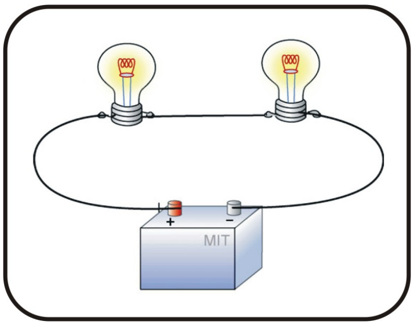
ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

VII. Stejnosměrné obvody



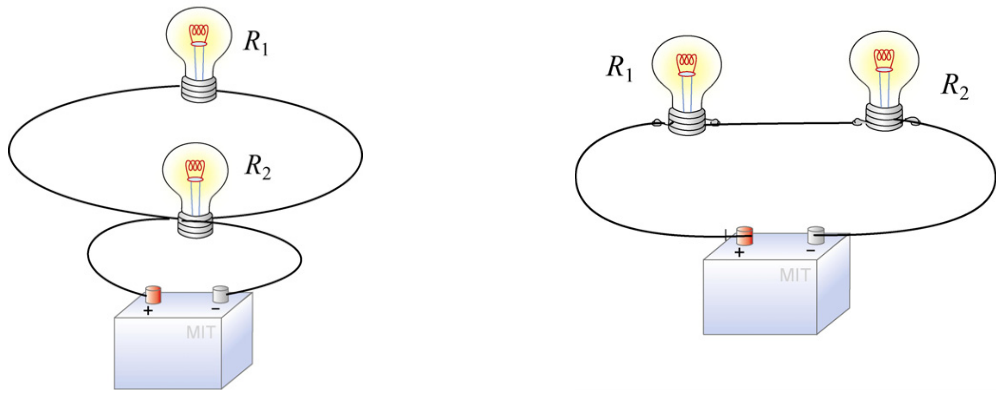
Obsah

7 Stejnosměrné obvody

7.1 Úvod

Elektrické obvody jsou zapojení, kde ke zdrojům elektrické energie jsou připojeny *spotřebiče*, tím může být rezistor, motor, topná spirála nebo i žárovka. Spotřebič je ke zdroji většinou připojen dráty, kterým se také říká *vodiče* – ty mohou být připájené, nebo může být použit různý systém konektorů nebo zásuvek. Spotřebiče můžeme ke zdroji připojovat a znovu odpojovat různými spínači a vypínači. Obvody můžeme rozdělit do menších částí, podle připojení spotřebičů pak rozeznáváme sériové nebo paralelní zapojení (to již bylo uvedeno v části věnované kondenzátorům).

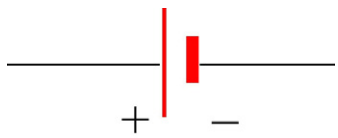
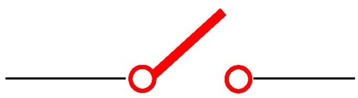
Paralelní zapojení spotřebičů je takové, kdy každý ze spotřebičů je připojen ke stejnému rozdílu potenciálů (viz Obr. 7.1.1 nalevo).



Obr. 7.1.1: Paralelní (nalevo) a sériové (napravo) zapojení žárovek.

Obecně, pokud každý spotřebič připojíme přímo ke zdroji elektrické energie, jedná se o paralelní zapojení. Naopak, spotřebiče zapojíme sériově, pokud budou zapojeny jeden za druhým. V *sériově* zapojeném obvodu tak nebude žádné větvení, jak je zobrazeno na obrázku 7.1.1 napravo.

Ke znázornění obvodů se používají značky, které představují jednotlivé součásti obvodu:

zdroj napětí	
rezistor	
vypínač	

Velmi často je vypínač zapojen ke spotřebiči sériově, pokud je vypínač sepnut, spotřebič je tak zapojen, v rozpojeném stavu je spotřebič od zdroje odpojen a neběží.

Zapojení mohou být uzavřená, tedy elektrický proud teče uzavřenou částí zapojení, nebo mohou být otevřená, kde elektrický proud zapojením neprochází. Někdy náhodným spojením dvou drátů může dojít ke *zkratu*, kdy jeden pól zdroje připojíme přímo ke druhému pólu. Většina proudu tak teče zkratujícím vodičem, jen malá část prochází ostatním zapojením. *Zkrat* může poškodit zdroj napětí – může tak například shořet transformátor ve zdroji napětí. Aby se zabránilo poškození zdroje, bývá k zapojení sériově připojena pojistka nebo přerušovač zapojení. V případě zkratu tak shoří pojistka nebo se obvod rozpojí.

V obvodech je vybrán jeden bod a označen jako *zem* (uzemnění, společná zem). Tomuto místu je přiřazeno referenční napětí, většinou nulové napětí a napětí V v libovolné části obvodu je definováno jako rozdíl potenciálů mezi bodem obvodu a takto definovanou zemí.

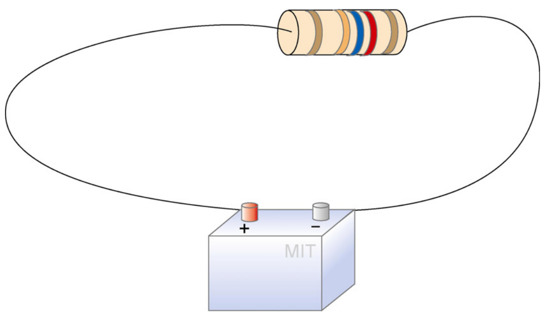
7.2 Elektromotorické napětí

V poslední kapitole jsme si ukázali, že k udržení konstantního proudu ve smyčce elektrického obvodu je zapotřebí elektrické energie. Zdrojem takovéto energie je elektromotorické napětí ε. Baterie, solární panely nebo termočlánky jsou příklady zdrojů elektromotorického napětí. Můžeme si je představit jako „nábojové pumpy“, které přemisťují elektrický náboj z nižšího potenciálu na vyšší. Elektromotorické napětí je tak definováno jako

$$\varepsilon \equiv \frac{dW}{dq}, \qquad (7.2.1)$$

tedy jako práce, která je potřebná k přemístění jednotkového náboje ve směru vzrůstajícího potenciálu. Jednotkou SI elektromotorického napětí ε je 1 volt (V).

Uvažme jednoduchý obvod složený z baterie jako zdroje elektromotorického napětí, a rezistoru, jako spotřebiče, jak je zobrazeno na obr. 7.2.1.

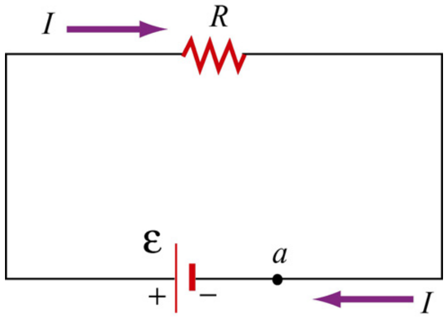


Obr. 7.2.1: Jednoduchý obvod složený z baterie a rezistoru.

Za předpokladu, že baterie nebude mít žádný vnitřní odpor, je rozdíl potenciálů ΔV (nebo svorkové napětí) mezi kladným a záporným pólem baterie roven elektromotorickému napětí ε. Aby obvodem mohl téci proud, baterie se vybíjí, přeměňuje uloženou chemickou energii na elektromotorické napětí (rozměr napětí je stejný jako energie vztažená k náboji). Elektromotorická síla je konzervativním polem, proto proud I, který prochází obvodem, můžeme spočítat jako práci, která je potřeba k pohybu náboje q po uzavřené smyčce:

$$W = -q\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \qquad (7.2.2)$$

Nechť bod a na obrázku 7.2.2 je výchozím bodem integrace.



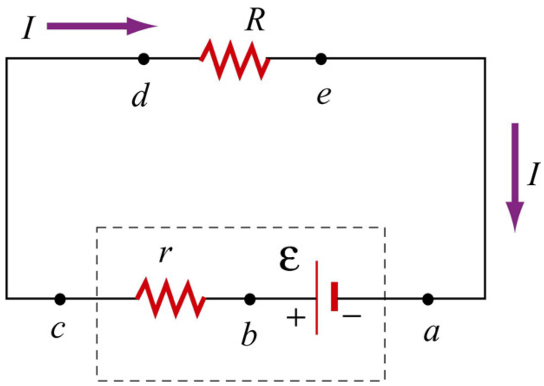
Obr. 7.2.2.

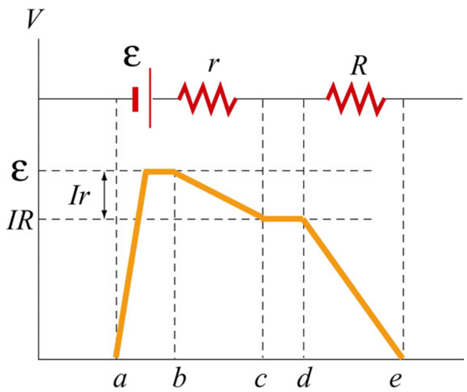
Když přecházíme mezi záporným a kladným pólem baterie, potenciál se zvýší o ε. Když však na druhé straně obvodu přejdeme přes rezistor, potenciál se sníží o hodnotu, která je daná součinem IR. A potenciální energie nábojů se přemění v tepelnou energii, která zahřívá rezistor. Za předpokladu, že spojovací dráty nemají žádný odpor, musí být celkový rozdíl potenciálů ve smyčce roven nule, tedy

$$IR - \varepsilon = 0, \tag{7.2.3}$$

z čehož plyne

$$I = \frac{\varepsilon}{R}. \tag{7.2.4}$$





Obr. 7.2.3: *Nalevo* – zapojení se zdrojem elektromotorického napětí s vnitřním odporem *r* a rezistorem o odporu *R*. *Napravo* – elektrický potenciál v zapojení.

Nicméně každá baterie má svůj vnitřní odpor r (viz Obr. 7.2.3 nalevo) a rozdíl potenciálů mezi jednotlivými póly baterii je dán vztahem

$$\Delta V = \varepsilon - Ir\,. \tag{7.2.5}$$

Protože se nám v obvodu nikde nehromadí náboj, můžeme pro obvod napsat rovnici

$$\varepsilon - Ir - IR = 0, \tag{7.2.6}$$

neboli

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}\,. \tag{7.2.7}$$

Na obrázku 7.2.3 napravo je znázorněn potenciál elektrického náboje, tak jak probíhá, pokud procházíme zapojením obvodu ve směru hodinových ručiček. Z obrázku vidíme, že největší napětí je hned za baterií. Na každém rezistoru napětí ubývá. Všimněte si také, že napětí je na vodičích konstantní. Je to proto, že odpor spojovacích vodičů je zanedbatelný vůči rezistorům.

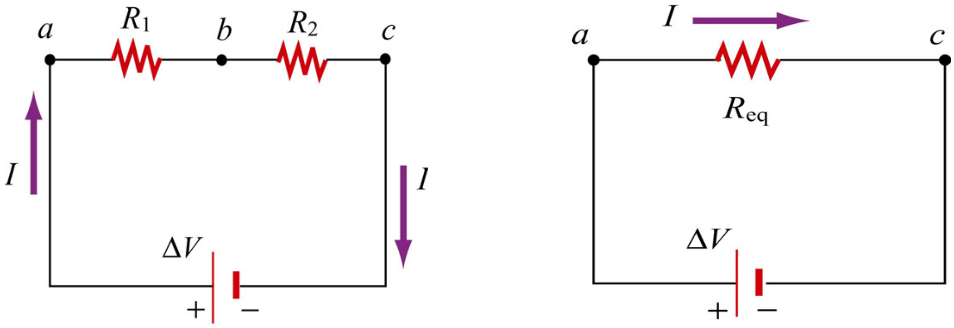
Zdroj elektromotorického napětí ε vykonává práci, kterou vyjádříme jako

$$P = \varepsilon I = I(Ir + IR) = I^2 r - I^2 R\,, \tag{7.2.8}$$

celková práce je tak spotřebovaná jak spotřebičem – rezistorem, tak i ve vnitřním odporu zdroje elektromotorického napětí.

7.3 Rezistory v sériovém a paralelním zapojení

Dva rezistory R_1 a R_2 na obrázku 7.3.1 jsou zapojeny do série ke zdroji napětí ΔV. V celém obvodu teče stejný proud, tedy stejný proud teče skrze oba dva odpory.



Obr. 7.3.1: *Nalevo* – rezistory v sériovém zapojení. *Napravo* – ekvivalentní zapojení.

Celkový pokles napětí mezi body a a c je dán součtem poklesů napětí na jednotlivých rezistorech.

$$\Delta V = IR_1 + IR_2\,. \tag{7.3.1}$$

Dva odpory zapojené v sérii tak mohou být nahrazeny jedním ekvivalentním odporem R_{eq}, jak je znázorněno na obrázku 7.3.1 napravo, na kterém bude stejný úbytek napětí $\Delta V = IR_{eq}$, tedy

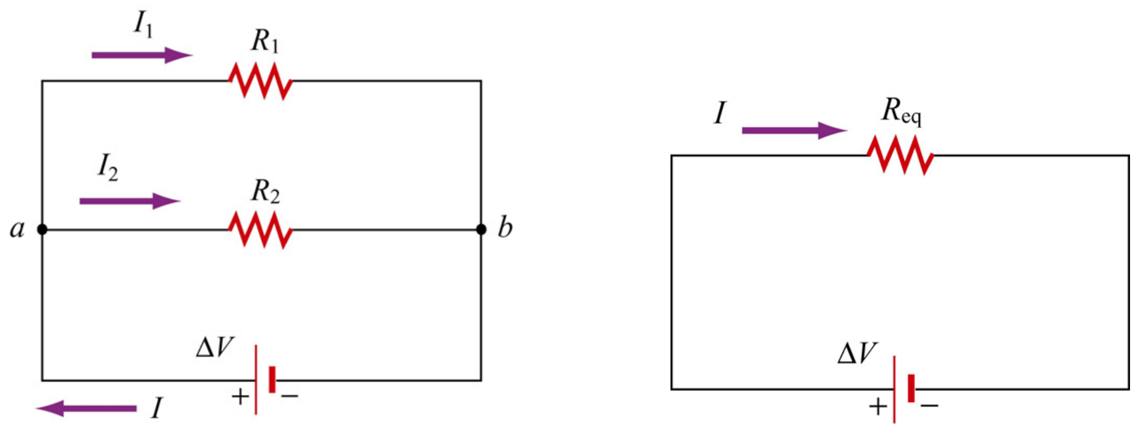
$$R_{eq} = R_1 + R_2\,. \tag{7.3.2}$$

Stejným postupem můžeme spočítat ekvivalentní odpor pro N rezistorů zapojených v sérii, výsledný odpor je tak dán součtem jednotlivých odporů:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{N} R_i\,. \tag{7.3.3}$$

Všimněte si, že pokud jeden rezistor má výrazně vyšší odpor R_V, než ostatní odpory R_i, výsledný odpor R_{eq} je přibližně roven R_V.

Nyní vezměme v úvahu dva rezistory R_1 a R_2 paralelně zapojené ke zdroji napětí ΔV (viz Obr. 7.3.2).



Obr. 7.3.2: *Nalevo* – dva rezistory zapojené paralelně. *Napravo* – ekvivalentní odpor.

Ze zachování proudu, bude proud I, který teče zdrojem elektromotorického napětí rozdělen na proud I_1, tekoucím rezistorem R_1, a proud I_2 , který teče rezistorem R_2. Pro každý z rezistorů musí platit Ohmův zákon, tedy $\Delta V_1 = I_1 R_1$ a $\Delta V_2 = I_2 R_2$. Rozdíl potenciálů je však na obou rezistorech stejný, tedy musí platit $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$. Ze zachování proudu

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{7.3.4}$$

Dva rezistory tak mohou být nahrazeny jedním ekvivalentním rezistorem o odporu R_{eq}, tak aby $\Delta V = IR_{eq}$ (viz Obr. 7.3.2 napravo). Srovnáním těchto rovnic vyjádříme výsledný odpor paralelního zapojení rezistorů jako

$$\frac{1}{R_{eq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{7.3.5}$$

Výsledek můžeme zevšeobecnit i pro zapojení N rezistorů:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}. \tag{7.3.6}$$

Pokud je jeden rezistor s výrazně menším odporem, než je odpor ostatních rezistorů, ekvivalentní odpor je přibližně roven tomuto odporu. V případě dvou rezistorů, kdy $R_1 << R_2$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \approx \frac{R_1 R_2}{R_2} = R_1.$$

To znamená, že téměř všechen proud teče větví s nejnižším odporem. V případě zkratu tedy teče všechen proud zkratovanou částí s téměř nulovým odporem.

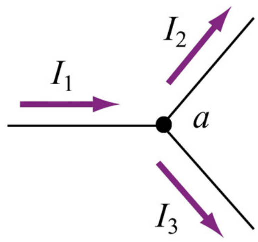
7.4 Kirchhoffovy zákony

1. zákon o uzlech (o proudech)

V každém místě obvodu, ve kterém jsou spojeny různé větve obvodu, je součet proudů vstupujících do uzlu roven součtu proudů z uzlu vystupujících (v opačném případě by se v tomto místě začal hromadit náboj). Tento zákon platí ze zachování elektrického proudu.

$$\sum I_{\text{do uzlu}} = \sum I_{\text{z uzlu}} . \quad (7.4.1)$$

Na obrázku 7.4.1 je příklad takovéhoto uzlu. Podle zákona o uzlech pro situaci z obrázku 7.4.1 platí $I_1 = I_2 + I_3$.



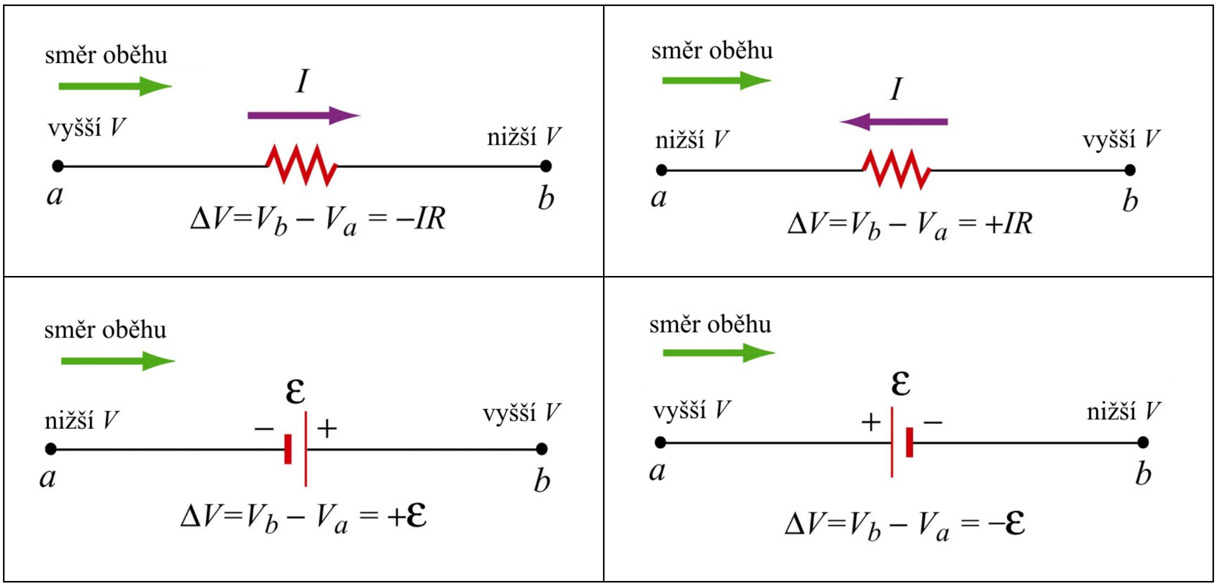
Obr. 7.4.1: Zákon o uzlech.

2. zákon o smyčkách (o napětích)

Výsledná suma úbytků ΔV napětí v uzavřené smyčce je rovna 0.

$$\sum_{\substack{\text{uzavřená}\\ \text{smyčka}}} \Delta V = 0 . \quad (7.4.2)$$

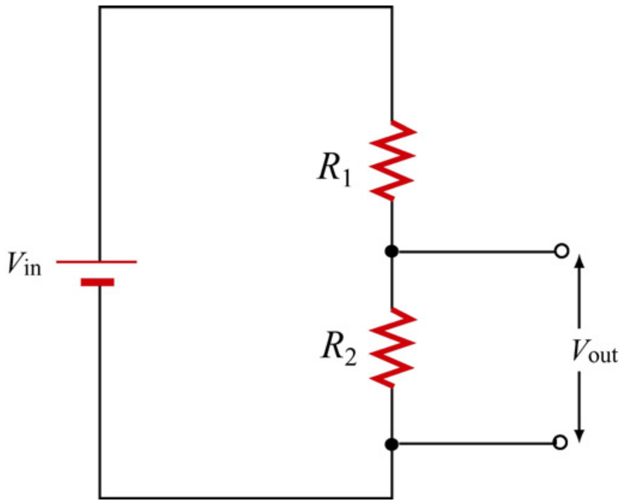
V následující tabulce jsou znázorněna pravidla pro určení znaménka úbytku napětí ΔV podle směru proudu, oběhu ve smyčce a typu zapojeného elementu:



Obr. 7.4.2: Konvence určování znaménka ΔV.

Všimněte si, že zvolený směr oběhu ve smyčce není důležitý. Stejnou rovnici obdržíte, pokud ve smyčce obvod oběhnete ve směru nebo proti směru chodu hodinových ručiček.

Pro příklad uvažujme zdroj o napětí V_{in} a dva rezistory o odporu R_1 a R_2.



Obr. 7.4.3: Napěťový dělič.

Rozdíl napětí V_{out} an rezistoru R_2 bude nižší, než je napětí V_{in}. Takovéto zapojení je nazýváno dělič napětí. Ze zákona o smyčkách (napětí) plyne

$$V_{in} - IR_1 - IR_2 = 0\,, \tag{7.4.3}$$

velikost proudu je tak dána vztahem

$$I = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2}\,. \tag{7.4.4}$$

Výstupní napětí V_{out} je úbytek napětí na rezistoru R_2:

$$V_{out} = IR_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}\,. \tag{7.4.5}$$

Všimněte si, že podíl napětí je určen odpory obou rezistorů:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,. \qquad (7.4.5)$$

7.5 Měření napětí a proudu

Jakýkoliv přístroj, který měří napětí nebo proud naruší měřený obvod. Přístroje označované jako ampérmetry měří proud procházející přístrojem, velikost měřené veličiny zobrazují buď jako výchylku ručičky na stupnici, případně jako digitální číslo na displeji přístroje. Na přístroji ale bude jistý úbytek napětí, který způsobí nenulový vnitřní odpor ampérmetru. Ideální přístroj by měl nulový vnitřní odpor, ale v případě běžného multimetru, je vnitřní odpor 1 Ω na 25 mA rozsahu měřícího přístroje. Napěťový úbytek 0,25 V může být zanedbatelný, ale pokud známe vnitřní odpor přístroje, můžeme tyto vlivy započítat.

Z ampérmetru můžeme zapojením rezistoru o odporu R do série s měřícím zařízením udělat voltmetr. Napětí tak můžeme měřit paralelním zapojením voltmetru k měřené části obvodu. Tak ale bude i naším přístrojem téct malý proud, který vychýlí ručičku ampérmetru. Změřením proudu můžeme spočítat úbytek napětí na měřené části obvodu jako $\Delta V = IR$. Napětí však většinou měříme již přímo na okalibrované stupnici. Čím větší je vnitřní odpor R voltmetru, tím méně měření ovlivní náš obvod, tím menší je ale také proud, který teče přístrojem. Ideální voltmetr by měl mít nekonečný odpor.

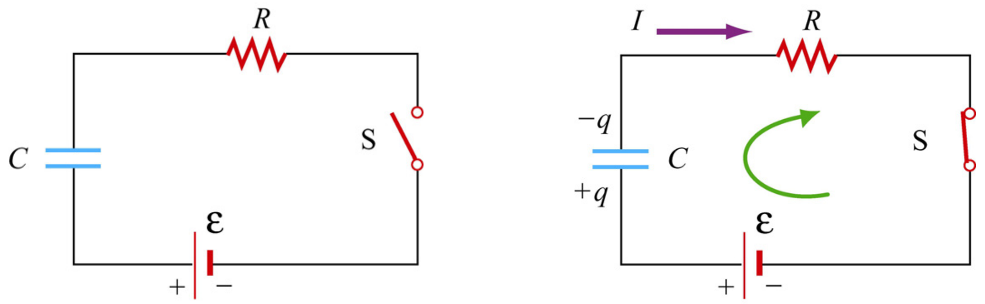
Tabulka hodnot odpovídajících proužkům na rezistorech					
0	černá	4	žlutá	8	šedá
1	hnědá	5	zelená	9	bílá
2	červená	6	modrá	–1	zlatá
3	oranžová	7	fialová	–2	stříbrná

Barevné proužky na rezistorech odpovídají hodnotě odporu rezistorů, viz tabulka nahoře (barvy proužků 2 až 7 odpovídají barvám duhy). Proužky se zažínají číst z té strany, která je blíže kraji rezistoru. První dva proužky odpovídají cifrám hodnoty odporu, třetí proužek je mocnina 10, kterou jsou první dvě čísla vynásobena (zlatý je tedy 10^{-1}). Čtvrtý proužek představuje toleranci, se kterou je rezistor vyroben – zlatý proužek znamená 5 %, stříbrný 10 %. Takže například na rezistoru o odporu 43 Ω s 5 % tolerancí jsou proužky žlutá, oranžová, černá, stříbrná.

7.6 RC obvody

7.6.1 Nabíjení kondenzátoru

Uvažte obvod na obrázku 7.6.1. Kondenzátor je připojen ke zdroji stejnosměrného elektromotorického napětí ε. V čase $t = 0$ sepneme spínač S. Kondenzátor je na počátku zcela vybitý $q(t = 0) = 0$.



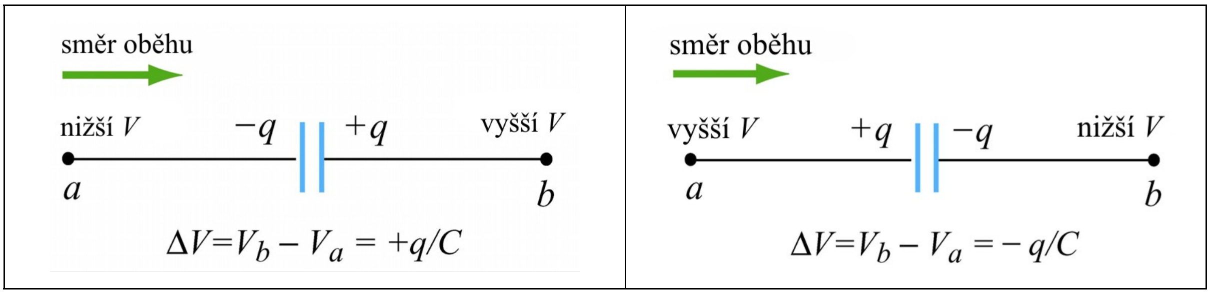
Obr. 7.6.1: *Nalevo* – RC zapojení v čase $t < 0$. *Napravo* – zapojení v čase $t > 0$.

V čase $t < 0$ na kondenzátoru není žádné napětí a kondenzátor se chová, jako by byl obvod v tomto místě zkratován. V čase $t = 0$ je spínač zapojen a obvodem prochází proud daný

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}. \tag{7.6.1}$$

V tomto okamžiku je na rezistoru stejný úbytek napětí jako na svorkách zdroje napětí. Kondenzátor se začne nabíjet. Postupně, jak se kondenzátor nabíjí, napětí na kondenzátoru roste v čase

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}. \tag{7.6.2}$$



Obr. 7.6.2: Kirchhoffův zákon pro kondenzátory.

Využitím Kirchhoffova zákona pro kondenzátory z obr. 7.6.2 a při oběhu obvodu ve směru hodinových ručiček dostaneme

$$0 = \varepsilon - I(t)R - V_\mathrm{C}(t) = \varepsilon - \frac{dq}{dt}R - \frac{q}{C}, \tag{7.6.3}$$

kde jsme proud I nahradili za $I = dq/qt$. Protože porud I musí být stejný v celém obvodě, proud jdoucí rezistorem R je úměrný rychlosti zvyšování náboje na deskách kondenzátoru. Proud v obvodu tak bude tak klesat, protože náboj, který je již na deskách kondenzátoru, bude zpomalovat další ukládání náboje do kondenzátoru. V okamžiku, kdy náboj dosáhne maximální hodnoty Q, proud klesne k nule. To je zřejmé přepisem rovnice 7.6.3

$$I(t)R = \varepsilon - V_\mathrm{C}(t)\,. \tag{7.6.4}$$

Nabíjení kondenzátoru popisuje diferenciální rovnice prvního řádu, která dává do vztahu rychlost nabíjení kondenzátoru k náboji na kondenzátoru:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{R}\left(\varepsilon - \frac{q}{C}\right). \tag{7.6.5}$$

Rovnici můžeme vyřešit separací proměnných. Prvním krokem je tak převést vždy na opačné strany rovnice proměnné času t a náboje q.

$$\frac{dq}{\left(\varepsilon - \dfrac{q}{C}\right)} = \frac{1}{R}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{q - C\varepsilon} = \frac{1}{RC}dt\,. \tag{7.6.6}$$

Nyní můžeme obě strany rovnice integrovat

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - C\varepsilon} = \int_0^t \frac{1}{RC}dt'\,, \tag{7.6.7}$$

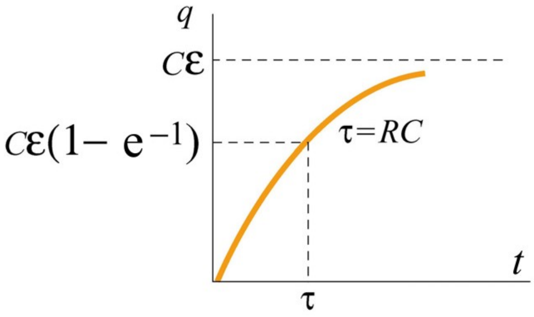
což vede k

$$\ln\left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon}\right) = -\frac{t}{RC}\,. \tag{7.6.8}$$

Využijeme faktu, že exp[ln(x)] = x

$$q(t) = C\varepsilon\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}\right) = Q\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}\right), \tag{7.6.9}$$

kde $Q = C\varepsilon$ je maximální náboj, který můžeme uložit na deskách kondenzátoru. Časová závislost $q(t)$ je zobrazena na obrázku 7.6.3:



Obr. 7.6.3: Náboj jako funkce času během nabíjení kondenzátoru.

Pokud známe závislost náboje na kondenzátoru na čase, můžeme určit i závislost napětí na kondenzátoru na čase

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right). \tag{7.6.10}$$

Graf závislosti napětí na čase je podobný grafu na obrázku 7.6.3. Z obrázku je vidět, že v dostatečně dlouhém čase je náboj na kondenzátoru se blíží hodnotě

$$q(t=\infty) = C\varepsilon = Q\,. \tag{7.6.11}$$

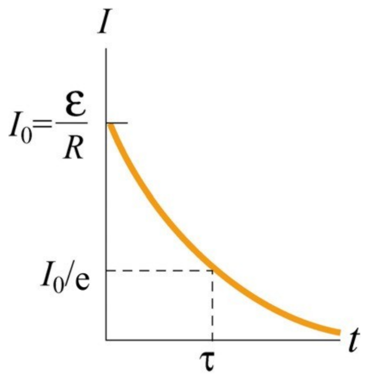
V tomto čase je napětí na kondenzátoru stejné jako napětí zdroje elektromotorického napětí

$$V_C = \frac{q(t=\infty)}{C} = \frac{Q}{C} = \varepsilon\,. \tag{7.6.12}$$

Proud, který teče obvodem je roven časové derivaci náboje

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{-t}{RC}} = I_0\, e^{\frac{-t}{RC}}\,. \tag{7.6.13}$$

Koeficient před exponencielou je roven počátečnímu proudu, který tekl obvodem v čase $t = 0$. Graf závislosti proudu na čase t je na obrázku 7.6.4:



Obr. 7.6.4: Proud jako funkce času během nabíjení kondenzátoru.

Proud jako funkce času v průběhu nabíjení exponenciálně klesá $I(t) = I_0\, e^{\frac{-t}{RC}}$. Tato funkce se často zapisuje jako $I(t) = I_0\, e^{-t/\tau}$, kde $\tau = RC$ se nazývá *časová konstanta*. Jednotkou τ v soustavě SI je 1 sekunda, rozměr lze jednoduše ověřit

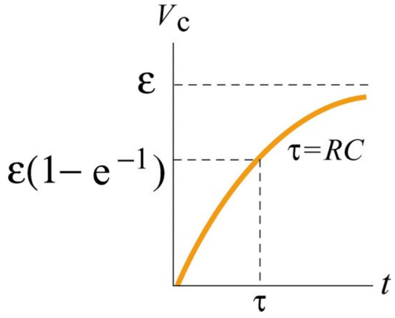
[Ω][F] = ([V]/[A])([C]/[V]) = [C]/[A] = [C]/([C]/[s]) = [s].

Časová konstanta τ odpovídá rychlosti klesání exponenciální funkce. Rychlost klesání splňuje následující vztah:

$$I(t+\tau) = I(t)\mathrm{e}^{-1}, \tag{7.6.14}$$

což jinými slovy značí, že po uplynutí času τ je elektrický proud e^{-1} = 0,368-krát menší, než na počátku, jak je vidět na obrázku 7.6.4). Obdobně můžeme pomoci τ přepsat vztah pro závislost napětí na kondenzátoru na čase

$$V_\mathrm{C}(t) = \varepsilon\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right). \tag{7.6.15}$$



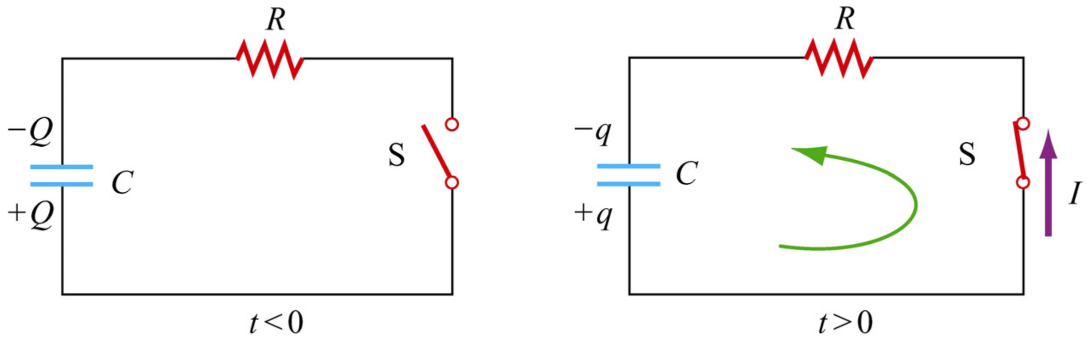
Obr. 7.6.5: Napětí na deskách kondenzátoru v závislosti na čase během nabíjení.

Všimněte si, že v čase t = 0 je $V_\mathrm{C}(t = 0) = 0$. Po uplynutí časové konstanty τ je rozdíl potenciálů mezi deskami kondenzátoru zvětšen o faktor $(1 - \mathrm{e}^{-1})$, tedy 0,632krát.

$$V_\mathrm{C}(\tau) = \varepsilon\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) = 0{,}632\varepsilon . \tag{7.6.16}$$

7.6.2 Vybíjení kondenzátoru

Předpokládejme, že máme na počátku kondenzátor nabitý nábojem Q. V čase $t < 0$ je spínač rozevřen a rozdíl potenciálů na kondenzátoru je dán vztahem $V_\mathrm{C} = Q/C$. Rozdíl potenciálů na rezistoru je roven nule, protož neuzavřeným obvodem neteče žádný proud, tedy I = 0. Předpokládejme, že v čase t = 0 byl sepnut spínač S (obrázek 7.6.6). Kondenzátor se začne vybíjet.



Obr. 7.6.6: Vybíjení RC obvodu.

Nabitý kondenzátor teď slouží jako zdroj elektrické energie a proud začne téct obvodem. Když se kondenzátor vybíjí (elektrony se pohybují vodičem ze záporného pólu kondenzátoru ke kladnému), napětí na kondenzátoru klesá a kondenzátor se tak stává horšíma horším zdrojem napětí. Pokud podle Kirchhoffova zákona projdeme smyčkou proti směru hodinových ručiček, dostaneme rovnici:

$$\frac{q}{C} - IR = 0\,. \tag{7.6.17}$$

Proud tekoucí obvodem je úměrný rychlosti vybíjení kondenzátoru

$$I = -\frac{dq}{dt}\,. \tag{7.6.18}$$

Pro obvod tak můžeme napsat diferenciální rovnici prvního řádu:

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0\,, \tag{7.6.19}$$

kterou separujeme do tvaru

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt \tag{7.6.20}$$

a integrujeme

$$\int_Q^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt' \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}\,, \tag{7.6.21}$$

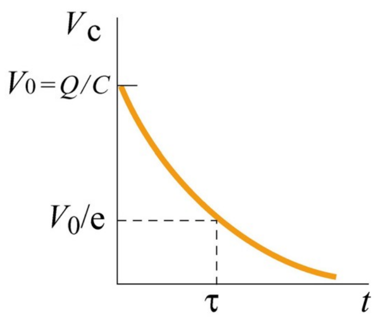
což můžeme vyjádřit jako

$$q(t) = Q\,\mathrm{e}^{-t/RC}\,. \tag{7.6.22}$$

Napětí na kondenzátoru je tak dáno vztahem

$$V_\mathrm{C} = \frac{q(t)}{C} = \left(\frac{Q}{C}\right)\mathrm{e}^{-t/RC}\,. \tag{7.6.23}$$

Napětí na kondenzátoru v čase zobrazuje následující graf

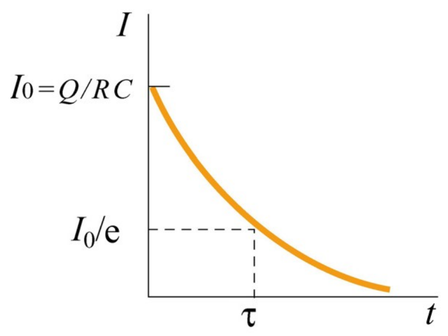


Obr. 7.6.7: Závislost napětí na deskách na kondenzátoru na čase.

Rovněž proud, který teče obvodem exponenciálně ubývá:

$$I = -\frac{dq}{dt} = \left(\frac{Q}{RC}\right)\mathrm{e}^{-t/RC}\,. \tag{7.6.24}$$

Graf závislosti proudu na čase je tak stejný, jako graf závislosti napětí na čase.



Obr. 7.6.8: Proud jako funkce času v průběhu vybíjení kondenzátoru.

7.7 Shrnutí

- Odpor odpovídající sériovému zapojení rezistorů $R_{\mathrm{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{N} R_i$.
- Odpor odpovídající paralelnímu zapojení: $\dfrac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \cdots = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{R_i}$.
- **Kirchhoffovy zákony:**

  (1) Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících.

  $$\sum I_{\text{do uzlu}} = \sum I_{\text{z uzlu}}.$$

  (2) Součet úbytků napětí se v uzavřené části obvodu (smyčce) rovná nule.

  $$\sum_{\substack{\text{uzavřené}\\\text{smyčky}}} \Delta V = 0.$$

- Náboj a proud jako funkce času jsou u nabíjejícího se kondenzátoru:

  $$q(t) = Q\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}\right), \qquad I(t) = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}.$$

- Náboj a proud jako funkce času jsou u vybíjejícího se kondenzátoru:

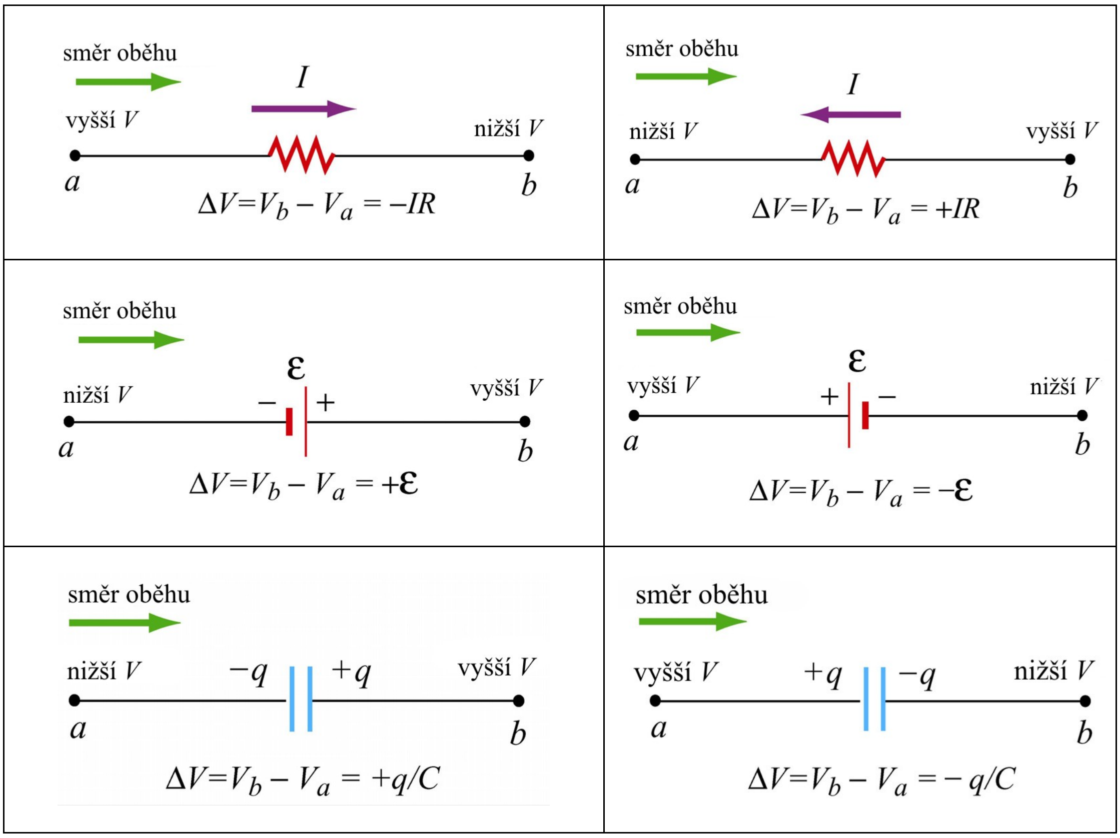
  $$q(t) = Q\,\mathrm{e}^{-t/RC}, \qquad I(t) = \left(\frac{Q}{RC}\right)\mathrm{e}^{-t/RC}.$$

7.8 Algoritmus řešení obvodů pomocí Kirchhoffových zákonů

V této kapitole ukážeme, jakým způsobem použít Kirchhoffovy zákony při řešení obvodů s více smyčkami:

1. Nakreslete si schéma obvodu, označte si všechny veličiny, jak známé, tak neznámé. Počet rovnic, které z Kirchhoffových zákonů sepíšeme, musí být roven počtu neznámých veličin.
2. V každé větvi obvodu si zvolte směr proudu. Na zvoleném směru nezávisí, pokud zvolíte směr opačný, z rovnic vyjde záporná velikost proudu.

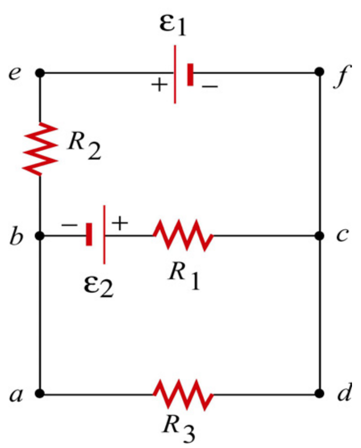
3. Napište si uzlové rovnice pro všechny uzly až na jeden. (Poslední rovnice by byla lineární kombinací rovnic předchozích.)
4. Použijte zákona o smyčkách, dokud nebudete mít dostatek lineárně nezávislých rovnic – tedy počet rovnic bude odpovídat počtu neznámých. Pokud tedy neznáte tři veličiny, musíte napsat alespoň tři rovnice, abyste mohli rovnice vyřešit. Pro výpočet ΔV použijte při průchodu smyčkou následující tabulku:



Pokud smyčkou procházíte ve směru i proti směru hodinových ručiček, získáte tu samou rovnici (pouze s opačným znaménkem)

5. Vyřešte soustavu rovnic, tak abyste získali hodnoty neznámých veličin.

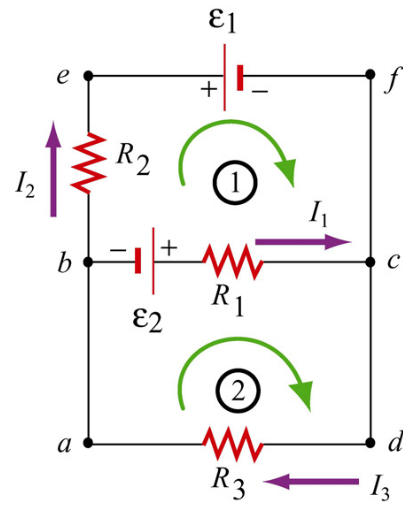
P Jako příklad ilustrující jednotlivé kroky budeme analyzovat obvod na obrázku 7.8.1.



Obr. 7.8.1: Obvod s více smyčkami.

Předpokládejme, že známe napětí elektromotorických zdrojů ε_1 a ε_2, odpory rezistorů R_1, R_2, a R_3 a budeme chtít znát proudy tekoucí rezistory. Úlohu vyřešíme metodickými kroky uvedenými výše.

1. Neznámé veličiny jsou I_1, I_2, a I_3. Abychom proudy určili, musíme najít tři nezávislé rovnice.
2. Směry proudů si zvolíme tak, jak je naznačeno na obrázku 7.8.2.



Obr. 7.8.2.

3. Pro bod b si zapíšeme první Kirchhoffův zákon

$$I_3 = I_1 + I_2,$$

proud I_3 do uzlu vstupuje, zatímco proudy I_1 a I_2 z uzlu vystupují. Pokud bychom zapsali rovnici pro bod c, dostali bychom stejnou.

4. Další dvě rovnice získáme použitím druhého Kirchhoffova zákona (o smyčkách), který tvrdí, že součet potenciálů v uzavřené smyčce musí být roven nule. Projdeme nejprve smyčku *befcb* ve směru hodinových ručiček, tím získáme rovnici

$$-I_2 R_2 - \varepsilon_1 + I_1 R_1 - \varepsilon_2 = 0.$$

Stejně tak získáme průchodem smyčky *abcda* ve směru hodinových ručiček vztah

$$\varepsilon_2 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0.$$

Všimněte si, že v obvodu můžeme ještě projít velkou smyčku *abefcda*. To vede k rovnici

$$-I_2 R_2 - \varepsilon_1 - I_3 R_3 = 0,$$

tuto rovnici však již nepotřebujeme, je lineární kombinací (součtem) předchozích dvou.

5. Řešení soustavy rovnic je nudná, ale jednoduchá algebra, výsledkem je:

$$I_1 = +\frac{\varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_2 R_3 + \varepsilon_2 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3},$$

$$I_2 = -\frac{\varepsilon_1 R_1 + \varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3},$$

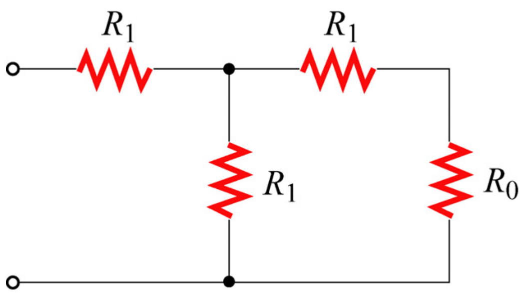
$$I_3 = +\frac{\varepsilon_2 R_2 - \varepsilon_1 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Všimněte si, že hodnota I_2 je záporná. To znamená, že skutečný směr proudu je opačný, než jsme si na počátku zvolili.

7.9 Řešené úlohy

P 7.9.1 Hledání náhradních zapojení

Uvažme zapojení odporů na obrázku 7.9.1. Jaký musí být odpor R_1, tak aby obvod mohl být nahrazen jedním rezistorem o odporu R_0?



Obr. 7.9.1.

Řešení:

Odpor R' odpovídající třem rezistorům z pravé strany spočítáme jako

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0 + R_1} = \frac{R_0 + 2R_1}{R_1(R_0 + R_1)} \qquad \Rightarrow \qquad R' = \frac{R_1(R_0 + R_1)}{R_0 + 2R_1}.$$

Protože R' je zapojen do série se čtvrtým rezistorem R_1, ekvivalentní odpor zapojení na obrázku spočítáme jako:

$$R_{\mathrm{eq}} = R_1 + \frac{R_1(R_0 + R_1)}{R_0 + 2R_1} = \frac{3R_1^{\,2} + 2R_1 R_0}{R_0 + 2R_1}.$$

Ze zadání se $R_{\mathrm{eq}} = R_0$, pak dostaneme

$$R_0\left(R_0 + 2R_1\right) = 3R_1^{\,2} + 2R_1 R_0 \quad \Rightarrow \quad R_0^{\,2} = 3R_1^{\,2},$$

tedy

$$R_1 = \frac{R_0}{\sqrt{3}}.$$

P 7.9.2 Proměnný odpor

Ukažte, že pokud baterii o elektromotorickém napětí ε a vnitřním odporu r připojíme k rezistoru o odporu R, bude maximální výkon na rezistoru R tehdy, když $r = R$.

Řešení:

Z Kirchhoffových zákonů získáme:

$$\varepsilon = I(R + r),$$

z čehož plyne

$$I = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Celkový výkon je tak roven

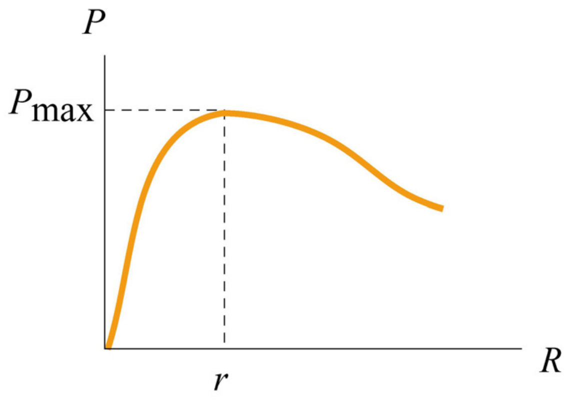
$$P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2}{(r+R)^2} R.$$

Abychom našli hodnotu R, při které je výkon maximální, derivujeme výkon P podle odporu R a položíme rovno 0.

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{2R}{(R+r)} \right] = \varepsilon^2 \frac{r-R}{(R+r)^2} = 0,$$

což značí, že pro maximální výkon platí $R = r$.

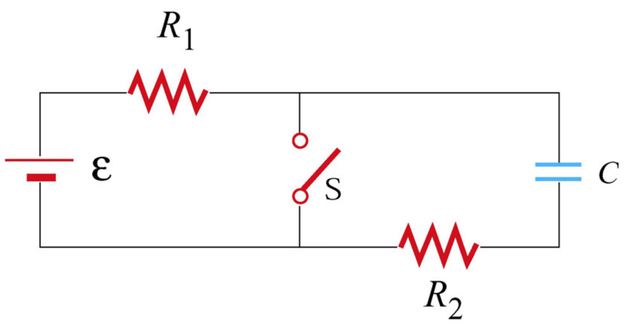
Toto je jeden z příkladů „přizpůsobení impedance“, kdy maximálního výkonu je dosaženo pouze v případě shodné impedance (odporu). Chování funkce P v závislosti na R je zobrazeno na obrázku 7.9.2.



Obr. 7.9.2.

P 7.9.3 RC zapojení

Předpokládejte, že v zapojení na obrázku 7.9.3 byl vypínač v rozepnutém stavu po velmi dlouhou dobu. V čase $t = 0$ byl vypínač spojen.



Obr. 7.9.3.

(a) Jaká je časová konstanta předtím, než byl spínač spojen?

(b) Jaká je časová konstanta poté?

(c) Nalezněte proud, který prochází spínačem S v závislosti na čase.

Řešení:

(a) Před spojením kontaktů vypínače byly rezistory zapojené v sérii s kondenzátorem, odpor ekvivalentní odporům R_1 a R_2 je dán vztahem $R_{eq} = R_1 + R_2$, časová konstanta je pak dána vztahem

$$\tau = R_{eq}C = (R_1 + R_2)C \, ,$$

náboj na kondenzátoru je dán vztahem

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/\tau}) \, .$$

(b) Po sepnutí spínače se obvod změní, kondenzátor se začne vybíjet. Časová konstanta je již dána pouze odporem R_2, tedy $\tau' = R_2 C$, náboj na kondenzátoru začne ubývat, bude dán vztahem

$$q'(t) = C\varepsilon \; e^{-t/\tau} \, .$$

(c) Proud, který teče spínačem S pochází ze dvou zdrojů. Prvním proudem I_1 je elektromotorické napětí ε, druhým zdrojem je kondenzátor C.

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1},$$

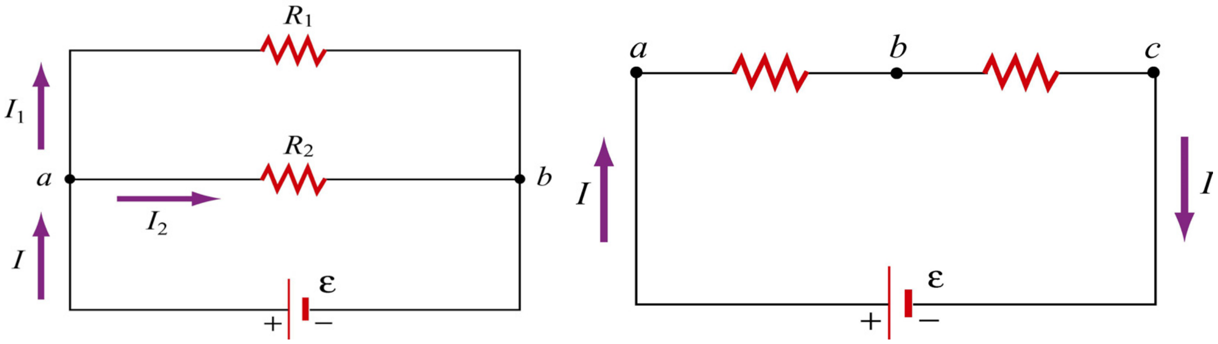
$$I'(t) = -\left(\frac{\varepsilon}{R_2}\right) e^{-t/\tau} = -\left(\frac{\varepsilon}{R_2}\right) e^{-t/R_2 C} \, .$$

Záporné znaménko ve vztahu pro I' naznačuje, že proud je opačný, než proud, který v obvodu tekl, když byl kondenzátor nabíjen. Protože proudy I_1 i I' mají stejný směr, výsledný proud bude dán součtem absolutních hodnot

$$I(t) = I_1 + |I'(t)| = \left(\frac{\varepsilon}{R_1}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{R_2}\right) e^{-t/R_2 C} \, .$$

7.9.4 Paralelní versus sériové zapojení

Na obrázku 7.9.4 jsou zapojeny dva rezistory o odporu R_1 a R_2 paralelně i v sérii. Svorkové napětí baterie je ε.



Obr. 7.9.4.

Předpokládejte, že R_1 a R_2 jsou zapojeny paralelně.

(a) Spočítejte výkon na jednotlivých rezistorech.

(b) Ukažte, že součet výkonů jednotlivých odporů je roven výkonu, který dodává baterie.

Nyní předpokládejte, že R_1 a R_2 jsou zapojeny sériově.

(c) Spočítejte výkon jednotlivých rezistorů.

(d) Ukažte, že součet výkonů jednotlivých odporů je roven výkonu, který dodává baterie.

(e) Které zapojení – sériové nebo paralelní – spotřebuje více výkonu?

Řešení:

(a) Když jsou odpory zapojeny paralelně, proud jdoucí jednotlivými odpory je dán vztahem

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2}$$

a výkon na každém odporu je dán

$$P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{\varepsilon^2}{R_1}, \qquad P_2 = I_2^2 R_2 = \frac{\varepsilon^2}{R_2}.$$

Z výsledku plyne, že čím je nižší odpor, tím větší výkon je na odporu. Pokud spotřebičem jsou žárovky, žárovka s nižším odporem bude svítit více, protože je na ní větší výkon.

(b) Celkový výkon na odporech je dán vztahem

$$P_{\mathrm{R}} = P_1 + P_2 = \frac{\varepsilon^2}{R_1} + \frac{\varepsilon^2}{R_2} = \frac{\varepsilon^2}{R_{\mathrm{eq}}},$$

kde

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad R_{\mathrm{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

je ekvivalentním odporem v zapojení. Celkový výkon dodaný baterií je dán vztahem $P_\varepsilon = I\varepsilon,$ kde $I = I_1 + I_2,$ jak je vidět z obrázku. Proto

$$P_\varepsilon = I_1\varepsilon + I_2\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{R_1}\right)\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{R_2}\right)\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R_1} + \frac{\varepsilon^2}{R_2} = \frac{\varepsilon^2}{R_{\mathrm{eq}}} = P_{\mathrm{R}} \ ,$$

jak je v souladu se zákonem zachování energie.

(c) Pokud jsou rezistory zapojeny v sérii, ekvivalentní odpor je dán vztahem

$$R'_{\mathrm{eq}} = R_1 + R_2$$

a proud, který jde rezistory je

$$I_1 = I_2 = I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}.$$

Výkon na jednotlivých rezistorech je pak

$$P_1 = I_1{}^2 R_1 = \left(\frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}\right)^2 R_1, \qquad P_1 = I_1{}^2 R_1 = \left(\frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}\right)^2 R_1 \ .$$

Na rozdíl od paralelního zapojení, v sériovém zapojení je vyšší výkon na spotřebiči, který má vyšší odpor. V případě žárovek tak bude více svítit žárovka s vyšším odporem.

(d) Celkový výkon dodaný rezistorům je roven

$$P'_R = P_1 + P_2 = \left(\frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}\right)^2 R_1 + \left(\frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2 = \frac{\varepsilon^2}{R_1 + R_2} = \frac{\varepsilon^2}{R'_{\mathrm{eq}}} \ .$$

Na druhé straně výkon dodaný baterií je

$$P'_\varepsilon = I\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}\right)\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R_1 + R_2} = \frac{\varepsilon^2}{R'_{\mathrm{eq}}} \ .$$

Stejně jako v předchozím případě vidíme zákon zachování energie, tedy $P'_\varepsilon = P'_{\mathrm{R}}$.

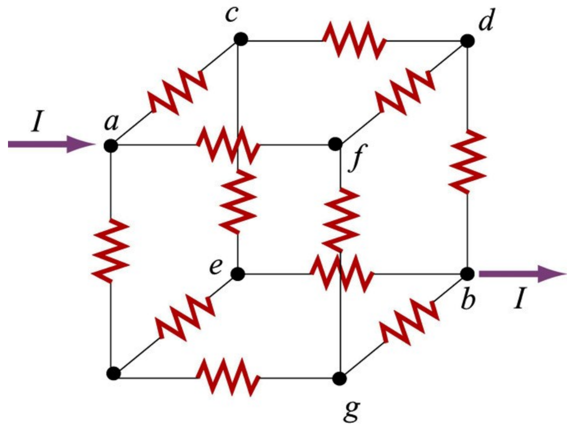
(e) Srovnáním výrazů z (b) a (d) vidíme, že

$$P_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R_1} + \frac{\varepsilon^2}{R_2} > \frac{\varepsilon^2}{R_1 + R_2} = P'_\varepsilon \ ,$$

což znamená, že výkon, který spotřebuje paralelní zapojení je vždy větší, než při sériovém zapojení. Dva paralelně zapojené spotřebiče mají vždy menší odpor, než dva spotřebiče zapojené v sérii.

P 7.9.5 Krychle z rezistorů

Uvažujme krychli, na jejíž každé hraně je zapojen rezistor o odporu *R*, jak je zobrazeno na obrázku 7.9.5.



Obr. 7.9.5: Kostka z rezistorů.

Ukažte, že odpor mezi body *a* a *b* je $R_{\mathrm{eq}} = \frac{5}{6}R$.

Řešení:

Ze symetrie kostky je proud *I*, který teče do kostky v bodě *a* rozdělen rovnoměrně do 3 větví kostky. V každé větvi je tak proud *I*/3. V dalším uzlu (např. *c*) je proud opět symetricky rozdělen do dvou větví *cd* a *ce*. Z bodu *c* tedy jde proud o velikosti *I*/6. Proud jdoucí rezistorem *db* je součtem proudů z *fd* a *cd* – tedy *I*/6 + *I*/6 = *I*/3. Rozdíl potenciálu mezi body *a* a *b* můžeme tedy spočítat jako

$$V_{\mathrm{ab}} = V_{\mathrm{ac}} + V_{\mathrm{cd}} + V_{\mathrm{db}} = \frac{I}{3}R + \frac{I}{6}R + \frac{I}{3}R = \frac{5}{6}IR,$$

z čehož plyne, že

$$R_{\mathrm{eq}} = \frac{5}{6}R.$$

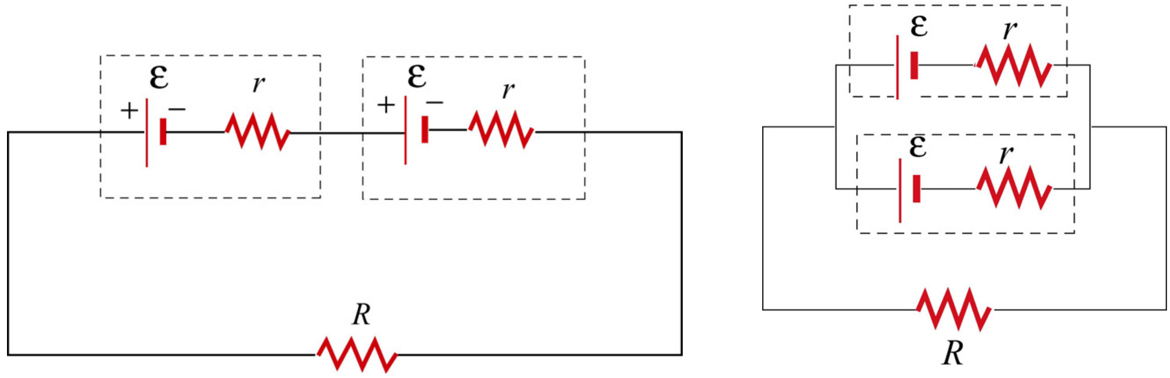
7.10 Tématické otázky

1. Jak zapojit tří rezistory o odporech R_1, R_2 a R_3 tak, aby byl výsledný odpor byl (a) maximální, (b) minimální?
2. Proč pohasnou přední světla automobilu v momentě, kdy startuje?
3. Ovlivňuje odpor rezistoru *R* v RC obvodu maximální velikost náboje na kondenzátoru *C*? Vysvětlete.
4. Může někdo zkonstruovat obvod tak, aby rozdíl potenciálů mezi svorkami baterie byl nulový? Vysvětlete.

7.11 Neřešené úlohy

P 7.11.1 Zapojení odporů

Uvažte dvě stejné baterie složené ze zdroje elektromotorického napětí ε a vnitřního odporu *r*. Můžeme je zapojit sériově nebo paralelně k rezistoru o odporu *R*, jak je znázorněno na obrázku 7.11.1.



Obr. 7.11.1: Dvě baterie zapojené v sérii (nalevo) a paralelně (napravo).

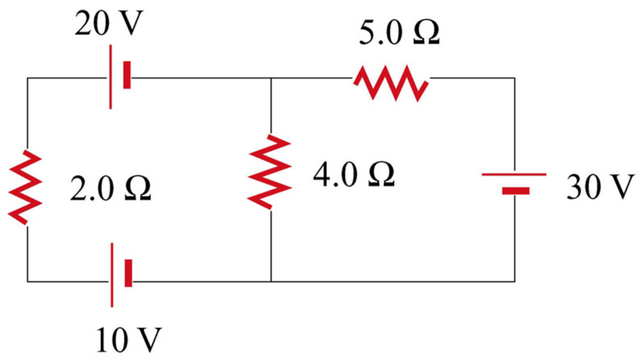
(a) Odvoďte vztah pro proud I na rezistoru R v sériovém zapojení na obrázku 7.11.1 (nalevo). Ujistěte se, že máte správně zakreslen směr proudu (založený na znaménkové konvenci) a použijte 2. Kirchhoffův zákon o smyčkách.

(b) Spočtěte proud v paralelním zapojení na obrázku 7.11.1 (napravo).

(c) Pro jaké vzájemné hodnoty r a R je proud v jednotlivých konfiguracích stejný? Je větší na obr. 7.11.1 nalevo nebo napravo?

P 7.11.2 Zapojení s více smyčkami

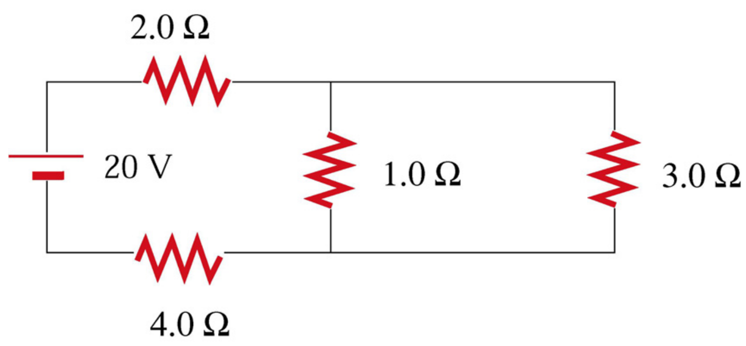
Spočtěte proudy jdoucí rezistory na obrázku 7.11.2. Zanedbejte vnitřní odpory baterií.



Obr. 7.11.2.

P 7.11.3 Výkon na odporech

Spočtěte výkon na jednotlivých odporech v zapojení na obrázku 7.11.3

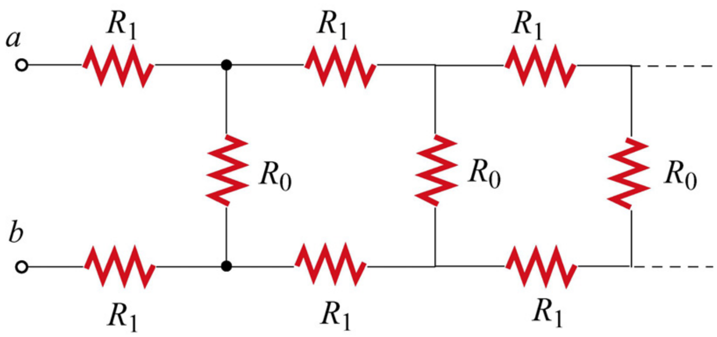


Obr. 7.11.3.

7.11.4 Síť rezistorů

Představte si nekonečnou síť rezistorů o odporech R_0 a R_1 zakreslenou na obrázku 7.11.4. Ukažte, ekvivalentní odpor mezi body a a b je roven

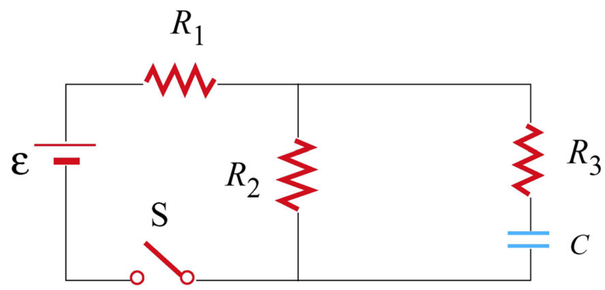
$$R_{eq} = R_1 + \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_0}\ .$$



Obr. 7.11.4.

7.11.5 RC obvod

Uvažte zapojení na obrázku 7.11.5. Nechť ε = 40 V, R_1 = 8,0 Ω, R_2 = 6,0 Ω, R_3 = 4,0 Ω a C = 4,0 μF. Kondenzátor je na začátku vybitý. V čase $t = 0$ je vypínač vypnutý.



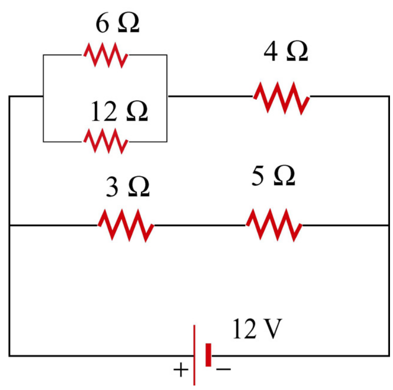
Obr. 7.11.5.

(a) Napište proud jdoucí každým rezistorem.

(b) Spočítejte náboj na kondenzátoru C v dostatečně dlouhém čase.

7.11.6 Rezistory zapojené sériově i paralelně

Obvod složený z 5 rezistorů a 12 V baterie je zobrazen na obrázku 7.11.6. Spočítejte rozdíl potenciálů na rezistoru o odporu 5 Ω. [Rozdíl je 7,5V.]



Obr. 7.11.6.