítejte indukované elektromotorické napětí na smyčce.
- Jak velký je indukovaný proud, je li odpor smyčky R . Jaký je jeho směr?
- Spočítejte výkon disipovaný na smyčce.

Řešení

- Magnetický tok v čase t je dán vztahem

$$\phi_B = BA = (B_0 + bt)(\pi a^2) = \pi(B_0 + bt)a^2. \quad (10.9.17)$$

jednotkový vektor kolmý na plochu jsme zvolili ve shodné orientaci s vektorem indukce magnetického pole, tedy $\phi_B > 0$. V čase $t = 0$ dostaneme

$$\phi_B(t=0) = \pi B_0 a^2. \quad (10.9.18)$$

- Z Faradayova zákona určíme indukované elektromotorické napětí

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -A \frac{dB}{dt} = -(\pi a^2) \frac{d(B_0 + bt)}{dt} = -\pi b a^2. \quad (10.9.19)$$

- Indukovaný proud je

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\pi b a^2}{R} \quad (10.9.20)$$

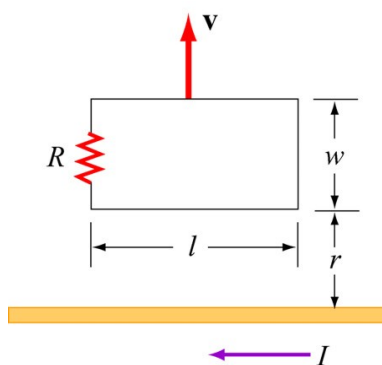
a směr je proti chodu hodinových ručiček dle Lenzova zákona.

(d) Výkon na smyčce o odporu R je dán

$$P = I^2 R = \left(\frac{\pi b a^2}{R} \right)^2 R = \frac{(\pi b a^2)^2}{R}. \quad (10.9.21)$$

P 10.9.6: Magnetické pole proměnné v čase

Obdélníková smyčka délky l a šířky w se vzdaluje konstantní rychlostí v od nekonečně dlouhého přímého vodiče s proudem I , který leží v rovině smyčky, viz Obr. 10.9.6. Celkový odpor smyčky nechť je R . Jaká je velikost proudu, je-li bližší konec smyčky ve vzdálenosti r od drátu?



Obr. 10.9.6: Obdélníková smyčka vzdalující se od nekonečně dlouhého vodiče.

Řešení

Magnetické pole ve vzdálenosti s od nekonečně dlouhého drátu je dáno Ampérovým zákonem

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}. \quad (10.9.22)$$

Tok magnetického pole ϕ_B obdélníkovou smyčkou dostaneme sečtením všech příspěvků z diferenciálních plošek $dA = l ds$:

$$d\phi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} l ds. \quad (10.9.23)$$

Jednotkový vektor kolmý na plochu smyčky jsme zvolili směrem *do* narysny. Celkovou hodnotu magnetického toku dostaneme integrací přes celou smyčku

$$\phi_B = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_r^{r+w} \frac{ds}{s} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \left(\frac{r+w}{w} \right). \quad (10.9.24)$$

Derivováním podle času t získáme

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{s+w}{w} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left(\frac{1}{R+w} - \frac{1}{r} \right) \frac{dr}{dt} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{wv}{r(r+w)}, \end{aligned} \quad (10.9.4)$$

kde $v = dr/dt$. Všimněte si, že indukované elektromotorické napětí můžeme získat také z rovnice (10.2.2):

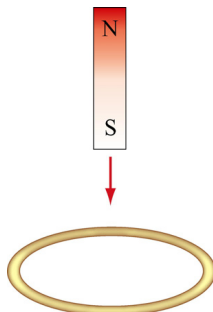
$$\begin{aligned}\varepsilon &= \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = vl[B(r) - B(r+w)] = \\ &= vl \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+w)} \right] = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{vw}{r(r+w)}.\end{aligned}\quad (10.9.26)$$

Indukovaný proud je

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi R} \frac{vw}{r(r+w)}.\quad (10.9.27)$$

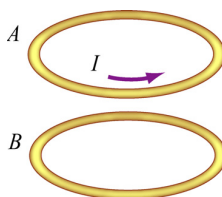
10.10 Tématické otázky

1. Tyčový magnet padá kruhovou smyčkou, viz Obr. 10.10.1.



Obr. 10.10.1: Tyčový magnet padající do cívky.

- a. Kvalitativně popište změnu magnetického toku, když je magnet nad i pod cívkou.
 - b. Nakreslete kvalitativní nástin závislosti indukovaného proudu na čase, zvolte kladný proud pro proud obíhající proti chodu hodinových ručiček při pohledu shora.
2. Mějme dvě kruhové smyčky A a B , jejichž roviny jsou v prostoru rovnoběžné, viz Obr. 10.10.2. Smyčkou A teče proud proti směru chodu hodinových ručiček při pohledu shora.



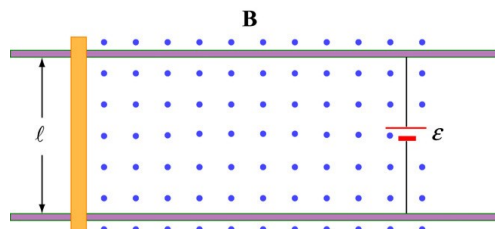
Obr. 10.10.2

- a. Pokud proud ve smyčce A klesá v čase, jaký je směr proudu indukovaného ve smyčce B ? Budou se smyčky přitahovat nebo odpuzovat?
 - b. Pokud proud ve smyčce A bude vzrůstat, jaký je směr proudu indukovaného ve smyčce B ? Budou se smyčky přitahovat nebo odpuzovat?
3. Sférická vodivá skořepina je umístěna do s časem se měnícího magnetického pole. Může být na rovníku indukovaný proud?
 4. Obdélníková smyčka se pohybuje homogenním magnetickým polem, neindukuje se na ní však žádné napětí. Jak je to možné?

10.11 Neřešené úlohy

P 10.11.1: Klouzající tyč

Vodivá tyč o hmotnosti m a odporu R klouže bez tření po dvou vodivých kolejnicích, které jsou ve vzdálenosti l a spojeny baterií o elektromotorickém napětí ε , viz Obr. 10.11.1.



Obr. 10.11.1: Klouzající tyč.

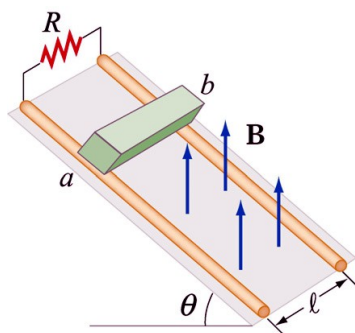
Homogenní magnetické pole $\mathbf{B}$ míří před nárysnu. Tyč je na začátku v klidu. Ukažte, že v čase t je rychlost tyče dána vztahem

$$v = \frac{\varepsilon}{Bl} (1 - e^{-t/\tau}) ,$$

kde $\tau = mR / B^2 l^2$.

P 10.11.2: Klouzající kvádr na nakloněné rovině

Vodivý kvádr o hmotnosti m a odporu R klouže dolů bez tření po dvou vodivých drahách, které svírají úhel θ s horizontální rovinou a jsou od sebe vzdáleny l , viz Obr. 10.11.2. Systém je umístěn do homogenního magnetického pole, které míří zespodu. Kvádr je vypuštěn z klidu a klouže dolů.

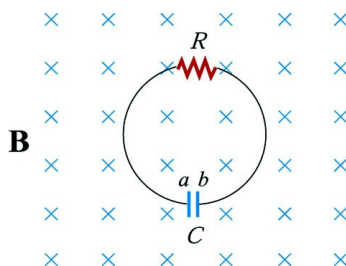


Obr. 10.11.2: Klouzající kvádr na nakloněné rovině.

- Spočítejte indukovaný proud tekoucí kvádrem. Jak je orientovaný (teče z bodu a do b , nebo opačně)?
- Najděte výslednou rychlost v kvádru.
- Spočítejte indukovaný proud v kvádru poté, co dosáhl výsledné rychlosti.
- Spočítejte výkon disipovaný na odporu R poté, co kvádr dosáhl výsledné rychlosti.
- Spočítejte práci, kterou vykonává gravitační pole na kvádru poté, co dosáhl výsledné rychlosti.

P 10.11.3: RC obvod v magnetickém poli

Vezměme kruhovou smyčku ležící v rovině xy , jak je na obrázku 10.11.3. Smyčka je tvořena rezistorem R a kondenzátorem C . Smyčka je umístěna do homogenního magnetického pole, které míří do nárysny, vektor magnetické indukce ubývá dle vztahu $dB/dt = -\alpha$, $\alpha > 0$.

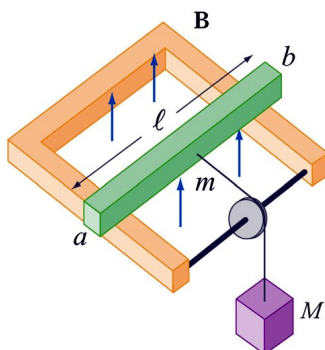


Obr 10.11.3: RC smyčka v homogenním magnetickém poli.

- (a) Spočítejte maximální náboj na kondenzátoru C .
- (b) Na které z desek kondenzátoru a nebo b je vyšší potenciál?

P 10.11.4: Klouzající kvádr

Vodivý kvádr o hmotnosti m a odporu R se může bez tření pohybovat po dvou vodivých kolejnicích, které jsou ve vzdálenosti l od sebe. Kvádr je tažen nehmotnou nití, která je přes kladku spojena se závažím o hmotnosti M . Kladka se pohybuje bez tření. Viz Obr. 10.11.4. Homogenní magnetické pole míří vertikálně nahoru. Kvádr je vypouštěn z klidové polohy.

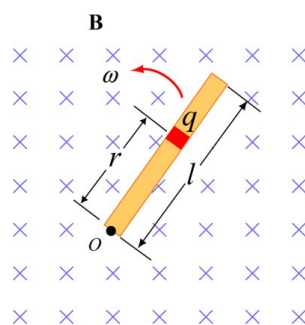


Obr. 10.11.4: Klouzající kvádr.

- (a) Necht' je rychlost posuvu kvádrů v . Najděte vztah pro indukovaný proud. Kterým směrem teče (z bodu a do bodu b , nebo opačně)?
- (b) Vyřešte diferenciální rovnici pohybu a spočítejte rychlost v jako funkci času.

P 10.11.5: Rotující kvádr

Vodivý kvádr o délce l je na jednom konci fixován. Kvádr se otáčí konstantní rychlostí ω v rovině kolmé na magnetické pole, viz Obr. 10.11.5.

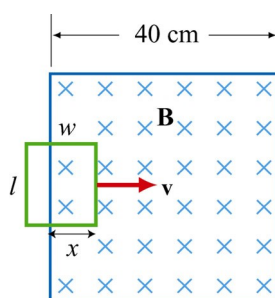


Obr. 10.11.5: Rotující kvádr

- (a) Necht' je na kvádru malý element nesoucí náboj q ve vzdálenosti r od osy otáčení O . Ukažte, že síla působící na element je dána vztahem $F_B = qBr\omega$.
- (b) Ukažte, že rozdíl potenciálů mezi oběma konci tyče je $\Delta V = \frac{1}{2}B\omega l^2$.

P 10.11.6: Obdélníková smyčka pohybující se v magnetickém poli

Malá obdélníková smyčka délky $l = 10$ cm a šířky $w = 8,0$ cm o odporu $R = 2,0 \Omega$ je tažena konstantní rychlostí $v = 2,0$ cm/s obdélníkovou oblastí homogenního magnetického pole $B = 2,0$ T, které míří do nárysny, viz Obr. 10.11.6.



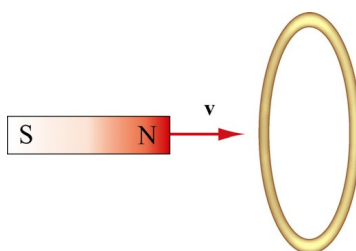
Obr. 10.11.6

V čase $t = 0$ smyčka vstupuje do oblasti homogenního magnetického pole.

- (a) Najděte maximální tok magnetického pole a nakreslete jeho závislost na čase (od času $t = 0$ až po moment, kdy smyčka zcela opustí oblast magnetického pole).
- (b) Zakreslete indukované elektromotorické napětí jako funkci času.
- (c) Kterým směrem teče indukovaný proud?

P 10.11.7: Magnet pohybující se skrze závit

Představte si, že tyčový magnet je konstantní rychlostí tažen skrz nepohybující se vodivou smyčku, viz Obr 10.11.7.



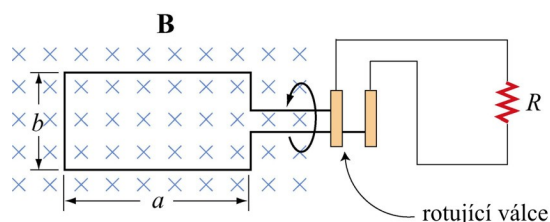
Obr. 10.11.7.

Předpokládejme, že severní pól magnetu vstoupil středem do smyčky v čase $t = 0$.

- Nakreslete kvalitativní odhad závislosti magnetického toku smyčkou ϕ_B na čase.
- Nakreslete kvalitativní odhad závislosti proudu smyčkou I na čase, proud je kladný, pokud teče ve směru hodinových ručiček při pohledu zleva.
- Jaký je směr síly, která působí na magnet a je způsobena magnetickým polem indukovaného proudu v cívce, předtím, než se magnet k cívce přiblíží?
- Jaký je směr síly, která působí na magnet, když se začne vzdalovat?
- Jsou odpovědi na otázky (c) a (d) v souladu s Lenzovým zákonem?
- Odkud se bere energie, která způsobila ohmické zahřátí smyčky?

P 10.11.8: Alternátor střídavého proudu

N smyčková obdélníková cívka délky a a šířky b rotuje s frekvencí f v homogenním magnetickém poli $\mathbf{B}$, které míří do nárysny. viz Obr. 10.11.8. V čase $t = 0$ je smyčka ve vertikální poloze (rovnoběžná s nárysnou) a při pohledu zleva v ose otáčení rotuje proti směru hodinových ručiček.



Obr. 10.11.8

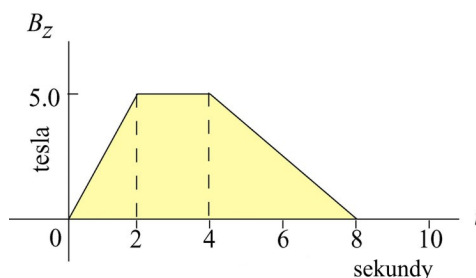
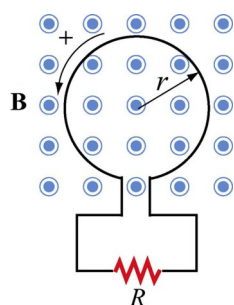
- Nakreslete obrázek generátoru proudu při pohledu zleva vůči ose otáčení v čase Δt krátce po čase $t = 0$, když se smyčka otočila o úhel θ od vertikální osy. Na obrázku ukažte vektor $\mathbf{B}$, rovinu smyčky a směr indukovaného proudu.
- Napište výraz pro magnetický tok ϕ_B tekoucí smyčkou jako funkci času a zadaných parametrů.
- Ukažte, že indukované elektromotorické ε napětí je dáno vztahem

$$\varepsilon = 2\pi f N b a B \sin(2\pi f t) = \varepsilon_0 \sin(2\pi f t) .$$

- Navrhněte smyčku, která by vytvářela střídavé napětí o amplitudě $\varepsilon_0 = 120$ V a frekvenci 50 Hz v magnetickém poli 0,4 T.

P 10.11.9: Elektromotorické napětí způsobené časově se měnícím magnetickým polem

Homogenní magnetické pole $\mathbf{B}$ je kolmé na smyčku zanedbatelného odporu, jak je znázorněno na obrázku 10.11.9. Vektor magnetické indukce se mění podle zadaného grafu. Osa z míří před nárysnou. Smyčka má poloměr $r = 50$ cm a je spojena s rezistorem o odporu R . Kladný směr je znázorněn na obrázku.

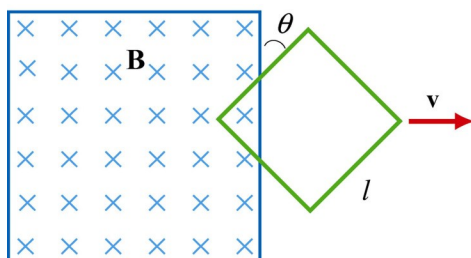


Obr. 10.11.9.

- Vyjádřete indukované elektromotorické napětí v obvodu v čase zadaného B_z .
- Nakreslete závislost indukovaného elektromotorického napětí na čase. Kvantitativně (číslicemi a jednotkami) popište osy grafu. Všimněte si zadaného kladného směru, který je konzistentní s tím, že $\mathbf{B}$ míří z Nárýsny. [Částečné řešení: hodnoty ε jsou 1,96V; 0V a 0,98V].
- Nakreslete závislost proudu I rezistorem R . Popište kvantitativně osy grafu. V obrázku vyznačte směr proudu I na rezistoru R v každém z časových intervalů. [Částečné řešení: hodnoty I jsou 0,98 mA; 0 mA a 0,49 mA].
- Zakreslete výkon na rezistoru R . [Částečné řešení: hodnoty jsou 192 mW; 0 mW a 0,48 mW].

P 10.11.10: Čtvercová smyčka v magnetickém poli

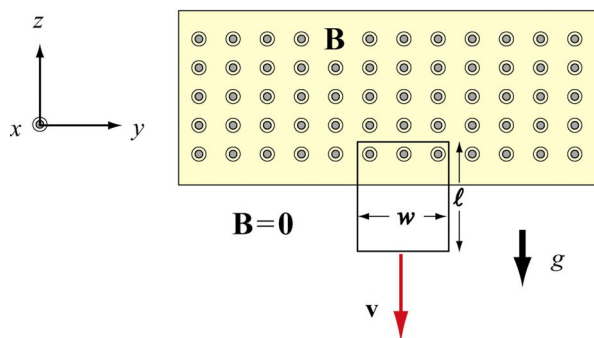
Vnější síla pohybuje čtvercovou smyčkou o rozměru $l \times l$ a odporu R konstantní rychlostí v v homogenním magnetickém poli. Hrany smyčky svírají úhel $\theta = 45^\circ$ s hranicí oblasti magnetického pole, viz Obr. 10.11.10. V čase $t = 0$ je celá smyčka v oblasti pole, její pravý okraj jej na hranici magnetického pole. Spočítejte výkon vnější síly jako funkci času.



Obr. 10.11.10.

P 10.11.11: Padající smyčka

Obdélníková smyčka hmotnosti m , šířky w , výšky l a odporu R padá v gravitačním poli oblastí pole magnetického, viz Obr. 10.11.11. Magnetické pole je homogenní, míří směrem z nárýsny ($\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{i}}$), mimo oblast pole není. V čase na obrázku smyčka opouští oblast magnetického pole rychlostí $\mathbf{v} = -v\hat{\mathbf{k}}$.



Obr. 10.11.11.

- Jaký je směr proudu ve smyčce v čase na obrázku, je ve směru nebo proti směru hodinových ručiček? Proč jste vybrali tento směr?
- Použitím Faradayova zákona vyjádřete velikost indukovaného elektromotorického napětí pomocí zadaných veličin. Jaká je velikost proudu v čase na obrázku?
- Jaká síla, kromě gravitační, působí ještě na smyčku ve směru $\pm \hat{\mathbf{k}}$? Pomocí zadaných veličin vyjádřete její velikost a směr.
- Předpokládejte, že smyčka dosáhla v oblasti magnetického pole výsledné rychlosti a již dále se nezrychluje. Jaká je hodnota této rychlosti?
- Ukažte, že pokud se smyčka pohybuje rychlostí z bodu (d), je práce, kterou gravitační pole koná na smyčce, stejná jako výkon ztracený na smyčce Jouleovým ohřevem.