

Odvození Heavisideova pole

Jan Havlík

28. ledna 2002

Obsah

1	Heavisideovo pole	2
2	Odvození Heavisideova pole	2
2.1	Odvození polí \mathbf{E} a \mathbf{B}	2
2.2	Odvození složek E_{\perp} a E_{\parallel}	4
2.3	Odvození složky B_{φ}	4
3	Závěr	6

1 Heavisideovo pole

Heavisideovo pole je elektromagnetické pole v okolí náboje letícího konstantní rychlostí.

2 Odvození Heavisideova pole

Mějme dvě inerciální soustavy, soustavu S spojenou s pozorovatelem a soustavu S' spojenou s pozorovaným nábojem. Tyto dvě soustavy se navzájem pohybují konstantní rychlostí v ve směru osy x . Necht' pozorovatel v soustavě S pozoruje letící náboj v soustavě S' .

2.1 Odvození elektrického a magnetického pole

Je zřejmé, že v inerciální soustavě S' spojené s nábojem je elektromagnetické pole dáno vztahy

$$\frac{\phi'}{c} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr'}, \quad \mathbf{A}' = 0. \quad (1)$$

Proveďme nyní transformaci tohoto pole pomocí Lorentzovy transformace čtyřvektoru elektromagnetického pole $\left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right)$ ze soustavy S' do soustavy pozorovatele S

$$\begin{pmatrix} \frac{\phi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

kde β a γ jsou definovány

$$\beta \equiv \frac{v}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Transformované elektromagnetické pole v soustavě S pak vypadá

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0 r'} , \\ A_x &= \frac{\gamma\beta Q}{4\pi\epsilon_0 c r'} , \\ A_y &= 0 , \\ A_z &= 0 .\end{aligned}\tag{3}$$

Z uvedených rovnic je vidět, že elektrické i magnetické pole v soustavě pozorovatele S již nejsou stejná, jako pole v soustavě náboje S' . Zvláště je třeba si všimnout, že magnetické pole v soustavě S již není nulové.

Dále v rovnicích [3] rozepíšeme velikost polohového vektoru r' pomocí transformovaných prostorových souřadnic x' , y' , z' :

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) , \\ y' &= y , \\ z' &= z .\end{aligned}\tag{4}$$

Získáme rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]}} , \\ A_x &= \frac{\gamma v Q}{4\pi\epsilon_0 c^2 \sqrt{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]}} , \\ A_y &= 0 , \\ A_z &= 0 .\end{aligned}\tag{5}$$

Z nich pak vypočteme dosazením do definičních vztahů

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &\equiv -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} , \\ \mathbf{B} &\equiv \text{rot } \mathbf{A} ,\end{aligned}$$

transformované elektrické a magnetické pole

$$\mathbf{E} = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]}} (x - vt; y; z) ,\tag{6}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} .\tag{7}$$

2.2 Odvození jednotlivých složek elektrického pole

Zabývejme se nyní odvozením jednotlivých složek elektrického pole \mathbf{E} . Zajímat nás budou především dvě složky tohoto pole, intenzita elektrického pole E_{\perp} ve směru kolmém na vektor rychlosti částice a intenzita elektrického pole E_{\parallel} ve směru rovnoběžném se směrem vektoru rychlosti částice.

Nejprve ze vztahu [6] vyjádříme jednotlivé složky elektrického pole E_x , E_y a E_z :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma Q (x - vt)}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^3}}, \\ E_y &= \frac{\gamma Q y}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^3}}, \\ E_z &= \frac{\gamma Q z}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^3}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Hledané složky E_{\perp} a E_{\parallel} pak můžeme vyjádřit jako kombinaci složek E_x , E_y a E_z , tedy

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \Big|_{x=vt}, \\ E_{\parallel} &= E_x \Big|_{\substack{y=0 \\ z=0}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Dosazením [8] do [9] pak získáme

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= \gamma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2)}, \\ E_{\parallel} &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x - vt)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

2.3 Odvození jednotlivých složek magnetického pole

Magnetické pole v okolí letícího náboje má azimutální charakter. V našem případě tedy tvořeno uzavřenými siločivkami ležícími v rovině yz . Při rozkladu magnetické indukce \mathbf{B} na jednotlivé složky nás proto bude zajímat pouze azimutální složka magnetické indukce B_{φ} , neboť radiální složka B_r je nulová.

Nejprve ze vztahu [7] vyjádříme jednotlivé složky magnetické indukce v kartézských souřadnicích B_x , B_y a B_z :

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{v_y E_z - v_z E_y}{c^2}, \\ B_y &= \frac{v_z E_x - v_x E_z}{c^2}, \\ B_z &= \frac{v_x E_y - v_y E_x}{c^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Do těchto vztahů pak dosadíme z [8] jednotlivé složky elektrického pole \mathbf{E} a jednotlivé složky vektoru rychlosti

$$\mathbf{v} = (v, 0, 0). \quad (12)$$

Po dosazení tedy máme

$$\begin{aligned} B_x &= 0, \\ B_y &= -\frac{\gamma v Q z}{4\pi\epsilon_0 c^2 \sqrt{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^3}}, \\ B_z &= \frac{\gamma v Q y}{4\pi\epsilon_0 c^2 \sqrt{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^3}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Hledanou složku magnetické indukce B_φ pak vyjádříme pomocí složek B_y a B_z :

$$B_\varphi = \sqrt{B_y^2 + B_z^2}, \quad (14)$$

Dosazením [13] do uvedené rovnice pak získáme

$$B_\varphi = \frac{\gamma v Q \sqrt{y^2 + z^2}}{4\pi\epsilon_0 c^2 \sqrt{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^3}}, \quad (15)$$

Po substituci

$$\begin{aligned} l_\perp &\equiv \sqrt{y^2 + z^2}, \\ l_\parallel &\equiv \gamma(x - vt), \end{aligned}$$

pak azimutální složku magnetického pole můžeme vyjádřit

$$B_{\varphi} = \frac{\gamma v Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{l_{\perp}}{\sqrt{(l_{\parallel}^2 + l_{\perp}^2)^3}}, \quad (16)$$

3 Závěr

Ukázali jsme, že elektromagnetické pole v okolí náboje pohybujícího se konstantní rychlostí v soustavě S' je pro pozorovatele v klidu v soustavě S vzájemným pohybem soustav deformováno.

Z odvozených rovnic je zřejmé, že elektrické pole ve směru pohybu náboje je stlačeno faktorem $\frac{1}{\gamma^2}$ a ve směru příčném k pohybu náboje je nataženo koeficientem γ .

Magnetické pole je tvořeno kružnicemi kolmými na pohyb náboje. Jeho intenzita s rostoucí vzdáleností od náboje klesá.