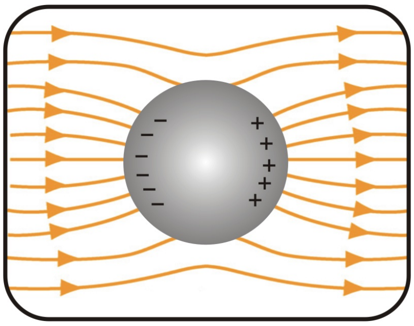
ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

IV. Gaussův zákon



Obsah

4 GAUSSŮV ZÁKON 2

4.1 ELEKTRICKÝ TOK 2

4.2 GAUSSŮV ZÁKON 3

4.3 VODIČE 13

4.4 SÍLA PŮSOBÍCÍ VE VODIČI 18

4.5 SHRNUTÍ 20

4.6 DODATEK: TAH A TLAK V ELEKTRICKÉM POLI 20

4.7 ALGORITMY ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ 24

4.8 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY 26

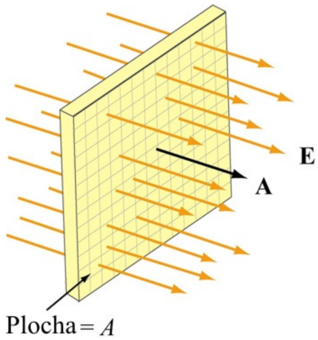
4.9 TÉMATICKÉ OTÁZKY 30

4.10 NEŘEŠENÉ ÚLOHY 30

4 Gaussův zákon

4.1 Elektrický tok

V kapitole 2 jsme ukázali, že intenzita elektrického pole je úměrná počtu silokřivek, procházejících plochou. Počet silokřivek, které procházejí daným povrchem, označujeme jako tok vektoru intenzity Φ_E. Elektrické pole můžeme tedy popisovat počtem silokřivek, procházejících jednotkovou plochou.



Obr. 4.1.1: Silokřivky elektrického pole, procházející plochou o obsahu *A*.

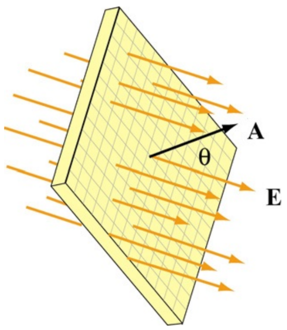
Mějme plochu, zobrazenou na obrázku 4.1.1. Definujeme vektor plochy $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{n}}$, který má velikost plochy A a míří ve směru normály $\hat{\mathbf{n}}$. Pokud plochu vložíme do homogenního pole **E**, jehož intenzita míří stejným směrem jako $\hat{\mathbf{n}}$, tj. je kolmé na plochu A, bude tok plochou roven

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, A = EA\,. \qquad (4.1.1)$$

V případě, že vektor intenzity pole **E** svírá s normálou $\hat{\mathbf{n}}$ úhel θ (obrázek 4.1.2), je tok plochou

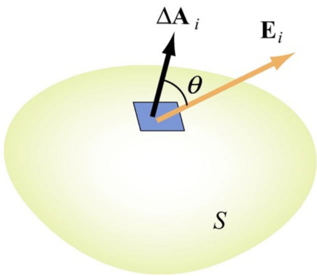
$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = EA\cos\theta = E_n A\,, \qquad (4.1.2)$$

kde $E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ je složka vektoru **E** kolmá k povrchu.



Obr. 4.1.2: Silokřivky elektrického pole, procházející plochou o obsahu *A*, jejíž normála svírá s polem úhel *θ*.

Obecně vzato může být plocha *S* libovolně zakřivená a vektor intenzity pole **E** nemusí mít při průchodu plochou konstantní velikost. Dále se budeme zabývat těmi případy, kdy je daná plocha *uzavřená*, tedy taková, která ohraničuje určitý objem. Abychom mohli spočítat elektrický tok, rozdělíme plochu na množství infinitezimálních plošek $\Delta\mathbf{A}_i = \Delta A_i\, \hat{\mathbf{n}}$, jak ukazuje obrázek 4.1.3. Všimněte si, že jednotkový vektor $\hat{\mathbf{n}}$ je zvolen tak, že u uzavřené plochy míří směrem kolmo ven.



Obr. 4.1.3: Elektrické pole procházející elementem plochy $\Delta\mathbf{A}_i$, svírající s normálou plochy úhel θ.

Tok vektoru intenzity plochou $\Delta\mathbf{A}_i$ je

$$\Delta\Phi_E = \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i = E_i \Delta A_i \cos\theta\,. \tag{4.1.3}$$

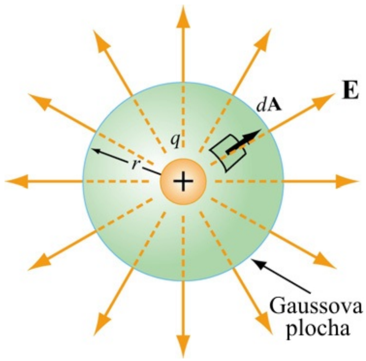
Celkový tok celou plochou získáme sečtením všech toků dílčími plochami. Při limitním přechodu k nekonečnému počtu plošek s obsahem $\Delta\mathbf{A}_i \to 0$ získáme

$$\Phi_E = \lim_{\Delta\mathbf{A}_i \to 0} \sum \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{A}_i = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}\,, \tag{4.1.4}$$

kde jsme symbolem $\oiint_S$ označili integraci přes celou *uzavřenou* plochu *S*. Abychom vypočetli výše uvedený integrál, musíme nejdříve určit plochu a poté sečíst výrazy $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$.

4.2 Gaussův zákon

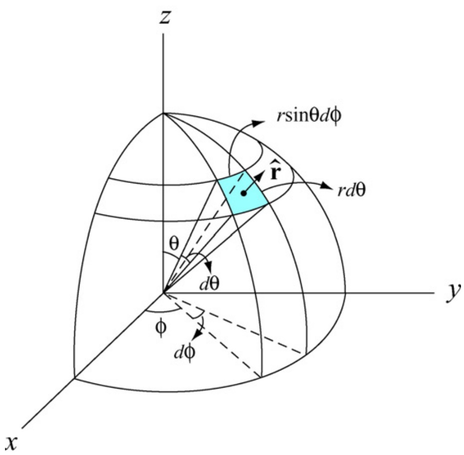
Uvažujme kladný náboj *Q*, který se nachází ve středu koule o průměru *r*. Tato situace je zakreslena na obrázku 4.2.1. Elektrické pole náboje *Q* je $\mathbf{E} = (Q/4\pi\varepsilon_0 r^2)\,\hat{\mathbf{r}}$, kde vektor intenzity míří v radiálním směru. Náboj je obklopen imaginárním kulovým povrchem o poloměru *r*, kterému říkáme „Gaussova plocha“.



Obr. 4.2.1: Náboj *Q* obklopený kulovou Gaussovou plochou.

Ve sférických souřadnicích je možné malý element plochy vyjádřit ve tvaru (obrázek 4.2.1)

$$d\mathbf{A} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi\,\hat{\mathbf{r}}\,. \tag{4.2.1}$$



Obr. 4.2.2: Malý element plochy na kulovém povrchu o poloměru r.

Příspěvek tohoto toku k celkovému toku povrchem je

$$d\Phi_E = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E dA = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)\left(r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,. \tag{4.2.2}$$

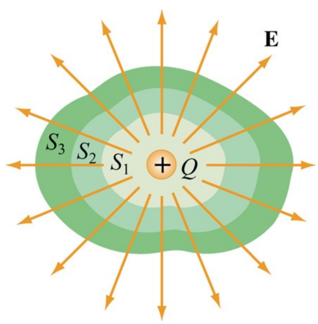
Celkový tok celým povrchem je tedy

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{4.2.3}$$

Stejný výsledek bychom obdrželi, pokud bychom provedli následující úvahu: kulová plocha o poloměru r má obsah $A = 4\pi r^2$, a velikost elektrického pole v libovolném bodě této plochy je $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, takže celkový tok povrchem je

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\oint\!\!\oint_S dA = EA = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{4.2.4}$$

V předchozích úvahách jsme si jako Gaussovu plochu zvolili povrch koule. Je však možné ukázat, že tvar této uzavřené plochy lze zvolit libovolně, a výsledný tok bude stále týž, tj. $\Phi_E = Q/\varepsilon_0$. Příklad pro různé uzavřené plochy S_1, S_2 a S_3 ukazuje obrázek 4.2.3.



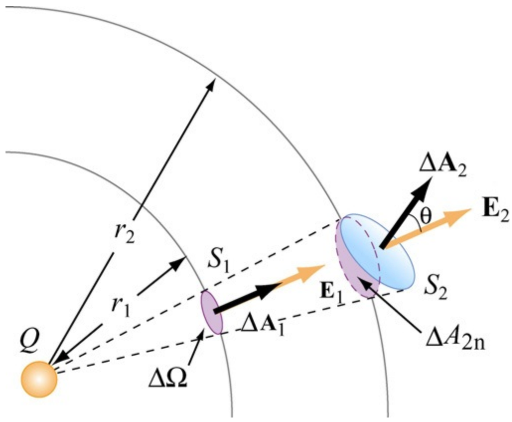
Obr. 4.2.3: Různé Gaussovy plochy se stejnou velikostí toku vektoru elektrické intenzity.

Věta, která vyjadřuje, že celkový tok libovolnou uzavřenou plochou je úměrný celkovému náboji Q, který uzavírá, je známa jako Gaussův zákon. Matematicky je možné tento zákon vyjádřit jako

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} . \quad \text{(Gaussův zákon)} \tag{4.2.5}$$

Jednou z cest, jak ukázat platnost Gaussova zákona, je povšimnout si, že počet silokřivek, které opouštějí Gaussovu plochu, je nezávislý na jejím tvaru, která obklopuje daný náboj.

Abychom Gaussův zákon mohli dokázat, zavedeme si k tomu koncept prostorového úhlu. Nechť $\Delta\mathbf{A}_1 = \Delta A_1 \hat{\mathbf{r}}$ je element kulové plochy S_1 o poloměru r_1, viz obrázek 4.2.4.



Obr. 4.2.4: Prostorový úhel $\Delta\Omega$ vytíná na ploše element ΔA.

Prostorový úhel, pod kterým se ploška $\Delta\mathbf{A}_1 = \Delta A_1 \hat{\mathbf{r}}$ jeví při pohledu z bodu Q ve středu koule je definován jako

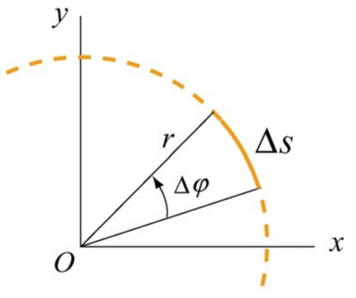
$$\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta A_1}{r_1^2} . \tag{4.2.6}$$

Velikost prostorových úhlů měříme ve steradiánech (sr). Protože obsah kulové plochy S_1 je $4\pi r_1^2$, je velikost plného prostorového úhlu rovna

$$\Omega = \frac{4\pi r_1^2}{r_1^2} = 4\pi . \tag{4.2.7}$$

Zavedení pojmu prostorového úhlu ve třech dimenzích je analogické pojmu úhlu v dvourozměrném případě. Obrázek 4.2.5 ukazuje, že úhel $\Delta\varphi$ je poměr délky oblouku Δs k poloměru kruhu r:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} . \tag{4.2.8}$$



Obr. 4.2.5: Úhel $\Delta\varphi$ vytíná na kružnici o poloměru r oblouk Δs.

Protože celkový obvod kruhu je $s = 2\pi r$, je velikost plného úhlu rovna

$$\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \,. \tag{4.2.9}$$

Na obrázku 4.2.4 svírá plocha $\Delta\mathbf{A}_2$ s radiálním jednotkovým vektorem $\hat{\mathbf{r}}$ úhel q. Prostorový úhel, pod kterým se plocha ΔA_2 jeví z bodu Q, je

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\mathbf{A}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r_2^2} = \frac{\Delta A_2 \cos\theta}{r_2^2} = \frac{\Delta A_{2\mathrm{n}}}{r_2^2} \,, \tag{4.2.10}$$

kde $\Delta A_{2\mathrm{n}} = \Delta A_2 \cos\theta$ je radiální projekce plochy ΔA_2 na plochu S_2 o poloměru r_2, která je soustředná s plochou S_1.

Jak je z obrázku 4.2.4 patrné, je prostorový úhel, který vytíná na povrchu S_1 plochu ΔA_1 a na povrchu S_2 plochu ΔA_1 stejný:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A_1}{r_1^2} = \frac{\Delta A_2 \cos\theta}{r_2^2} \,. \tag{4.2.11}$$

Ve středu koncentrických kulových ploch je umístěn náboj Q. Velikost intenzity E_1 a E_2 jeho pole, které naměříme ve středu ploch ΔA_1 a ΔA_2 je dána Coulombovým zákonem:

$$E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_i^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{E_2}{E_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \,. \tag{4.2.12}$$

Tok vektoru intenzity plochou ΔA_1 na povrchu S_1 je

$$\Delta\Phi_1 = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A}_1 = E_1 \Delta A_1 \tag{4.2.13}$$

a tok plochou ΔA_2 na povrchu S_2 je

$$\Delta\Phi_2 = \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{A}_2 = E_2 \Delta A_2 \cos\theta = E_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\cdot\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) A_1 = E_1 \Delta A_1 = \Phi_1 \,. \tag{4.2.14}$$

Vidíme tedy, že elektrický tok libovolnými elementy plochy, které vytínají stejný prostorový úhel, je konstantní, a nezávisí na jejich tvaru či orientaci.

Gaussův zákon je velmi mocným nástrojem pro výpočet elektrických polí. Jeho snadná aplikace je nicméně možná pouze v případě těch systémů, které vykazují určitou symetrii, zejména válcovou, sférickou nebo rovinnou. V následující tabulce uvádíme přehled případů, kdy je pro výpočet elektrického pole vhodné využít platnosti Gaussova zákona. Uvádíme i příslušný tvar Gaussovy plochy.

Symetrie	**Systém**	**Gaussova plocha**	**Příklady**
válcová	nekonečně dlouhá tyč	souosý válec	příklad 4.1
rovinná	nekonečná rovina	válec	příklad 4.2
sférická	koule, kulová vrstva	soustředné koule	příklady 4.3 a 4.4

Při aplikaci Gaussova zákona je užitečné provést následující kroky:

(1) Určit symetrii rozložení náboje

(2) Určit směr intenzity elektrického pole a „Gaussovou plochu“, na které je velikost elektrického pole konstantní.

(3) Rozdělit prostor na jednotlivé oblasti, které odpovídají jednotlivým nábojům. Pro každou oblast spočítat celkový náboj, který je ohraničen Gaussovou plochou.

(4) Pro každou oblast vypočítat elektrický tok Φ_E Gaussovou plochou.

P Příklad 4.1: Nekonečně dlouhá tyč nabitá s konstantní hustotou náboje

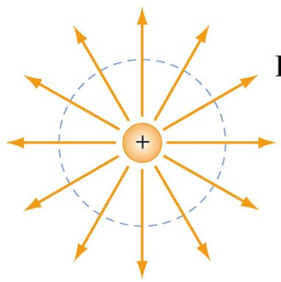
Nekonečně dlouhá tyč zanedbatelného poloměru je homogenně nabita s hustotou náboje λ. Vypočtěte intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti r.

Řešení:

Tento příklad budeme řešit postupně v krocích, které jsme uvedli výše.

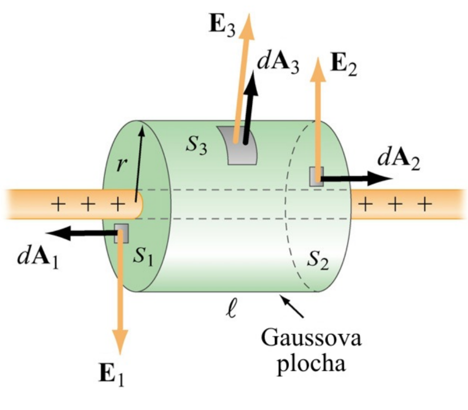
(1) Nekonečně dlouhá tyč má válcovou symetrii.

(2) Nábojová hustota je podél tyče konstantní a vektor intenzity elektrického pole **E** musí mířit radiálně směrem od osy tyče (obrázek 4.2.6). Intenzita elektrického pole na povrchu válcových ploch o poloměru r s osou totožnou s osou tyče musí být konstantní, proto jako Gaussovu plochu zvolíme právě plášť válce.



Obr. 4.2.6: Silokřivky elektrického pole (osa symetrie tyče a osa Gaussova válce je kolmá k rovině nákresny).

(3) Velikost celkového náboje, obklopeného Gaussovou plochou, tedy pláštěm válce o poloměru r a délce l (obrázek 4.2.7), je $q_{\mathrm{celk}} = \lambda l$.



Obr. 4.2.7: Gaussova plocha pro homogenně nabitou tyč.

(4) Jak je patrné z obrázku 4.2.7, skládá se Gaussova plocha ze třech částí: dvou podstav S_1 a S_2 a stěny pláště S_3. Tok Gaussovým povrchem je

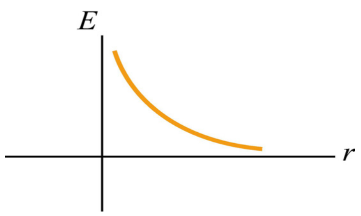
$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oiint_{S_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oiint_{S_1} \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{A}_1 + \oiint_{S_2} \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{A}_2 + \oiint_{S_3} \mathbf{E}_3\cdot d\mathbf{A}_3 = \\ &= 0+0+E_3A_3 = E\left(2\pi r\ell\right), \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

kde jsme položili $E_3 = E$. Jak lze nahlédnout z obrázku, podstavami válce neprochází žádný tok, neboť normály ploch $d\mathbf{A}_1$ a $d\mathbf{A}_2$ jsou kolmé ke směru vektoru intenzity elektrického pole, který míří radiálně.

(5) Dosazením do Gaussova zákona dostáváme

$$E\left(2\pi r\ell\right) = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{4.2.16}$$

Tento výsledek je zcela shodný s tím, který jsme odvodili v rovnici (2.10.11) s použitím Coulombova zákona. Poznamenejme, že výsledek nezávisí na délce ℓ válce, závisí pouze na převrácené hodnotě r, tj. vzdálenosti od osy symetrie. Kvalitativní chování E jako funkce r je zakresleno na obrázku 4.2.8.



Obr. 4.2.8: Elektrické pole ve vzdálenosti r od osy homogenně nabité tyče.

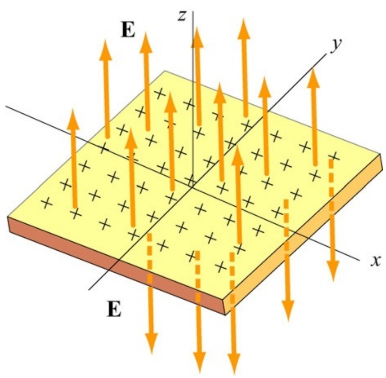
P Příklad 4.2: Nekonečná nabitá rovina

Mějme nekonečně velikou nevodivou rovinu ve směru xy, rovnoměrně nabitou s nábojovou hustotou σ. Určete velikost intenzity elektrického pole v libovolném bodě prostoru.

Řešení:

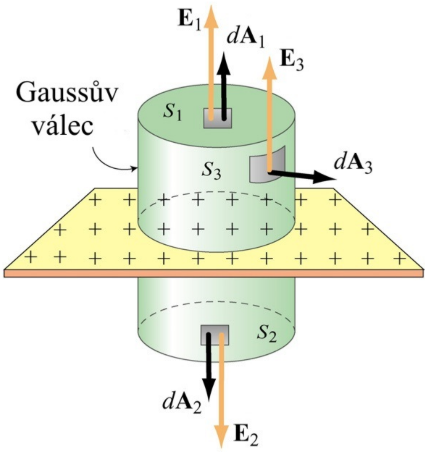
(1) Nekonečně veliká rovina představuje rovinnou symetrii.

(2) Protože je na ploše náboj rozložen rovnoměrně, musí vektor intenzity elektrického pole $\mathbf{E}$ mířit ve směru kolmém k rovině, $\mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{k}}$. Velikost intenzity elektrického pole je v rovinách rovnoběžných s nabitou nevodivou rovinou konstantní.



Obr. 4.2.9: Elektrické pole rovnoměrně nabité roviny.

Jako Gaussovskou plochu si opět zvolíme válec, tentokráte ovšem s osou kolmou na nabitou desku, tj. rovnoběžně s vektorem intenzity (obrázek 4.2.10). Gaussova plocha se opět skládá ze třech částí: dvou podstav S_1 a S_2 a z pláště o obsahu S_3.



Obr. 4.2.10: Gaussova plocha pro výpočet elektrického pole velké nabité desky.

(3) Protože je uvažovaná plocha nabita rovnoměrně, je celkový náboj ohraničený Gaussovou plochou $q_{\mathrm{celk}} = \sigma A$, kde $A = A_1 = A_2$ je obsah podstavy válce.

(4) Celkový tok vektoru intenzity zvolenou uzavřenou plochou bude

$$\begin{gathered}\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oiint_{S_1} \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{A}_1 + \oiint_{S_2} \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{A}_2 + \oiint_{S_3} \mathbf{E}_3\cdot d\mathbf{A}_3 = \\ = E_1A_1 + E_2A_2 + 0 = \left(E_1 + E_2\right)A\end{gathered} \tag{4.2.17}$$

Protože obě podstavy se nacházejí ve stejné vzdálenosti od nabité roviny, je ze symetrie zřejmě, že intenzita elektrického pole na nich bude stejná, tj. $E_1 = E_2 = E$. Celkový tok tedy můžeme vyjádřit výrazem

$$\Phi_E = 2EA\,. \tag{4.2.18}$$

(5) Po dosazení do Gaussova zákona dostáváme

$$2EA = \frac{q_{\mathrm{celk}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}\,,$$

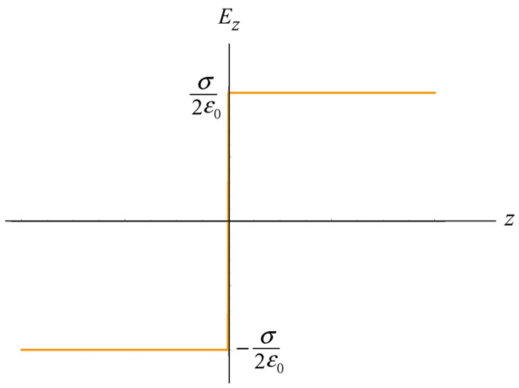
odkud plyne

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{4.2.19}$$

Pro vektorový zápis dostaneme výrazy

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}, & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}, & z < 0 \end{cases} \tag{4.2.20}$$

Vidíme tedy, že elektrické pole nekonečně veliké nevodivé rovnoměrně nabité roviny je prostorově homogenní. Výsledek, který je vykreslen na obrázku 4.2.11, se zcela shoduje s tím, který jsme s použitím Coulombova zákona odvodili v rovnici (2.10.21).



Obr. 4.2.11: Elektrické pole nekonečně velké nevodivé rovnoměrně nabité roviny.

Opět si povšimněme nespojitosti elektrického pole při průchodu nabitou rovinou:

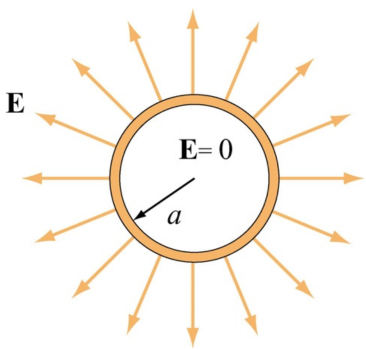
$$\Delta E_z = E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{4.2.21}$$

P Příklad 4.3: Kulová vrstva

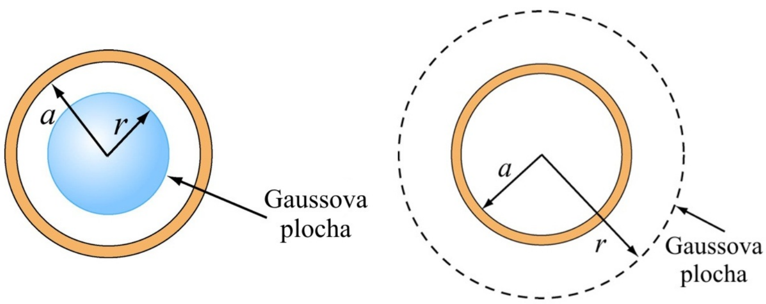
Tenká kulová vrstva o poloměru a má po svém povrchu rovnoměrně rozložen náboj $+Q$. Vypočtěte intenzitu elektrického pole uvnitř i vně kulové vrstvy.

Řešení:

Rozložení náboje je kulově symetrické, plošná hustota náboje je $\sigma = Q/A_k = Q/4\pi a^2$, kde A_k je velikost povrchu kulové vrstvy. Vektor intenzity elektrického pole **E** musí být radiálně symetrický a mířit směrem ven (obrázek 4.2.12). Oblasti, kde je $r \le a$ a $r \ge a$ vyšetříme zvlášť.



Obr. 4.2.12: Elektrické pole rovnoměrně nabité kulové vrstvy.



Obr. 4.2.13: Gaussovy plochy pro pro $r \le a$ a $r \ge a$.

Případ 1: $r \le a$

Gaussovu plochu si zvolíme ve tvaru koule o poloměru $r \le a$. Tuto situaci znázorňuje obrázek 4.2.13 nalevo.

Celkový náboj uzavřený zvolenou Gaussovou plochou je $q_{celk} = 0$, neboť všechny náboje se nacházejí na povrchu kulové vrstvy. Z Gaussova zákona $\Phi_E = q_{celk}/\varepsilon_0$ tedy okamžitě plyne, že pro $r < a$ je

$$E = 0 . \tag{4.2.22}$$

Případ 2: $r \ge a$:

V tomto případě je Gaussovou plochou plášť koule o poloměru $r \ge a$, viz obrázek 4.2.13 napravo. Protože je celá nabitá kulová vrstva obklopena námi zvolenou Gaussovou plochou, je celkový náboj v ní uzavřený roven

$$q_{celk} = Q .$$

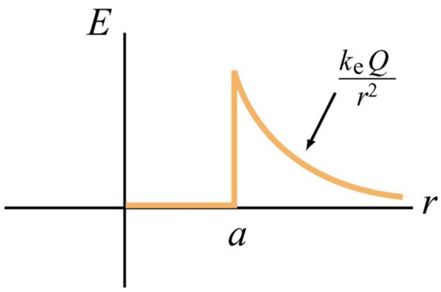
Tok vektoru zvolenou plochou je tedy

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA = E\left(4\pi r^2\right).$$

Po dosazení do Gaussova zákona tak pro případ $r \ge a$ dostaneme

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}; \quad r \ge a . \tag{4.2.23}$$

Všimněte si, že elektrické pole vně nabité sféry je stejné, jako kdyby byl celkový náboj koncentrován do jediného bodu ve středu symetrie. Průběh intenzity elektrického pole E v závislosti na vzdálenosti r od středu znázorňuje obrázek 4.2.14.



Obr. 4.2.14: Elektrické pole rovnoměrně nabité kulové vrstvy o poloměru a v závislosti na vzdálenosti r od jejího středu.

Stejně jako v případě nevodivé nabité roviny můžeme opět pozorovat nespojitost intenzity E při průchodu stěnou $r = a$. Změna pole při přechodu z vnitřního do vnějšího prostředí je

$$\Delta E = E_+ - E_- = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

P Příklad 4.4: Nevodivá koule

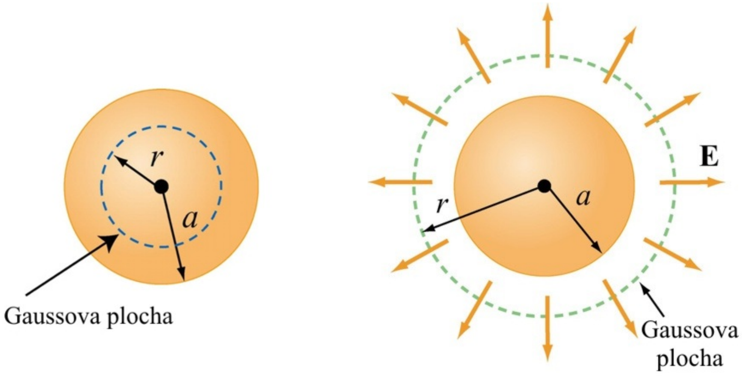
Elektrický náboj o velikosti $+Q$ je rovnoměrně rozložen v celém objemu nevodivé plné koule o poloměru a.Určete průběh intenzity elektrického pole uvnitř i vně koule.

Řešení:

Náboj je rozložen s kulovou symetrií s nábojovou hustotou rovnou

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{(4/3)\pi a^3}, \tag{4.2.24}$$

kde V je objem dané koule. Elektrické pole $\mathbf{E}$ je opět radiálně symetrické a míří od středu směrem ven. Na kulových plochách o poloměru r je intenzita pole konstantní. Opět odděleně vyšetříme případy, kdy je $r \le a$ a $r \ge a$.



Obr. 4.2.15: Gaussova plocha o poloměru r pro výpočet pole nabité koule o poloměru a pro případ $r \le a$ a $r \ge a$.

Případ 1: $r \le a$**:**

Mějme Gaussovu plochu ve tvaru kulového pláště o poloměru $r \le a$, jak ukazuje obrázek 4.2.15 nalevo. Tok Gaussovou plochou bude

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA = E\left(4\pi r^2\right)$$

Uvážíme-li rovnoměrné rozložení náboje, je velikost celkového náboje ohraničeného Gaussovou plochou

$$q_{\text{celk}} = \int_V \rho dV = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\left(\frac{r^3}{a^3}\right). \tag{4.2.25}$$

Tento náboj je tedy úměrný objemu ohraničenému Gaussovou plochou. Aplikací Gaussova zákona $\Phi_E = q_{\text{celk}}/\varepsilon_0$ dostaneme

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right), \quad \text{neboli}$$

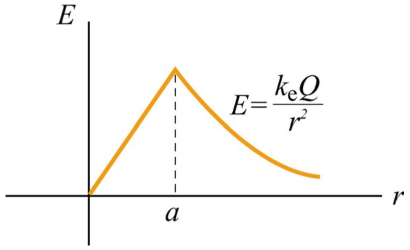
$$\boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}.} \tag{4.2.26}$$

Případ 2: $r \ge a$**:**

Pro tento případ je Gaussovou plochou plášť koule o poloměru $r \ge a$, viz obrázek 4.2.15 napravo. Protože je poloměr Gaussovy plochy větší než poloměr nabité koule, je celkový náboj ohraničený zvolenou Gaussovou plochou roven $q_{\text{celk}} = Q$. Elektrický tok danou plochou je $\Phi_E = E\left(4\pi r^2\right)$ a po aplikaci Gaussova zákona dostaneme $E\left(4\pi r^2\right) = Q/\varepsilon_0$, neboli

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}. \tag{4.2.27}$$

Průběh elektrického pole vně nabité koule je opět stejný, jako kdyby byl veškerý náboj soustředěn do jejího středu. Průběh intenzity elektrického pole E v závislosti na vzdálenosti r od středu koule je vykreslen na obrázku 4.2.16.



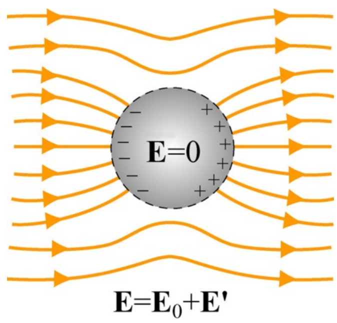
Obr. 4.2.16: Průběh intenzity elektrického pole homogenně nabité nevodivé koule o poloměru a v závislosti na vzdálenosti r od středu koule.

4.3 Vodiče

V izolantech, jako je třeba sklo nebo papír, jsou elektrony pevně vázány uvnitř elektronových obalů atomů a nemohou se volně pohybovat. Naopak vodiče jsou charakteristické tím, že elektrony se mohou volně pohybovat v celém jejich objemu. Základní vlastnosti vodičů jsou následující:

(1) *Uvnitř vodiče je elektrické pole nulové.*

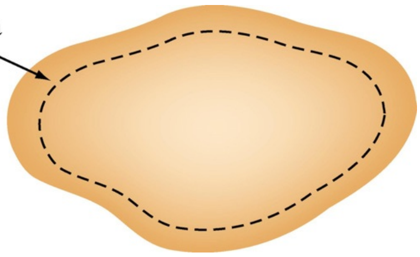
Pokud umístíme vodič ve tvaru koule do homogenního elektrického pole $\mathbf{E}_0$, dojde k jeho polarizaci, tj. přesunu kladného a záporného náboje na opačné strany vodiče (viz obrázek 4.3.1 dále). Dojde tedy k indukci elektrického pole $\mathbf{E}'$. Uvnitř vodiče míří vektor intenzity indukovaného pole $\mathbf{E}'$ opačným směrem od vektoru $\mathbf{E}_0$. Protože jsou náboje volné, budou se pohybovat do té doby, než se obě pole vzájemně vyruší. V tomto bodě se ustaví elektrostatická rovnováha, při které je výsledné pole $\mathbf{E}$ uvnitř vodiče nulové. Vně vodiče má indukované pole $\mathbf{E}'$ díky polarizaci vodiče charakter pole elektrického dipólu. Výsledné pole je prostým součtem obou polí, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$. Silokřivky výsledného pole jsou znázorněny na obrázku 4.3.1.



Obr. 4.3.1: Vodič v homogenním elektrickém poli $\mathbf{E}_0$.

(2) *Náboj vodiče se nachází pouze na jeho povrchu.*

Pokud by se nějaký náboj nacházel uvnitř vodiče, pak by intenzita pole **E** uvnitř vodiče musela být podle Gaussova zákona nenulová, viz rovnice 4.3.2. To jsme však v předchozím odstavci vyloučili. Nese-li proto vodič nějaký elektrický náboj, musí se tento nacházet výhradně na jeho povrchu.

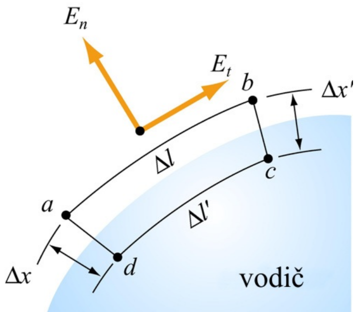


Obr. 4.3.2: Gaussova plocha uvnitř vodiče. Náboj uzavřený touto plochou je nulový.

(3) *Tečná složka pole* **E** *je na povrchu vodiče nulová.*

Již jsme si ukázali, že uvnitř izolovaného vodiče je elektrické pole v jeho nitru nulové. Jakýkoli náboj, který je vodiči předán, se proto musí díky platnosti Gaussova zákona nacházet na jeho povrchu.

Uvažujme křivkový integrál $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ po uzavřené křivce zakreslené na obrázku 4.3.3:



Obr. 4.3.3: Normálová a tečná složka elektrického pole vně vodiče.

Protože elektrické pole **E** je pole konzervativní, je křivkový integrál mezi body *abcda* roven nule:

$$\oint_{abcda} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_t(\Delta l) - E_n(\Delta x') + 0(\Delta l) + E_n(\Delta x') = 0,$$

kde E_t a E_n jsou tečná a normálová složka elektrického pole. V limitním případě $\Delta x \to 0$ a $\Delta x' \to 0$ dostaneme podmínku $E_t \Delta l = 0$. Protože je však délkový element Δl nenulový, musí být nutně nulová tečná složka elektrického pole, tj.

$$\boxed{E_t = 0 \quad \text{(na povrchu vodiče).}} \tag{4.3.1}$$

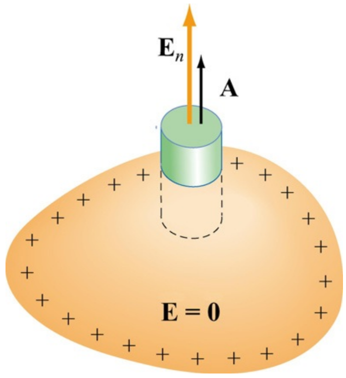
Odtud dospíváme k závěru, že povrch vodiče ve stavu elektrostatické rovnováhy je *ekvipotenciálním povrchem*. Abychom ověřili platnost této úvahy, předpokládejme na povrchu vodiče dva bodu A a B. Protože je tečná složka E_t nulová, je rozdíl potenciálů

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

neboť **E** je kolmé na $d\mathbf{s}$. Proto musejí mít body A a B stejný potenciál $V_A = V_B$.

(4) *U povrchu vodiče je elektrické pole* **E** *kolmé k jeho povrchu.*

Pokud je tečná složka pole **E** zpočátku nenulová, dojde k pohybu nábojů, který způsobí, že tato složka pole zcela vymizí. Pole má proto nenulovou pouze normálovou složku a vektor intenzity je proto kolmý k povrchu vodiče.



Obr. 4.3.3: Gaussova plocha pro výpočet elektrického pole vně vodiče.

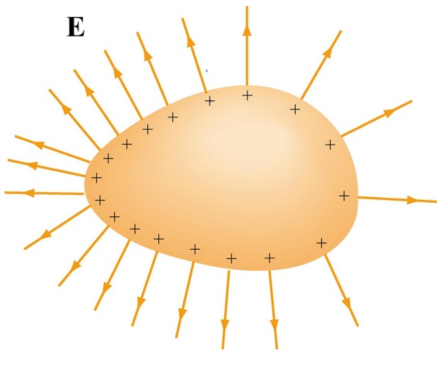
Abychom vypočítali intenzitu elektrického pole v blízkosti povrchu vodiče, využijeme Gaussovy plochy ve tvaru válce s hlavní osou kolmou k jeho povrchu, viz obrázek 4.3.3. S použitím Gaussova zákona dostaneme

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E_n A + (0) \cdot A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}, \tag{4.3.2}$$

neboli

$$\boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.} \tag{4.3.3}$$

Tento výsledek je platný pro vodič libovolného tvaru. Rozložení a tvar silokřivek elektrického pole v blízkosti vodiče ukazuje obrázek 4.3.4.



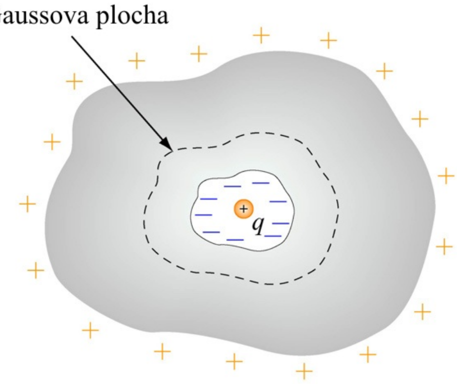
Obr. 4.3.4: V blízkosti povrchu vodiče je vektor intenzity elektrického pole **E** vždy kolmý k povrchu.

Stejně jako v případech nekonečně velké nabité nevodivé roviny a kulové vrstvy je normálová složka pole nespojitá a skokově se mění o

$$\Delta E_n = E_n^{(+)} - E_n^{(-)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

P Příklad 4.5: Vodič s nábojem v dutině

Představme si vodič, ve kterém je dutina, viz obrázek 4.3.5. Tento vodič nese celkový náboj $+Q$. Uvnitř dutiny se navíc nachází další náboj o velikosti q. Jaký náboj se bude nacházet na vnějším povrchu vodiče?



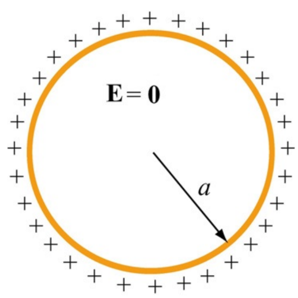
Obr. 4.3.5: Vodič s dutinou.

Řešení:

Protože elektrické pole uvnitř vodiče musí být nulové, musí být nulový i náboj, který je ohraničen Gaussovou plochou, která je na obrázku 4.3.5 zakreslena. Odtud je možné odvodit, že na povrchu dutiny musí být indukován náboj o velikosti $-q$. Protože samotný vodič je nabit nábojem $+Q$, musí být celkový náboj nacházející se na jeho povrchu roven $Q+q$.

P Příklad 4.6: Potenciál nabité kulové vrstvy

Mějme kovovou kulovou vrstvu o poloměru a, která je nabita nábojem Q, dle obrázku 4.3.6.



Obr. 4.3.6: Dutá koule o poloměru a s nábojem Q.

(a) Nalezněte průběh elektrického potenciálu.

(b) Vypočítejte potenciální energii systému.

Řešení:

(a) V příkladu 4.3 jsme ukázali, že intenzita elektrického pole nabité kulové vrstvy je

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}, & r > a \\ 0, & r < a \end{cases}$$

Elektrický potenciál můžeme vypočítat s pomocí vztahu 3.1.9:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}\,.$$

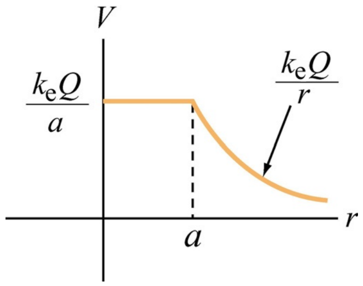
Pro $r > a$ máme

$$V(r) - V(\infty) = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = k_\mathrm{e}\frac{Q}{r}, \tag{4.3.4}$$

kde jsme jako referenční hladinu položili $V(\infty) = 0$. Pro případ $r < a$ dostaneme

$$\begin{aligned} V(r) - V(\infty) &= -\int_\infty^a dr E(r > a) - \cancel{\int_a^r dr E(r < a)} = \\ &= -\int_\infty^a dr \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a} = k_\mathrm{e}\frac{Q}{a} \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Průběh potenciálu ukazuje obrázek 4.3.7. Uvnitř vodiče je dle očekávání potenciál V konstantní.



Obr. 4.3.7: Elektrický potenciál nabité vodivé kulové vrstvy v závislosti na vzdálenosti r od jejího středu.

(b) Potenciální energii U si můžeme představit jako práci, kterou musíme vykonat, abychom uvedli systém do počátečního stavu. Abychom kulovou vrstvu nabili, musíme z nekonečna přinést náboj na její povrch.

Předpokládejme, že náboj, soustředěný na kouli v určitém okamžiku, je q. Potenciál na povrchu koule je potom $V = q / 4\pi\varepsilon_0 a$. Práce, která musí být vykonána pro přenesení náboje dq z nekonečna na povrch koule je tedy

$$dW = V dq = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right) dq\,. \tag{4.3.6}$$

Celková práce, potřebná k tomu, abychom kouli nabili nábojem Q je

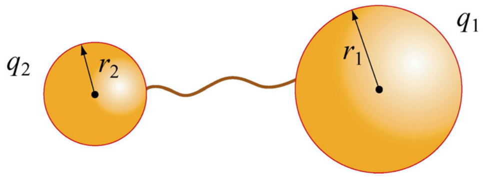
$$W = \int_0^Q dq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}. \tag{4.3.7}$$

Protože $V = q / 4\pi\varepsilon_0 a$ a $W = U$, zjednodušuje se předchozí výraz na

$$U = \frac{1}{2} QV \tag{4.3.8}$$

Výsledek můžeme porovnat s případem bodového náboje. Práce potřebná k přenesení bodového náboje Q z nekonečna do bodu o potenciálu V je $W = QV$. Potenciální energie bodového náboje je tedy $U = QV$.

Nyní uvažujme dvě kovové koule o poloměrech r_1 a r_2, které jsou spojeny tenkým vodivým drátem, jak ukazuje obrázek 4.3.8.



Obr. 4.3.8: Dvě vodivé koule spojené drátem.

Dokud nedojde k ustavení rovnováhy, bude docházet k přenosu náboje. V okamžiku rovnováhy budou mít obě koule stejný potenciál $V_1 = V_2 = V$. Předpokládejme, že náboje na koulích v rovnováze budou q_1 a q_2. Při zanedbání vlivu drátu, který spojuje obě koule, plyne z rovnosti potenciálů

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2},$$

tedy

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}, \tag{4.3.9}$$

za předpokladu, že se od sebe koule nacházejí v dostatečně velké vzdálenosti, a rozložení náboje na jejich povrchu je tedy rovnoměrné. Pro velikost intenzit elektrických polí platí

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}, \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}, \tag{4.3.10}$$

kde σ_1 a σ_2 jsou plošné hustoty náboje na povrchu koule 1, respektive 2. Spojením obou rovnic dostaneme jednoduchý vztah

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}}. \tag{4.3.11}$$

Vidíme, že plošná hustota náboje je nepřímo úměrná poloměru, z čehož se dá usoudit, že v oblasti s největším zakřivením (tj. nejmenším poloměrem) je nejvyšší hodnota plošné hustoty náboje. Intenzita elektrického pole na povrchu vodiče je proto největší v místech, kde je vodič „nejostřejší“. Z tohoto důvodu mají bleskosvody tvar zašpičatělé tyče.

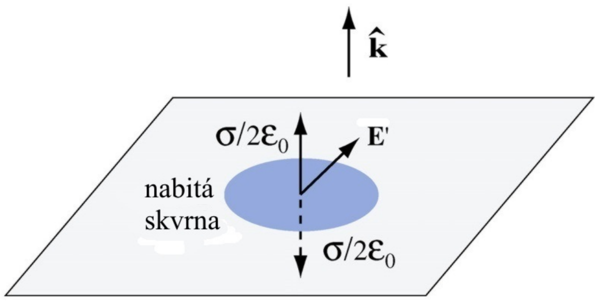
4.4 Síla působící ve vodiči

Zjistili jsme, že na hranici povrchu vodiče, rovnoměrně nabitého s plošnou hustotou náboje σ, je tečná složka intenzity elektrického pole nulová, a tudíž spojitá, zatímco normálová složka se na rozhraní mění skokem o $\Delta E_n = \sigma/\varepsilon_0$. Na povrchu vodiče uvažujme malou skvrnu s nábojem, viz obrázek 4.4.1.

Jaká síla působí na tuto oblast? Abychom odpověděli na tuto otázku, napišme celkové pole vně povrchu jako

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}', \tag{4.4.1}$$

kde $\mathbf{E}_s$ je elektrické pole generované nabitou skvrnou a $\mathbf{E}'$ je elektrické pole ostatních nábojů.



Obr. 4.4.1: Síla působící na povrchu vodiči.

Z třetího Newtonova zákona víme, že oblast nemůže působit sama na sebe, takže síla, působící na nabitou skvrnu, musí mít původ v poli **E**´. Za předpokladu, že je nabitá skvrna rovinná, můžeme z Gaussova zákona vypočítat intenzitu elektrického pole generovaného skvrnou

$$\mathbf{E}_s = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}, & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}, & z < 0 \end{cases} \tag{4.4.2}$$

Z principu superpozice určíme celkovou intenzitu pole nad povrchem vodiče

$$\mathbf{E}_{\mathrm{nad}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{E}'. \tag{4.4.3}$$

Stejným způsobem můžeme určit i intenzitu pole pod povrchem vodiče, která je

$$\mathbf{E}_{\mathrm{pod}} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{E}'. \tag{4.4.4}$$

Všimněte si, že pole **E**´ je při průchodu povrchem spojité. Pokud bychom totiž odstranili skvrnu s nábojem, zbývající díra nemá plošný náboj a pole proto musí být spojité. K nespojitosti dochází jen přítomností plošného náboje. S užitím dvou předcházejících vztahů lze určit

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\mathrm{nad}} + \mathbf{E}_{\mathrm{pod}}) = \mathbf{E}_{\mathrm{avg}}. \tag{4.4.5}$$

V případě vodiče je $\mathbf{E}_{\mathrm{nad}} = (\sigma/\varepsilon_0)\,\hat{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{E}_{\mathrm{pod}} = 0$ a proto platí

$$\mathbf{E}_{\mathrm{avg}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}} + 0\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}. \tag{4.4.6}$$

Proto na skvrnu s nábojem působí síla

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{\mathrm{avg}} = (\sigma A)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}, \tag{4.4.7}$$

kde A je plocha oblasti s nábojem. Jedná se přesně o tu sílu, která způsobuje pohyb nábojů na povrchu vodiče do rovnovážného stavu, ve kterém má elektrické pole těsně nad povrchem vodiče hodnotu σ/ε_0 a uvnitř vodiče je nulové. Všimněte si, že bez ohledu na znaménko σ míří síla na nabitou skvrnu vždy směrem do pole.

S využitím vztahu, který jsme odvodili výše, můžeme definovat elektrostatický tlak působící na skvrnu s nábojem jako

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2, \tag{4.4.8}$$

kde E je velikost intenzity elektrického pole těsně nad danou oblastí. Tento tlak je přenášen prostřednictvím elektrického pole.

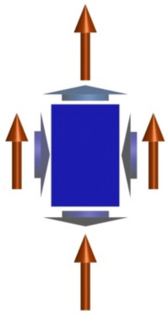
4.5 Shrnutí

- **Elektrický tok**, který prochází plochou $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{n}}$ je $\Phi_E = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = EA\cos\theta$**,** kde θ je úhel mezi vektorem intenzity elektrického pole $\mathbf{E}$ a jednotkovým vektorem $\hat{\mathbf{n}}$.
- Obecně je elektrický tok plochou možné vyjádřit ve tvaru $\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$.
- **Gaussův zákon** říká, že elektrický tok libovolnou uzavřenou plochou je úměrný celkovému náboji, který je plochou ohraničen: $\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = q_{\mathrm{celk}}/\varepsilon_0$. Gaussova zákona lze využít při výpočtu elektrického pole systému, který vykazuje určitou symetrii, zejména rovinnou, válcovou nebo sférickou.
- Normálová složka elektrického pole je při průchodu rozhraním, nabitým s plošnou hustotou náboje σ, nespojitá. Skokově se mění o $\Delta E_n = \sigma/\varepsilon_0$.
- Základní vlastnosti **vodiče** jsou: 1) elektrické pole uvnitř vodiče je nulové; 2) jakýkoli náboj ve vodiči musí být rozložen na jeho povrchu; 3) povrch vodiče je ekvipotenciální plochou a tečná složka vektoru intenzity elektrického pole je proto na povrchu vodiče nulová; 4) těsně nad povrchem vodiče je elektrické pole kolmé k jeho povrchu.
- **Elektrostatický tlak** na vodivém povrchu je $P = F/A = \sigma^2/2\varepsilon_0 = \varepsilon_0 E^2/2$.

4.6 Dodatek: Tah a tlak v elektrickém poli

V kapitole 4.4 jsme odvodili vztah pro elektrostatický tlak na povrchu vodiče, přenášený prostřednictvím elektrického pole. Nyní provedeme obecnější úvahu, ve které do elektrického pole umístíme uzavřenou plochu (imaginární kvádr).

Pokud se podíváme na vrchní podstavu kvádru, míří zde elektrické pole kolmo směrem od kvádru. Z hlediska Faradayovy teorie pole můžeme říci, že působením pole na podstavu vzniká *tah* tak, jako kdybychom kvádr zavěsili na strunu a pohybovali s ním směrem vzhůru. Podobně, podíváme-li se na dolní podstavu kvádru, vidíme, že orientace pole a normály plochy je antipararalení a v souladu s Faradayovou interpretací můžeme říci, že působením pole na plochu zde vzniká tah, který v tomto případě míří směrem dolů tak, jako bychom na podstavu připevnili strunu a táhli ji směrem dolů. (Přesné určení směru silového působení vyžaduje komplikovanější výklad se zavedením Maxwellova tenzoru napětí). Všimněte si, že směr působení je shodný s orientací normály podstav, bez ohledu na to, zda pole míří směrem do povrchu nebo od povrchu.



Obr. 4.6.1: Imaginární kvádr v elektrickém poli (pole je vyznačeno dlouhými oranžovými šipkami). Krátké šipky představují tlak (na stěny kvádru) a tah (na spodní a horní podstavu kvádru) přenášený polem.

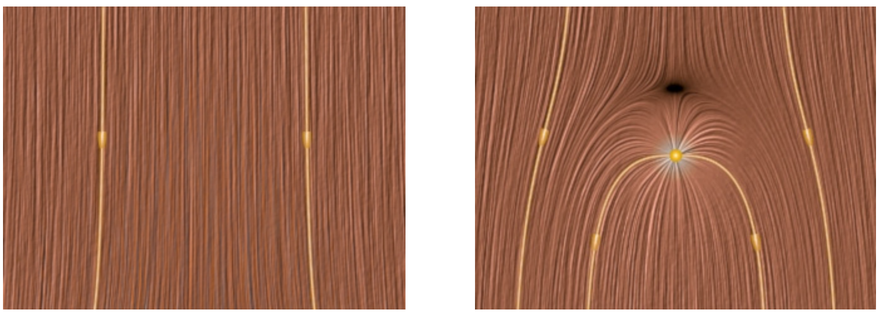
Na levé straně je vektor intenzity pole kolmý k normále plochy. Z hlediska Faradayovy teorie pole působí kolmo na silokřivky tlakem, mířícím směrem doprava. Obdobně na pravé straně kvádru působí pole kolmo na silokřivky a vzniká tlak směrem doleva.

Všimněte si, že v případě působení ve směru silokřivek vzniká „tah“, zatímco při působení ve směru kolmém vzniká „tlak“. Velikost tahu a tlaku na různé plochy myšleného kvádru z obrázku 4.6.1 je dána vztahem $\varepsilon_0 E^2/2$. Tato veličina má rozměr síly na jednotkovou plochu, neboli tlaku. Jde také o objemovou hustotu energie, která má fyzikální rozměr stejný jako tlak.

V Animace 4.1: Nabitá částice pohybující se v homogenním poli

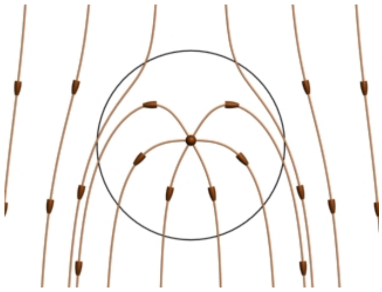
Jako příklad tlaků přenášených elektrickým polem a výměny energie mezi polem a nabitou částicí si můžeme představit kladný elektrický náboj $q > 0$, který se pohybuje v homogenním elektrickém poli.

Předpokládejme, že se náboj nejprve pohybuje směrem vzhůru podél osy z v homogenním elektrickém poli $\mathbf{E} = -E_0\hat{\mathbf{k}}$. Protože na náboj působí konstantní síla $\mathbf{F}_\mathrm{e} = q\mathbf{E} = -qE_0\hat{\mathbf{k}}$ směrem dolů, pohybující se náboj se po čase zastaví (řekněme v počátku souřadnic, $z = 0$) a poté se pohybuje směrem dolů. Pohyb náboje i výsledné pole vzniklé složením homogenního pole a pole náboje zachycuje ve dvou různých situacích obrázek 4.6.2.



Obr. 4.6.2: Kladný náboj se pohybuje v homogenním elektrickém poli, které míří směrem dolů. *Nalevo* – celková konfigurace pole ve chvíli, kdy se náboj nachází mimo zobrazenou oblast na záporné části osy z. *Napravo* – celková konfigurace pole ve chvíli, kdy se pohyb náboje zastavuje před tím, než se začne pohybovat zpět dolů podél osy z.

Jak můžeme interpretovat pohyb náboje pomocí představy tlaků a tahů, přenášených poli? Faraday by popsal sílu působící na náboj na obrázku 4.6.2 (napravo) směrem dolů následovně: Představte si, že je náboj obklopen myšlenou sférou se středem v místě náboje, jak ukazuje obrázek 4.6.3. Silokřivky procházející spodní polokoulí přenášejí tah, který je rovnoběžný s polem. Výsledkem je tahová síla působící na náboj v jeho dolní části. Silokřivky zakřivené kolem náboje v horní části myšlené koule přenášejí tlak kolmo na ně, výsledkem je tlaková síla působící v horní části náboje. Celkovým součtem obou sil je síla působící na náboj směrem dolů.



Obr. 4.6.3: Elektrický náboj v konstantním elektrickém poli, mířícím směrem dolů. Abychom mohli popsat účinky působení pole na náboj, obklopujeme jej myšlenou sférou, na jejímž povrchu pole působí.

Animace 4.6.2 velmi dobře ilustruje Faradayovu interpretaci tlaků a tahů přenášených polem. Při pohybu náboje vzhůru je v animaci patrné, že elektrické silokřivky jsou nad nábojem stlačené a pod nábojem roztažené. Konfigurace pole způsobí vznik síly na pohybující se náboj směrem dolů. Současně vzniká síla opačného směru na náboje vytvářející homogenní pole, které ale nevidíme. Pohyb vzhůru je postupně zastaven odporem prostředí, gradientem elektrického tlaku, který vždy působí do oblastí menší hustoty silokřivek elektrického pole.

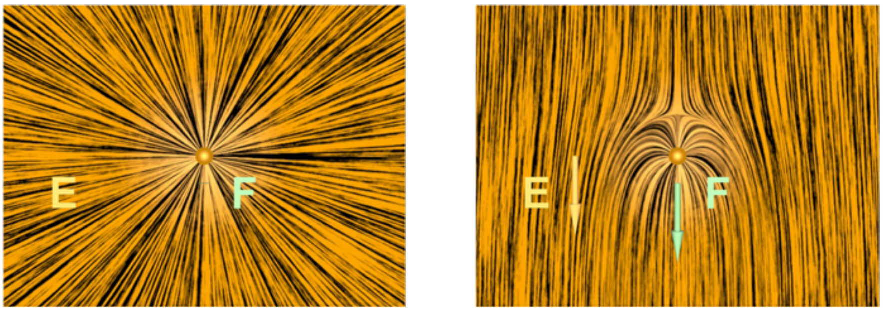
Kinetická energie vzhůru se pohybujícího náboje se snižuje podle toho, kolik energie se uchovává ve stlačeném elektrostatickém poli a naopak vzrůstá při pohybu částice směrem dolů. Navíc, protože silokřivky se pohybují v této animaci ve směru toku energie, můžeme přímo pozorovat tok elektromagnetické energie z náboje do pole, které ho obklopuje a zpomaluje. Naopak také můžeme pozorovat tok elektromagnetické energie zpět do náboje z pole v případě, že je náboj urychlován zpět dolů podél osy z.

A nakonec vezměme v úvahu zákon zachování hybnosti. Částice v animaci na obrázku 4.6.2 zcela otočí směr svého pohybu. Jak se v tomto procesu zachovává hybnost? Hybnost je zachována, protože hybnost pohybu v kladném směru osy z se zcela přenese z pohybujícího se náboje do nábojů, které generují homogenní elektrické pole (na obrázku nejsou znázorněny). Toto je zřejmé z konfigurace pole, která je znázorněna na obrázku 4.6.3. Tlak silokřivek pole, který náboj stlačuje směrem dolů je doprovázený napětím silokřivek, které tlačí vzhůru na náboje, které homogenní pole generují.

V Animace 4.2: Nabitá částice vložená do časově proměnného pole

Ve druhé ilustraci pnutí silokřivek přenášených elektrickými poli uvažujme kladný bodový náboj umístěný s počáteční nulovou rychlostí do vnějšího pole, které je homogenní v prostoru, ale proměnné v čase. Celé vnější pole se mění podle rovnice

$$\mathbf{E} = -E_0 \sin^4\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\hat{\mathbf{k}} \,. \qquad (4.6.1$$



Obr. 4.6.4: Dva snímky z animace znázorňující elektrické pole obklopující kladný náboj umístěný do časově proměnného elektrického pole směřujícího směrem dolů. Oranžové vektory znázorňují elektrické pole a bílé vektory jsou síly v místě náboje.

Obrázek 4.6.4 ukazuje dva snímky animace celkové konfigurace elektrického pole této situace. Na obrázku 4.6.4 (nalevo) je situace v čase $t = 0$, kdy je svislá složka elektrického pole nulová. Na snímku 4.6.4 (napravo) je znázorněna situace o čtvrt periody později, kdy dolů směřující elektrické pole narostlo do maxima. Stejně jako na obrázku 4.6.3 výše, interpretujeme konfiguraci pole na obrázku 4.6.4 (napravo) jako síť dolů směřujících sil působících na stacionární náboj. Animace spojená s obrázkem 4.6.4 velmi dobře ukazuje tok energie v nejbližším okolí náboje, kdy externí pole narůstá v čase, i s výsledným růstem tlaků, které na kladný náboj přenášejí dolů směřující síly.

Můžeme určit velikost síly působící na náboj, který je znázorněný na obrázku 4.6.4 (napravo) následovně. V čase, kdy je zachycen snímek 4.6.4 (napravo), je vzdálenost r_0 nad nábojem, ve kterém je elektrické pole náboje stejně velké, ale opačně orientované než je homogenní pole, určena rovnicí

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\,. \tag{4.6.2}$$

Povrch této kulové plochy je $A = 4\pi r_0^2 = q/\varepsilon_0 E_0$. Nyní v souhlase s rovnicí (4.4.8) je tlak silokřivek (síla na jednotku plochy) anebo tah silokřivek přenášený přes povrch této sféry obklopující náboj řádově $\varepsilon_0 E^2/2$. Protože je elektrické pole na povrchu sféry řádově E_0, je celková síla přenášená poli řádově $\varepsilon_0 E_0^2/2$ krát povrch sféry, čili

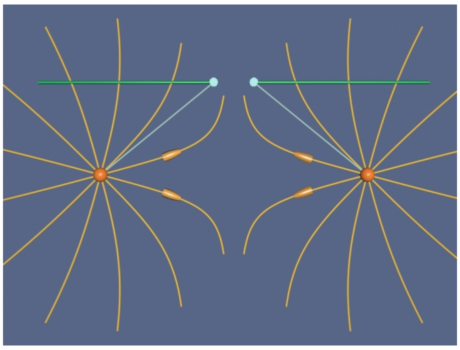
$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\left(4\pi r_0^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,\frac{q}{\varepsilon_0 E_0} \approx q\varepsilon_0\,,$$

jak bychom očekávali. Samozřejmě, že celková síla je kombinací tlaků silokřivek mířících dolů na vršek sféry a tahů silokřivek směřujících dolů a působících na spodek sféry. Nicméně hrubý odhad který jsme právě provedli ukazuje, že tlaky a tahy přenášené skrze povrch sféry obklopující náboj jsou prokazatelně řádu $\varepsilon_0 E^2/2$, jak jsme popsali v rovnici (4.4.8).

V Animace 4.3: Souhlasné a nesouhlasné náboje zavěšené na kyvadlech

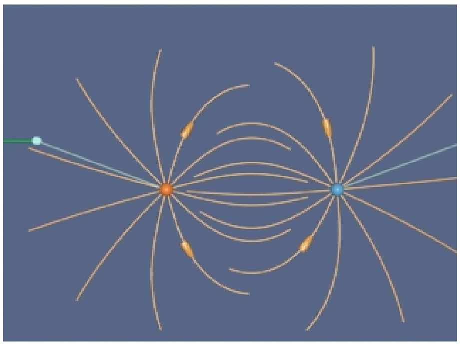
Nyní uvažujme dva náboje zavěšené na kyvadlech, jejichž osy ramen se mohou pohybovat k sobě a od sebe pod vlivem nějakého vnějšího činitele. Nejprve předpokládejme, dva náboje se stejnými znaménky a tudíž se vzájemně odpuzující. Obrázek 4.6.5 ukazuje situaci, kdy vnější činitel přitahuje ramena (na nichž jsou oba kladné náboje zavěšeny) k sobě. Gravitační síla táhne náboje dolů a elektrostatická síla je odpuzuje směrem od sebe podél jejich spojnice.

Chování elektromagnetického pole v tomto případě je příklad přenášení tlaků silokřivek přenášených kolmo k silokřivkám pole. Toto napětí silokřivek udržuje oba náboje oddělené od sebe, zatímco vnější činitel je zkouší stlačit k sobě.



Obr. 4.6.5: Dvě kyvadla, na kterých jsou zavěšeny náboje stejného znaménka. Když pohybujeme rameny k sobě, náboje jsou odtlačovány od sebe navzájem napětím silokřivek, které je kolmé k elektrickému poli. Pro přehlednost jsme přerušili silokřivky v dané vzdálenosti od nábojů.

Na druhou stranu uvažujme náboje, které mají opačná znaménka, a proto se tedy přitahují. Na obrázku 4.6.6 je znázorněná situace, kdy jsou ramena, na kterých jsou náboje zavěšeny, posouvána směrem k sobě. Gravitační síla náboje stlačuje směrem dolů a elektrostatická síla je oba navzájem k sobě přitahuje. Chování elektrických polí v této situaci je příkladem napětí silokřivek přenášených paralelně k silokřivkám. Toto pnutí silokřivek se snaží oba náboje k sobě přitáhnout.



Obr. 4.6.6: Dvě kyvadla se zavěšenými opačnými náboji.

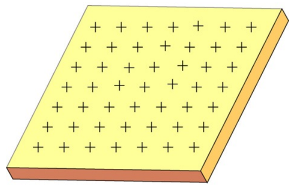
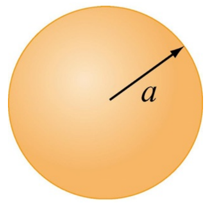
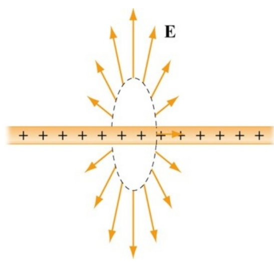
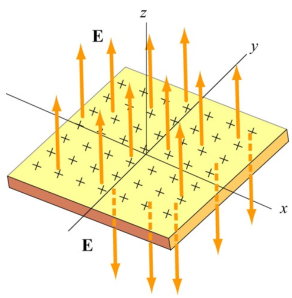
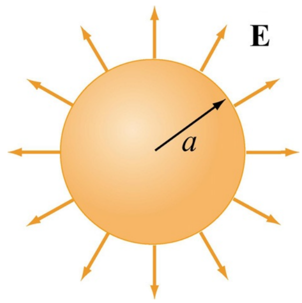
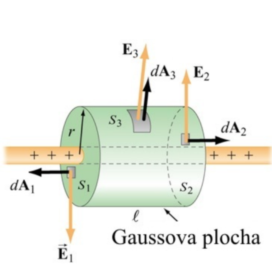
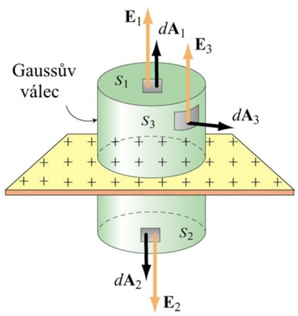
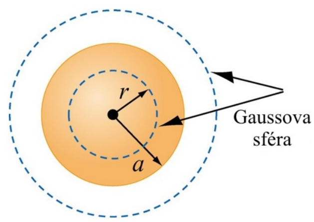
Když pohybujeme rameny k sobě, oba náboje jsou přitahovány k sobě napětím silokřivek paralelním k elektrickému poli. Silokřivky pole jsou opět uměle zakončeny z důvodů přehlednosti animace.

4.7 Algoritmy řešení příkladů

V této kapitole jsme si ukázali, jakým způsobem je možné vypočítat elektrické pole s pomocí Gaussova zákona:

$$\boxed{\Phi_E = \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

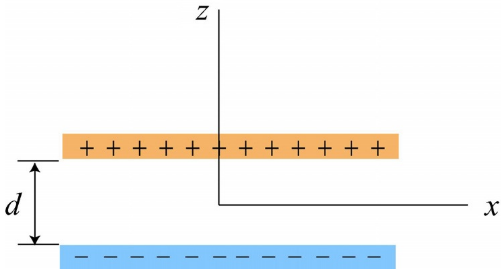
Algoritmus řešení je podrobně rozepsán v kapitole 4.2. Následující tabulka shrnuje procedury, kterými můžeme vypočítat elektrické pole nabité přímky, nekonečně velké nabité roviny a homogenně nabité koule.

Systém	Nekonečně dlouhá nabitá přímka	Nekonečně velká nabitá rovina	Homogenně nabitá koule
Obrázek			
Určení symetrie	válcová	rovinná	sférická
Určení směru **E**			
Rozdělení na oblasti	$r > 0$	$z > 0$ a $z < 0$	$r \leq a$ a $r \geq a$
Výběr Gaussovy plochy	 válec s osou ve směru přímky	 válec s osou kolmou k povrchu	 soustředná kulová vrstva
Výpočet elektrického toku	$\Phi_E = E(2\pi rl)$	$\Phi_E = EA + EA = 2EA$	$\Phi_E = E(4\pi r^2)$
Výpočet ohraničeného náboje	$q_{\text{celk}} = \lambda l$	$q_{\text{celk}} = \sigma A$	$q_{\text{celk}} = \begin{cases} Q(r/a)^3 & r \leq a \\ Q & r \geq a \end{cases}$
Výpočet E z Gaussova zákona $\Phi_E = q/\varepsilon_0$	$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	$E = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & r \leq a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r \geq a \end{cases}$

4.8 Řešené příklady

P 4.8.1: Dvě paralelní nevodivé roviny

Dvě paralelní nekonečně velké roviny z nevodivého materiálu leží v rovině xy a dělí je od sebe vzdálenost d. Obě roviny jsou rovnoměrně nabity se stejnou nábojovou hustotou, ale s opačným znaménkem, viz obrázek 4.8.1. Vypočtěte průběh intenzity elektrického pole.



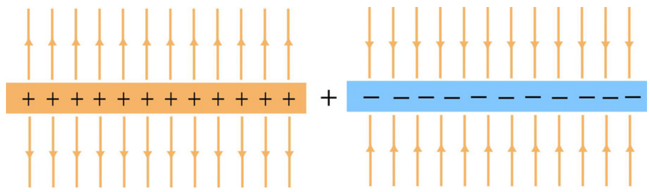
Obr. 4.8.1: Dvě roviny rovnoměrně nabité kladným a záporným nábojem.

Řešení:

Elektrické pole soustavy dvou rovin můžeme nalézt s využitím principu superpozice a s využitím výsledku, který jsme pro případ jediné roviny odvodily v příkladu 4.2. Protože jsou roviny nabity stejnými náboji opačné polarity, mají výsledná pole stejnou velikost:

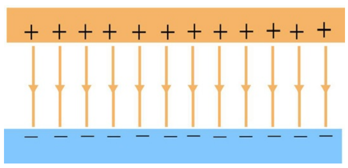
$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Silokřivky pole míří u kladně nabité roviny směrem od roviny a v případě záporně nabité roviny směrem do roviny. Situaci znázorňuje obrázek 4.8.2.



Obr. 4.8.2: Elektrické pole kladně a záporně nabitých rovin.

Pokud tato pole sečteme, zjistíme, že elektrické pole vně rovin je nulové, zatímco intenzita elektrického pole mezi rovinami je rovna dvojnásobku intenzity pole každé roviny.



Obr. 4.8.3: Elektrické pole dvou rovnoběžných rovin.

Elektrické pole kladné a záporné roviny je možné vyjádřit jako

$$\mathbf{E}_+ = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}, & z > d/2 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}, & z < d/2 \end{cases}, \quad \mathbf{E}_- = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}, & z > -d/2 \\ +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}, & z < -d/2 \end{cases}$$

Součtem těchto polí získáme

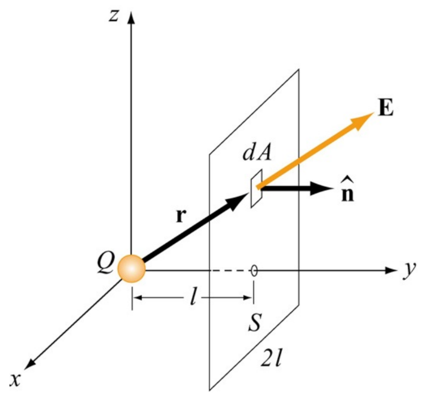
$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0\,\hat{\mathbf{k}}, & z > d/2\,, \\ -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{k}}, & d/2 > z > -d/2\,, \\ 0\,\hat{\mathbf{k}}, & z < -d/2\,. \end{cases} \tag{4.8.1}$$

Povšimněte si, že velikost intenzity elektrického pole mezi deskami je $E = \sigma/\varepsilon_0$, tedy dvojnásobek velikosti intenzity jediné desky. V oblastech, kde je $z > d/2$ a $z < -d/2$ je její velikost nulová.

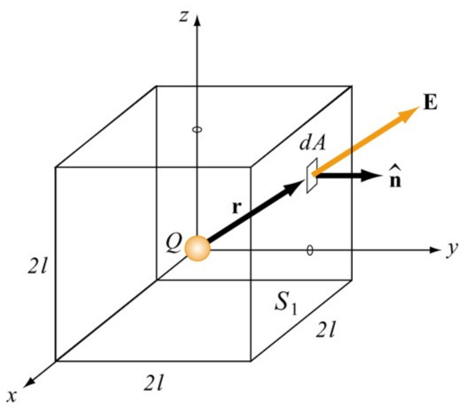
P 4.8.2: Elektrický tok čtvercovou plochou

(a) Vypočtěte elektrický tok čtvercovou plochou o hraně $2l$, který vzniká díky přítomnosti náboje $+Q$, který se nachází ve vzdálenosti l od středu čtverce, jak je zakresleno na obrázku 4.8.4.

(b) s využitím výsledku získaného v (a) předpokládejte, že náboj $+Q$ je umístěn ve středu krychle o hraně $2l$ (obrázek 4.8.5). Jaký je celkový tok vektoru intenzity elektrického pole všemi stěnami krychle?



Obr. 4.8.4: Elektrický tok čtvercovou plochou.



Obr. 4.8.5: Elektrický tok povrchem krychle.

Řešení:

(a) Elektrické pole náboje Q je

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\left(\frac{x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}}{r}\right),$$

kde v kartézské soustavě $r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$. Na povrchu S je $y = l$ a element plochy je $d\mathbf{A}=dA\hat{\mathbf{j}}=(dxdz)\hat{\mathbf{j}}$. Protože $\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}}=0$ a $\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}}=1$, dostáváme

$$\mathbf{E}.d\mathbf{A}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\left(\frac{x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}}{r}\right)\cdot(dx\,dz)\hat{\mathbf{j}}=\frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}dx\,dz\,.$$

Odtud získáme elektrický tok plochou S:

$$\Phi_E=\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}=\frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}dx\int_{-l}^{l}\frac{dz}{\left(x^2+l^2+z^2\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}dx\left[\frac{z}{\left(x^2+l^2\right)\left(x^2+l^2+z^2\right)^{1/2}}\right]_{-l}^{l}=$$

$$=\frac{Ql}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{l dx}{\left(x^2+l^2\right)\left(x^2+2l^2\right)^{1/2}}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2l^2}}\right)_{-l}^{l}=$$

$$=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\tan^{-1}(1/\sqrt{3})-\tan^{-1}(-1/\sqrt{3}\right]=\frac{Q}{6\varepsilon_0},$$

kde jsme využili následujících vztahů:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}=\frac{x}{a^2\left(x^2+a^2\right)^{1/2}},$$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)^{1/2}}=\frac{1}{a^2\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2\left(x^2+b^2\right)}},\quad b^2>a^2\,.$$

(b) z hlediska symetrie úlohy je jasné, že elektrický tok všemi stěnami krychle musí být stejný. Celkový tok povrchem krychle je tedy šestinásobek toku jednou stěnou:

$$\Phi_E=6\left(\frac{Q}{6\varepsilon_0}\right)=\frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

Výsledek potvrzuje, že elektrický tok Φ_E uzavřenou plochou je úměrný náboji, který je plochou ohraničen. Z výsledku je také opět zřejmé, že Φ_E nezávisí na tvaru plochy, kterou prochází.

4.8.3: Gaussův zákon pro gravitaci

Jaké je gravitační pole uvnitř kulové dutiny o poloměru a a hmotnosti m?

Řešení:

Vzhledem k tomu, že intenzita gravitačního pole také klesá s druhou mocninou vzdálenosti, můžeme zavést gravitační obdobu Gaussova zákona:

$$\Phi_g = -4\pi G m_{\text{celk}} \tag{4.8.2}$$

Jedinou změnou při výpočtu gravitačního toku je nahrazení konstanty $1/\varepsilon_0 \to -4\pi G$ a proměnné $q_{\text{celk}} \to m_{\text{celk}}$. Pro $r \le a$ je hmotnost uzavřená Gaussovou plochou nulová, protože všechna hmota se nachází v kulovém plášti. Gravitační tok Gaussovou plochou je tedy nulový což znamená, že uvnitř dutiny je gravitace nulová!

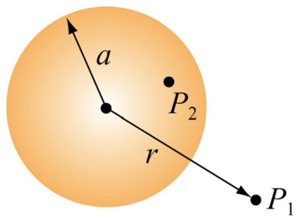
4.8.4: Elektrický potenciál homogenně nabité koule

Izolovaná koule o poloměru a je homogenně nabita s hustotou náboje ρ. Vypočítejte její potenciál v prostoru.

Řešení:

S využitím Gaussova zákona jsme v příkladu 4.4 ukázali, že elektrické pole takto rozloženého náboje je

$$E = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & r \le a\,, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r \ge a\,. \end{cases} \tag{4.8.3}$$



Obr. 4.8.6.

Elektrický potenciál v bodě P_1 (zakreslen na obrázku 4.8.6) vně koule je

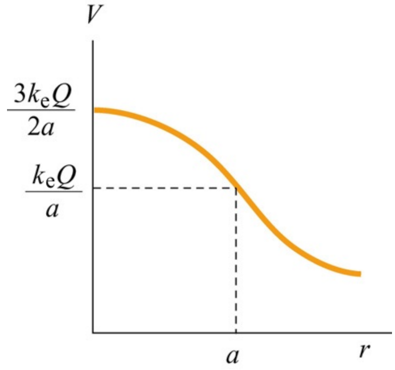
$$V(r) - V(\infty) = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = k_e \frac{Q}{r}\,. \tag{4.8.4}$$

Elektrický potenciál v bodě P_2, nacházejícím se uvnitř koule, je roven

$$V(r) - V(\infty) = -\int_\infty^a dr E(r > a) - \int_a^r dr E(r < a) = -\int_\infty^a dr \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \int_a^r dr' \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^3}\frac{1}{2}\left(r^2 - a^2\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) = k_e \frac{Q}{2a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

Průběh elektrického potenciálu jako funkce r je zakreslen na obrázku 4.8.7:



Obr. 4.8.7: Elektrický potenciál ve vzdálenosti r od středu homogenně nabité koule.

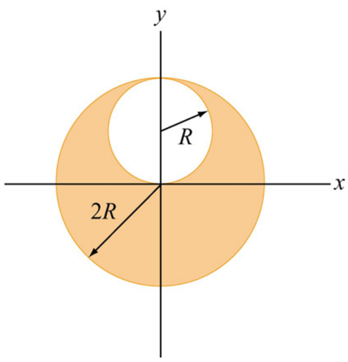
4.9 Tématické otázky

1. Pokud je v nějaké oblasti prostoru nulová intenzita elektrického pole, znamená to, že se v této oblasti nenachází žádný elektrický náboj?
2. Mějme elektrické pole nevodivé nekonečně velké roviny, rovnoměrně nabité s konstantní plošnou hustotou náboje. Proč intenzita elektrického pole nezávisí na vzdálenosti od roviny? Vysvětlete z hlediska průběhu silokřivek.
3. Popište elektrické pole vně utěsněné vodivé trubice, do které vložíme bodový náboj.
4. Mějme dvě izolované vodivé koule, z nichž každá nese náboj $Q > 0$. Koule mají poloměr a a b, kde $a < b$. Která koule má vyšší potenciál?

4.10 Neřešené úlohy

P 4.10.1: Nevodivá koule s dutinou

Koule o poloměru $2R$ je vyrobena z nevodivého materiálu a je homogenně nabita s objemovou hustotou náboje ρ. (Předpokládejte, že materiál neovlivňuje elektrické pole.) Uvnitř koule se nachází kulová dutina o poloměru R, viz obrázek dále. Vypočtěte elektrické pole uvnitř dutiny.



Obr. 4.10.1: Nevodivá koule s dutinou.

P 4.10.2: P-N přechod

Pokud spojíme dvě vrstvy polovodičů typu N a typu P, dojde u jejich spoje díky rozdílné relativní elektronové afinitě materiálů k přechodu elektronů z materiálu typu N do materiálu typu P. Oblast z materiálu typu N tedy získá kladný náboj, zatímco oblast P se nabije záporným nábojem.

Modelujme tuto situaci za pomoci dvou nabitých rovin nekonečného průřezu, každé o tloušťce a, které se dotýkají v rovině $z = 0$. Deska z materiálu typu N leží v prostoru $0 < z < a$ a je rovnoměrně nabita s hustotou náboje $+\rho_0$. Sousedící deska typu P leží v prostoru $-a < z < 0$ a je nabita s nábojovou hustotou $-\rho_0$. Tedy

$$\rho(x,y,z) = \rho(z) = \begin{cases} +\rho_0 & 0 < z < a \\ -\rho_0 & -a < z < 0 \\ 0 & |z| > a \end{cases}$$

(a) Nalezněte průběh elektrického pole soustavy.

(b) Najděte rozdíl potenciálů mezi body P_1 a P_2. Bod P_1 se nachází v rovině paralelní s deskami ve vzdálenosti $z_1 > a$ od středu desky. Bod P_2 se nachází v rovině paralelní s deskami ve vzdálenosti $z_2 < -a$ od středu desky.

P 4.10.3: Koule s nerovnoměrně rozloženým nábojem

Koule z nevodivého materiálu o poloměru R je nabita s nábojovou hustotou $\rho = ar$, kde a je konstanta a r vzdálenost od středu koule.

(a) Vypočtěte průběh elektrického pole vně i uvnitř koule.

(b) Nalezněte průběh elektrického potenciálu vně i uvnitř koule. Dbejte na správné určení nulové hladiny potenciálu.

(c) Jaké množství energie je zapotřebí k tomu, abychom sestrojili popsanou konfiguraci náboje?

(d) Jaký je rozdíl potenciálů mezi středem koule a bodem ve vzdálenosti r od středu? Dbejte na správné určení nulové hladiny potenciálu.

P 4.10.4: Tenká deska

Nechť je v objemu velké plastové desky o tloušťce d rovnoměrně rozložen náboj s hustotou ρ. Prostředek desky leží v rovině yz.

(a) Jaké je elektrické pole ve vzdálenosti x od středové roviny, je-li $|x| < d/2$?

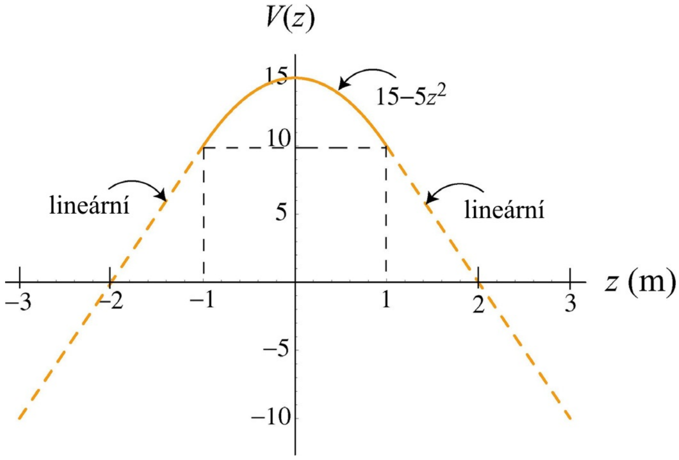
(b) Jaké je elektrické pole ve vzdálenosti x od středové roviny, je-li $|x| > d/2$? (Návod: část Gaussovy plochy umístěte do oblasti s nulovým polem).

P 4.10.5: Elektrická potenciální energie koule

Vypočtěte potenciální energii koule o poloměru R, homogenně nabité s hustotou náboje ρ. Odpověď formulujte v závislosti na celkovém náboji koule Q.

4.10.6: Výpočet elektrického pole z elektrického potenciálu

Obrázek 4.10.2 ukazuje změnu elektrického potenciálu V se vzdálenosti z. Jeho velikost nezávisí na x ani na y. Potenciál v oblasti –1 m < z <1 m lze ve Voltech vyjádřit výrazem $V(z) = 15 - 5z^2$. Vně této oblasti je průběh potenciálu v závislosti na z lineární, jak ukazuje graf.



Obr. 4.10.2.

(a) Nalezněte analytické vyjádření z-ové složky elektrického pole E_z v oblasti –1 m < z <1 m.

(b) Jaká je složka E_z v oblasti $z > 1$ m? Dejte pozor na znaménko E_z.

(c) Jaká je složka E_z v oblasti $z < -1$ m? Dejte pozor na znaménko E_z.

(d) Tento průběh potenciálu je způsoben deskou, která je rovnoměrně nabita s hustotou náboje ρ_0. Kde je tato nabitá deska umístěna? Jaká je hustota náboje v C/m^3?