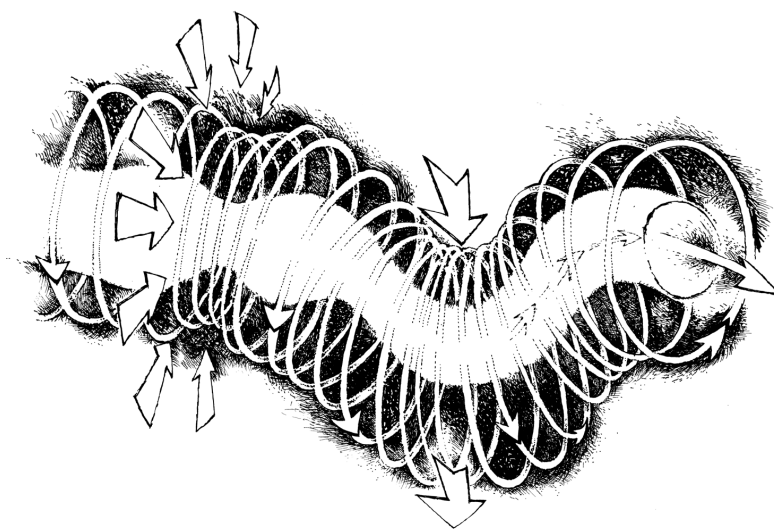


VYBRANÉ KAPITOLY Z FYZIKY PLAZMATU



PETR KULHÁNEK



PŘEDMLUVA

V roce 2020 vyšla v nakladatelství AGA třídílná učebnice [Vybrané kapitoly z teoretické fyziky](#). Její [třetí díl](#) vznikl rozšířením učebnice [Teorie plazmatu](#) z roku 2011, která doprovázela můj dvousemestrální kurz teorie plazmatu na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze. V rámci této přednášky se probírají základní jevy ve fyzice plazmatu – od pohybů nabitých částic přes magnetohydrodynamiku až po statistický popis plazmatu. Přestože je škála probíraných dějů bohatá, na některé partie se v základním kurzu nedostane. Jakýmsi volným pokračováním těchto kurzů, v němž se probírají nelineární jevy, solitony, Lorentzova-Diracova rovnice, Schwarzschildovo kritérium vzniku konvekce, zářivé procesy a turbulence, je tento učební text, který je současně již i integrován v třetím dílu na počátku zmíněné třídílné učebnice. Text, který jste právě otevřeli, je barevnou online verzí doplněných partií. Na rozdíl od klasických přednášek z fyziky plazmatu zde nebudou jednotlivé partie na sebe navazovat. Koneckonců to už naznačuje i samotný název přednášky „*Vybrané kapitoly...*“. K přednáškám existují [nahrávky](#), za což patří velký dík Danu Handlovi, který nezištně nahrával mou snahu ve svém volném čase.

Další materiály: nahrávky přednášek, aktuální verze skripta, aplety, grafy atd.: [Aldebaran](#)

V Praze 29. dubna 2023

Petr Kulhánek



OBSAH

VYBRANÉ KAPITOLY Z FYZIKY PLAZMATU	1
PŘEDMLUVA	2
1. NĚCO MATEMATIKY A FYZIKY NA ÚVOD	4
KOVARIANTNÍ A KONTRAVARIANTNÍ INDEXY	4
SKALÁRNÍ SOUČIN, ZVYŠOVÁNÍ A SNIŽOVÁNÍ INDEXŮ	5
ČTYŘVEKTORY, MINKOWSKÉHO METRIKA	6
LAGRANGEOVY ROVNICE PRO POLNÍ PROBLÉMY	8
KANONICKY SDRUŽENÉ POLE	10
2. KLASICKÁ ELEKTRODYNAMIKA	11
ČTYŘPOTENCIÁL A TENZOR POLE	11
MAXWELLOVY ROVNICE V POTENCIÁLECH	12
POLE NEBO POTENCIÁLY? AB EXPERIMENT	13
LAGRANGEOVA FORMULACE MAXWELLOVÝCH ROVNIC	15
RETARDOVANÉ A ADVANCEOVANÉ POTENCIÁLY	16
3. POHYBOVÁ ROVNICE NABITÉ ČÁSTICE	18
LORENTZOVA POHYBOVÁ ROVNICE	18
POTENCIÁLY GENEROVANÉ ČÁSTICÍ V JEJÍ BLÍZKOSTI	21
ABRAHAMOVA-LORENTZOVA POHYBOVÁ ROVNICE	22
LORENTZOVA-DIRACOVA POHYBOVÁ ROVNICE	24
PAULIHO ZÁPIS RADIČNÍ REAKCE	25
ITERAČNÍ ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ – LANDAUOVA-LIFŠITZOVA ROVNICE	27
SNAHY O ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ POMOCÍ INTEGRÁLŮ A ŘAD	27
4. ZÁŘENÍ NABITÝCH ČÁSTIC	29
MULTIPÓLOVÝ ROZVOJ (STACIONÁRNÍ)	29
MULTIPÓLOVÝ ROZVOJ (ZÁŘIVÝ)	31
ELEKTRICKÉ DIPÓLOVÉ ZÁŘENÍ	33
THOMSONŮV ROZPTYL	35
BRZDNÉ ZÁŘENÍ	37
CYKLOTRONOVÉ ZÁŘENÍ	38
MAGNETICKÉ DIPÓLOVÉ A ELEKTRICKÉ KVADRUPÓLOVÉ ZÁŘENÍ	40
ZÁŘENÍ NELOKALIZOVANÉ NABITÉ ČÁSTICE	41
5. SOLITONY	44
OD KANÁLU UNION K SOLITONŮM	44
SOLITON A SOLITONOVÁ VLNA	46
SIN-GORDONOVA SOLITONOVÁ VLNA	48
SOLITONY KDŽ A NLS	51
SOLITONY V PLAZMATU	55
6. TURBULENCE	58
TURBULETNÍ STRUKTURY	58
KOLMOGOROVA TURBULENCE	59
TURBULENCE V MAGNETOHDRODYNAMICE	60
ELSÄSSEROVA POLE	61
SILNÁ ANIZOTROPNÍ TURBULENCE	62
7. VYBRANÉ PROBLÉMY Z FYZIKY PLAZMATU	64
SCHWARZSCHILDHOVO KRITÉRIUM	64
RELATIVISTICKÁ BOLTZMANNHOVA ROVNICE	65
RAY-TRACING (SLEDOVÁNÍ PAPERU)	67
MECHANIZMY GENEZE PROUDŮ V Z-PINČI	68
LITERATURA	71

1. NĚCO MATEMATIKY A FYZIKY NA ÚVOD

Kovariantní a kontravariantní indexy

Předpokládejme, že máme lineární vektorový prostor opatřený bází $\{\mathbf{e}_k\}$. Vektor \mathbf{A} můžeme v této bázi rozvinout do výrazu

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N A^k \mathbf{e}_k = A^k \mathbf{e}_k. \quad (1)$$

Čísla A^k nazýváme složky (souřadnice, koeficienty rozvoje) vektoru, objekty \mathbf{e}_k prvky báze. Různá poloha indexů naznačuje, že se složky vektorů transformují jinak než prvky báze. Nadále budeme využívat *sumační konvenci*, ale sčítání bude vždy probíhat přes jeden index dolní (transformuje se jako prvky báze) a jeden index horní (transformuje se jako složky vektorů). Přes dvojici stejného horního a dolního indexu se automaticky sčítá, jde o tzv. němé indexy. Poloha volných indexů (přes které se nesčítá) musí zůstat na obou stranách rovnosti vždy stejná. Přejdeme od jedné báze k nějaké jiné, kterou označíme vlnovkami nad symboly:

$$\{\mathbf{e}_k\} \rightarrow \{\tilde{\mathbf{e}}_k\}. \quad (2)$$

Vektor \mathbf{A} je objekt, jehož vyjádření nemůže záviset na volbě báze, tj. musí platit

$$\mathbf{A} = \tilde{A}^k \tilde{\mathbf{e}}_k = A^k \mathbf{e}_k. \quad (3)$$

Složky vektorů se mezi dvěma bázemi budou transformovat za pomoci nějaké matice \mathbf{S} :

$$\tilde{A}^k = S^k_l A^l. \quad (4)$$

Všimněte si, že se sčítá přes němý index l (jeden je nahoře a druhý dole). Volný index k je na obou stranách rovnosti nahoře. I u matic tak musíme rozlišovat horní a dolní indexy. Transformační matici prvků báze označme \mathbf{U} :

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = U^l_k \mathbf{e}_l. \quad (5)$$

Vyzkoušejte si, že jde o jedinou možnost, při které se sčítá přes jeden horní a jeden dolní index, volný index k má stejnou polohu na obou stranách rovnosti a transformační matice \mathbf{U} má stejně jako matice \mathbf{S} první index nahoře a druhý dole. Zjistíme nyní, jaký je vztah mezi oběma transformačními maticemi \mathbf{S} a \mathbf{U} . Vyjdeme z vyjádření vektoru \mathbf{A} v nové bázi (5):

$$\mathbf{A} = \tilde{A}^k \tilde{\mathbf{e}}_k = S^k_l A^l U^n_k \mathbf{e}_n = U^n_k S^k_l A^l \mathbf{e}_n.$$

Je zřejmé, že v nové bázi musí být výsledek $A^l \mathbf{e}_l$ nebo $A^k \mathbf{e}_k$, chcete-li. Toho lze ale dosáhnout jediným způsobem: v posledním výrazu musí platit

$$U^n_k S^k_l = \delta^n_l, \quad (6)$$

kde jsme označili δ^n_l Kroneckerovo delta. V maticovém zápise tato podmínka říká, že

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{1}. \quad (7)$$

Je zřejmé, že matice \mathbf{U} a \mathbf{S} jsou navzájem inverzní. To je patrné již přímo z rozkladu (3) vektoru \mathbf{A} do obou bází. Má-li být výsledek stejný, musí se složky vektorů (horní indexy) transformovat „opačně“ než prvky báze (dolní indexy). Jedině tak dají kombinace (3) výsledek nezávislý na volbě báze (vektor \mathbf{A}). Horní indexy budeme nazývat *kontravariantní*. Tyto indexy se transformují stejně jako složky vektoru, tj. pomocí transformační matice \mathbf{S} . Dolní indexy budeme nazývat *kovariantní*. Tyto indexy se transformují stejně jako prvky báze, tj. pomocí transformační matice \mathbf{U} . Indexů může být i více, například ze složek dvou vektorů můžeme sestavit výraz

$$T^{kl} \equiv A^k B^l; \quad \tilde{T}^{kl} \equiv S^k_o S^l_p T^{op}, \quad (8)$$

kteřý se musí transformovat jako součin složek vektorů. Za pomoci T^{kl} můžeme vytvořit opět objekt nezávislý na souřadnicové soustavě, tzv. tenzor druhého řádu:

$$\tilde{\mathbf{T}} \equiv T^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (9)$$

Symbol $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ nazýváme tenzorový (diadický) součin, jde o uspořádanou dvojici prvků báze. Výraz $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ tak chápeme jako objekt se složkami, které tvoří matici $A^k B^l$:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A^k B^l \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (10)$$

Skalární součin, zvyšování a snižování indexů

Předpokládejme, že je na našem lineárním vektorovém prostoru definován skalární součin dvou vektorů $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, který splňuje základní vlastnosti skalárního součinu. Rozvineme-li oba vektory do báze, získáme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^k B^l \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = g_{kl} A^k B^l, \quad (11)$$

kde jsme označili

$$g_{kl} \equiv \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l \quad (12)$$

tzv. metrické koeficienty (metriku). Vidíme, že výsledek skalárního součinu dvou libovolných vektorů můžeme určit, pokud známe metrické koeficienty, tj. výsledek skalárních součinů všech prvků báze mezi sebou.

Označme inverzní matici k metrice

$$g^{kl} \equiv (g_{kl})^{-1}; \quad g^{kl} g_{lm} = \delta^k_m. \quad (13)$$

Zavedme nyní pomocné (duální) objekty

$$\mathbf{e}^k \equiv g^{kl} \mathbf{e}_l; \quad A_k \equiv g_{kl} A^l. \quad (14)$$

Nejde o skutečné prvky báze ani o skutečné komponenty vektoru, ale o formální lineární kombinace dané metrikou. Vždy platí, že index nahoře znamená transformaci pomocí stejné matice, jakou se transformují složky vektorů, a index dole znamená transformaci pomocí stejné matice, jakou se transformují prvky báze. Za pomoci metriky tak můžeme indexy libovolně snižovat nebo zvyšovat, stačí jen dodržet pravidlo, že sčítáme přes jeden horní a jeden dolní index (to zajistí invarianci součtu vzhledem k transformaci báze). Volné indexy zachovávají vždy svou polohu. Uvedme příklad:

$$g_{lo} T^{klm} = T^k_o{}^m.$$

Prostřední index jsme snížili za pomoci metriky. Skalární součin nyní můžeme zapsat několika způsoby:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{kl} A^k B^l = A^k B_k,$$

kde jsme druhý index snížili za pomoci metriky. Mohli jsme ale také snížit první index:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{kl} A^k B^l = A_l B^l = A_k B^k.$$

Platí tedy

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{kl} A^k B^l = A^k B_k = A_k B^k. \quad (15)$$

Kontravariantní (horní) složka je skutečnou složkou vektoru, kovariantní (dolní, duální) v sobě obsahuje metriku. Definici inverzní metriky (13) můžeme chápat také jako snižování či zvyšování indexů:

$$\begin{aligned} g^{kl} g_{lm} &= \delta^k_m; \\ g^{kl} g_{lm} &= g^k_m; \end{aligned} \Rightarrow g^k_m = \delta^k_m. \quad (16)$$

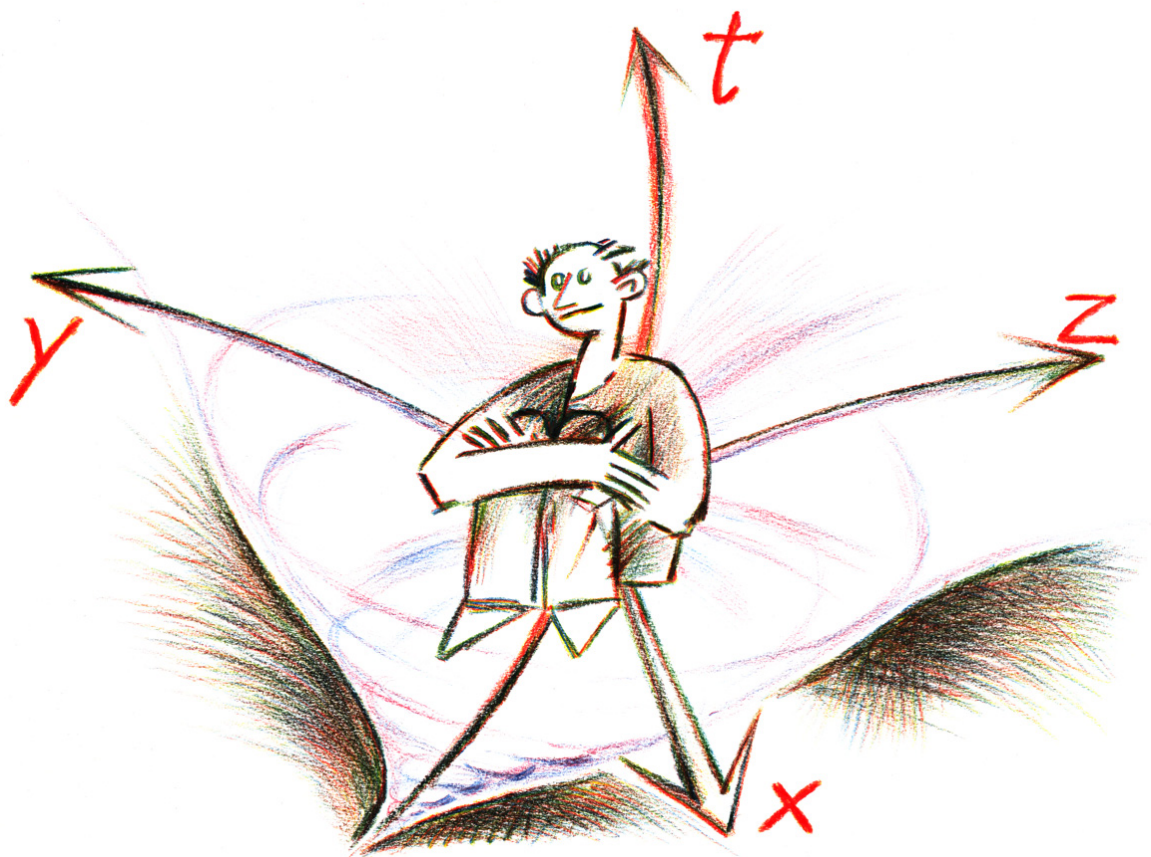
Metrika a Kroneckerovo delta jsou tak jediným objektem. Pokud jsou oba indexy dole, jde o metrické koeficienty. Pokud jsou oba indexy nahoře, jde o inverzní matici k metrickým koeficientům a pokud jsou indexy smíšené, jde o Kroneckerovo delta, tedy prvky jednotkové matice. Metrika tak není nic jiného než jednotková matice s patřičně posunutými indexy. Za pomoci tenzorového zápisu můžeme psát

$$\mathbf{1} = \delta^k_l \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^l = g_{kl} \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l = g^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (17)$$

Čtyřvektory, Minkowského metrika

Ve speciální relativitě nazýváme každou čtveřici veličin, jež se transformuje Lorentzovou transformací, čtyřvektor. K základním čtveřicím patří *událost* (časová a prostorová souřadnice události), *čtyřhybnost* (energie a hybnost), *vlnový čtyřvektor* (úhlová frekvence a vlnový vektor), *čtyřpotenciál elektromagnetického pole* (skalární a vektorový potenciál), *čtyřtok* (zdrojové členy Maxwellových rovnic – hustota a tok náboje) nebo čtyřgradient. V soustavě SI musíme zajistit, aby všechny 4 složky měly stejný rozměr. To můžeme učinit nejjednodušeji vynásobením nebo vydělením časové složky univerzální konstantou c (rychlostí světla ve vakuu):

$$\begin{aligned} x^\mu &\equiv \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & p^\mu &\equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}; & k^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; \\ A^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; & J^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \rho_Q c \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix}; & \partial_\mu &\equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial ct \\ \partial/\partial \mathbf{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$



Poznámky:

1. Řeckými indexy budeme značit zásadně jen čtyřvektory (index 0 odpovídá časové části, indexy 1, 2, 3 prostorové části).
2. U čtyřgradientu jde o kovariantní (dolní) index, protože

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

3. tedy skutečné složky vektorů jsou ve jmenovateli, pokud zapisujeme index v čitateli, musí mít opačnou polohu, neboť se transformační matice změní na inverzní!
4. Metrika ve speciální relativitě se nazývá Minkowského metrika. Je diagonální a v časové části má minus. Totéž platí i pro inverzní matici (metriku s horními indexy). Metrika se smíšenými indexy je jednotková matice, tj. její prvky jsou Kroneckerovo delta:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix};$$

(19)

$$g^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; \quad g_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

Zjednodušeně se často Minkowského metrika píše jako $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, někdy se označuje symbolem $\eta_{\mu\nu}$. Za pomoci metriky nyní snadno určíme kovariantní (duální) složky běžných čtyřvektorů a kontravariantní složku čtyřgradientu:

$$\begin{aligned} x_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & p_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}; & k_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; \\ A_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; & J_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\rho_Q c \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix}; & \partial^\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\partial/\partial ct \\ \partial/\partial \mathbf{x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(20)

Příklady

Najděme některé typické skalární součiny:

$$k \cdot x = k^\mu x_\mu = k^0(-x_0) + k^1 x_1 + k^2 x_2 + k^3 x_3 = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x},$$

nalevo je součin čtyřvektorů, poslední člen napravo je běžný součin v \mathbb{R}^3 . Obdobně určíme výsledky dalších příkladů

$$ds^2 \equiv dx_\mu dx^\mu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

$$J \cdot A \equiv J_\mu A^\mu = -\rho_Q \phi + \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{A};$$

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0;$$

$$\square f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu f = 0.$$

Často se používá zkrácený zápis, při kterém se derivace píše za čárku. Indexy před čárkou jsou skutečnými indexy, indexy za čárkou jsou derivacemi:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu A^\mu \equiv A^\mu{}_{,\nu}.$$

Jde vlastně o nejušpornější zápis derivace vůbec, ze kterého je zřejmé na první pohled, jak se derivace transformuje. Uveďme další příklady:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} &\equiv \partial^\mu \varphi \equiv \varphi^{,\mu}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} &\equiv \partial_\mu \varphi \equiv \varphi_{,\mu}; \\ \square f &\equiv \partial_\mu \partial^\mu f \equiv f_{,\mu}{}^\mu.\end{aligned}$$

Lagrangeovy rovnice pro polní problémy

V klasické mechanice jsme hledali závislost zobecněných souřadnic $q_k(t)$ na čase. U polních problémů budeme hledat časoprostorovou závislost polí $\varphi_k(t, \mathbf{x})$. Namísto Lagrangeovy funkce budeme používat hustotu Lagrangeovy funkce, která závisí na čase, prostoru, polích a jejich derivacích:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, x, y, z, \varphi_1, \dots, \varphi_N, \partial \varphi_1 / \partial t, \partial \varphi_1 / \partial x, \dots, \partial \varphi_N / \partial z),$$

což budeme zkráceně zapisovat ve tvaru

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_k, \varphi_{k,\alpha}). \quad (21)$$

Pro integrál akce bude platit

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_k, \varphi_{k,\alpha}) d^3 \mathbf{x} dt = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_k, \varphi_{k,\alpha}) d^4 x. \quad (22)$$

Stejně jako v mechanice těles budeme hledat nutné podmínky extrémnosti integrálu akce a variace polí budou definovány ve stejném čase (ale tentokrát i v prostorové souřadnici), což nám zajistí záměnnost variací a parciálních derivací. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ požadujeme, aby variace byly nulové, tedy platí vztahy jako v klasické mechanice hmotného bodu:

$$\begin{aligned}\delta \varphi_k &= \varphi_{k,\text{virt}}(x^\mu) - \varphi_{k,\text{real}}(x^\mu); \\ \delta \varphi_k(\partial\Omega) &= 0; \\ \delta \partial_\mu \varphi_k &= \partial_\mu \delta \varphi_k.\end{aligned} \quad (23)$$

Požadujeme tedy, aby variace integrálu akce byla nulová:

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_k, \varphi_{k,\alpha}) d^4 x = 0. \quad (24)$$

Díky záměnnosti variací a derivací můžeme přejít s variací do integrálu a zapůsobit s ní na všechny proměnné (s výjimkou x^μ , jde o variace ve stejné události):

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} \delta \varphi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,\alpha}} \delta \varphi_{k,\alpha} \right] d^4 x = 0.$$

V posledním členu zaměníme variaci a derivaci: $\delta \varphi_{k,\alpha} = \delta \partial_\alpha \varphi = \partial_\alpha \delta \varphi$ a provedeme integraci per partes (použijeme Gaussovu větu). Integrál na hranici je vzhledem k (23) nulový, a proto máme:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,\alpha}} \right] \delta \varphi_k d^4 x = 0.$$

Vzhledem k tomu, že integrace musí dát nulu pro jakoukoli časoprostorovou oblast Ω , musí být i integrand nulový (přesněji řečeno *skoro všude*, tj. až na množiny dimenze menší než 4):

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,\alpha}} \right] \delta \varphi_k = 0. \quad (25)$$

Pokud jsou pole φ_k nezávislá, budou koeficienty lineární kombinace (25) nulové (celý výraz má tvar $\sum c_k \delta \varphi_k = 0$), tedy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,\alpha}} = 0.$$

Výraz upravíme do standardního tvaru Lagrangeových rovnic

$$\blacktriangleright \quad \partial_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,\alpha}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} = 0; \quad k = 1, \dots, N. \quad (26)$$

Na rozdíl od Lagrangeových rovnic pro hmotné body a pevná tělesa není v prvním členu jen časová derivace, ale jsou zde derivace podle všech čtyř proměnných. Lagrangeovy rovnice rozepsané pro jedno jediné pole mají tvar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial y)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial z)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (27)$$

Poznámka: Lagrangeova funkce není jednoznačně určena. Funkce

$$\tilde{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu \quad (28)$$

vede na stejné polní rovnice pro libovolný čtyřvektor K^μ . Tého libovůle lze využít ke konstrukci co možná „nejelegantnějšího“ lagranžianu.

● **Příklad:** Nalezněme Lagrangeovy rovnice pro nejjednodušší Lagrangeovu funkci skalárního pole φ , která obsahuje jen derivace tohoto pole:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi). \quad (29)$$

Řešení:

Lagrangeova funkce je skalárem (to zajišťuje jeden horní a jeden dolní index, při změně báze/souřadnicové soustavy se výraz nezmění). Pokud Lagrangeovu funkci rozepíšeme, máme:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2. \quad (30)$$

Po provedení všech derivací dá Lagrangeova rovnice (27)

$$-\frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Nejjednodušší varianta Lagrangeovy funkce skalárního pole tedy vede na vlnovou rovnici. ▮

V Lagrangeově funkci (29) se většinou píše koeficient $\frac{1}{2}$:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) \quad \Rightarrow \quad \square \varphi = 0. \quad (31)$$

Důvody jsou dva. Lagrangeovy rovnice dají vlnovou rovnici (bez nutnosti krácení koeficientem 2) a celý výraz (31) je až na znaménko u časové části analogií kinetické energie (polovina z kvadrátu derivací). Minus v časové části znamená, že takto zapsaná hustota Lagrangeovy funkce odpovídá ve skutečnosti záporně vzaté kinetické energii. Druhou nejjednodušší Lagrangeovu funkci získáme přidáním potenciálního členu. Kvadratický člen povede na lineární parciální diferenciální rovnici (obdobně jako u harmonického oscilátoru):

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) + \frac{1}{2} \kappa^2 \varphi^2 \quad \Rightarrow \quad (\square - \kappa^2) \varphi = 0. \quad (32)$$

Lagrangeova funkce tohoto pole je kvadratická v derivacích i v samotném poli. Druhý člen by odpovídal hustotě potenciální energie v klasické mechanice, první minus hustotě kinetické energie. Výsledná Lagrangeova rovnice je lineární a je vhodnou rovnicí například pro plazmové vlny nebo pro kvantový popis částic se spinem nula. Jde o známou Kleinovu-Gordonovu rovnici.

Kanonicky sdružené pole

Obdobně jako jsme dříve zavedli k dané zobecněné souřadnici kanonicky sdruženou hybnost a poté energii, můžeme i ve spojitém případě obdobně definovat kanonicky sdružené pole a hustotu energie vztahy

$$\mathcal{P}_k(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,t}}; \quad (33)$$

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) \equiv \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,t}} \varphi_{k,t} \right) - \mathcal{L}. \quad (34)$$



2. KLASICKÁ ELEKTRODYNAMIKA

Čtyřpotenciál a tenzor pole

Elektromagnetické pole většinou popisujeme Maxwellovými rovnicemi

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (35)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (36)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (37)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (38)$$

které doplníme o materiálové vztahy

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (39)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (40)$$

kde vektor \mathbf{P} je polarizace prostředí (hustota elektrického dipólového momentu) a \mathbf{M} je magnetizace (hustota magnetického dipólového momentu). Jiné uzávorkování elektrických a magnetických veličin je dáno historickými důvody. Z rovnice (35) plyne existence funkce $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$, takové, že

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (41)$$

Rovnice je pak splněna automaticky, protože $\operatorname{div} \operatorname{rot}$ každé funkce je nulová. Veličina \mathbf{A} se nazývá vektorový potenciál. Dosadíme-li vyjádření (41) do rovnice (36), získáme vztah

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

ze kterého plyne existence funkce ϕ takové, že $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\nabla \phi$. Rovnice (36) je opět splněna automaticky a pro elektrické pole máme vyjádření

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (42)$$

Funkci ϕ nazýváme skalární potenciál, v případě stacionárních polí přejde (42) ve známý vztah

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad (43)$$

znaménko minus jen odráží fyzikální skutečnost, že působící síla míří do minima potenciální energie. Elektromagnetické pole tak můžeme popsat pouhou čtveřicí veličin – skalárním a vektorovým potenciálem. Tyto čtyři veličiny tvoří relativistický čtyřvektor, viz (18),

$$\blacktriangleright \quad A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Známe-li čtveřici A^μ , určíme elektrické a magnetické pole snadno ze vztahů (42) a (41). Vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou tak v jistém smyslu preferovány oproti vektorům \mathbf{D} a \mathbf{H} , neboť je můžeme přímo určit z potenciálů. Preference \mathbf{E} a \mathbf{B} nad \mathbf{D} a \mathbf{H} plyne také z Lorentzovy pohybové rovnice, kde vystupují pouze vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} a ze silového působení je můžeme dokonce pomocí Lorentzovy pohybové rovnice definovat. Elektromagnetické pole je derivacemi potenciálů, oba vztahy (42) a (41) lze jednoduše zapsat za pomoci tenzoru elektromagnetického pole

$$\blacktriangleright \quad F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E^x/c & E^y/c & E^z/c \\ -E^x/c & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y/c & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z/c & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Jde o antisymetrický tenzor druhého řádu, který má jen šest nezávislých složek (těmi je elektrické a magnetické pole). Složky pole lze snadno odečíst z příslušných pozic tenzoru.

Potenciály nejsou určeny jednoznačně, dvěma různými potenciálům může odpovídat stejné elektromagnetické pole. Pokud zavedeme nové, přetransformované potenciály za pomoci tzv. *gradientní transformace*

$$\tilde{A}^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu f, \quad (46)$$

kde f je zcela libovolná dvakrát spojitě diferencovatelná funkce, pole se nezmění:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}. \quad (47)$$

Této libovůle v potenciálech lze s výhodou využít při konstrukci co nejjednodušší varianty Maxwellových rovnic v potenciálech.

Maxwellovy rovnice v potenciálech

Maxwellovy rovnice (35) a (36) jsme využili k zavedení potenciálů elektromagnetického pole. Zbývající dvě rovnice se zdrojovými členy můžeme za pomoci tenzoru elektromagnetického pole snadno přepsat do tvaru

$$\blacktriangleright \quad F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad (48)$$

kde čtyřvektor J^μ prezentuje zdroje elektrických a magnetických polí

$$J^\mu \equiv \begin{pmatrix} \rho_Q c \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Tento tvar Maxwellových rovnic je zjevně relativistický. Přepišme Maxwellovy rovnice ve tvaru (48) za pomoci potenciálů:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= \mu_0 J^\mu; \\ \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \mu_0 J^\mu; \\ \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu &= \mu_0 J^\mu. \end{aligned} \quad (50)$$

Druhý člen na levé straně je d'Alambertův vlnový operátor aplikovaný na čtyřpotenciál pole, pravá strana zjevně prezentuje zdroje polí. Jedinou „vadou na kráse“ rovnic zapsaných v potenciálech je první člen. Zde využijeme velké libovůle v potenciálech dané kalibrační transformací. Předpokládejme, že veličina $\partial_\nu A^\nu$ je rovna nějaké funkci času a prostoru $F(t, \mathbf{x})$:

$$\partial_\nu A^\nu = F(t, \mathbf{x})$$

a zvolme za pomoci gradientní transformace (46) jiný čtyřpotenciál, pro který budeme požadovat, aby

$$\partial_\nu \tilde{A}^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu A^\nu + \partial_\nu \partial^\nu f = 0 \quad \Rightarrow \quad F(t, \mathbf{x}) + \square f = 0.$$

Taková gradientní transformace bude vždy existovat. Funkci f , která generuje transformaci, stačí volit tak, aby splňovala rovnici

$$\square f = -F(t, \mathbf{x}). \quad (51)$$

V nových potenciálech je první člen v rovnici (50) nulový a Maxwellovy rovnice získají jednoduchý tvar

$$\square \tilde{A}^\mu = -\mu_0 J^\mu ; \quad (52)$$

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0. \quad (53)$$

Jde o vlnové rovnice pro čtyřpotenciál A^μ , u kterých jsou zdrojovými členy složky čtyřvektoru J^μ . Rovnice jsou doplněny Lorenzovou kalibrační podmínkou (53). Ukázali jsme, že libovůle potenciálů lze využít k tomu, aby Lorenzova kalibrační podmínka byla splněna. Dokonce ani požadavek na její splnění neurčuje potenciály jednoznačně! Z rovnice (51) je zřejmé, že funkce f není určena jednoznačně a lze k ní přičíst jakékoli řešení vlnové rovnice

$$\square f_0 = 0. \quad (54)$$

Proto je možná ještě další gradientní transformace

$$\tilde{\tilde{A}}^\mu = \tilde{A}^\mu + \partial^\mu f_0,$$

kterou je možné využít například k vynulování skalárního potenciálu. Uzavřeme tuto partii konstatováním, že je možné vždy zvolit takové potenciály, aby Maxwellovy rovnice měly jednoduchý tvar

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright \quad \square A^\mu = -\mu_0 J^\mu ; \\ \quad \quad \partial_\mu A^\mu = 0. \end{array} \quad (55)$$

Pole nebo potenciály? AB experiment

V klasické elektrodynamice je možné elektromagnetické pole popsat buď za pomoci elektrické intenzity a magnetické indukce nebo za pomoci čtyřpotenciálů. Každý z těchto popisů má své výhody a nevýhody:

1. Elektrické a magnetické pole je přímo měřitelné přístroji, potenciály nikoli. Tato situace vytváří dojem, že pole jsou reálné veličiny, zatímco potenciály jen pomocné matematické objekty.
2. Elektrická a magnetická pole jsou jednoznačná, potenciálů k danému problému existuje nekonečně mnoho. Toho lze využít ke konstrukci co nejjednodušších rovnic pro potenciály. Na druhou stranu nejednoznačnost potenciálů opět vzbuzuje dojem, že koncept potenciálů je jen pomocnou matematickou konstrukcí.
3. Maxwellovy rovnice v potenciálech jsou jednodušší, vedou na vlnovou rovnici s nenulovou pravou stranou, pro kterou existuje řada možností řešení. Po nalezení potenciálů musíme ale ještě určit pole z formulí $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$.
4. Při transformaci polí do jiné souřadnicové soustavy jsou vhodnější potenciály. Tvoří čtyřvektor, který se transformuje Lorentzovou maticí. Samotná transformace polí je poněkud nepřehledná a je dána transformací tenzoru pole.
5. Do čtyřrozměrného světa relativity na první pohled lépe zapadá čtyřpotenciál pole (ϕ, \mathbf{A}) než šestice hodnot \mathbf{E} a \mathbf{B} . Ty jsou ve skutečnosti součástí tenzoru pole $F_{\mu\nu}$, který je antisymetrický a má právě 6 nezávislých složek.

V klasické elektrodynamice jsou oba popisy zcela ekvivalentní a nelze některý z nich preferovat na úkor druhého. Částice může měnit svou rychlost pouze vlivem elektrických a magnetických polí. Pokud jsou pole nulová a potenciály nenulové (taková situace může nastat), na částici žádné síly nepůsobí. V kvantové mechanice je situace jiná. Pouhá přítomnost nenulového potenciálu mění fázi vlnové funkce i v případě, že samotná pole jsou nulová (například v prostoru vně dlouhé cívky je magnetické pole nulové a vektorový potenciál nenulový).

Změna fáze vlnové funkce se projeví změnou interferenčního obrazce u dvouštěrbinového experimentu a jde tedy o měřitelný jev. V tomto smyslu je klasická Maxwellova elektrodynamika doplněná Lorentzovou pohybovou rovnicí neúplným popisem přírody, neboť nepostihuje všechny v přírodě probíhající a měřitelné děje. Potenciály pole navíc nejsou jen matematickou konstrukcí, ale mají na pohyb nabitých částic reálný fyzikální dopad daný kvantovými zákony. Poprvé na tuto skutečnost upozornili angličtí teoretici Werner Ehrenberg a Raymond Siday v roce 1949, jejich práce se ale dostatečně nerozšířila. Obdobný jev o deset let později, tedy v roce 1959, znovu předpověděli izraelský fyzik Yakir Aharonov a americko-anglický teoretik David Bohm. Aharonův-Bohmův jev (AB jev) byl experimentálně potvrzen až v roce 1986 japonským fyzikem Akirou Tonomurou.

Uvažujme nejprve dvojštěrbinový experiment s uspořádáním podle následujícího obrázku nalevo. Za štěrbinami je úzký pás nenulového magnetického pole (tloušťky Δl), které míří kolmo na pohyb elektronů. Toto pole na ně bude působit Lorentzovou silou

$$F = evB \tag{56}$$

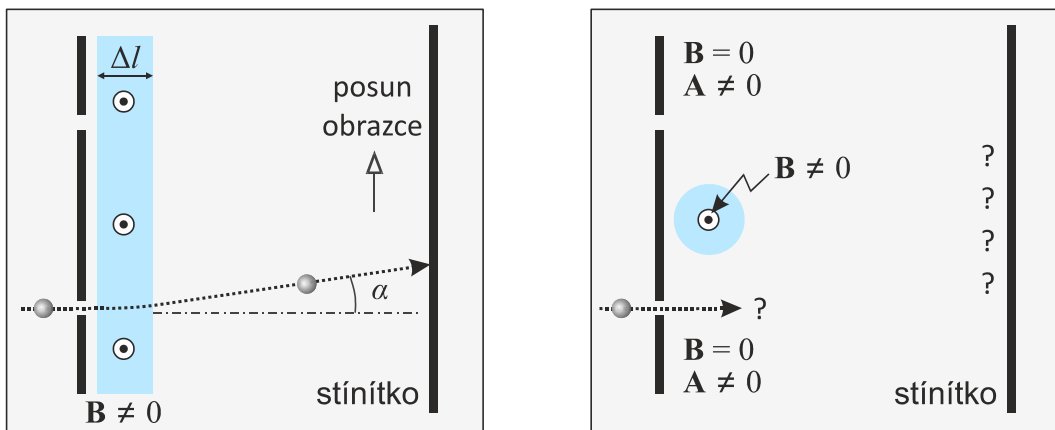
směrem vzhůru. Vzhledem k tomu, že je tloušťka vrstvy nenulového pole malá, budeme uvažovat, že se svazek elektronů pohne vzhůru vlivem působení konstantního zrychlení $a = F/m$ po dobu $\Delta t = \Delta l/v$. Ve svislém směru budou elektrony vychýleny o vzdálenost

$$\Delta y \cong \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \frac{evB}{m} \left(\frac{\Delta l}{v} \right)^2 = \frac{eB}{2mv} \Delta l^2. \tag{57}$$

Úhel vychýlení svazku bude podle klasického výpočtu

$$\text{tg } \alpha \cong \frac{\Delta y}{\Delta l} = \frac{eB \Delta l}{2mv}. \tag{58}$$

Ať už bude obrazec dopadu elektronů na stínítku jakýkoli, měl by se působením magnetického pole úhlově posunout vzhůru o úhel α daný vztahem (58).



K vysvětlení Aharonova-Bohmova jevu

Uvažujme nyní dvojštěrbinový experiment s uspořádáním podle obrázku napravo. Za štěrbinami je dlouhý solenoid, v němž je nenulové magnetické pole. Vně solenoidu, tedy v oblasti, kterou se pohybují elektrony, je magnetické pole nulové a obrazec by neměl být posunut. Nenulový je zde pouze vektorový potenciál. Čtyřpotenciál ale vystupuje v Lagrangeově i Hamiltonově funkci a odsud se dostane do řešení Schrödingerovy časové rovnice. Vlnová funkce bude mít tvar (odvození lze nalézt v učebnicích kvantové teorie)

$$\psi = A \exp \left[\frac{iQ}{\hbar} \int A_\mu dx^\mu \right] \tag{59}$$

a pravděpodobnost výskytu elektronu bude ovlivněna přítomností nenulového potenciálu a obrazec by měl být posunut i vně solenoidu, tedy v prostředí nulového magnetického pole.

V oblasti, kterou prolétají v Aharonově-Bohmově myšlenkovém experimentu elektrony, je sice magnetické pole nulové, nenulový je ale vektorový potenciál, který způsobí změnu fáze vlnové funkce a tím posun interferenčního obrazce.

Poprvé se pokusil tento jev změřit japonský fyzik Akira Tonomura v roce 1982 za pomoci elektronového holografického mikroskopu, který dokáže kromě intenzity elektronového svazku také zaznamenat fázi elektronů (vyzařují koherentní elektromagnetické pole). Výsledky pro použitou cívku nebyly průkazné, neboť pole prosakovalo i vně cívky. Proto v roce 1986 použil Tonomura jako zdroj pole feromagnet ve tvaru toroidu o průměru 6 μm . Povrch byl pokryt supravodivým niobem, který dokonale odstínil magnetické pole. Teplota byla udržována na 5 K. Měřený byl posun interferenčních proužků mezi svazkem elektronů procházejících vnitřkem toroidu a svazkem elektronů procházejících vně magnetu. V těchto oblastech je nulové magnetické pole, ale různý vektorový potenciál. Proužky byly posunuty o hodnotu předpovězenou Aharonovým-Bohmovým jevem. Výsledkem experimentu je potvrzení faktu, že na mikroskopické úrovni hrají při interakci nabitého objektu mikrosvěta s elektromagnetickým polem primární roli potenciály.

Lagrangeova formulace Maxwellových rovnic

Hustota Lagrangeovy funkce pro elektromagnetické pole má tvar

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{field}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (60)$$

První část popisuje samotné elektromagnetické pole bez přítomnosti částic, druhá část popisuje interakci elektromagnetického pole s nabitými částicemi. Interakční část musí být nějakou skalární kombinací čtyřtoku J^μ (popisuje částice) a čtyřpotenciálu A^μ (popisuje pole). Hned nejjednodušší skalární varianta vede na správné polní rovnice:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = J_\mu A^\mu. \quad (61)$$

Polní část Lagrangeovy funkce odpovídá kinetickému členu v mechanice bodové částice, měla by tedy být nějak konstruována z derivací pole A^μ , tedy by měla být nějak poskládána z tenzoru elektromagnetického pole – ideálně z kvadrátu, jak je tomu u kinetické energie částice nebo jak tomu bylo u hustoty lagranžiánu vedoucího na vlnovou rovnici. Nejjednodušším skalárem je kombinace $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ a polní část Lagrangeovy funkce by měla být tomuto výrazu úměrná. Konstantu úměrnosti určíme tak, abychom dostali správné polní rovnice (v tomto případě Maxwellovy rovnice):

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{L}_{\text{field}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (62)$$

Obě části hustoty Lagrangeovy funkce pro elektromagnetické pole jsou

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{L}_{\text{elmg}} = \mathcal{L}_{\text{field}} + \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu \quad (63)$$

Ověřme na závěr, že polní Lagrangeovy rovnice dají Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\beta, \alpha}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta} &= 0; \\ -\frac{1}{4\mu_0} \partial^\alpha \left[\frac{\partial (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}{\partial A^{\beta, \alpha}} \right] - J_\beta &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\partial^\alpha \left[2F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial A^{\beta,\alpha}} \right] = \mu_0 J_\beta ; \\
& -\frac{1}{2}\partial^\alpha \left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \frac{\partial}{\partial(\partial^\alpha A^\beta)} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right] = \mu_0 J_\beta ; \\
& -\frac{1}{2}\partial^\alpha \left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\nu_\alpha \delta^\mu_\beta) \right] = \mu_0 J_\beta ; \\
& -\frac{1}{2}\partial^\alpha [\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha] = \mu_0 J_\beta ; \\
& -\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \mu_0 J_\beta \quad \Rightarrow \quad -F^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = \mu_0 J^\beta \quad \Rightarrow \quad F^{\beta\alpha}{}_{,\alpha} = \mu_0 J^\beta ,
\end{aligned}$$

což jsou Maxwellovy rovnice ve tvaru (48).

Retardované a advanceované potenciály

Představme si bodový náboj nacházející se v poloze \mathbf{r}' a pozorovatele v místě \mathbf{r} . Potenciál elektrického pole bude dán Coulombovým zákonem

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (64)$$

Pokud bude náboj spojitě rozložen v prostoru s hustotou ρ_Q , bude potenciál dán superpozicí, tedy součtem potenciálů od všech nábojových elementů:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (65)$$

Nalezený vztah musí být současně řešením Laplaceovy rovnice elektrostatiky:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (66)$$

Kdo z čtenářů ovládá techniku Greenovy funkce, může nalézt řešení i jinak než za pomoci principu superpozice. Nejprve budete řešit Laplaceovu rovnici s Diracovou distribucí na pravé straně, čímž získáte Greenovu funkci. Řešením problému bude potom konvoluce této Greenovy funkce se skutečnou pravou stranou rovnice:

$$\Delta G = \delta(\mathbf{r}') \quad \Rightarrow \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (67)$$

$$\Delta\phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\rho_Q}{\epsilon_0} \right) * G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (68)$$

Výsledek je samozřejmě stejný. V případě elektrodynamiky je přímé zobecnění

$$\square\phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t - \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (69)$$

Potenciál se počítá v retardovaném čase, tedy čase pozorovatele, od něhož je odečtena doba šíření signálu ze zdroje:

$$\Delta t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \quad (70)$$

Získaný potenciál nazýváme *retardovaný* (zpožděný) potenciál. Jeho hodnota se počítá z rozložení nábojů v kuželu minulosti pozorovatele.

Toto není ale jediné řešení vlnové rovnice s pravou stranou. Samotná vlnová rovnice je totiž imunní vůči záměně $c \rightarrow -c$, proto ji podle (70) splňuje i řešení

$$\phi_+(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t + \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (71)$$

Takové řešení je nefyzikální, přichází jakoby z budoucnosti, tedy záleží na rozložení nábojů v kuželu budoucnosti pozorovatele a nesplňuje tedy princip kauzality (příčina musí předcházet ve všech souřadnicových soustavách důsledek). Řešení nazýváme *advanceované* (někdy se používá slovo *avanceované*). Obě řešení můžeme (fyzikální i nefyzikální) souhrnně zapsat jedinou formulí

$$\phi_{\pm}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t \pm \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (72)$$

Obdobně lze zapsat řešení Maxwellových rovnic pro celý čtyřpotenciál

$$\square A^{\alpha} = -\mu_0 J^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad A_{\mp}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^{\alpha}(t \mp \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (73)$$

Je třeba ještě ověřit, zda nalezené řešení splňuje Lorenzovu kalibrační podmínku. Určíme levou stranu této podmínky:

$$\partial_{\alpha} A_{\mp}^{\alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\partial_{\alpha} J^{\alpha}(t \mp \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (74)$$

Kalibrační podmínka bude splněna, pokud bude platit

$$\partial_{\alpha} J^{\alpha} = 0, \quad (75)$$

což je rovnice kontinuity pro elektrický náboj, tedy zákon zachování náboje. Ten plyne okamžitě z Maxwellových rovnic

$$\partial_{\beta} F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\alpha} \partial_{\beta} F^{\alpha\beta} = \mu_0 \partial_{\alpha} J^{\alpha}. \quad (76)$$

Levá strana je zúžením symetrického a antisymetrického tenzoru, tedy je nulová, a proto platí vztah (75). Potenciály jsme spočetli pro pozorovatele v místě \mathbf{r} . Náboje jsou lokalizovány v místech \mathbf{r}' , přes která integrujeme. Dostí daleko od zdrojů je možné provést klasický multipólový rozvoj a určit zářivá pole generovaná pohybujícími se částicemi. Pokud nás zajímá reakce částice na její vlastní pole, musíme postupovat opačně a zjistit pole generované v těsné blízkosti sledované částice.



3. POHYBOVÁ ROVNICE NABITÉ ČÁSTICE

Lorentzova pohybová rovnice

Zavedme nejprve vlastní čas částice $d\tau$ jako čas plynoucí přímo u částice. Pro relativistický interval v místě částice máme

$$ds^2 = dx_\alpha dx^\alpha = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 = -c^2 d\tau^2. \quad (77)$$

Mezi vlastním a obecným časem tedy existuje vztah

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 \quad \Rightarrow \quad d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = \frac{dt}{\gamma}. \quad (78)$$

Vlastní čas je invariantem, který využijeme jak při konstrukci Lagrangeovy funkce volné částice L_P , tak při zavedení čtyřrychlosti a čtyřhybnosti. Pro nabitou částici se Lagrangeova funkce bude skládat z lagranžiánu volné částice a interakčního lagranžiánu:

$$L = L_P + L_{\text{int}}. \quad (79)$$

Diferenciál akce volné částice by měl být invariantem, tedy by mělo platit

$$dS = L_P dt \sim d\tau, \quad (80)$$

tj.

$$L_P = \alpha \frac{d\tau}{dt} = \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (81)$$

Konstantu α volíme tak, aby výraz pro malé rychlosti přešel v klasický vztah pro kinetickou energii, tedy

$$\blacktriangleright \quad L_P = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (82)$$

Interakční část určíme z hustoty Lagrangeovy funkce (61) jako

$$L_{\text{int}} = \int \mathcal{L}_{\text{int}}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \int J_\mu(\mathbf{r}') A^\mu(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (83)$$

kde za čtyřtok dosadíme pro bodovou nabitou částici lokalizovanou v místě \mathbf{r}

$$J^\mu = \begin{pmatrix} \rho_Q c \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Qc\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \\ Q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \end{pmatrix}; \quad A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Po triviální integraci máme

$$\blacktriangleright \quad L_{\text{int}} = -Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (85)$$

První část je, tak jak je u konzervativních polí obvyklé, záporně vzatou potenciální energií částice v elektrickém poli. Celková Lagrangeova funkce tedy je

$$\blacktriangleright \quad L = L_P + L_{\text{int}} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (86)$$

Ve standardních kurzech, viz například [1], se z této Lagrangeovy funkce přímočaře odvodí odpovídající pohybová rovnice pro nabitou částici

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt}(m_0 \gamma \mathbf{v}) = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (87)$$

což je známá Lorentzova pohybová rovnice obsahující na levé straně Lorentzův faktor

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}. \quad (88)$$

To je samozřejmě při vysokých rychlostech, kdy je Lorentzův faktor podstatný, nepříjemné pro numerické simulace. Pro simulace je výhodnější použít Hamiltonovy rovnice, které jsou řešené vzhledem k nejvyšší (první) derivaci. Pokud chceme využít Lorentzovu pohybovou rovnici, je vhodná substituce

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \quad (89)$$

která převede rovnici do tvaru výhodnějšího pro numerickou integraci

$$\frac{d}{dt}(m_0 \mathbf{u}) = Q \mathbf{E} + \frac{Q \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 + \mathbf{u}^2/c^2}}. \quad (90)$$

Nyní přepíšeme Lorentzovu pohybovou rovnici do relativisticky kovariantního tvaru. Za tím účelem zavedeme čtyřrychlost jako

$$\blacktriangleright \quad U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (91)$$

Časová derivace musí být podle vlastního času, jinak by byly změněny transformační vlastnosti čtyřvektoru. Za pomoci vztahu (78) můžeme čtyřrychlost vyjádřit za pomoci běžné rychlosti $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ jako

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Pro druhou mocninu velikosti čtyřrychlosti platí

$$U^\alpha U_\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{-c^2 d\tau^2}{d\tau^2} = -c^2. \quad (93)$$

Skalární součin čtyřrychlosti se sebou samou je skutečně invariant nezávisící na volbě souřadnicové soustavy. Obdobně můžeme zavést čtyřzrychlení částice vztahem

$$a^\alpha = \frac{dU^\alpha}{d\tau} \quad (94)$$

Čtyřzrychlení je vždy kolmé na čtyřrychlost, což snadno odvodíme derivací vztahu (93)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(U^\alpha U_\alpha) &= 0, \\ \frac{dU^\alpha}{d\tau} U_\alpha + U^\alpha \frac{dU_\alpha}{d\tau} &= 0, \\ 2 \frac{dU^\alpha}{d\tau} U_\alpha &= 0, \end{aligned}$$

Odsud již okamžitě plyne

$$a^\alpha U_\alpha = 0. \quad (95)$$

Poslední veličinou, kterou budeme potřebovat, je čtyřhybnost definovaná vztahem

$$\blacktriangleright \quad p^\alpha \equiv m_0 U^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Časová část čtyřhybnosti musí mít význam energie a prostorová význam vektoru hybnosti (18), tedy musí platit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (97)$$

Odsud snadno získáme vztahy

$$\mathcal{E} = \gamma m_0 c^2 = mc^2, \quad (98)$$

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} = m \mathbf{v}, \quad (99)$$

kde jsme zavedli tzv. pohybovou hmotnost

$$m = \gamma m_0, \quad (100)$$

což ale není příliš šťastné označení, ve skutečnosti jde jen o zástupný symbol pro kombinaci veličin γm_0 . Snadno ověříme, že za pomoci čtyřhybnosti (96) a tenzoru pole (45) lze pohybovou rovnici (87) zapsat v elegantním tvaru

$$\blacktriangleright \quad \frac{dp^\alpha}{d\tau} = Q F^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (101)$$

Při přepisu využijeme rovnosti $d/d\tau = \gamma d/dt$. Prostorová složka dá Lorentzovu pohybovou rovnici, časová složka poskytne navíc energetickou bilanci

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = Q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \quad (102)$$

což není nic jiného než výkon dodávaný elektrickým polem (síla násobená rychlostí). Uvedme na závěr klíčové hustoty Lagrangeovy funkce a celkové Lagrangeovy funkce pro elektřinu a magnetismus

	částice	interakce	pole
\mathcal{L}	$-\rho_M c^2 \frac{d\tau}{dt}$	$J_\alpha A^\alpha$	$-\frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$
L	$-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$	$-Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$	–

Lagrangeova funkce pro pole postrádá smysl, neboť pole není lokalizované. Pokud vezmeme v úvahu pouze částicovou Lagrangeovu funkci, dostaneme pohybovou rovnici volné částice:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = 0. \quad (103)$$

Pokud vezmeme v úvahu Lagrangeovy funkce pro částici a pro interakce, dostaneme Lorentzovu pohybovou rovnici

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = Q F^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (104)$$

Pokud vezmeme v úvahu pouze Lagrangeovu funkci pro pole, dostaneme Maxwellovy rovnice ve vakuu:

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0. \quad (105)$$

A pokud uvážíme polní a interakční části Lagrangeovy funkce, dostaneme Maxwellovy rovnice se zdrojovými členy:

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mu_0 J^\alpha. \quad (106)$$

Potenciály generované částicí v její blízkosti

Uvažujme retardované a advanceované potenciály generované nabitou částicí:

$$A_{\text{ret}}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = A_{-}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^{\alpha}(t - \Delta t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (107)$$

$$A_{\text{adv}}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = A_{+}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^{\alpha}(t + \Delta t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (108)$$

Souhrnně budeme oba potenciály psát

$$A_{\mp}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^{\alpha}(t \mp \Delta t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (109)$$

Pokud se nacházíme v těsném okolí částice, lze předpokládat, že bude rozdíl času pozorovatele a času vyslání signálu malý, a proto provedeme Taylorův rozvoj čtyřtoku v Δt :

$$A_{\mp}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mp \Delta t)^k}{k!} \frac{\partial^k J^{\alpha}(t, \mathbf{r}')}{\partial t^k} \right) \frac{d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (110)$$

Po dosazení za retardovaný čas ze vztahu

$$\Delta t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / c \quad (111)$$

získáme pro čtyřpotenciál vztah (předpokládáme, že pořadí sumace a integrace lze zaměnit)

$$A_{\mp}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(\mp 1)^k}{c^k k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{k-1} J^{\alpha}(t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right], \quad (112)$$

Výraz rozdělíme na sudé a liché členy:

$$A_{\mp}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=0,2,4}^{\infty} \left[\frac{1}{c^k k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{k-1} J^{\alpha}(t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right] \mp \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \left[\frac{1}{c^k k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{k-1} J^{\alpha}(t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right], \quad (113)$$

První část je shodná pro retardované i advanceované řešení a má pro $k = 0$ část divergující na světočáře částice, jde například o Coulombická pole, která sice divergují, ale odpovídající síla je symetrická vůči částici, a výslednice je proto nulová a na částici nepůsobí. Druhá část má jiné znaménko pro retardovaný a jiné pro advanceovaný potenciál, řešení se liší pro vlnu přicházející k částici a pro vlnu od ní odcházející. Tato část na světočáře nediverguje, výslednice je na ní nenulová a odpovídá reakci částice na vlastní pole. Fyzikálním řešením je retardovaný potenciál, ten lze ale formálně rozložit na symetrickou a antisymetrickou část

$$A^{\alpha} = A_{\text{ret}}^{\alpha} = \frac{1}{2} (A_{\text{ret}}^{\alpha} + A_{\text{adv}}^{\alpha}) + \frac{1}{2} (A_{\text{ret}}^{\alpha} - A_{\text{adv}}^{\alpha}). \quad (114)$$

U symetrické části vymizí všechny liché členy a je dána první částí výrazu (113):

$$A_{\text{sym}}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} (A_{\text{ret}}^{\alpha} + A_{\text{adv}}^{\alpha}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{c^k k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{k-1} J^{\alpha}(t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right]. \quad (115)$$

Antisymetrická část potenciálu odpovídá lichým členům rozvoje (113):

$$A_{\text{ant}}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} (A_{\text{ret}}^{\alpha} - A_{\text{adv}}^{\alpha}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{c^k k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{k-1} J^{\alpha}(t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right]. \quad (116)$$

Na světočáře částice nediverguje a výslednice odpovídajících sil působících na částici je nenulová. Tato síla představuje reakci částice na svá vlastní pole. Najdeme ji v lokálně inerciální soustavě, která v některé počáteční fázi pohybu spojená s částicí (Lorentzově lokální souřadnicové soustavě). V takové soustavě lze vše řešit nerelativisticky a navíc postačí vzít jen první nenulový člen (samozřejmě budeme muset nakonec řešení transformovat do obecné inerciální souřadnicové soustavy, tj. upravit do kovariantního tvaru). U skalárního potenciálu je člen $k=1$ nulový, protože integrál vpravo dá celkový náboj a jeho derivace je nulová. První nenulový člen proto bude až pro $k=3$:

$$\frac{\phi}{c} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \rho_Q(t, \mathbf{r}') c d^3 \mathbf{r}' \quad (117)$$

První nenulový člen pro vektorový potenciál bude pro $k=1$:

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j}_Q(t, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (118)$$

Pro bodovou částici se světočárou $x_0^a(\tau)$ bude

$$\begin{aligned} \rho_Q(t, \mathbf{r}) &= Q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0), \\ \mathbf{j}_Q(t, \mathbf{r}) &= Q \mathbf{v} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (119)$$

Odpovídající potenciály (v blízkosti částice) jsou po integraci

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\mu_0 Q}{24\pi c} \frac{\partial^3}{\partial t^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))^2, \\ \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0 Q}{4\pi c} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (120)$$

Abrahamova-Lorentzova pohybová rovnice

Odpovídající pole jsou:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 Q}{24\pi c} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \nabla (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 Q}{4\pi c} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \\ &= \frac{\mu_0 Q}{24\pi c} \frac{\partial^3}{\partial t^3} 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{\mu_0 Q}{4\pi c} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \\ &= -\frac{\mu_0 Q}{12\pi c} \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{\mu_0 Q}{4\pi c} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\mu_0 Q}{6\pi c} \frac{d\mathbf{a}}{dt}. \end{aligned} \quad (121)$$

Síla od reakce na vlastní pole má proto tvar:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = Q\mathbf{E} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}} \quad (122)$$

Tato síla se nazývá Abrahamova-Lorentzova síla, je pojmenována podle německého fyzika Maxe Abrahama (1875–1922), který její tvar odvodil v roce 1905 [1]. Příslušná pohybová rovnice se nazývá Abrahamova-Lorentzova (AL) pohybová rovnice:

$$m_0 \mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}} \quad (123)$$

V lokální Lorentzově soustavě částice není třeba rozlišovat klidovou a pohybovou hmotnost a pohybovou rovnici lze přepsat do tvaru

$$\blacktriangleright \quad m_0 \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + m_0 \tau_0 \ddot{\mathbf{r}}; \quad \tau_0 \equiv \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c m_0}. \quad (124)$$

Konstanta τ_0 má rozměr času, o její interpretaci se zmíníme zanedlouho. Pro elektron je její hodnota přibližně 10^{-24} s. Tři základní problémy rovnice jsou zjevné:

I. Třetí derivace polohy vyžaduje nejasnou dodatečnou počáteční podmínku

Klasická fyzika definuje stav pomocí polohy a rychlosti (hybnosti). Počáteční poloha a rychlost (hybnost) umožní výpočet integračních konstant, které se objeví při řešení pohybové rovnice. Přítomnost třetí derivace v pohybové rovnici ale znamená další integrační konstanty, jejichž význam je při nejmenším nejasný a z hlediska klasické fyziky se jeví jako nadbytečné.

II. Při nulové externí síle existují nefyzikální řešení rostoucí exponenciálně s časem

Jedno takové řešení najdeme snadno – zvolíme nulovou externí sílu a rovnici (124) budeme integrovat třikrát po sobě, přičemž první a druhou integrační konstantu zvolíme nulovou:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \tau_0 \ddot{\mathbf{r}}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \tau_0 \dot{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{r} &= \tau_0 \dot{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 e^{t/\tau_0}. \end{aligned} \quad (125)$$

Nalezené řešení je tzv. ubíhající (*runaway*) řešení. Takové řešení není fyzikální, není totiž možné, aby bez působení jakýchkoli sil docházelo k exponenciálnímu urychlování částice. Abrahamova-Lorentzova rovnice tedy poskytuje i řešení, která nekorespondují s přírodou. Obecné řešení pro pohyb volné částice (bez externí síly) lze napsat jako

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}_0 e^{t/\tau_0} + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2. \quad (126)$$

Je jasné, že volbou $\mathbf{c}_0 = 0$ lze nefyzikální řešení v tomto případě odstranit a dokonce tak zredukovat počet integračních konstant na přijatelný počet.

III. Abrahamova-Lorentzova rovnice poskytuje řešení narušující kauzalitu

Pro sílu, která je nenulová od času t_0 (buď konstantní), závisí řešení v čase $t < t_0$ na hodnotě síly v budoucnosti, což je pro fyziku nepřijatelné. Taková nekauzální řešení existují i pro jakoukoli externí sílu, která je pouhou funkcí času. Jedním z nich je výraz

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m_0 \tau_0} \int_t^\infty \mathbf{F}_{\text{ext}}(t') e^{-\frac{(t'-t)}{\tau_0}} dt'. \quad (127)$$

Snadno ukážeme, že (127) je řešením AL rovnice. Levou i pravou stranu (127) zderivujeme podle času. U derivace pravé strany budeme derivovat každý výskyt proměnné t zvlášť, tj. využijeme větu

$$\frac{d}{dt} \int_C^t f(t, t') dt' = f(t, t) + \int_C^t \frac{\partial f(t, t')}{\partial t} dt'. \quad (128)$$

Výsledek je

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\frac{1}{m_0 \tau_0} \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) + \frac{1}{m_0 \tau_0^2} \int_t^\infty \mathbf{F}_{\text{ext}}(t') e^{-\frac{(t'-t)}{\tau_0}} dt' \quad (129)$$

Minus v prvním členu vzniklo záměnou integračních mezí tak, abychom derivovali podle horní proměnné meze. Integrál napravo vyjádříme z (127):

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\frac{1}{m_0\tau_0}\mathbf{F}_{\text{ext}}(t) + \frac{1}{\tau_0}\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad (130)$$

$$m_0\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) + m_0\tau_0\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \quad (131)$$

což je AL rovnice. Zrychlení (127) je tedy opravdu řešení AL rovnice. Hodnota zrychlení se ale počítá z hodnoty síly $\mathbf{F}_{\text{ext}}(t)$ v budoucnosti a řešení je zjevně nekauzální. Budoucí síla se integruje s exponenciálně klesající vahou, podstatné pro zrychlení jsou hodnoty síly v nejbližší budoucnosti. Charakteristickou časovou konstantou je právě čas τ_0 , proto se mu říká *předakcelerační čas* (*preacceleration time*). Pro elektron jde o hodnotu přibližně 10^{-24} s.

* * *

Výkon souvisící s generováním vlastních polí je

$$P = \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} = m_0\tau_0 \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{v} = m_0\tau_0 \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) - a^2 \right]. \quad (132)$$

Pro částici s konstantní rychlostí je výkon nulový, při periodickém pohybu částice září. Střední hodnota první části bude v tomto případě nulová, proto platí

$$\langle P \rangle = -\frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \langle a^2 \rangle \quad (133)$$

a částice ztrácí, jak jsme očekávali, zářením energii, tedy alespoň něco je v AL rovnici v pořádku. Po dosazení za zrychlení kmitavého pohybu dokonce dostaneme správnou formuli pro dipólové záření.

Lorentzova-Diracova pohybová rovnice

Pokud nebudeme v Lorentzově souřadnicové soustavě lokálně spojené s částicí, je přímé kovariantní zobecnění pohybové rovnice (124) na libovolnou soustavu

$$\blacktriangleright \quad m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} = F_{\text{ext}}^\alpha + m_0\tau_0 \left(\frac{da^\alpha}{d\tau} - \frac{a^2}{c^2} U^\alpha \right); \quad a^2 \equiv a^\beta a_\beta. \quad (134)$$

Druhý člen v kulaté závorce zajišťuje správnou velikost čtyřvektorů. Zkuste si rovnici s externí Lorentzovou silou vynásobit U_α :

$$m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} U_\alpha = QF^{\alpha\beta} U_\beta U_\alpha + m_0\tau_0 \left(\frac{da^\alpha}{d\tau} U_\alpha - \frac{a^2}{c^2} U^\alpha U_\alpha \right)$$

Člen nalevo je nulový, protože čtyřzrychlení je podle (95) kolmé na čtyřrychlost. První člen napravo je také nulový, protože jde o zúžení symetrického a antisymetrického tenzoru. Třetí člen upravíme pomocí derivace součinu a ve čtvrtém vyjádříme velikost čtyřrychlosti z (93):

$$0 = 0 + m_0\tau_0 \left(\frac{d}{d\tau} (a^\alpha U_\alpha) - a^\alpha a_\alpha - \frac{a^2}{c^2} (-c^2) \right)$$

První člen v kulaté závorce je opět dle (95) nulový a zbylé členy se přesně odečtou:

$$0 = 0 + m_0\tau_0 (0 - a^2 + a^2)$$

Bez posledního kompenzujícího členu by Lorentzova-Diracova rovnice (134) nebyla kovariantní. Rovnici odvodil anglický fyzik Paul A. M. Dirac (1902–1984) za pomoci úvah o zachování čtyřhybnosti soustavy pole a částice v roce 1938 [2]. Naše odvození vychází z přehledového článku [4]. Kompenzující člen můžeme upravit do nejčastěji používaného tvaru (využijeme, že čtyřzrychlení je vždy kolmé na čtyřrychlost, tj. platí $a_\beta U^\beta = 0$):

$$a^2 U^\alpha = a^\beta a_\beta U^\alpha = a^\beta \frac{dU_\beta}{d\tau} U^\alpha = \left(\frac{d}{d\tau} (a^\beta U_\beta) - \frac{da^\beta}{d\tau} U_\beta \right) U^\alpha = -\frac{da^\beta}{d\tau} U^\alpha U_\beta$$

a Lorentzovu-Diracovu rovnici psát v alternativním tvaru, v němž je radiační síla úměrná časové derivaci zrychlení (obdobně tomu je u AL rovnice)

$$\blacktriangleright \quad m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} = F_{\text{ext}}^\alpha + m_0 \tau_0 \left(g^\alpha{}_\beta + \frac{U^\alpha U_\beta}{c^2} \right) \frac{da^\beta}{d\tau}. \quad (135)$$

Pauliho zápis radiační reakce

V obecné Lorentzově Diracově rovnici (134) má radiační reakce na částici tvar

$$F_{\text{rad}}^\alpha = m_0 \tau_0 \left(\frac{da^\alpha}{d\tau} - \frac{a^2}{c^2} U^\alpha \right). \quad (136)$$

Od vlastního času nyní přejdeme k souřadnicovému času, pro přechod využijeme vyjádření intervalu ve vlastní soustavě částice a v laboratorní soustavě, viz (78):

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \Rightarrow \quad (137)$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}, \quad (138)$$

a proto můžeme psát

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{df}{dt} = \gamma \dot{f}. \quad (139)$$

Tečkou budeme označovat, jak je obvyklé, derivace podle souřadnicového času. Namísto rychlosti budeme používat bezrozměrnou rychlost $\boldsymbol{\beta}$, která má tu výhodu, že její hodnota nezávisí na volbě jednotek

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{v}/c \quad (140)$$

Nejprve určíme časovou změnu Lorentzova kontrakčního faktoru γ :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dt} (1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{-1/2} = \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} (1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{-3/2} = \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}. \quad (141)$$

Nyní si napočteme jednotlivé členy potřebné pro sestavení radiační reakce (136):

$$x^\alpha = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; \quad (142)$$

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\alpha}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \gamma c \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}; \quad (143)$$

$$a^\alpha \equiv \frac{dU^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dU^\alpha}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma c \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \dots = c \begin{pmatrix} \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \\ \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + \gamma^2 \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (144)$$

Povšimněte si, že odvozený výraz má skutečně rozměr zrychlení. Rychlost světla před výrazem přináší rozměr $[c] = \text{m/s}$, další $1/\text{s}$ vnáší časová derivace (tečka). Vnímavý student si ještě může zkontrolovat, že platí $a^\alpha U_\alpha = 0$. Dále potřebujeme a^2 :

$$a^2 = a^\alpha a_\alpha = -(a^0)^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \dots = c^2 \left[\gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^4 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \right], \quad (145)$$

Poslední člen, který se vyskytuje v radiční reakci, je $da^\alpha/d\tau$. Výpočet je přímočarý, i když poněkud zdlouhavý a vede na celkem jednoduchý výraz

$$\frac{da^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{da^\alpha}{dt} = \dots = c \left(\begin{array}{c} 4\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^5 [\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}^2] \\ 4\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^5 [(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta} + 3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \boldsymbol{\beta}] + \gamma^3 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{array} \right) \quad (146)$$

Jednoduchým zkombinováním posledních výrazů získáme radiční část pravé strany Lorentzovy Diracovy rovnice:

$$\frac{da^\alpha}{d\tau} - \frac{a^2}{c^2} U^\alpha = c \left(\begin{array}{c} 3\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^5 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \\ 3\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^5 [(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta} + 3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\dot{\boldsymbol{\beta}}] + \gamma^3 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{array} \right) \quad (147)$$

Pohybová rovnice (134) má nyní tvar

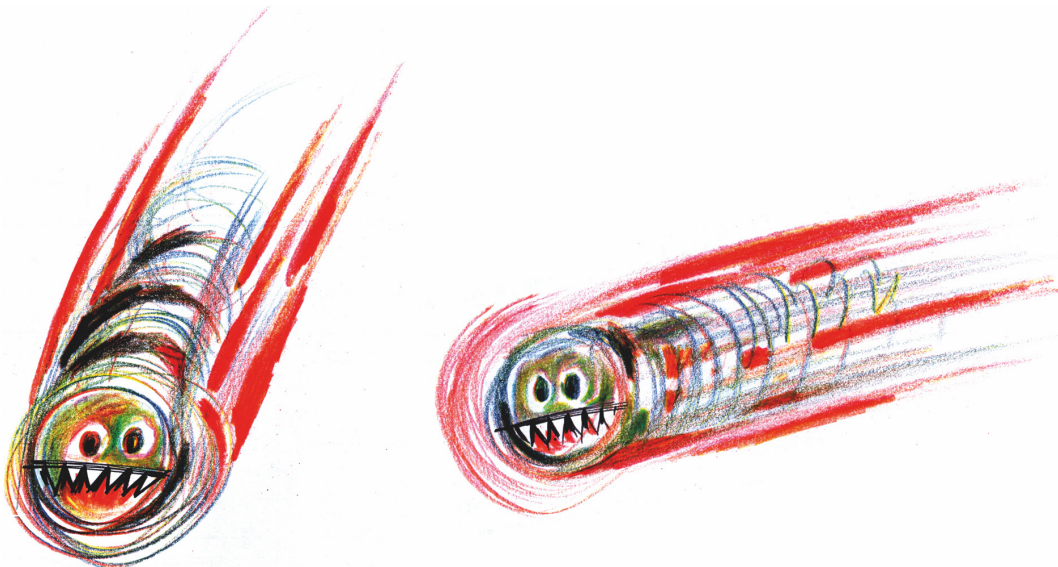
$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = F_{\text{ext}}^\alpha + m_0 c \tau_0 \left(\begin{array}{c} 3\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^5 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \\ 3\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^5 [(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta} + 3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\dot{\boldsymbol{\beta}}] + \gamma^3 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{array} \right); \quad (148)$$

kde p^α je čtyřhybnost částice. Po převedení levé strany do souřadnicového času máme pro radiční část

$$\blacktriangleright \quad \frac{dE_{\text{rad}}}{dt} = m_0 c^2 \tau_0 \left[3\gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \right]; \quad (149)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{F}_{\text{rad}} \equiv \frac{d\mathbf{p}_{\text{rad}}}{dt} = m_0 c \tau_0 \left[3\gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta} + 3\gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \gamma^2 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \right]. \quad (150)$$

Poslední dva výrazy představují úbytek energie (vyjde záporný) a hybnosti z částice způsobený vlastním zářením. Výraz (150) odvodil v roce 1958 Wolfgang Pauli [3] a je velmi často citován komunitou zabývající se ubíhajícími elektrony. Pro ultrarelativistické částice s $\gamma > 1$ jsou členy v hranaté závorce seřazeny dle klesající mocniny Lorentzova faktoru γ .



Iterační řešení problémů – Landauova-Lifšitzova rovnice

Zajímavým řešením problémů je předpoklad, že radiační člen v (124) je malý, což umožňuje odhadnout zrychlení iteračně:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{m_0} \quad (151)$$

a tuto první iteraci dosadit do pravé strany rovnice (124):

$$m \mathbf{a}_1 \approx \mathbf{F}_{\text{ext}} + \tau_0 \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}}. \quad (152)$$

Tato rovnice nemá problémy se třetími derivacemi, ale někdy není zcela jasné, za jakých podmínek je první iterace dostačující a kdy je třeba iterace opakovat. Iterační řešení opět funguje jen pro sílu explicitně závisící na čase (například elektron v poli laserového impulzu). Relativistické zobecnění iterační náhražky (152) je přímočaré:

$$m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} = F_{\text{ext}}^\alpha + \tau_0 (g^\alpha_\beta + U_\beta U^\alpha) F_{\text{ext},\gamma}^{\beta\alpha} U^\gamma. \quad (153)$$

Pro sílu rovnou Lorentzově síle se výsledná rovnice nazývá *Landauova-Lifšicova rovnice*:

$$\blacktriangleright \quad m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} = QF^{\alpha\beta} U_\beta + \tau_0 (g^\alpha_\beta + U_\beta U^\alpha) QF^{\beta\alpha}_{,\gamma} U_\alpha U^\gamma. \quad (154)$$

Existují různé ekvivalentní přepisy této rovnice. Základní podmínkou pro její použití je, aby radiační síla byla podstatně menší než elektromagnetické síly. Čas, za který prolétne signál oblast interakce, byl měl navíc být podstatně menší než typická doba změn silového pole. Zpravidla se tyto podmínky vyjadřují ve tvaru [7]

$$E \ll \frac{E_S}{\alpha}; \quad \lambda \gg \alpha \lambda_C, \quad (155)$$

kde jsme označili E_S Schwingerovo pole (prahové pole pro tvorbu elektron-pozitronových párů z vakua), λ_C Comptonovu vlnovou délku (typická změna vlnové délky fotonu při jeho interakci s elektronem) a α konstantu jemné struktury (popisuje intenzitu elektromagnetické interakce). Tyto tři klíčové veličiny jsou dány vztahy:

$$E_S \equiv \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} \approx 1.3 \times 10^{18} \text{ V/m}, \quad (156)$$

$$\lambda_C \equiv \frac{2\pi \hbar}{m_e c} \approx 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}, \quad (157)$$

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (158)$$

Snahy o řešení problémů pomocí integrálů a řad

Řešení rovnice (124) lze zapsat ve tvaru, který zcela eliminuje nefyzikální exponenciálně narůstající řešení. Získáme ho z (129) substitucí

$$s = \frac{t' - t}{\tau_0}, \quad (159)$$

která vede na řešení

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{m} \int_0^\infty \mathbf{F}_{\text{ext}}(t + s\tau_0) e^{-s} ds \quad (160)$$

Problém narušení kauzality ale přetrvává. V roce 2001 navrhli američtí fyzikové Michael Ibison a Harold Puthoff řešení ve formě řady [5] v parametru τ_0 , které vychází z (160):

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \frac{1}{m_0 c \gamma^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\gamma \tau_0 \frac{d}{dt} \right)^n \left(\gamma^2 [\mathbf{F}_{\text{ext}} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}})] \right); \quad (161)$$

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{v}}{c}; \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Tato řada sice vypadala nadějně, ale nakonec se ukázalo, že má dvě zásadní vady: 1) funguje jen pro externí sílu závislou na čase (což není Lorentzova síla), 2) pro energie vyšší, než je klidová energie částice řada diverguje. Nadějněji vypadá jiná řada publikovaná kubánskými fyziky (Cabo Montes de Oca, Cabo Bizet) v roce 2015 [6]. Problém se silou závislou na čase ale přetrvává, navíc řešení ve formě nekonečné řady, které je třeba dále integrovat člen po členu, není zrovna ideální.

Obecné řešení rovnice (124) pro sílu závisící pouze na čase lze zapsat v dalším alternativním tvaru

$$\mathbf{a}(t) = e^{t/\tau_0} \left[\mathbf{C} - \frac{1}{m_0 \tau_0} \int_{-\infty}^t \mathbf{F}_{\text{ext}}(t') e^{-t'/\tau_0} dt' \right] \quad (162)$$

Pro konstantní sílu vynořivší se v čase t_0 lze zvolit \mathbf{C} tak, aby nefyzikální exponenciální řešení vymizelo, řešení v časech $t < t_0$ ale bude závislé na hodnotě síly v $t > t_0$, což je opět těžko přijatelné. Nejasnosti a nezodpovězené otázky stále přetrvávají.

Literatura k této kapitole

- [1] Max Abraham: *Theorie der Elektrizität: Elektromagnetische Theorie der Strahlung*; Teubner, Leipzig (1905)
- [2] Paul A. M. Dirac: *Classical Theory of Radiating Electrons*; Proc. Roy. Soc. London **A167**, 148 (1938)
- [3] Wolfgang Pauli: *Theory of Relativity*; Pergamon Press 1958
- [4] Eric Poisson: *An introduction to the Lorentz-Dirac equation*; arXiv:gr-qc/9912045v1 (1999)
- [5] Michael Ibison, Harold E Puthoff: *Relativistic integro-differential form of the Lorentz–Dirac equation in 3D without runaways*; J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 3421–3428 (2001)
- [6] A. Cabo Montes de Oca, N. G. Cabo Bizet: *Newton-like equations for a radiating particle*; Physical Review **D91**, 016001 (2015)
- [7] Martin Jirka: *Ultra-intense laser-matter interaction*; Doctoral thesis, FNSPE CTU, 2018



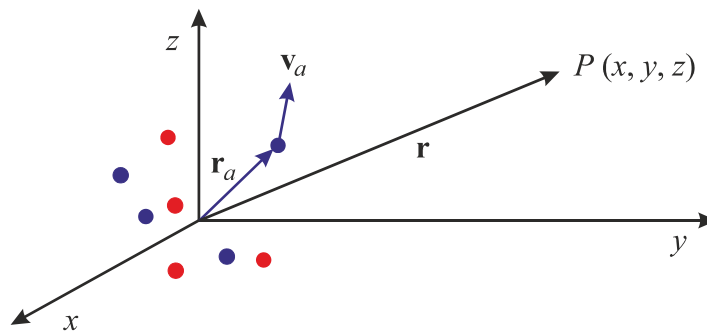
4. ZÁŘENÍ NABITÝCH ČÁSTIC

Multipólový rozvoj (stacionární)

Pro pochopení jednotlivých zářivých členů budeme potřebovat znát elektrický a magnetický dipólový moment a elektrický kvadrupólový moment. Proto provedeme nejprve multipólový rozvoj ve stacionárním případě, kde je vše jednodušší, a v další kapitole se budeme věnovat zářivému rozvoji. Budeme tedy předpokládat, že v rovnicích pro potenciály (107) nedochází k retardaci a čtyřtok náboje je pouze funkcí prostorových souřadnic (například částicemi generované proudy nezávisí na čase)

$$A^\alpha(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^\alpha(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (163)$$

Předpokládejme, že zdroje polí jsou lokalizované, tvoří nějaký shluk částic v oblasti, do níž umístíme počátek souřadnicové soustavy:



Každý z nábojů má polohový vektor \mathbf{r}_a , rychlostní vektor \mathbf{v}_a , hmotnost m_a a náboj Q_a . Pozorovatel je ve velké vzdálenosti od zdroje polí a má polohu \mathbf{r} . Čtyřtok náboje bude mít tvar superpozice přes polohy jednotlivých částic

$$\rho_Q(\mathbf{r}') = \sum_a Q_a \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a), \quad (164)$$

$$\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}') = \sum_a Q_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a). \quad (165)$$

Pro oba potenciály máme (po dosazení) v tomto případě jednoduché vyjádření

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_a \frac{Q_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}, \quad (166)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_a \frac{Q_a \mathbf{v}_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (167)$$

Pole pozorujeme ve vzdáleném místě \mathbf{r} , platí $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}_a$, takže můžeme provést Taylorův rozvoj pro argument \mathbf{r} a přírůstek \mathbf{r}_a :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} - x_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} x_k^{(a)} x_l^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left(\frac{1}{r} \right) \pm \dots \quad (168)$$

Nyní provedeme derivace (při derivování využijeme $\partial r / \partial x_k = x_k / r$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} + x_k^{(a)} \frac{x_k}{r^3} + \frac{1}{2!} x_k^{(a)} x_l^{(a)} \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} \pm \dots \quad (169)$$

Odvozený rozvoj dosadíme do vztahů (166) a (167) pro potenciály a ze sumace vytkneme veličiny, přes které se nesčítá:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_a Q_a + \frac{x_k}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_a Q_a x_k^{(a)} + \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a x_k^{(a)} x_l^{(a)} + \dots \quad (170)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_a Q_a \mathbf{v}_a + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} x_k \sum_a Q_a \mathbf{v}_a x_k^{(a)} + \dots \quad (171)$$

V posledním vypsaném členu rozvoje skalárního potenciálu lze výraz v sumaci upravit do obdobného tvaru, jaký má výraz před sumací:

$$\begin{aligned} \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a x_k^{(a)} x_l^{(a)} &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} \right) = \\ &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} - r_a^2 \delta_{kl} \right). \end{aligned} \quad (172)$$

Odečtením členu $r_a^2 \delta_{kl}$ získá tenzor v závorce nulovou stopu, fakticky se ale nic nestane, protože platí

$$\left(3x_k x_l - r^2 \delta_{kl} \right) r_a^2 \delta_{kl} = \left(3r^2 - 3r^2 \right) r_a^2 = 0. \quad (173)$$

U vektorového potenciálu je první člen za rovnítkem nulový (součet příspěvků všech elektrických proudů musí být ve stacionárním případě pro izolovanou soustavu nábojů nulový). V dalším členu lze vzniklou kombinaci rozložit na symetrickou a antisymetrickou část

$$\begin{aligned} \sum_a Q_a \mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) &= \sum_a Q_a \left(\frac{1}{2} [\mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) + \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_a)] + \frac{1}{2} [\mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) - \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_a)] \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) + \frac{1}{2} \sum_a Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (174)$$

Vzhledem k předpokladu stacionarity je symetrická část nulová (u záření už toto platit nebude) a antisymetrická část dá dvojný vektorový součin

$$\mathbf{A} = 0 + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \right) \times \mathbf{r} + \dots \quad (175)$$

Celkově tedy první členy rozvoje, které budeme pro teorii záření potřebovat, mají tvar:

$$\begin{aligned} \phi^{(0)} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; & Q &\equiv \sum_a Q_a, \\ \phi^{(1)} &= \frac{\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}; & \mathbf{p}_E &\equiv \sum_a Q_a \mathbf{r}_a, \\ \phi^{(2)} &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} Q_{kl}; & Q_{kl} &\equiv \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} - r_a^2 \delta_{kl} \right), \\ \mathbf{A}^{(0)} &= 0; & Q_M &= 0, \\ \mathbf{A}^{(1)} &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{p}_M \times \mathbf{r}; & \mathbf{p}_M &\equiv \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a). \end{aligned} \quad (176)$$

Jednotlivé příspěvky se nazývají monopólový (0), dipólový (1) a kvadrupólový (2). Elektricky neutrální soustava má celkový náboj Q nulový, a tím je nulový i celý monopólový člen. Další vlastnosti jednotlivých členů multipólového rozvoje, jejich vztah k vektorům polarizace a magnetizace a význam dipólových momentů pro jednoduché soustavy nalezne čtenář v literatuře [1]. Poznamenejme, že elektrický kvadrupólový příspěvek lze zapsat invariantně jako:

$$\blacktriangleright \quad \phi^{(2)} = \frac{3\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} - r^2 \mathbf{1}}{24\pi\epsilon_0 r^5} : \vec{\mathbf{Q}}; \quad \vec{\mathbf{Q}} \equiv \sum_a Q_a (3\mathbf{r}_a \otimes \mathbf{r}_a - r_a^2 \mathbf{1}). \quad (177)$$

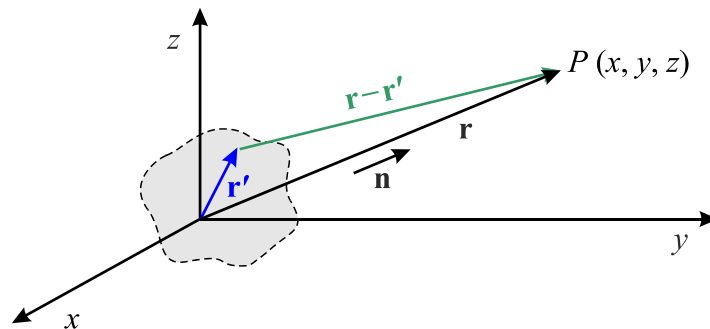
Multipólový rozvoj (zářivý)

Uvažujme nyní časově proměnné zdroje potenciálů

$$A^\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^\alpha(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'; \quad (178)$$

$$t' \equiv t - \Delta t = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c}. \quad (179)$$

Situace je nyní o něco složitější. Jednak není retardovaný čas určen explicitně, ale je zadán implicitní formulí (179), jednak se bude muset provést Taylorův rozvoj jak ve jmenovateli, tak v čitateli, a poté vybrat zářivé členy. Ty ubývají se vzdáleností jako $1/r$, kde r je vzdálenost pozorovatele od počátku souřadnicové soustavy, který je lokalizován v oblasti zdrojů. Uvažujeme jen pole, které je schopné odnést energii do libovolné vzdálenosti od zdroje, tedy integrace Poyntingova vektoru $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, který je tokem energie, přes prostorový úhel $r^2 d\Omega$ musí dát v jakékoli vzdálenosti konečný příspěvek. Tento fakt úlohu naopak zjednodušuje, neboť z rozvoje potenciálů i polí postačí vybírat jen členy ubývající jako $1/r$.



Rozvoj jmenovatele jsme prováděli i ve stacionárním případě, viz (168), pro účely teorie záření postačí vzít jen první člen, ostatní ubývají rychleji než $1/r$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}. \quad (180)$$

V argumentu čtyřtoku bude třeba rozvinout retardovaný čas pro pozorovatele nacházejícího se ve velké vzdálenosti od zdroje

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} = t - \frac{r}{c} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{r}{c} \right) (-x'_k) + \dots = t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{x_k}{r} x'_k + \dots = t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} + \dots$$

Získaný výsledek je celkem pochopitelný. První člen je čas pozorovatele, druhý člen je retardovaný čas vzhledem k počátku (společný všem zdrojům) a poslední člen představuje jemné nuance retardace pro jednotlivé elementy zdroje pole. Zapišme ho přehledně:

$$t' \approx \tau + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}; \quad (181)$$

$$\tau \equiv t - r/c. \quad (182)$$

Symbolem τ jsme označili společný retardovaný čas vzhledem k počátku, symbolem \mathbf{n} normálový vektor ke vzdálené integrační ploše (jednotkový vektor spojnice počátku soustavy s pozorovatelem), $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Samozřejmě jsme se nezbavili implicitní závislosti, vektor \mathbf{r}' je opět vyjádřen v retardovaném čase. Uvážíme-li oba rozvoje (180) a (181), přejde vztah (178) pro čtyřpotenciál do tvaru

$$A^\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int J^\alpha(\tau + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'/c, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (183)$$

Nyní rozvineme čtyřtok v čase τ a přírůstku $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'$.

$$A^\alpha(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int J^\alpha(\tau, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \frac{\partial J^\alpha}{\partial \tau} \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) d^3\mathbf{r}' + \dots \quad (184)$$

Elektromagnetická pole budeme počítat ze vztahů

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = -\nabla\phi_{\text{rad}} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{rad}}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{rad}}}{\partial t}, \quad (185)$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = \text{rot } \mathbf{A}_{\text{rad}}. \quad (186)$$

Vzhledem k tomu, že prostorová derivace skalárního potenciálu bude se vzdáleností ubývat minimálně jako $1/r^2$ (samo ϕ ubývá jako $1/r$), nepřispěje skalární potenciál k zářivým polím. Ve vztahu (184) se budeme tedy nadále zabývat jen prostorovou částí a navíc vytkneme derivaci podle společného retardovaného času τ před integraci:

$$\mathbf{A}(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}_Q(\tau, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial \tau} \int \mathbf{j}_Q(\tau, \mathbf{r}') \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) d^3\mathbf{r}' + \dots \quad (187)$$

V dalším uvidíme, že první člen popisuje elektrické dipólové záření a druhý člen magnetické dipólové a elektrické kvadrupólové záření. Provedme nyní integraci pro soustavu nabitých částic lokalizovaných v okolí počátku, pro něž je

$$\mathbf{j}_Q(\tau, \mathbf{r}') = \sum_a Q_a \mathbf{v}_a(\tau) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a). \quad (188)$$

Ihned dostaneme

$$\mathbf{A}(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_a (Q_a \mathbf{v}_a) + \frac{\mu_0}{4\pi r c} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_a Q_a \mathbf{v}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a) + \dots \quad (189)$$

V prvním členu vytkneme před sumu časovou derivaci (vše je nyní ve společném retardovaném čase τ), v druhém členu provedeme symetrizaci (174) – nyní ale nebude časová derivace symetrické části nulová jako ve stacionárním případě:

$$\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}^{(E1)} + \mathbf{A}^{(M1)} + \mathbf{A}^{(E2)} + \dots; \quad (190)$$

$$\mathbf{A}^{(E1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a, \quad (191)$$

$$\mathbf{A}^{(M1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \times \mathbf{n}, \quad (192)$$

$$\mathbf{A}^{(E2)} = \frac{\mu_0}{8\pi r c} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a). \quad (193)$$

Všechny tři zářivé potenciály lze přepsat za pomoci veličin zavedených při stacionárním rozvoji. V prvním se vyskytuje elektrický dipólový moment, ve druhém magnetický dipólový moment, jedině třetí potenciál bude třeba ještě upravit. Z předchozího víme – viz (46) –, že potenciál můžeme změnit o gradient libovolné funkce

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}). \quad (194)$$

Volme pouze funkci vzdálenosti, pak bude transformace k novému potenciálu vypadat

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (195)$$

a potenciál $\mathbf{A}^{(E2)}$ snadno změníme do tvaru s elektrickým kvadrupólovým momentem

$$\mathbf{A}^{(E2)} = \frac{\mu_0}{8\pi r c} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{3} \sum_a 3Q_a \mathbf{r}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a) \rightarrow \frac{\mu_0}{24\pi r c} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \left[3\mathbf{r}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a) - r_a^2 \mathbf{n} \right]. \quad (196)$$

Výsledné vztahy pro zářivé potenciály tedy jsou (vše je vyjádřeno ve společném retardovaném čase τ , časové derivace jsou také podle τ)

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}^{(E1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}_E, \quad (197)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}^{(M1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \dot{\mathbf{p}}_M \times \mathbf{n}, \quad (198)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}^{(E2)} = \frac{\mu_0}{24\pi r c} \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}. \quad (199)$$

V posledním výrazu jde o zúžení tenzoru $\ddot{\mathbf{Q}}$ a vektoru \mathbf{n} .

Elektrické dipólové záření

Určeme nyní elektrické a magnetické pole pro potenciál ve tvaru (197). Nesmíme zapomenout, že společný retardační čas je také funkcí r (pevná poloha pozorovatele) a platí

$$\tau = t - r/c \quad \Rightarrow \quad (200)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = -\frac{1}{c} \frac{x_k}{r}. \quad (201)$$

Nyní přistoupíme k samotnému výpočtu elektrického a magnetického pole. Při derivování budeme vybírat jen zářivé členy s radiální závislostí $1/r$, vyšší mocniny zanedbáme. Takto konstruovaná radiální pole budeme značit psacími symboly:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}^{(E1)}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}^{(E1)}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}_E;$$

$$\mathcal{B}_k = \left(\text{rot } \mathbf{A}^{(E1)} \right)_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\dot{p}_m}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{klm} \frac{\frac{\partial \dot{p}_m}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_l} r - \dot{p}_m \frac{\partial r}{\partial x_l}}{r^2}.$$

Druhý člen se chová jako $1/r^2$, není radiální a vynecháme ho:

$$\mathcal{B}_k = \frac{\mu_0}{4\pi r} \varepsilon_{klm} \ddot{p}_m \left(-\frac{1}{c} \frac{x_l}{r} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi c r} (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}_E)_k.$$

Výsledek tedy je:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}^{(E1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}_E; \quad (202)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{B}^{(E1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi c r} (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}_E) = \frac{1}{c} (\mathbf{n} \times \mathcal{E}^{(E1)}). \quad (203)$$

Je patrné, že dosti daleko od zdroje má elektromagnetické pole charakter rovinné vlnoplochy. V blízkosti zdroje (dipólu) by pole bylo mnohem komplikovanější. Nalezené řešení platí jen v tzv. radiační zóně. Při výpočtu pole všech typů záření postačí v radiační zóně spočítat jen elektrické pole a magnetické pole dopočíst ze vztahu pro rovinnou vlnoplochu (je to rychlejší než pomocí rotace vektorového potenciálu)

$$\mathcal{B} = \frac{1}{c}(\mathbf{n} \times \mathcal{E}). \quad (204)$$

Pro zářivá pole nyní určíme tok energie (Poyntingův vektor). Zůstanou v něm jen členy $1/r^2$:

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E} \times (\mathbf{n} \times \mathcal{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathcal{E}^2 \mathbf{n} - (\mathcal{E} \cdot \mathbf{n}) \mathcal{E}] \quad (205)$$

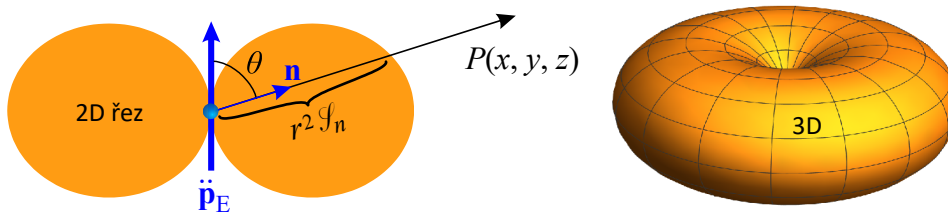
Nás bude zajímat projekce Poyntingova vektoru do směru od nábojů k nám (radiální tok energie, intenzita), tj.

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E} \cdot \mathbf{n})^2] = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^2 \cos^2 \theta] = \frac{\mathcal{E}^2}{\mu_0 c} \sin^2 \theta.$$

Nyní do radiálního toku energie dosadíme za elektrické pole z (202) a převedeme permeabilitu na permitivitu pomocí vztahu $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$. Dostaneme radiální tok energie

$$\mathcal{S}_n = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta; \quad \theta = \angle(\mathcal{E}, \mathbf{n}) = \angle(\ddot{\mathbf{p}}_E, \mathbf{n}), \quad [\mathcal{S}_n] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad (206)$$

v němž θ je úhel mezi vzdáleným elektrickým polem (druhou časovou derivací \mathbf{p}_E) a směrem k pozorovateli. Nejintenzivněji proto částice září ve směru kolmém na druhou časovou derivaci elektrického dipólového momentu (u jedné částice jde o směr kolmý na zrychlení)



Element výkonu vyzářený do prostorového úhlu je

$$d\mathcal{P} = \mathcal{S} dS = (\mathcal{S} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathcal{S}_n dS = \mathcal{S}_n r^2 d\Omega. \quad (207)$$

Po dosazení z (206) získáme *Larmorovu diferenciální formuli*

$$d\mathcal{P} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega. \quad (208)$$

Celkový vyzářený výkon získáme integrací

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int \sin^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_1^{-1} (1 - \xi^2) (-d\xi) = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \left[\xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}; \quad [\mathcal{P}] = \text{W}. \quad (209)$$

Z Larmorovy formule (209) plyne několik zajímavých důsledků:

- 1) Pokud se částice pohybují se zrychlením, tak září, protože

$$\ddot{\mathbf{p}}_E = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a = \sum_a Q_a \ddot{\mathbf{r}}_a. \quad (210)$$

- 2) Pokud jde o izolovanou soustavu stejných nábojů ($Q_a = q$) lokalizovaných v jedné oblasti (kolem počátku našich souřadnic), tak nezáří, protože druhá časová derivace elektrického dipólového momentu bude úměrná součtu všech vnitřních sil, který je v izolované soustavě nulový:

$$\ddot{\mathbf{p}}_E = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a = \frac{q}{m} \sum_a m \ddot{\mathbf{r}}_a = \frac{q}{m} \sum_a \mathbf{F}_a = 0. \quad (211)$$

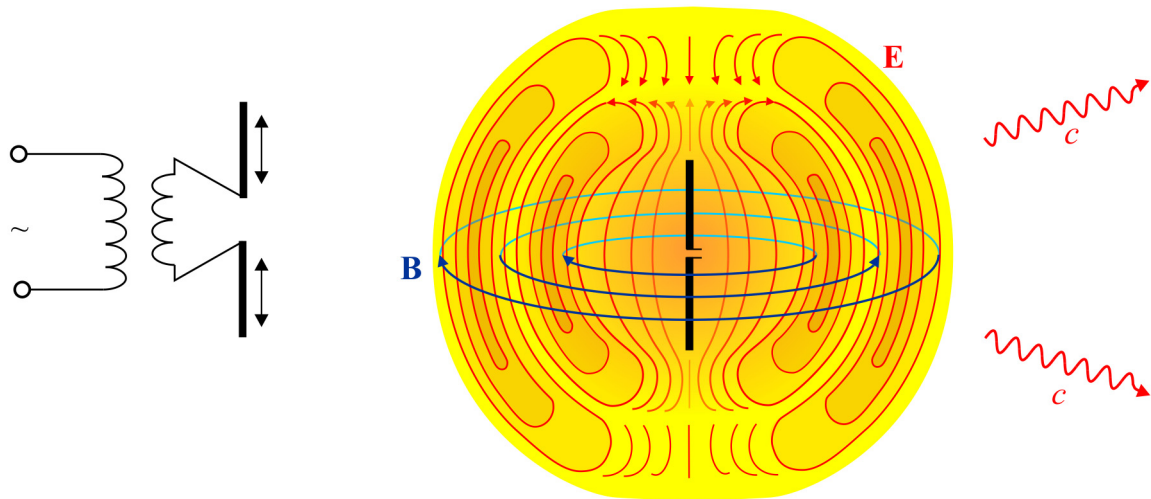
- 3) Nejjednodušší realizací elektrického dipólového záření je tzv. *Hertzův dipól*. Jde o otevřený lineární prvek protékáný střídavým proudem (napájený například indukčně z nějakého střídavého obvodu). Úvaha 2) nyní neplatí, nejde o izolovanou soustavu. Elektrické náboje putují v tomto prvku sem a tam, což vede na jednoduchý vztah pro elektrický dipólový moment

$$\mathbf{p}_E = p_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_3. \quad (212)$$

Uvážíme-li, že střední hodnota druhé mocniny kosinu je $\frac{1}{2}$, dostaneme ze vztahu (209) pro střední výkon

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (213)$$

I nepatrné zvýšení frekvence s sebou přinese velké zvýšení vyzařovaného výkonu.



Hertzův dipól. Nalevo: jednoduchá realizace. Napravo: blízká pole v okolí Hertzova dipólu. Zobrazeny jsou dvě vlnové délky odpovídající dvěma překlopením dipólu. Námí odvozené vztahy platí až ve velké vzdálenosti od dipólu.

Thomsonův rozptyl

Prozkoumejme nyní záření volného elektronu, na který dopadá elektromagnetická vlna s nízkou energií (rozptyl elektronu na elektromagnetickém záření). Elektrická složka vlnění bude na elektron působit silou $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ a udělí mu zrychlení

$$\ddot{\mathbf{r}}_e = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}. \quad (214)$$

Působení magnetického pole jsme zanedbali, protože se pohybujeme v nízkoenergetické limitě, kde platí $v \ll c$. Výsledkem bude nenulový elektrický dipólový moment, jehož druhá časová derivace bude

$$\ddot{\mathbf{p}}_E = -e\ddot{\mathbf{r}}_e = \frac{e^2}{m_e} \mathbf{E}. \quad (215)$$

Volný elektron začne kmitat ve shodě s příchozí vlnou, získá nenulové periodické zrychlení a začne sám zářit. Jím vyzařovaný výkon určíme z Larmorovy formule (208), do které dosadíme za druhou časovou derivaci elektrického dipólového momentu ze vztahu (215):

$$d\mathcal{P}_{\text{out}} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega = \frac{e^4 E^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (216)$$

Pravděpodobnost rozptylu bude dána podílem odcházející a přicházející energie. Pokud budeme reprezentovat odcházející energii Larmorovým výkonem (216) a přicházející energii Poyntingovým vektorem dopadající elektromagnetické vlny (využijeme, že $E/B = c$)

$$\mathcal{I}_{\text{in}} = EH = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0}, \quad (217)$$

bude jejich podíl

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{out}}}{\mathcal{I}_{\text{in}}} = \frac{dW/dt}{dW/(dt dS)} = dS = d\sigma \quad (218)$$

roven elementu plochy, kterou je elektron schopen přijímat dopadající záření, což je efektivní účinný průřez. Pro účinný průřez rozptylu elektronu na elektromagnetické vlně proto máme

$$d\sigma = \frac{d\mathcal{P}_{\text{out}}}{\mathcal{I}_{\text{in}}} = \frac{\frac{e^4 E^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega}{\frac{E^2}{c\mu_0}} = \frac{e^4 c\mu_0}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (219)$$

Permeabilitu převedeme na permitivitu a získáme výsledný diferenciální účinný průřez

$$\blacktriangleright \quad d\sigma = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (220)$$

Celkový účinný průřez získáme integrací přes prostorový úhel

$$\blacktriangleright \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2}. \quad (221)$$

Celkový účinný průřez rozptylu elektromagnetického záření na elektronu je dán univerzální konstantou, kterou bývá z historických důvodů zvykem zapisovat pomocí tzv. klasického poloměru elektronu, za něhož považujeme takový rozměr, při němž elektrostatické pole generuje klidovou hmotnost elektronu:

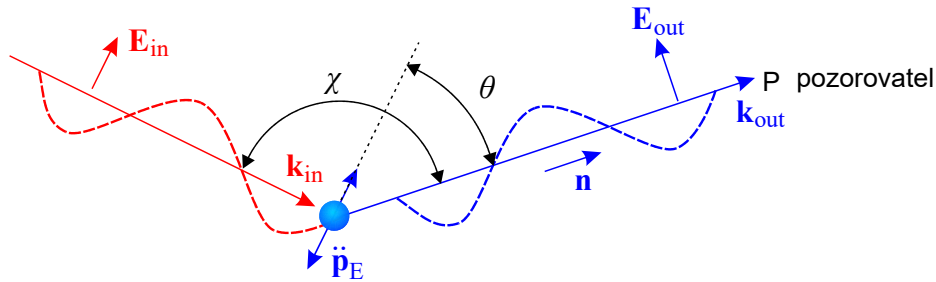
$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_e} = m_e c^2 \quad \Rightarrow \quad a_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}; \quad a_e \approx 2.8 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (222)$$

Účinný průřez v tomto zápisu vyjde jako malý násobek průřezu elektronu reprezentovaného klasickým poloměrem elektronu:

$$\blacktriangleright \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{8}{3} \pi a_e^2; \quad \sigma_{\text{tot}} \approx 6.7 \times 10^{-29} \text{ m}^2. \quad (223)$$

Poznámka 1: Provedený výpočet je nerelativistický a platí jen pro nízké energie záření. Výsledkem je stejná frekvence dopadající vlny i vlny generované elektronem. Účinný průřez navíc na frekvenci nezávisí. Pro vysoké energie bychom museli vzít v úvahu zákony zachování energie a hybnosti dané relativistickou čtyřhybností. Foton změní směr pohybu, tím se změní jeho hybnost a samozřejmě tedy i energie (tj. i frekvence), která je s hybností provázána přes velikost čtyřvektoru hybnosti. Výsledkem dopadu fotonu s vysokou energií bude rozptýlení fotonu na elektronu, který povede ke změně jeho frekvence. V tomto případě hovoříme o *Comptonově jevu*. Thomsonův rozptyl je jeho limitou při nízkých energiích.

Poznámka 2: Dopadající vlnu rozptýlí elektron současně do různých směrů dle formule (220). Pokud budeme pozorovat jednu konkrétní rozptýlenou vlnu ve směru θ , rovina polarizace se nezmění. Elektrické pole bude samozřejmě kolmé na nový směr šíření. Úhel rozptylu je v obrázku označen χ .



Brzdné záření

Occitne-li se elektron v poli těžkého iontu, dojde k elastické srážce, při níž se změní směr pohybu elektronu. Na elektron v průběhu srážky působí dostředivé zrychlení (směrem k iontu), jehož výsledkem je záření elektronu. Pokud budeme srážku popisovat v souřadnicové soustavě spojené s těžkým iontem, bude velikost zrychlení elektronu

$$\ddot{i}_e = \frac{F}{m_e} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_e^2 m_e} \quad (224)$$

a tomu odpovídající velikost druhé časové derivace elektrického dipólového momentu

$$\ddot{p}_E = e\ddot{i}_e = \frac{Ze^3}{4\pi\epsilon_0 r_e^2 m_e}. \quad (225)$$

Z Larmorovy formule (209) je zřejmé, že vyzařování závisí jen na velikosti zrychlení elektronu. Je zcela lhostejné, zda jde o zrychlení tečné či dostředivé. Velikost zrychlení je u Coulombovy srážky dána pouze polohou elektronu vzhledem k iontu, u něhož se elektron rozptyluje. Intenzita vyzařování či výkon jsou tedy dány pouze vzdáleností elektronu od jádra. Čím blíže k iontu se elektron dostane, tím více září. Snadno určíme okamžitý výkon vyzařovaný elektronem:

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\ddot{p}_E^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{Z^2 e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 [r_e(t)]^4}. \quad (226)$$

S uvedenou formulí je možné dále pracovat. Ze znalosti dráhy elektronu při srážce lze například dopočítat fourierovské spektrum vyzařovaného výkonu. Další možností je vzít homogenní vzorek elektronů s různými záměrnými parametry a středovat vyzářený výkon pro celý vzorek elektronů rozložených symetricky kolem iontu

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{Z^2 e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{n_e 4\pi r_e^2 dr_e}{r_e^4} = \frac{4\pi Z^2 e^6 n_e}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \frac{1}{r_{\min}}. \quad (227)$$

To s sebou ale nese další problémy: Prvním je dolní ořez minimální vzdálenosti, která nemůže být nulová. Druhým problémem je kvantové chování elektronu při interakci s elektrony atomárního obalu. Pokud za dolní hranici záměrného parametru zvolíme de Broglieovu vlnovou délku počítanou z nejpravděpodobnější (tepelné) rychlosti elektronu

$$r_{\min} \approx \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_e k_B T_e}}, \quad (228)$$

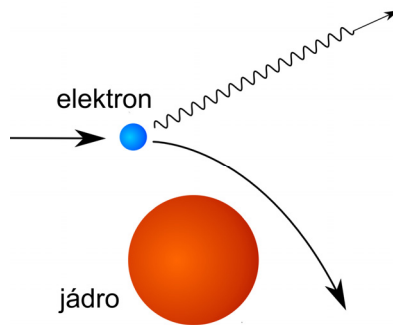
vyjde středovaný výkon souboru elektronů rozptylujících se na jednom iontu

$$\langle \mathcal{P} \rangle \approx \frac{Z^2 e^6 n_e}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e \hbar} \left(\frac{2k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (229)$$

Pokud bude rozptyl probíhat na iontech s koncentrací n_i , bude výkon vyzařovaný z objemové jednotky (hustota výkonu) roven

$$\mathcal{P} = \langle \mathcal{P} \rangle n_i \approx \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e \hbar} \left(\frac{2k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2}; \quad [\mathcal{P}] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}. \quad (230)$$

Poznámka: Provedený výpočet je nekvantový. Při kvantovém výpočtu se ve výsledném vztahu objeví ještě tzv. Gauntův faktor (je pojmenovaný podle Johna Arthura Gaunta), který je slabě frekvenčně závislý a jeho hodnota je řádově rovna jedné. V prvním přiblížení ho tedy nemusíme uvažovat.



Cyklotronové záření

Nabitá částice vykonává v magnetickém poli tzv. gyrační pohyb, tj. pohybuje po šroubovici a přitom má samozřejmě nenulové dostředivé zrychlení dané Lorentzovou silou. Vzhledem k tomu, že cyklotronové záření je důležité jak pro elektrony, tak pro ionty, provedeme výpočet pro obecný náboj Q . Zrychlení nabitě částice bude mít velikost:

$$\ddot{r}_0 = \frac{F}{m} = \frac{Qv_{\perp}B}{m}. \quad (231)$$

Tomu odpovídající velikost druhé časové derivace elektrického dipólového momentu bude

$$\ddot{p}_E = Q\ddot{r}_0 = \frac{Q^2 v_{\perp} B}{m}. \quad (232)$$

Z Larmorovy formule (209) snadno určíme okamžitý výkon vyzařovaný částicí

$$\mathcal{P} = \frac{\ddot{p}_E^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{Q^4 v_{\perp}^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2}. \quad (233)$$

Vzhledem ke kvadratické závislosti na hmotnosti částice je cyklotronové vyzařování intenzivnější pro elektrony než pro ionty. Speciálně pro elektron lze za pomoci klasického poloměru elektronu (222) výkon vyzařovaný jednou částicí přepsat do tvaru

$$\mathcal{P} = \frac{8}{3} \pi a_e^2 \epsilon_0 c v_{\perp}^2 B^2. \quad (234)$$

Sestavme energetickou bilanci pro elektronovou složku plazmatu:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}n_e k_B T_e\right) = \mathcal{P} n_e. \quad (235)$$

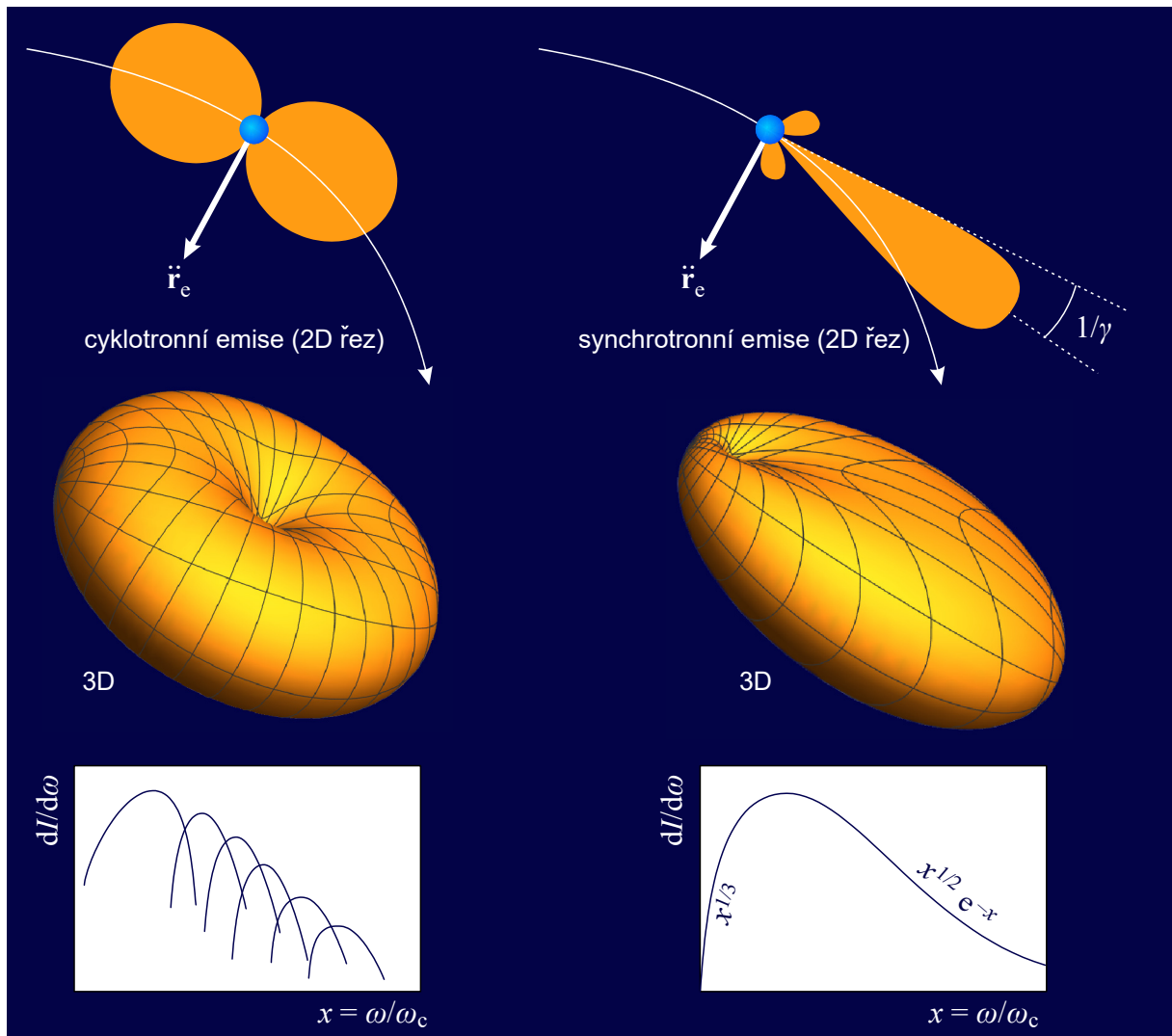
Nalevo je úbytek hustoty energie elektronů, napravo hustota vyzařovaného výkonu, v němž obě kolmé složky rychlosti nahradíme nejpravděpodobnějšími (tepelnými) rychlostmi

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}n_e k_B T_e\right) = \frac{8}{3}\pi a_e^2 \epsilon_0 c \frac{2k_B T_e}{m_e} B^2 n_e. \quad (236)$$

Nalezená diferenciální rovnice pro teplotu vede na exponenciální úbytek teploty elektronové složky plazmatu způsobený cyklotronovým zářením elektronů.

$$T_e = T_0 \exp[-\alpha t]; \quad \alpha = \frac{32}{9} \frac{\pi a_e^2 \epsilon_0 c}{m_e} B^2. \quad (237)$$

Poznámka: Provedený výpočet cyklotronového záření je nerelativistický. Cyklotronové záření probíhá zejména na cyklotronové frekvenci a jejích vyšších harmonických. Při vysokých energiích elektronů ale tento výpočet neplatí. Cyklotronová frekvence závisí prostřednictvím hmotnosti na rychlosti částice a navíc je třeba ji transformovat do laboratorní soustavy (uplatní se relativistický Dopplerův jev). Stejně tak je třeba transformovat vyzářený výkon. Závislost cyklotronové frekvence na rychlosti částice vede pro velký soubor částic k rozšiřování píků cyklotronové emise na jednotlivých harmonických a při vysokých energiích bude spektrum spojitě. V tomto případě hovoříme o *synchrotronovém záření*. Úhlová charakteristika záření je deformována mocninami Lorentzova faktoru gamma do charakteristického tvaru dopředného laloku. Formuli pro synchrotronové záření lze získat transformacemi vztahů pro cyklotronní záření, nicméně elegantnější je přímý výpočet z Liénardových Wiechertových potenciálů (viz kapitola Záření nelokalizované nabitě částice).



Magnetické dipólové a elektrické kvadrupólové záření

Budeme postupovat stejně jako u elektrického dipólového záření. V dosti velké vzdálenosti od zdroje jsou vlnoplochy rovinné, proto postačí určit jen elektrické pole ze vztahu

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (238)$$

a magnetické pole snadno dopočteme ze vztahů

$$\mathcal{B} = \frac{1}{c}(\mathcal{E} \times \mathbf{n}); \quad (239)$$

$$\mathcal{E} = c(\mathcal{B} \times \mathbf{n}). \quad (240)$$

Ze vztahů (198) a (199) snadno určíme elektrické a magnetické pole magnetického dipólového a elektrického kvadrupólového záření:

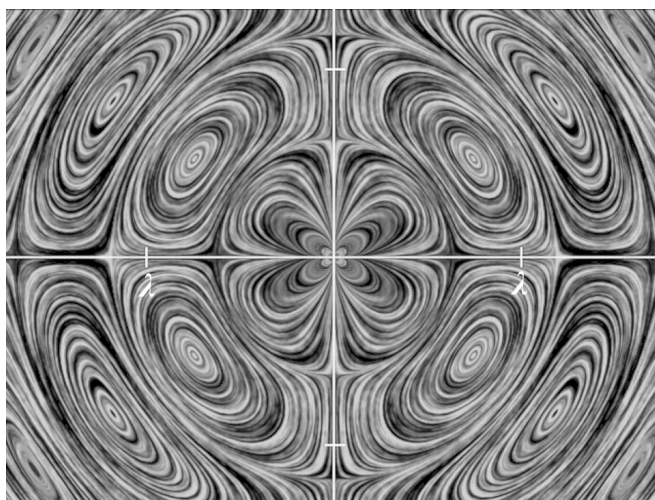
$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}^{(M1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{\mathbf{p}}_M \times \mathbf{n}, \quad (241)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{B}^{(M1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi r c^2} \ddot{\mathbf{p}}_M; \quad (242)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}^{(E2)} = -\frac{\mu_0}{24\pi r c} \ddot{\ddot{\mathbf{Q}}} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (243)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{B}^{(E2)} = -\frac{\mu_0}{24\pi r c^2} \left(\left[\ddot{\ddot{\mathbf{Q}}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \times \mathbf{n} \right); \quad (244)$$

Na následujícím obrázku je ukázka elektrického kvadrupólového záření v těsné blízkosti zdroje zobrazená metodou LIC (*Line Integral Convolution*). Počítačově generovaná šumová textura se za pomoci konvoluce s elektrickým polem deformuje ve směru siločar elektrického pole. Výpočet byl proveden na Dukeově univerzitě.



Kvadrupólové záření v blízkosti zdroje. Dukeova univerzita.

Zcela identickým postupem jako u dipólového záření určíme normálovou složku Poyntingova vektoru a po následné integraci přes celý prostorový úhel získáme celkový vyzářený výkon soustavy částic. Ve výsledných vztazích vyjádříme permeabilitu vakua za pomoci permitivity ze vztahu $\mu_0 = 1/(c^2 \epsilon_0)$:

$$\mathcal{J}_n^{(M1)} = \frac{\ddot{p}_M^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^5 r^2} \sin^2 \theta; \quad (245)$$

$$\mathcal{J}_n^{(E2)} = \frac{(\ddot{Q}_{kl}n_l)(\ddot{Q}_{km}n_m) - (\ddot{Q}_{kl}n_kn_l)(\ddot{Q}_{mo}n_mn_o)}{576\pi^2 \varepsilon_0 c^5 r^2}; \quad (246)$$

►
$$\mathcal{P}^{(M1)} = \frac{\ddot{p}_M^2}{6\pi\varepsilon_0 c^5}, \quad (247)$$

►
$$\mathcal{P}^{(E2)} = \frac{\ddot{Q}:\ddot{Q}}{720\pi\varepsilon_0 c^5}. \quad (248)$$

Záření nelokalizované nabitě částice

Pokud se částice pohybují vysokou rychlostí a nejsou lokalizovány v okolí počátku souřadnicové soustavy, není možné provést rozvoj potenciálů pro pozorovatele ve velké vzdálenosti. Navíc se příslušným rozvojem vytratilo relativistické chování částic. V obecném případě je proto třeba postupovat jinak. Vyjděme opět z retardovaných potenciálů

$$A^\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^\alpha(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'; \quad t' \equiv t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c}. \quad (249)$$

Pro skalární a vektorový potenciál z této relace dostaneme vztahy

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (250)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (251)$$

Pro bodovou částici jsou zdrojové členy

$$\rho_Q = Q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0), \quad (252)$$

$$\mathbf{j}_Q = Q \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0). \quad (253)$$

U vztahů (250), (251) pro potenciály je třeba zajistit, aby byly parametry částice brány v retardovaném čase, proto u vyjádření pro jedinou částici přibude ještě distribuce přes čas:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{Q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt' d^3\mathbf{r}', \quad (254)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Q \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt' d^3\mathbf{r}'. \quad (255)$$

Časová distribuce bude nenulová jen pro

►
$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c}, \quad (256)$$

tedy skutečně v retardovaném čase, jak jsme požadovali. Nejprve provedme integraci přes prostorovou distribuci:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dt', \quad (257)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \int \frac{\mathbf{v}(t') \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dt'. \quad (258)$$

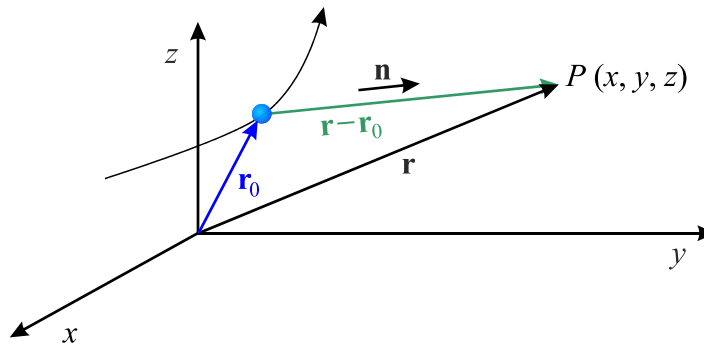
Integrace přes čas je poněkud složitější, neboť jde o distribuci funkce, pro kterou platí vztah

$$\delta(F(\xi)) = \frac{\delta(\xi - \xi_0)}{F'(\xi_0)}; \quad F(\xi_0) = 0, \quad (259)$$

který nyní využijeme. Nalezněme nejprve derivaci funkce F :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt'} &= \frac{d}{dt'} (t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c) = \frac{d}{dt'} \left(t' - t + \frac{1}{c} \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'))^2} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{c} \left(-\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \right) \cdot \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'))}{2\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'))^2}} = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{cR} = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (260)$$

Pro nelokalizovanou částici musíme za jednotkový vektor normály k ploše v místě pozorovatele volit směr od částice k nám, tedy $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, dále jsme označili $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$.



Po provedení integrace přes časovou distribuci nyní snadno získáme výsledné potenciály (tzv. *Liénardovy-Wiechertovy potenciály*):

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}, \quad (261)$$

$$\mathbf{A} = \frac{Q\boldsymbol{\beta}}{4\pi\epsilon_0 cR} \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}, \quad (262)$$

kde jsme označili

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}. \quad (263)$$

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{v}(t')}{c}. \quad (264)$$

Veškeré argumenty související s částicí jsou brány v retardovaném čase, tj. $\mathbf{r}_0(t')$, $\mathbf{v}(t')$. Liénardovy-Wiechertovy potenciály jsou relativistické a nebyly v nich učiněny žádné rozvoje ani žádná zjednodušení. Přímým výpočtem nyní určíme elektromagnetická pole. K tomu si musíme předpočítat jednotlivé potřebné derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (265)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_k} \quad (266)$$

Určeme například $\partial t'/\partial t$:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = 1; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left[t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c} \right] = 1; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t'}{\partial t} \left[1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{cR} \right] = 1$$

Odsud již snadno určíme

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}. \quad (267)$$

Analogicky nalezneme

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial t'}{\partial x_k} = -\frac{n_k}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}. \quad (268)$$

Výpočet elektrických polí z Liénardových-Wiechertových potenciálů je nyní přímočarý, ale poněkud zdlouhavý. Elektrické pole získáme ze vztahu $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ a magnetické pole ze vztahu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Výsledkem je Feynmanova formule

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cR} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3}, \quad (269)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{c}. \quad (270)$$

První část pole je zobecněné coulombické pole, druhá část je obecné zářivé pole, v němž nebyly činěny žádné rozvoje, a je plně relativistické. Z takto určených formulí je možné dále spočítat Poyntingův vektor a jeho integrací vyzářený výkon. Takovým postupem lze například získat přesný vztah pro synchrotronové záření.

Literatura k této kapitole

- [1] J. Kvasnica: *Teorie elektromagnetického pole*; ACADEMIA 1985
- [2] G. B. Rybicki, A. P. Lightman: *Radiative Processes in Astrophysics*; John Willey & Sons 1979.
- [3] T. J. M. Boyd, J. J. Sanderson: *The Physics of Plasmas*; Cambridge University Press 2005, ISBN 0521459125
- [4] T. H. Stix: *Waves in Plasmas*; Springer 2006, ISBN: 0883188597



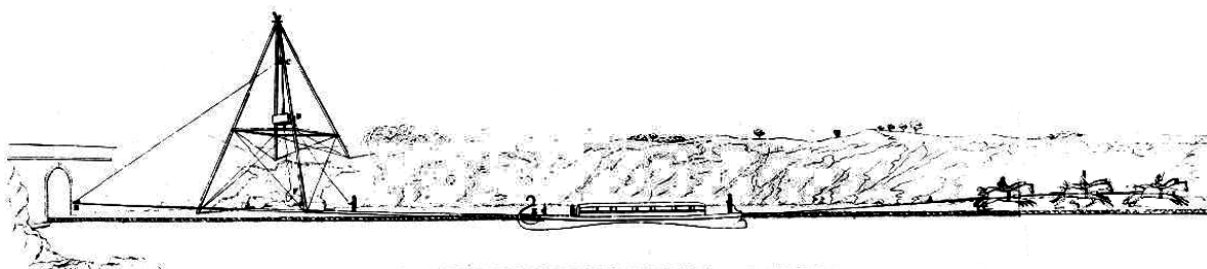
5. SOLITONY

Od kanálu Union k solitonům

V některých situacích poskytují nelineární rovnice velmi zajímavá řešení: osamocené vlny, které nepodléhají disperzi a šíří se beze změny tvaru prostředím. Takovou vlnu nazýváme soliton. Z matematického hlediska jsou solitony v nelineárních teoriích stejně důležité jako harmonický oscilátor v teoriích lineárních. Experimentálně byl soliton poprvé pozorován na úzkém vodním kanále (Union Canal v Hermistonu, poblíž Edinburku) skotským vědcem Johnem Scottem Russelem (1808–1882) v roce 1834.

Počátky solitonové fyziky jsou s Russelovým jménem jednou provždy spojeny. Russell byl nejen vynikajícím fyzikem, ale i konstruktérem lodí, parních automobilů a vynálezcem. Vystudoval Univerzitu v St. Andrews a měl natolik hluboké znalosti, že se ve svých 24 letech stal profesorem na Univerzitě v Eddinburgu. O dva roky později, v roce 1834, zavedl dopravu parními automobily mezi Glasgowem a Paisley. Jeho počáteční úspěch těžko nesli ostatní dopravci, a proto zosnovali dopravní nehodu, při které zemřeli 4 pasažéři. Pravděpodobně šlo o vůbec první automobilovou dopravní nehodu v historii. Russell proto přivítal nabídku společnosti *Union Canal Company*, v rámci které měl za úkol testovat a konstruovat čluny na kanálu Union. Tento velmi úzký kanál byl postaven v letech 1818 až 1822, spojoval města Eddinburg a Glasgow. Sloužil především pro dopravu uhlí a osob na člunech, jež musely být taženy koňmi klusajícimi po břehu kanálu. Kanál má délku 50 kilometrů, většinou vede po vrstevnici a terénní nerovnosti překonává po akvaduktech nebo v tunelech (nejdelší tunel má délku 631 metrů). V srpnu 1834 učinil Russell mimořádný objev, který sám popisuje takto:

„Díval jsem se na člun, který byl podél úzkého kanálu rychle tažen párem koní. Člun se náhle zastavil, ale nikoliv tak voda, která byla tlačena před přídí loďky. Voda pokračovala v samostatném pohybu a valila se kanálem velkou rychlostí. Zformovala se do osamocené vzedmuté vlny s hladkým kulatým tvarem. Při pohybu se neměnil ani tvar vlny, ani její rychlost. Sledoval jsem vlnu na koňském hřbetu a předjel ji. Stále se valila rychlostí osm až devět mil za hodinu, neměnila svůj tvar – byla dlouhá kolem třiceti stop a vysoká asi jeden a půl stopy. Výška se postupně snižovala, až jsem vlnu ztratil v záhybu kanálu po jedné nebo dvou mílích. S tímto neobyčejným a krásným úkazem, který jsem nazval translační vlnou, jsem se poprvé setkal v srpnu 1834.“



Russellova kresba člunu taženého koňmi na kanálu Union

Russell si byl plně vědom výjimečnosti jevu. Jím objevená *translační vlna* (*Great wave of translation*) odporovala zákonitostem hydrodynamiky, které ve svých pracích popisovali Newton a Bernoulli. Russell vybudoval u svého domku v edinburkské čtvrti New Town rybník a tři roky prováděl různé experimenty – jak doma, tak na kanálu Union. Zjistil, že *translační vlna* má velmi zvláštní a nečekané vlastnosti:

- Rychlost závisí na velikosti vlny a šířka na hloubce vody. Translační vlna je mimořádně stabilní a může svůj tvar udržet i několik mil.
- Na rozdíl od normálních vln se translační vlny nikdy nespojí. Rychlejší vlna projde skrze pomalejší a předběhne ji.

Pokud je translační vlna příliš velká vzhledem k hloubce kanálu, rozdělí se na dvě vlny, jednu velkou a jednu malou. Russellův výzkum se nesetkal s ohlasem u ostatních vědců. Učenci nebyli na takový objev připraveni a nechtěli uvěřit, že by existovaly jevy, jež jsou v rozporu s pracemi Newtona a Bernoulliho. Skutečný význam byl doceněn až v 60. letech 20. století, kdy se fyzikové začali zabývat nelineárními jevy v přírodě. Dnes se nikdo nediví, že při komunikaci po optických vláknech urazí světelné pulzy beze ztráty tvaru tisíce kilometrů.

V roce 1895 odvodili holanďští matematici Diederik Korteweg (1848–1941) a Gustav de Vries (1866–1934) rovnici pro šíření vln na mělké vodě. Rovnice je nelineární a disperze vlny může být přesně kompenzována nelineárními jevy. Šedesát let po Russellových pozorováních byl problém vyřešen. Na vodním kanálu se skutečně mohou šířit vlny beze změny tvaru a velikosti a jejich existenci lze teoreticky vysvětlit za pomoci nelineárních jevů. Rovnice popisující tuto vlnu se dnes nazývá KdV (Kortewegova-de Vriesova) rovnice. V současnosti je známa řada dalších rovnic z různých oblastí vědy, které poskytují solitonová řešení.

Jaká je matematická podstata existence solitonů? V lineárních rovnicích můžeme skládat výsledné řešení z rovinných vlnoploch. Složený vlnový balík však téměř vždy podléhá *disperzi*. Různé vlnové délky se šíří různou rychlostí a balík se rozplývá. V nelineárních teoriích některé nelineární členy způsobují tzv. *modulární nestabilitu*, při které je grupová rychlost závislá na amplitudě balíku. Části s menší amplitudou jsou potlačovány a dochází ke kolapsu balíku. V některých případech může dojít ke vzájemné kompenzaci obou jevů – disperze (rozplývání) a modulární nestability (kolapsu). Výsledkem je *soliton*, vlna stálého tvaru a velikosti šířící se prostředím. Solitony se jako řešení nelineárních rovnic vyskytují v nejrůznějších matematických modelech z mnoha oblastí – od hydrodynamiky přes nelineární elektrodynamiku, fyziku plazmatu, biofyziku, fyziku elementárních částic, fyziku pevných látek až po ekonomické modely fungování trhu.

Tři příklady

1. Nejprve zkoumejme disperzní relaci obyčejné vlnové rovnice

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = ck \quad \Rightarrow \quad v_f = v_g = c. \quad (271)$$

Úhlová frekvence je lineárně závislá na vlnovém vektoru, fázová a grupová rychlost jsou si rovny a jsou konstantní. Všechny vlnové délky se šíří stejnou rychlostí a vlnový balík nepodléhá disperzi.

2. Nyní uvažujme Kleinovu Gordonovu rovnici, která má navíc lineární člen (s koeficientem úměrným druhé mocnině hmotnosti částice)

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa^2 \right) \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = c\sqrt{k^2 + \kappa^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_f &= c\sqrt{1 + (\kappa/k)^2}, \\ v_g &= c/\sqrt{1 + (\kappa/k)^2}. \end{aligned} \quad (272)$$

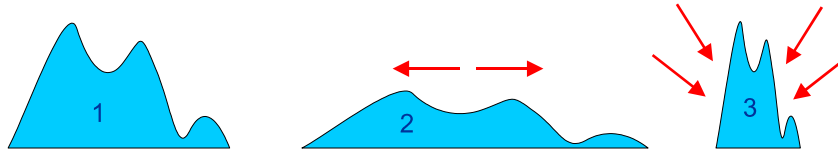
Fázová i grupová rychlost je závislá na vlnovém vektoru, tj. i na vlnové délce ($k = 2\pi/\lambda$) a vlna podléhá disperzi. Vlnový balík se postupně rozplývá. Je-li jeho lineární rozměr L , mění se podle vztahu

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t \approx \Delta v_g \Delta t = \frac{\partial v_g}{\partial k} \Delta k \Delta t \approx \frac{\partial v_g}{\partial k} \frac{2\pi}{L} \Delta t. \quad (273)$$

3. Doplníme nyní naopak k vlnové rovnici nelineární člen

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi + \gamma \phi^3 = 0. \quad (274)$$

Rovnice je nelineární a jejím řešením již není rovinná vlna, ani nelze řešení z rovinných vln skládat. Z numerického řešení je známo, že rovnice podléhá *modulační nestabilitě*, části balíku kolabují v závislosti na amplitudě (modulu, odtud název modulační).



Tvar řešení pro výše uvedené příklady 1, 2 a 3.

Právě nelinearity mohou vyrovnat disperzi a rovnice, která obsahuje oba členy, poskytuje solitonová řešení, tj. osamocené vlny šířící se beze změny tvaru daným prostředím:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi - \kappa^2 \phi + \gamma \phi^3 = 0, \quad (275)$$

Přidané členy jsou hustoty „síly“ odpovídající hustotě potenciálu „dna koňakové lahve“ $\mathcal{V}(\phi) = a\phi^2 - b\phi^4$, který se hojně využívá v teorii elementárních částic, při popisu fázových přechodů druhého druhu nebo při popisu bifurkací (větvení řešení).

Soliton a solitonová vlna

Pro spojitě prostředí je třeba používat namísto Lagrangeovy funkce L hustotu Lagrangeovy funkce \mathcal{L} , obdobně hustotu energie \mathcal{E} a hustotu hybnosti \mathcal{P} . Všechny veličiny jsou namísto funkcí času t funkcemi události (t, \mathbf{x}) . Pro naše potřeby bude nejdůležitější hustota energie

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) \equiv \pm \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,t}} \phi_{k,t} - \mathcal{L} \right). \quad (276)$$

Pokud nepožadujeme po energii nic jiného než zákon zachování při symetrii vzhledem k časovému posunutí, je znaménko nepodstatné. Pokud chceme, aby síly směřovaly k minimu energie a pro tělesa tato definice přešla v klasickou definici energie, musíme volit znaménko tak, aby kinetická část (druhé mocniny derivací pole) byla nezáporná (výsledek ovlivní použitá znaménková konvence v metrickém tenzoru, v našem případě musíme u energie volit minus). Pro ukázky z minulé kapitoly (pro jednoduchost v jedné prostorové dimenzi) můžeme pro hustotu lagranžianu, hustotu energie a Lagrangeovu polní rovnici psát:

Vlnová rovnice

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi) (\partial^\alpha \phi) = -\frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2, \quad (277)$$

$$\mathcal{E} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,t}} \phi_{k,t} - \mathcal{L} \right) = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2, \quad (278)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0. \quad (279)$$

Kleinova Gordonova rovnice

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi) (\partial^\alpha \phi) + \frac{1}{2} \kappa^2 \phi^2, \quad (280)$$

$$\mathcal{E} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,t}} \phi_{k,t} - \mathcal{L} \right) = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \phi^2, \quad (281)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa^2 \right) \phi = 0. \quad (282)$$

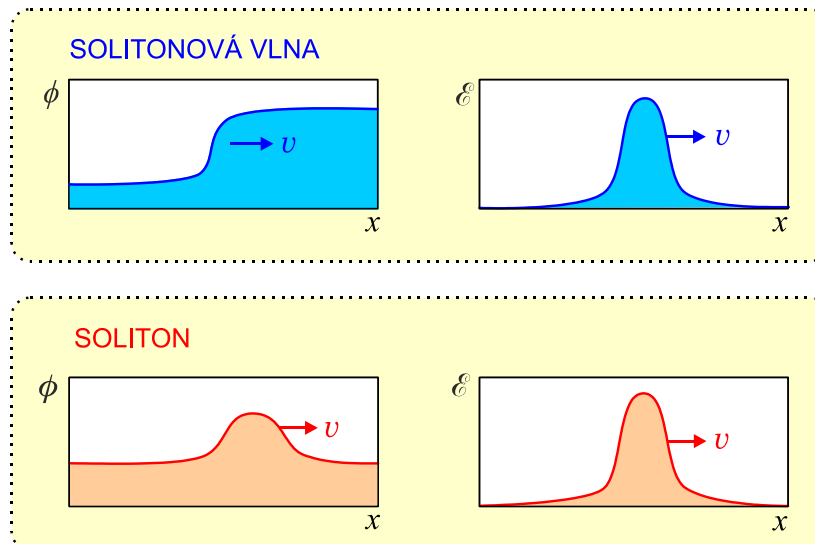
Kleinova-Gordonova rovnice s nelineárním členem

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \phi)(\partial^\alpha \phi) + \frac{1}{2}\kappa^2 \phi^2 - \frac{1}{4}\delta \phi^4, \quad (283)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}\kappa^2 \phi^2 - \frac{1}{4}\delta \phi^4, \quad (284)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa^2 \right) \phi + \delta \phi^3 = 0. \quad (285)$$

U Kleinovy-Gordonovy rovnice s nelineárním členem ϕ^3 je známo řešení ve tvaru šířícího se schodu. Nejde o soliton v pravém slova smyslu, řešení není lokalizované, tj. dosti daleko od vlny není pole nulové. Průběh hustoty energie ale již lokalizovaný je. Hustota energie je soustředěna v oblasti schodu a přesouvá se jako balík prostorem. Tomuto typu řešení se říká *solitonová vlna*. Řešení, které je opravdu lokalizované v prostoru, pohybuje se nějakou rychlostí, nemění svůj tvar a při srážce s jinými obdobnými řešeními dojde maximálně ke změně fáze, se nazývá *soliton*. Soliton má samozřejmě lokalizovanou i hustotu energie.



Definice: Soliton je lokalizované řešení parciální diferenciální rovnice, které se přesouvá nějakou rychlostí a nemění svůj tvar. Má-li před srážkou N solitonů hustotu energie

$$\mathcal{E}(t, x) = \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_0(x - x_{0k} - vt), \quad (286)$$

potom se po srážce nemění ani počet solitonů, ani jejich tvar. Změnit se může jediné fáze jednotlivých balíků, tj. po srážce musí platit:

$$\mathcal{E}_{\text{fin}}(t, x) = \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_0(x - x_{0k} - vt + \delta_k). \quad (287)$$

Při hledání solitonového řešení můžeme využít faktu, že soliton při pohybu nemění svůj tvar. V souřadnicové soustavě spojené se solitonem jde tedy o stacionární (v čase neproměnné) řešení. Sledujeme-li navíc pohyb jen v jedné prostorové dimenzi, přejde parciální diferenciální rovnice na obyčejnou diferenciální rovnici (neobsahuje čas), která může být v některých případech řešitelná. Po nalezení řešení v soustavě pohybující se spolu se solitonem musíme řešení přetransformovat do souřadnicové soustavy, v níž se soliton pohybuje.

Sin-Gordonova solitonová vlna

V této a dalších kapitolách si ukážeme typická solitonová řešení, na které vedou fyzikální problémy. Při úpravách parciálních diferenciálních rovnic v mnoha případech dojdeme k jedné ze čtyř typických rovnic: sin-Gordonově rovnici, KdV, NLS nebo Burgersově rovnici. Věnujme se nyní první z nich.

Kleinova-Gordonova rovnice s nelineárním členem (283) až (285) má v energetickém i Lagrangeově předpisu potenciální část

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \kappa^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \delta \phi^4. \quad (288)$$

První člen potenciální energie vede na disperzi, druhý na nelineární člen zajišťující modulární nestabilitu, a tím kompenzaci disperze. Prohlédneme-li si hustotu potenciální energie pozorněji, zjistíme, že pro určité hodnoty konstant jde o první dva nekonstantní členy rozvoje funkce kosinus (nultý konstantní člen je samozřejmě nepodstatný a v pohybových rovnicích se neprojeví). Uvážíme-li, že díky použité znaménkové konvenci používáme hustotu Lagrangeovy funkce ve tvaru

$$\mathcal{L} = -\mathcal{T} + \mathcal{V}, \quad (289)$$

můžeme zavést periodický potenciál

$$\mathcal{V} = -\kappa^2 \cos \phi, \quad (290)$$

který bude užitečný pro popis jevů v okolí periodických struktur a pro malé hodnoty pole ϕ splyne s potenciálem (288) nelineární Kleinovy-Gordonovy rovnice. Snadno určíme odpovídající hustotu lagranžiánu, hustotu energie a polní Lagrangeovu rovnici:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi) (\partial^\alpha \phi) - \kappa^2 \cos \phi, \quad (291)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi) (\partial^\alpha \phi) - \kappa^2 \cos \phi, \quad (292)$$

$$\square \phi - \kappa^2 \sin \phi = 0. \quad (293)$$

V polní rovnici je před druhým členem minus z Lagrangeovy funkce, minus z derivace kosinu a minus z Lagrangeových rovnic – výsledkem je proto minus. Sinus v polní rovnici jí dal název: *sin-Gordonova rovnice*. Zapišme poslední vztahy pro jednu prostorovou dimenzi:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \kappa^2 \cos \phi, \quad (294)$$

$$\mathcal{E} = +\frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \kappa^2 \cos \phi, \quad (295)$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \kappa^2 \sin \phi. \quad (296)$$

Na analogickou úlohu vede v mechanice pohyb částice v periodickém kosinovém potenciálu, síla na pravé straně pohybové rovnice je dána sinem polohy částice. Provedeme-li rozvoj pravé strany do prvního řádu ($\sin \phi \sim \phi$), dostaneme přesně Kleinovu-Gordonovu rovnici. Proto je koeficient na pravé straně označen κ^2 . Rozvoj do třetího řádu ($\sin \phi \sim \phi - \phi^3/3!$) dá Kleinovu-Gordonovu rovnici s nelineárním členem ϕ^3 , která odpovídá potenciálu koňakové lahve. Nyní budeme hledat řešení celé sin-Gordonovy rovnice s funkcí sinus na pravé straně. Ukážeme, že lze najít řešení ve tvaru solitonové vlny. Najdeme řešení nejprve v souřadnicové soustavě spojené se solitonovou vlnou. Vzhledem k tomu, že vlna nemění tvar a pohybuje se konstantní rychlostí, bude řešení stacionární a stačí řešit obyčejnou diferenciální rovnici

$$\blacktriangleright \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} = \kappa^2 \sin \phi. \quad (297)$$

Ukažme, že jedním z jejích řešení je

$$\blacktriangleright \quad \phi_{\pm}(x) = 4 \operatorname{atg} \left[e^{\pm\kappa x} \right]. \quad (298)$$

Je velmi pěkným logickým cvičením dokázat, že uvedená funkce je řešením sin-Gordonovy rovnice. Můžeme buď přímo dvakrát derivovat uvedené řešení nebo derivovat z něho plynoucí vztah $\operatorname{tg}(\phi/4) = \exp(\pm\kappa x)$, vypočíst první derivaci a tu opět derivovat. Kdekoli se vyskytne výraz $\exp(\pm\kappa x)$, nahradíme ho vztahem $\operatorname{tg}(\phi/4)$. Z důvodu přehlednosti použijeme řešení se znaménkem +, obdobně bychom postupovali pro druhé znaménko:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{tg}(\phi/4) = \exp(\kappa x) & | \text{d/dx,} \\ \frac{1}{4} \frac{d\phi}{dx} \frac{1}{\cos^2(\phi/4)} = \kappa \exp(\kappa x) & | \exp(\kappa x) = \operatorname{tg}(\phi/4), \\ \frac{d\phi}{dx} = 4\kappa \cos^2(\phi/4) \operatorname{tg}(\phi/4) & | \operatorname{tg}(\phi/4) = \sin(\phi/4) / \cos(\phi/4), \\ \frac{d\phi}{dx} = 2\kappa \sin(\phi/2) & | \text{d/dx,} \\ \frac{d^2\phi}{dx^2} = \kappa \frac{d\phi}{dx} \cos(\phi/2) & | \frac{d\phi}{dx} = 2\kappa \sin(\phi/2), \\ \frac{d^2\phi}{dx^2} = \kappa^2 \sin \phi. & \end{array}$$

Uvedený vztah je tedy řešením původní rovnice. Nyní ho ze soustavy spojené se solitonem přetrafojmeme do obecné laboratorní soustavy. Celá rovnice je relativisticky kovariantní, proto můžeme použít Lorentzovu transformaci

$$x_{\text{sol}} = \frac{x_{\text{lab}} - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (299)$$

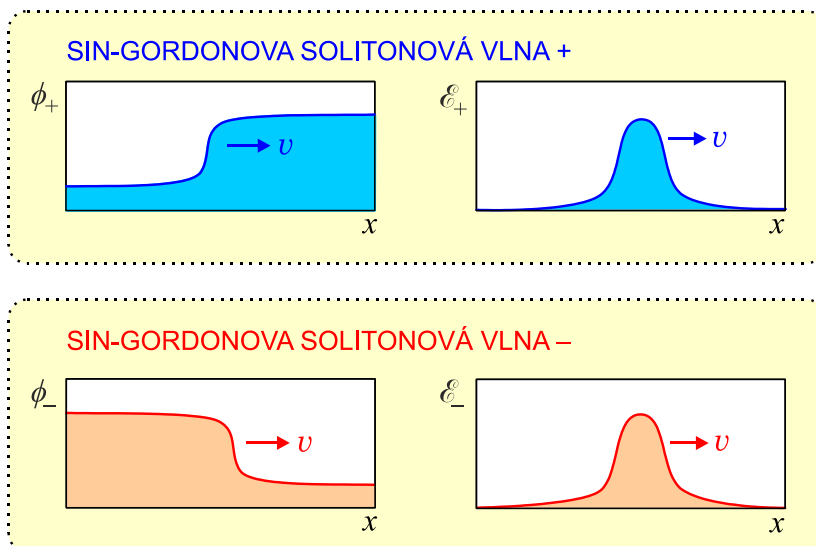
V laboratorní soustavě bude mít proto pohybující se solitonová vlna tvar

$$\blacktriangleright \quad \phi_{\pm}(t, x) = 4 \operatorname{atg} \left[e^{\pm\kappa\gamma(x-x_0-vt)} \right]; \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (300)$$

Pokud čtenář není zcela vyčerpán derivováním, může si zkusit dokázat, že nalezený výraz řeší původní sin-Gordonovu rovnici (296). Zbývá nalézt hustotu energie dle vztahu (295):

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}_{\pm}(t, x) = \frac{8\kappa^2 \gamma^2 (1 + v^2/c^2) e^{[\pm 2\kappa\gamma(x-x_0-vt)]}}{\left\{ 1 + \exp[\pm 2\kappa\gamma(x-x_0-vt)] \right\}^2} - \kappa^2 \cos \left\{ 4 \operatorname{atg} \left[e^{\pm\kappa\gamma(x-x_0-vt)} \right] \right\}. \quad (301)$$

Řešením je pohybující se schod, z hlediska klasifikace tedy nejde o soliton, ale o solitonovou vlnu, u níž je sice polní řešení nelokální, ale energie lokalizována je, a to v místě schodu. Amplituda solitonové vlny nezávisí na rychlosti ani na žádných jiných parametrech výpočtu. U energie tomu tak není, její amplituda je na rychlosti solitonové vlny samozřejmě závislá. (představte si vlnu tsunami, její ničivá energie nepochybně závisí na její rychlosti). Na následujícím obrázku jsou řešení ϕ_{\pm} , \mathcal{E}_{\pm} vykreslena:

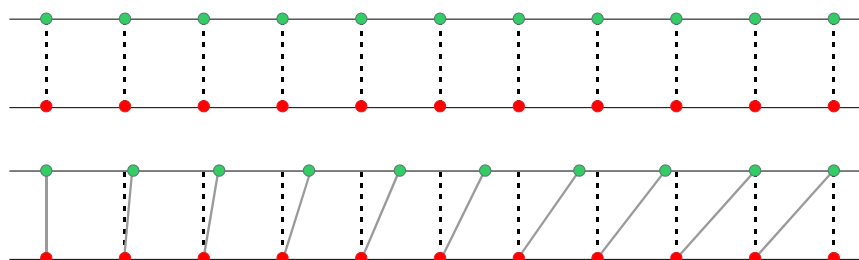


Pojďme si nyní ukázat, jaké jevy vedou na sin-Gordonovu solitonovou vlnu. Je jich celá řada, krátce se zmíníme o padajících kostkách domina, elektrické dvojvrstvě, dislokaci v krystalech, Josephsonově jevu a šíření laserového pulzu dvojhladinovým prostředím.

Padající kostky domina. Tahle videa asi viděl každý. Kostky domina jsou vyskládané na stole na užší hraně. Poté do nich někdo strčí. Kostky postupně jedna za druhou padají a vzniká zajímavý jev. Vypadá to, jakoby řadou kostek cosi běželo, co je shazuje. Pokud si jako naše pole označíme výšku horní hrany kostek nad stolem, tj. $\phi = h(t, x)$, kde x je vodorovná poloha dolní hrany kostek, bude jejich řízený pád vypadat jako řešení ϕ_- na obrázku. Sin-Gordonova rovnice je dobrou volbou pro popis pádu kostek. Periodicita potenciálu odráží periodické rozmístění kostek a běžící „cosi“ podél řady kostek je ve skutečnosti lokalizovanou energií ϵ_- , kterou můžeme považovat za kvazičástici (přesouvající se balíček energie). Povšimněte si, že amplitudu solitonové vlny nelze ovlivnit, je dána pouze výškou kostek domina a nezávisí na rychlosti posunu oblasti pádu.

Elektrická dvojvrstva. V plazmatu se často vyskytnou pohybující se oblasti, v nichž se elektrický potenciál mění z jedné hodnoty na druhou. V takové vrstvě je nenulové elektrické pole, které přerozdělí náboje okolního plazmatu do charakteristické elektrické dvojvrstvy s kladným nábojem na jedné straně vrstvy a záporným na opačné (details viz učebnice [1]). Elektrická dvojvrstva ve skutečnosti není ničím jiným než sin-Gordonovou solitonovou vlnou elektrického potenciálu. Energie lokalizovaná v dvojvrstvě (musí být větší než průměrná tepelná energie okolí) může urychlovat okolní částice i na značné energie. S elektrickými dvojvrstvami se setkáváme jak v laboratorním, tak ve vesmírném plazmatu.

Dislokace v krystalech. Představme si krystal složený ze dvou řetězců atomů, jeden je pevně dán (na obrázku dolní) a druhý (na obrázku horní) je pohyblivý v periodickém poli prvního řetězce s potenciálem $V(x) = A[1 - \cos(2\pi x/a)]$, a je mřížková konstanta. Problém vede na sin-Gordonovu rovnici pro odchylku od rovnovážné polohy. Řešení (300) odpovídá dislokaci pohybující se podél krystalu. Řešení se postupně mění z nulové odchylky od rovnovážné polohy na odchylku o právě jednu mřížkovou konstantu a . Energie dislokace je lokalizována v oblasti změny. Opět jde o klasický příklad sin-Gordonovy solitonové vlny.



Josephsonův jev. Při průchodu proudem tenkou vrstvou oddělující dva supravodiče tunelují Cooperovy páry skrze izolant. Rozhraním teče elektrický proud, jehož velikost závisí na vnějším magnetickém poli a teplotě, což lze využít například pro senzory magnetického pole SQUID (*Superconducting Quantum Interference Device*). Magnetický indukční tok prochází Josephsonovým spojem po kvantech, která jsou kvazičásticemi, jimž říkáme *magnony*. A právě průchod magnetického indukčního toku ϕ z jedné strany spoje na druhou stranu se řídí sin-Gordonovou rovnicí a má charakter sin-Gordonovy solitonové vlny. Magnon je kvazičásticí popisující pohyb balíčku energie lokalizovaného v místě „schodu“ toku magnetického pole.

Šíření laserového pulsu dvouhladinovým prostředím. Představme si prostředí tvořené atomy, které mají dvě energetické hladiny. Vyšleme-li do tohoto prostředí laserový impulz o frekvenci odpovídající rozdílu obou hladin, je intenzita laserového pulzu opět popsána sin-Gordonovou rovnicí a má charakter solitonové vlny. Řešení ϕ_+ odpovídá stimulované emisi při inverzním obsazení hladin a popisuje zesílení pulzu v takovém prostředí, řešení ϕ_- popisuje rezonanční absorpci světla a koresponduje se zeslabením laserového pulzu.

Solitony KdV a NLS

Kortewegův-de Vriesův soliton

K nejběžnějším typům solitonů patří KdV soliton splňující Kortewegovu de Vriesovu rovnici a NLS soliton splňující nelineární Schrödingerovu rovnici. KdV rovnice je první objevenou rovnicí, u které bylo nalezeno solitonové řešení. Diederik Korteweg (1848–1941) a Gustav de Vries (1866–1934) rovnici odvodili při hydrodynamickém popisu vln na mělké vodě. Její nejjednodušší podoba má tvar (jednoduché odvození rovnice ukážeme v závěru kapitoly)

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \phi}{c \partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0. \quad (302)$$

Konstanta c je materiálová konstanta, která určuje fázovou rychlost šíření rozruchů v daném prostředí. Konstanta α řídí velikost nelineárního členu, který je podobný jako substancionální derivace rychlostního pole a skutečně souvisí s přesunem popisované kapaliny. Poslední konstanta δ řídí velikost disperzního členu, který je úměrný třetí derivaci hledaného pole. Solitonové řešení existuje pro jakékoli hodnoty těchto konstant. Vždy lze nalézt vlnu takové rychlosti a výšky, pro niž je disperze kompenzována nelineární kompresí vlny. Po přenásobení konstantou c dostaneme jen dvě nezávislé konstanty KdV rovnice

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + D \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0; \quad (303)$$

$$A \equiv c\alpha; \quad D \equiv c\delta. \quad (304)$$

Nyní řídí disperzi konstanta D a nelineární jevy konstanta A . Vhodnou substitucí za x a ϕ bychom tyto konstanty mohli „absorbovat“ do proměnných x a ϕ . Ponechme ale KdV rovnici v obecném tvaru (303), ze kterého je dobře patrný význam konstant A a D . Hledané řešení bude mít dvě základní vlastnosti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi = 0, \quad (305)$$

$$\phi = \phi(\eta); \quad \eta \equiv x - x_0 \pm vt. \quad (306)$$

První vlastnost (305) vyjadřuje lokalizovanost řešení, tj. dosti daleko od solitonu je funkce ϕ nulová. Druhá vlastnost (306) popisuje šíření vlny napravo (–), nebo nalevo (+) beze změny tvaru. Pro určitost budeme hledat řešení pohybující se vpravo, tj. se znaménkem minus. Po dosazení (306) do (303) získáme obyčejnou diferenciální rovnici

$$-v \frac{d\phi}{d\eta} + A \phi \frac{d\phi}{d\eta} + D \frac{d^3 \phi}{d\eta^3} = 0. \quad (307)$$

Prostřední člen rovnice upravíme dle vztahu $\phi\phi' = (\phi^2/2)'$ a celou rovnici integrujeme přes proměnnou η . Dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$-v\phi + \frac{A}{2}\phi^2 + D\frac{d^2\phi}{d\eta^2} = C_1. \quad (308)$$

Integrační konstanta C_1 je díky lokalizovanosti hledaného řešení (305) nulová. Výslednou rovnici přenásobíme první derivací funkce ϕ :

$$-v\phi d\phi + \frac{A}{2}\phi^2 d\phi + D\frac{d^2\phi}{d\eta^2}d\phi = 0 \quad (309)$$

a poslední člen upravíme takto (čárka značí derivaci podle η):

$$\frac{d^2\phi}{d\eta^2}d\phi = \frac{d^2\phi}{d\eta^2} \frac{d\phi}{d\eta} d\eta = \phi''\phi' d\eta = \frac{1}{2} \frac{d(\phi')^2}{d\eta} d\eta = \frac{1}{2} d(\phi')^2. \quad (310)$$

Po dosazení do rovnice (309) a integraci dostaneme

$$-v\frac{\phi^2}{2} + \frac{A}{6}\phi^3 + \frac{D}{2}(\phi')^2 = C_2 \quad (311)$$

Vzhledem k tomu, že hledáme lokalizované řešení, je druhá integrační konstanta opět nulová a KdV rovnice přešla na obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \frac{1}{D}\phi^2\left(v - \frac{A}{3}\phi\right), \quad (312)$$

která je snadno separovatelná. Po separaci je možné za pomoci vhodných substitucí provést přímou integraci této rovnice. Výsledkem je řešení

$$\phi(\eta) = \frac{3v}{A} \text{ch}^{-2} \left[\sqrt{\frac{v}{4D}} \eta \right] \quad (313)$$

Skutečně tedy pro libovolné konstanty existuje řešení KdV rovnice ve tvaru solitonu:

►
$$\phi(t, x) = \frac{3v}{A} \text{ch}^{-2} \left[\sqrt{\frac{v}{4D}} (x - x_0 - vt) \right]. \quad (314)$$

Řešením je „kopeček“ podobný řezu horou Říp přesouvající se napravo rychlostí v . Výška solitonu je provázána s rychlostí jeho přesunu:

►
$$\phi_{\max} = \frac{3v}{A}. \quad (315)$$

Různě vysoké solitony se pohybují různou rychlostí, což je pro KdV soliton typické. Poslední vztah bylo možné získat již z rovnosti (312). V maximální výšce je totiž první derivace (levá strana) nulová a z pravé strany máme okamžitě hledaný vztah.

Poznámka 1: KdV rovnice se často uvádí v bezrozměrném tvaru s konstantami zahrnutými do proměnných. Navíc jsou derivace psány jako indexy, takže se čtenář může setkat s tvarem:

$$\phi_t + 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0. \quad (316)$$

Koeficient 6 je volen záměrně tak, aby řešení vyšlo co nejjednodušší. V našem řešení pro soustavu SI postačí položit $A = 6$, $D = 1$ a ihned máme řešení normované KdV rovnice:

$$\phi(t, x) = \frac{v}{2} \text{ch}^{-2} \left[\frac{\sqrt{v}}{2} (x - x_0 - vt) \right]. \quad (317)$$

Poznámka 2: KdV rovnice je nejjednodušším zobecněním vlnové rovnice typu

$$\frac{\partial \phi}{c \partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (318)$$

Tato jednoduchá vlnová rovnice vede na disperzní relaci

$$\omega = ck. \quad (319)$$

Připustíme nyní, že disperze není takto jednoduchá a nalezneme první nejjednodušší zobecnění:

$$\omega = c(k)k \approx (c_0 - c_1 k^2)k = c_0 k - c_1 k^3. \quad (320)$$

Druhý člen rozvoje vede na disipaci energie (komplexní k), proto musí být u solitonových řešení nulový. Třetí člen rozvoje musí být záporný, jedině tak má k reálné řešení. Pokud připustíme jako nejjednodušší zobecnění disperzní relace tvar (320), musíme vlnovou rovnici upravit do tvaru

$$\frac{\partial \phi}{c_0 \partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + c_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0. \quad (321)$$

Tuto vlnovou rovnici snadno přepíšeme do tvaru rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[c_0 \phi + c_0 c_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (322)$$

Výraz v hranaté závorce představuje tok veličiny ϕ . Jeho první přímočaré zobecnění vedoucí na nelineární jevy je

$$j = c_0 \phi + \alpha \phi^2 + c_0 c_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (323)$$

což vede na parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2\alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + c_0 c_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0. \quad (324)$$

Pokud posuneme nezávislou proměnnou $x \rightarrow x - c_0 t$, eliminujeme druhý člen a ze zobecněné vlnové rovnice dostaneme KdV rovnici ve tvaru (303):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + D \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0; \quad A = 2\alpha; \quad D = c_0 c_1 \dots \quad (325)$$

* * *

KdV rovnice byla původně odvozena pro vlny na mělké vodě a stala se první teorií vysvětlující pozorování solitonu na plavebním kanálu poblíž Edinburku (John Scott Russel, 1834). Řešením je typická osamocená vlna, která neinteraguje s jinými podobnými vlnami a jejíž rychlost je závislá na výšce vlny.

NLS soliton (Non Linear Schrödinger soliton)

Řada problémů z kvantové teorie, ale i z jiných fyzikálních oborů (fyzika plazmatu, Langmuirovy oscilace, nelineární optika) vede na nelineární Schrödingerovu rovnici, kterou uvedeme pouze v bezrozměrném tvaru:

$$\blacktriangleright \quad i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sigma_D \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2\sigma_N \phi^2 \phi^* = 0. \quad (326)$$

Koeficient σ_D určuje typ disperze NLS, podle hodnoty dělíme NLS solitony na tři případy:

- $\sigma_D = +1$: eliptická NLS,
- $\sigma_D = -1$: hyperbolická NLS,
- $\sigma_D = 0$: (1+1)D NLS.

Poslední člen reprezentuje nelinearitu, v uvedeném případě kubickou, může být však i složitější. Hodnota koeficientu σ_N určuje typ modulační nestability:

- $\sigma_N = +1$: fokusující,
- $\sigma_N = -1$: defokusující.

Uveďme řešení pro fokusující (1+1)D NLS, kdy vzniká tzv. Davydovův soliton tvaru

$$\blacktriangleright \quad \phi(t, x) = \sqrt{\omega} \operatorname{ch}^{-1} \left[\sqrt{\omega} (x - x_0 - vt) \right] \exp \left[i \frac{vx}{2} - i \left(\frac{v}{2} \right)^2 t + i \omega t + i \delta \right]. \quad (327)$$

V řešení se objevuje volný parametr ω – NLS soliton má část připomínající rovinnou vlnu, která je modulována (násobena) obálkou ch^{-1} . Amplituda není provázána s rychlostí solitonu, ale s frekvencí v solitonu „uvězněné“ vlny. Porovnejme oba dva základní typy solitonů:

- KdV soliton je pouze vyboulením hledané funkce v místě vlny (například vzednutí vodní hladiny), NLS soliton může vypadat jako vlnový balík, tj. může být obálkou vlny určité frekvence.
- Rychlost pohybu KdV solitonu závisí na amplitudě, rychlost pohybu NLS solitonu nikoli.
- U KdV solitonu je součin výšky vlny a druhé mocniny šířky konstantní, u NLS solitonu takovéto pravidlo neplatí.
- KdV solitony mají po srážce přesně stejný tvar jako před srážkou, maximálně jsou fázově posunuty. NLS solitony si sice ponechají při srážce svou identitu, ale jejich tvar se přece jen poněkud změní.

Na závěr si ukažme, jak lze pravděpodobně nejjednodušším způsobem získat rovnici, která vede na solitonová řešení. Upravme 1D Naviere-Stokesovu rovnici

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla u = \eta \Delta u \quad (328)$$

do jednoduchého tvaru

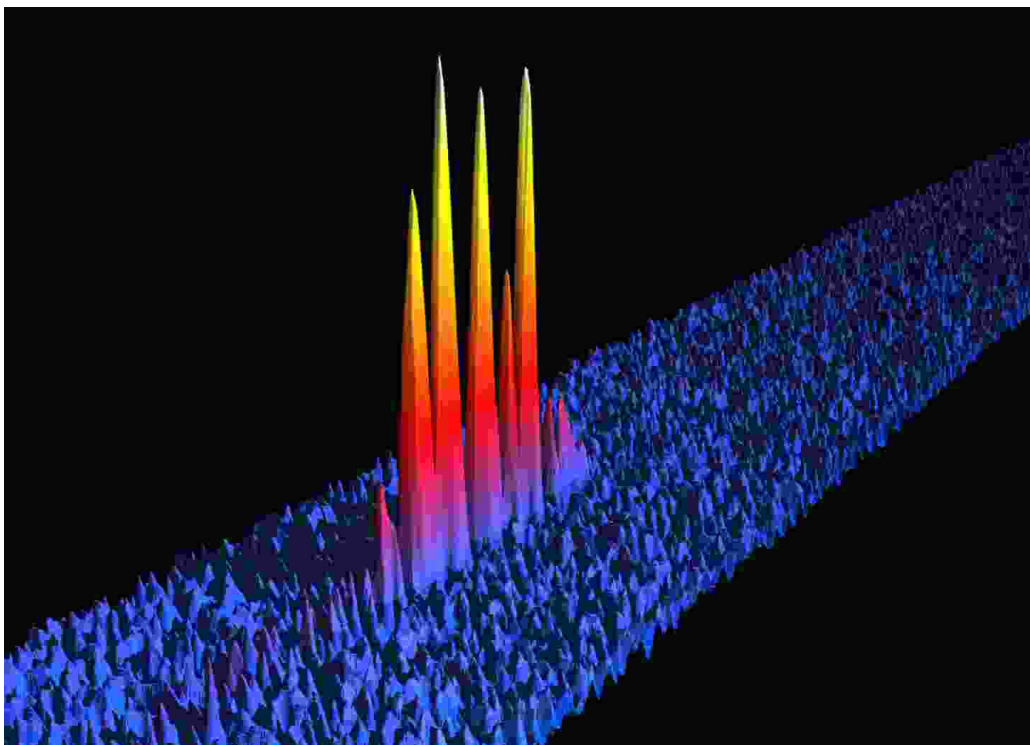
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (329)$$

Typově jde o tzv. **Burgersovu rovnici**

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial x} (u^2) - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (330)$$

s nelineárním a disperzním členem. Burgersova rovnice opět poskytuje solitonová řešení. Postup jejich nalezení je zcela analogický tomu, jak jsme řešili KdV rovnici, tedy nejprve proměnné t, x nahradíme proměnnou $\eta = x - vt$, čímž převedeme rovnici na obyčejnou diferenciální rovnici, která je snadno integrovatelná. Zbylou rovnici 1. řádu pak řešíme separací.

Někdy solitony vytvoří skupinu, která se prostředím pohybuje ve formaci, potom hovoříme o *solitonovém vláčku*. V některých případech soliton jakoby dýchá: pravidelně mění svůj tvar a periodicky se vrací do výchozího tvaru. Nejde o soliton v pravém slova smyslu (mění tvar), ale o solitonům velmi příbuzný jev, v angličtině označovaný *breath* (dýchání).



Solitonový vláček. V roce 2002 se podařilo připravit vědcům z Univerzity v Rice Boseho-Einsteinův kondenzát velice zajímavých vlastností. Ultrachladné atomy vytvořily kondenzát jen v některých místech. Vznikla řada několika pohybujících se solitonů připomínajících vláček. Oblasti kondenzátu se přemísťovaly beze změny tvaru, jak je pro solitony typické.

Solitony v plazmatu

Langmuirův soliton. Magnetohydrodynamické rovnice lze přepsat za určitých předpokladů jak na KdV rovnici, tak na NLS rovnici. Zajímavým jevem je nelineární modifikace plazmových (Langmuirových) oscilací na plazmové frekvenci elektronů, které se lokalizují v oblasti izolované od okolí. Vzniká tak hustotní dutina zaplněná vysokofrekvenčním polem, ve které je koncentrace plazmatu snížena podle vztahu

$$\frac{\delta n}{n} \approx \frac{p_E}{p_T} \approx \frac{\varepsilon E^2 / 2}{2nk_B T}. \quad (331)$$

Proto se někdy říká Langmuirovu solitonu *well* (dutina, studna). Samo elektrické pole (obálka) splňuje vztah

$$E(x) \approx E_0 \operatorname{ch}^{-1}(k_0 x)$$

a hustota energie je KdV solitonem:

$$\mathcal{E}(x) = \varepsilon E^2 / 2 \approx E_0^2 \operatorname{ch}^{-2}(k_0 x)$$

Jde ovšem jen o limitní jednoduchý případ. Langmuirovy solitony mohou být značně složité a chovat se v určitých situacích i jako NLS soliton. Langmuirův soliton může totiž oscilovat a generovat nízkofrekvenční iontově akustické vlny. Naopak, Langmuirův soliton může na dlouhých vlnových délkách nasávat energii z iontově akustických vln pomocí tzv. parametrické nestability. Na krátkých vlnových délkách ztrácí energii Landauovým útlumem. Může tak dojít ke stacionárnímu toku energie v k prostoru. Soliton komunikující energeticky s okolím se nazývá disipativní soliton. Langmuirovy solitony zpravidla vznikají při rozpadu Langmuirových (plazmových) oscilací, odsud získaly své jméno. Langmuirovy solitony je možné uměle generovat v laboratoři, například na aparatuře *Double Plasma* vyvinuté v sedmdesátých letech 20. století (popis viz dále).

Davydovův soliton. Toto řešení opět souvisí s Langmuirovými vlnami a je popsáno *Sacharovovou-Kuzněcovovou soustavou* parciálních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \phi \psi; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 (\phi^2)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (332)$$

Na obdobnou soustavu vedou problémy v chemii a v kvantové teorii. Ve fyzice plazmatu je tato soustava vhodná pro popis nestabilit v elektronovém svazku či popis Langmuirových vln v plazmatu. Veličina ϕ odpovídá elektrickému poli a veličina ψ odchylce koncentrace iontů od rovnovážné polohy. Elektrické pole splňuje Schrödingerovu rovnici s nelineárním zdrojovým členem daným poruchou koncentrace iontů. Ta naopak splňuje vlnovou rovnici s ponderomotorickým zdrojovým členem (druhou derivací kvadrátu elektrického pole, tj. elektrického tlaku) na pravé straně. Soustava má známé solitonové řešení (Davydovův soliton)

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \sqrt{2(1-v^2)} \omega \operatorname{ch}^{-1}[\sqrt{\omega}(x-vt)] \exp \left[i \frac{vx}{2} - i \left(\frac{v}{2} \right)^2 t + i \omega t + i \delta \right]; \\ \psi(t, x) &= -2\omega \operatorname{ch}^{-2}[\sqrt{\omega}(x-vt)]. \end{aligned} \quad (333)$$

Parametry řešení jsou rychlost pohybu solitonu v , fázový posun δ a škálovací parametr ω . Sacharovovy-Kuzněcovovy rovnice lze za jistých předpokladů zjednodušit buď na NLS rovnici nebo na KdV rovnici, kdy Davydovův soliton přechází v Langmuirův soliton.

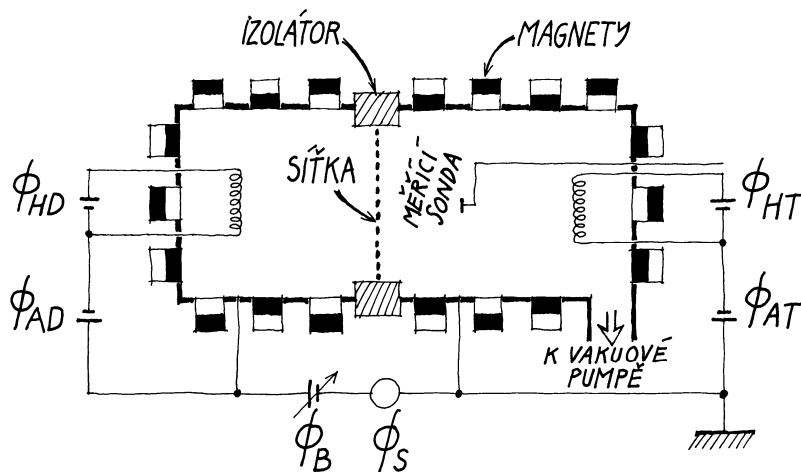
Trivelpiecův-Gouldův soliton. Tento soliton souvisí opět s elektronovými plazmovými vlnami, ale v ohraničeném prostoru. Vzniká jako komprese plazmatu šířící se podle pravidel KdV solitonu. Nejsnáze se tyto solitony generují v Q aparatuře, což je válcová trubice s rovinnými kovovými deskami na obou koncích, které jsou pokryté alkalickým kovem (cesiem nebo draslíkem). Desky jsou zahřáté na vysokou teplotu a do prostoru komory se z nich odpařují ionty a elektrony. Trubice je v silném magnetickém poli, které snižuje difúzi elektronů kolmo na osu trubice. Plazma vznikající v trubici má vyrovnanou teplotu elektronů a iontů, což je jistou nevýhodou tohoto uspořádání. Pokud mají ionty teplotu shodnou s elektrony, je fázová rychlost iontově akustické vlny srovnatelná s tepelnou rychlostí iontů, a ionty proto snadno surfují na iontově akustické vlně a odnímají jí energii Landauovým útlumem. Ideální je, když mají ionty teplotu výrazně nižší než elektrony, pak je Landauův útlum na iontech zanedbatelný. Soliton lze v trubici vybudit například napěťovým pulzem.

Experimentálně bylo ověřeno, že součin výšky a druhé mocniny šířky je konstantní a že rychlost solitonu závisí jen na jeho amplitudě. Za prošlým solitonem bylo pozorováno lehké zvlnění plazmatu. Vlny spojené s tímto solitonem poprvé popsali v roce 1959 Alvin W. Trivelpiece a Roy W. Gould z Kalifornského institutu technologií.

Iontově-akustický soliton. Soliton tohoto druhu se může vytvořit ze zvukových vln šířících se plazmatem. Tyto vlny jsou, na rozdíl od plynu, nesené ionty, které spolu interagují také prostřednictvím elektrického pole. Jde o nejlépe prozkoumané solitony v plazmatu, snadno se generují v *Double Plasma* (DP) aparatuře napěťovým pulzem vhodné frekvence. Bez problémů lze vytvořit rovinné solitony, válcové solitony nebo kulové solitony. Iontově-akustické solitony jsou popsány KdV rovnicí a v experimentech se podle ní chovají.

DP aparatura je nejvýznamnějším zařízením, které přispělo k výzkumu solitonů, a proto si ho popíšeme podrobněji. Jedna z mnoha používaných variant je na obrázku 65. První zařízení tohoto typu sestrojili Rudolf Limpacher a K. R. MacKenzie již v roce 1973. Jde o dvojitou plazmovou komoru (anglicky *Double Plasma*, odsud název DP), obě části jsou oddělené kovovou sítí. Ta není elektricky spojena s žádným prvkem aparatury, samovolně se nabije na záporný potenciál (několika desítek voltů) a brání průchodu elektronů z jednoho objemu do

druhého. Napětí ϕ_{HD} a ϕ_{HT} zajišťují žhavení elektrod, ze kterých do komor unikají elektrony. Napětí ϕ_{AD} a ϕ_{AT} tyto elektrony urychlují. Urychlené elektrony ionizují pracovní plyn. Aby elektrony neunikaly z komor, jsou na obvodu řady permanentních dipólových magnetů (sousední řady mají opačnou polaritu), podle velikosti komor jich může být jeden až dva tisíce. Vhodně zvolené napětí ϕ_B brání průchodu iontů mezi komorami.



Double Plasma (DP) aparatura.

V první variantě zařízení bylo možné vytvořit přibližně 1 m^3 bezsrážkového plazmatu (střední volná dráha částic byla větší než rozměry aparatury) s koncentrací elektronů 10^7 až 10^{10} částic v centimetru krychlovém, teplotou elektronů 1 až 3 eV a teplotou iontů nižší než desetina teploty elektronů (nízká teplota iontů zajišťuje, že generované iontově akustické vlny nejsou tlumeny Landauovým útlumem na iontech). Permanentní magnety měly indukci 0,2 T a jejich řady od sebe byly vzdálené 10 cm. Soliton bylo možné vyvolat mnoha způsoby, jedním z nich bylo přivedení napěťového pulzu ϕ_S , který měl za následek velkou poruchu hustoty iontů šířící se z přípravné do cílové komory (komora s měřicí sondou). Jsou ale i jiné způsoby: přivedení napětí na mřížku, přivedení napětí na kovový předmět ponořený do levé přípravné komory (válcový předmět vytvořil válcový soliton) nebo fotoionizace světlem fokusovaným do určité roviny (vznikl rovinný soliton) či napětí přivedené na pole drátků. Zařízení tohoto typu jsou standardem pro tvorbu a výzkum solitonů spojených s iontově akustickými vlnami a dnes se vyrábějí i s válcovými nebo kulovými komorami.

Literatura k této kapitole

- [1] Matthew C. Williams: *Solitons – Interactions, Theoretical and Experimental Challenges and Perspectives*; Nova Science Publishers 2013
- [2] Sascha Vongehr: *Solitons*; Nanjing University 1997, online: aldebaran.cz/studium/tpla/docs/Vongehr-solitons.pdf
- [3] Roger Grimshaw: *Korteweg-de Vries Equation*; Loughborough University (UK) 2008. online: aldebaran.cz/studium/tpla/docs/KdV_Grimshaw.pdf
- [4] E. M. de Jager: *On the Origin of the Korteweg-de Vries Equation*; arXiv:math/0602661v2 [math.HO] 8 Dec 2011
- [5] Katie Banks: *Solitons and the Korteweg de Vries Equation: Starting with Shallow-Water Waves*; Semantic Scholar 2012; online: aldebaran.cz/studium/tpla/docs/KdV_Banks.pdf
- [6] N. Nagesha Rao, Ram K. Varma: *A theory for Langmuir solitons*; J. Plasma Physics (1982), vol. 27, part 1, pp. 95–120
- [7] P. Kulhánek: *Blýskání aneb třináctero příběhů o plazmatu*; AGA 2013



6. TURBULENCE

Turbulentní struktury

V této kapitole se budeme věnovat dalšímu významnému nelineárnímu jevu – turbulenci. Turbulentní pohyby jsou jedněmi z nejčastějších pohybů v přírodě a současně je turbulence jevem, který dodnes není uspokojivě vyřešen. Můžeme k němu přistupovat za pomoci rozměrové analýzy, magnetohydrodynamicky, statisticky, nebo jevy numericky simulovat. Následující text je jen základním přehledem některých vztahů, rozhodně není plnohodnotným učebním textem. Detailnější informace získáte ve specializovaných učebnicích.

K turbulenci nejčastěji dochází při vysokých rychlostech proudění tekutin. Nadbytek kinetické energie způsobí přechod z laminárního proudění do turbulentního. Energie je nelineárními jevy ukládána do rotačního pohybu vírů nejrůznějších velikostí. S turbulence se ale setkáme i při obtékání překážek, například za lodí či mostními pilíři. Turbulentní víry jsou typické pro atmosféru i pro dopad vody do hrnce na vaření. V plazmatu se setkáváme s turbulentními pohyby velmi často. Turbulence jsou přítomné ve slunečním větru i ostatním astrofyzikálním plazmatu, vyskytují se v technologickém i fúzním plazmatu. V plazmatu vznikají turbulence nejčastěji v důsledku rozvoje nejrůznějších nestabilit.

Pro turbulence je na první pohled typický chaos, zdánlivě náhodné fluktuace rychlostního i tlakového pole způsobené přechodem do stavu s velkým množstvím vírů. Pro turbulenci je ale nejcharakterističtější jevem tzv. *energetická kaskáda*. Při proudění vznikají víry nejrůznějších velikostí. Ty největší mají rozměry srovnatelné s nejmenším rozměrem proudící oblasti. Velké víry se protahují a rozpadají na víry menší. Víry určité velikosti předávají energii nelineárními jevy vírům menším, ty ještě menším atd. Energie je proudícím médiem transformována od největších struktur k těm nejmenším. Velikost vírů má i svou dolní hranici – říkáme jí *Kolmogorovova škála*. U malých vírů energetická kaskáda končí a začínají převládat disipativní jevy způsobené viskozitou tekutiny. Energie vírů se nakonec přemění na chaotickou tepelnou energii. Turbulentní procesy vedou také k difúzi látky, hovoříme o tzv. turbulentní difúzi.

Rychlostní pole můžeme standardním způsobem rozložit do jednotlivých Fourierových módů daných vztahem

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \int \mathcal{U}(\omega, \mathbf{k}) e^{i[\mathbf{kx} - \omega t]} d^3 \mathbf{k}, \quad (334)$$

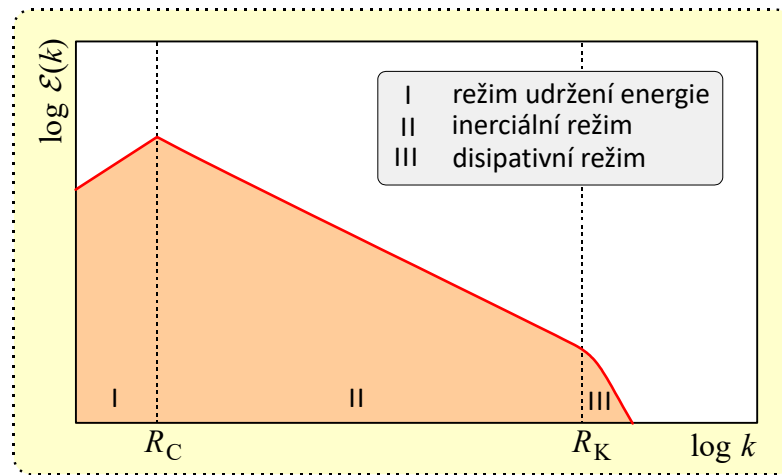
kde čtyři čísla ω , \mathbf{k} popisující Fourierovy komponenty jsou provázána disperzní relací. Velikost vektoru \mathbf{k} popisuje rozměry struktur odpovídajících danému módu:

$$\blacktriangleright \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \sim \frac{2\pi}{R} \quad (335)$$

Největší víry mají rozměr R_C srovnatelný s popisovanou oblastí, nejmenší Kolmogorovovu škálu R_K . V plazmatu je nejzášší dolní hranicí velikosti vírů Larmorův poloměr iontů R_{Li} . Pro turbulenci je důležité tzv. energetické spektrum. Kinetickou energii vírů vztaženou na jednotku hmotnosti složíme z energií jednotlivých Fourierových módů:

$$\blacktriangleright \quad \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2 \rangle = \int_0^\infty \mathcal{E}(k) dk. \quad (336)$$

Veličinu $\mathcal{E}(k)$ nazýváme energetické spektrum. V turbulenci rozlišujeme tři oblasti (podle velikosti vírů), viz obrázek 1.133, které se liší průběhem energetického spektra:



Tři základní turbulentní oblasti

Největší víry patří do oblasti I, tzv. režimu udržení energie. Viskózní procesy jsou zanedbatelné, víry jen málo předávají energii menším strukturám. Velké víry nejsou rozloženy ani homogenně, ani izotropně. Pro energetický přenos je tato oblast nevýznamná. Pro turbulenci je typická oblast II, kterou označujeme jako inerciální režim. Probíhá zde turbulentní energetická kaskáda popsaná výše. Víry větších velikostí předávají energii vírům menších velikostí. Viskozita tekutiny je pro tyto jevy podstatná, ale nedominoje. Pro běžné tekutiny je rozložení vírů homogenní a izotropní a energetické spektrum je úměrné $k^{-5/3}$ (tzv. Kolmogorovo spektrum). Existence této oblasti a energetické kaskády odlišuje turbulenci od ostatních chaotických jevů. V plazmatu jsou víry ovlivněny magnetickým polem, které způsobuje anizotropii jejich rozložení a jinou závislost energetického spektra na podélné složce vlnového vektoru a jinou na kolmou (vzhledem k magnetickému poli). Poslední oblastí je disipativní režim III, v němž dominují viskózní jevy a malé víry zanikají. Jejich energie se mění na teplo.

Kolmogorova turbulence

První úspěšný model turbulence předložil sovětský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987) v roce 1941. Tento model turbulence se většinou označuje K41. Kolmogorov předpokládal, že všechny víry turbulentní energetické kaskády jsou prostorově i časově malé ve srovnání s rozměry oblasti, tj. jejich velikost splňuje $r \ll L$ a doba jejich změn je $\delta t \ll L/u$. Tyto víry nemají preferovanou orientaci, tj. jsou rozloženy homogenně a izotropně. Veškeré směrové závislosti jsou v průběhu energetické kaskády ztraceny, výsledná statistika vírů má univerzální charakter a závisí jen na míře disipace energie $\varepsilon \equiv d(u^2/2)/dt$ dané viskózními procesy a na velikosti vírů daných vlnovým číslem k . Výsledné Kolmogorovovy vztahy lze snadno odvodit z pouhé rozměrové analýzy problému. energii vztahujeme na jednotku hmotnosti, tedy kinetická energie vírů je $u^2/2$. Uvedme rozměry klíčových veličin ze vztahu (336) a míry disipace energie ε :

$$\left[\frac{u^2}{2} \right] = \text{m}^2 \text{s}^{-2}; \quad [k] = \text{m}^{-1}; \quad [\mathcal{E}] = \text{m}^3 \text{s}^{-2}; \quad [\varepsilon] = \text{m}^2 \text{s}^{-3}. \quad (337)$$

Jednoduchá rozměrová analýza snadno ukáže, že z těchto vztahů není pro energetické spektrum možná jiná závislost než

$$\mathcal{E} = K_0 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (338)$$

kde K_0 je nějaká univerzální bezrozměrná konstanta. Touto závislostí se řídí mnoho tekutin v oblasti II, v níž probíhá turbulentní energetická kaskáda. Pro plazma mohou být podstatné fluktuační elektrického potenciálu, jejichž spektrum je dáno vztahem

$$\langle (\delta\phi)^2 \rangle = \int_0^\infty S(k) dk. \quad (339)$$

Rozměrová analýza zde vede na závislost

$$S(k) \sim k^{-5}. \quad (340)$$

Uvedený vztah ale platí jen za předpokladu, že fluktuace elektrického potenciálu nezávisí na Larmorově poloměru iontů. Larmorův poloměr by vnesl do rozměrové analýzy další veličinu s rozměrem metru, a proto by rozměrová analýza už nedala jednoznačný výsledek. Vztah (340) je tedy třeba brát jen s velkou rezervou.

Další veličinou, kterou je možné odhadnout z rozměrové analýzy je Kolmogorovova škála R_K . Z kinematické viskozity ν a míry disipace energie ε lze složit jedinou veličinu s rozměrem délky. Proto lze odhadnout, že je Kolmogorova délka dána tímto vztahem

$$R_K \equiv \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (341)$$

Vztah opět platí jen pro procesy, v nichž nehrají hlavní roli gyrační pohyby iontů. Lze ho tedy použít pro turbulence běžných tekutin bez přítomnosti magnetických polí.

Turbulence v magnetohydrodynamice

Předpokládejme nejjednodušší variantu magnetohydrodynamiky s viskózními procesy. Tekutinu budeme považovat za nestlačitelnou. Výchozími rovnicemi budou

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \eta_L \Delta \mathbf{u} - \nabla p_L + \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \quad (342)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (343)$$

První rovnice je pohybovou rovnicí plazmatu, napravo jsou postupně: hustota viskózní síly, hustota tlakové síly a hustota Lorentzovy síly. Druhá rovnice je rovnicí pro časový vývoj magnetického pole, první člen popisuje difúzi pole, druhý zamrzání pole. Obě rovnice musíme doplnit rovnicemi pro divergence polí. Pro nestlačitelnou kapalinu máme jednoduché vztahy

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (344)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (345)$$

Vztah (345) říká, že plazma je nestlačitelné, tedy je jeho hustota konstantní. Rovnici (342) proto vydělíme hustotou a i s permeabilitou ji budeme integrovat do magnetického pole a získáme vztahy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu_L \Delta \mathbf{u} - \nabla P_L + \text{rot } \mathbf{b} \times \mathbf{b}, \quad (346)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nu_M \Delta \mathbf{b} + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{b}, \quad (347)$$

kde jsme označili

$$\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu \rho}}; \quad P_L \equiv \frac{p_L}{\rho}; \quad \nu_M \equiv \frac{1}{\sigma \mu} \quad (348)$$

Přeškálované magnetické pole \mathbf{b} má rozměr rychlosti – nejde totiž o nic jiného, než o Alfvénovu rychlost příslušící danému poli. Rovnice pro rychlostní i pro magnetické pole tak mají nyní stejný rozměr. Porovnáním různých členů můžeme získat bezrozměrné charakteristiky proudění:

$$\#_{\text{Re}} \equiv \frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}|}{|\nu_L \Delta \mathbf{u}|} \approx \frac{Lu}{\nu_L}; \quad (349)$$

$$\#_{\text{ReM}} \equiv \frac{|\text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{b}|}{|\nu_M \Delta \mathbf{b}|} \approx \frac{Lu}{\nu_M}; \quad (350)$$

$$\#_{\text{Pr}} \equiv \frac{\#_{\text{ReM}}}{\#_{\text{Re}}} \approx \frac{\nu_M}{\nu_L}; \quad (351)$$

Reynoldsovo číslo $\#_{\text{Re}}$ vyjadřuje podíl kinetického členu k viskóznímu. Při velkých Reynoldsových číslech je při proudění nadbytek kinetické energie a dochází k rozvoji turbulentního proudění. Hodnota Reynoldsova čísla je tedy pro samovolný vznik turbulence rozhodující. V plazmatu tomu může samozřejmě napomoci vývoj různých nestabilit. Reynoldsovo magnetické číslo $\#_{\text{ReM}}$ je podílem členu zamrznání a členu difúze v rovnici pro časový vývoj magnetického pole a už jsme se s ním setkali. Ve většině typů plazmatu je velmi vysoké a zamrznání pole převládá nad jeho difúzí. Velikost Reynoldsova magnetického čísla nijak nerozhoduje o turbulenci. Poslední, Prandtlovo číslo, dává do podílu oba typy viskózních procesů – je podílem magnetické difúze a kinematické viskozity. V astrofyzikálním plazmatu může mít nejružnější hodnoty, od 10^{29} v mezigalaktickém prostoru přes 1 ve slunečním větru až po hodnotu $\ll 1$ ve sluneční konvektivní zóně. Pro turbulentní procesy vyjadřuje podíl vlivu magnetické (ohmické) a viskózní disipace energie.

Elsässerova pole

Rovnice (346) a (347) pro rychlostní a magnetické pole ještě upravíme do symetrického tvaru. V obou rovnicích rozepíšeme dvojný vektorový součin na pravé straně. U první rovnice úprava povede na rozdělení hustoty Lorentzovy síly na příspěvek magnetického tlaku a příspěvek zakřivení magnetických siločar. U rovnice pro magnetické pole dojde k převedení rovnice na rovnici s úplnou časovou derivací na levé straně. Obě úpravy jsme již dříve prováděli, proto uvedeme jen výsledek:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu_L \Delta \mathbf{u} - \nabla(P_L + P_M) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}, \quad (352)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = \nu_M \Delta \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (353)$$

Magnetický tlak je v rovnici pro rychlostní pole popsán veličinou

$$P_M \equiv \frac{p_M}{\rho} = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu\rho} = \frac{\mathbf{b}^2}{2} \quad (354)$$

Obě rovnice (352), (353) mají stejný rozměr, proto je můžeme vhodně kombinovat. V soustavě spojené s proudícím plazmatem budou mít obě pole tvar

$$\mathbf{u} = \delta \mathbf{u}, \quad (355)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \delta \mathbf{b}. \quad (356)$$

Rychlostní pole má jen flukтуаční část, magnetické pole je dáno základním a flukтуаčním polem. V roce 1950 zavedl americký fyzik Walter M. Elsässer nové proměnné

$$\mathbf{z} = \delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{b}, \quad (357)$$

$$\mathbf{w} = \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{b}. \quad (358)$$

Někdy se Elsässerova pole označují jen symboly \mathbf{z}_\pm . Abychom získali rovnice pro nová pole, sečteme a odečteme rovnice (352), (353) pro rychlost a magnetické pole:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) \mathbf{z} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{z} = \Delta \left[\frac{v_L - v_M}{2} \mathbf{w} + \frac{v_L + v_M}{2} \mathbf{z} \right] - \nabla (P_L + P_M), \quad (359)$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \Delta \left[\frac{v_L + v_M}{2} \mathbf{w} + \frac{v_L - v_M}{2} \mathbf{z} \right] - \nabla (P_L + P_M). \quad (360)$$

Rovnice pro Elsässerova pole jsou výchozími rovnicemi pro zkoumání magnetohydrodynamické turbulence, ať už analyticky, rozměrovou analýzou či numerickými simulacemi. Pokud buď zanedbáme magnetické pole, nebo budeme předpokládat, že fluktuační jsou homogenní a izotropní a typická časová škála je dána jen nelineárními jevy, tj.

$$\tau_{NL} \approx (k w)^{-1} \approx (k z)^{-1}, \quad (361)$$

získáme (ať už analyticky či rozměrovou analýzou) Kolmogorovovo spektrum

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}_K \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (362)$$

Nás ale bude především zajímat vliv magnetického pole na pozadí, kde je typická časová škála dána Alfvénovým časem

$$\tau_A \approx \frac{L}{v_A} = \frac{L}{b_0}. \quad (363),$$

Budeme-li i v tomto případě udržovat předpoklad izotropie fluktuačních (je to oprávněné pro slabé pole a malé víry), dostaneme tzv. IK nebo IK64 model pojmenovaný podle sovětského fyzika P. S. Irošnikova a amerického teoretika Roberta Henry Kraichnana. Irošnikov tímto způsobem popsal turbulenci v roce 1964 a Kraichnan nezávisle na něm v roce 1965. Výsledkem je spektrální závislost

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}_{IK}(k) \sim (v_A \varepsilon)^{1/2} k^{-3/2}. \quad (364)$$

Spektrum IK modelu tedy závisí na magnetickém poli na pozadí.

Silná anizotropní turbulence

Silné magnetické pole vnáší do plazmatu anizotropii a předpoklad o homogenní a izotropní turbulenci je v takovém případě neudržitelný. Energetické spektrum je třeba, na rozdíl od Kolmogorovy turbulence (336), definovat třírozměrně:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2 \rangle = \int_0^\infty \mathcal{E}(k_{\parallel}, k_{\perp}) d^3 \mathbf{k}. \quad (365)$$

Rozměr energetického spektra je tedy ve třech dimenzích jiný než u jednorozměrného Kolmogorovova popisu. Anizotropní modely můžeme rozdělit na slabě a silně turbulentní. Při slabé turbulenci jsou obě Elsässerova pole podstatně menší než magnetické pole na pozadí, u silné turbulence takový předpoklad neplatí. Pro slabou turbulenci (WT, *Weak Turbulence*) lze odvodit energetické spektrum

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}_{WT}(k) \sim k_{\parallel}^{1/2} k_{\perp}^{-2}. \quad (366)$$

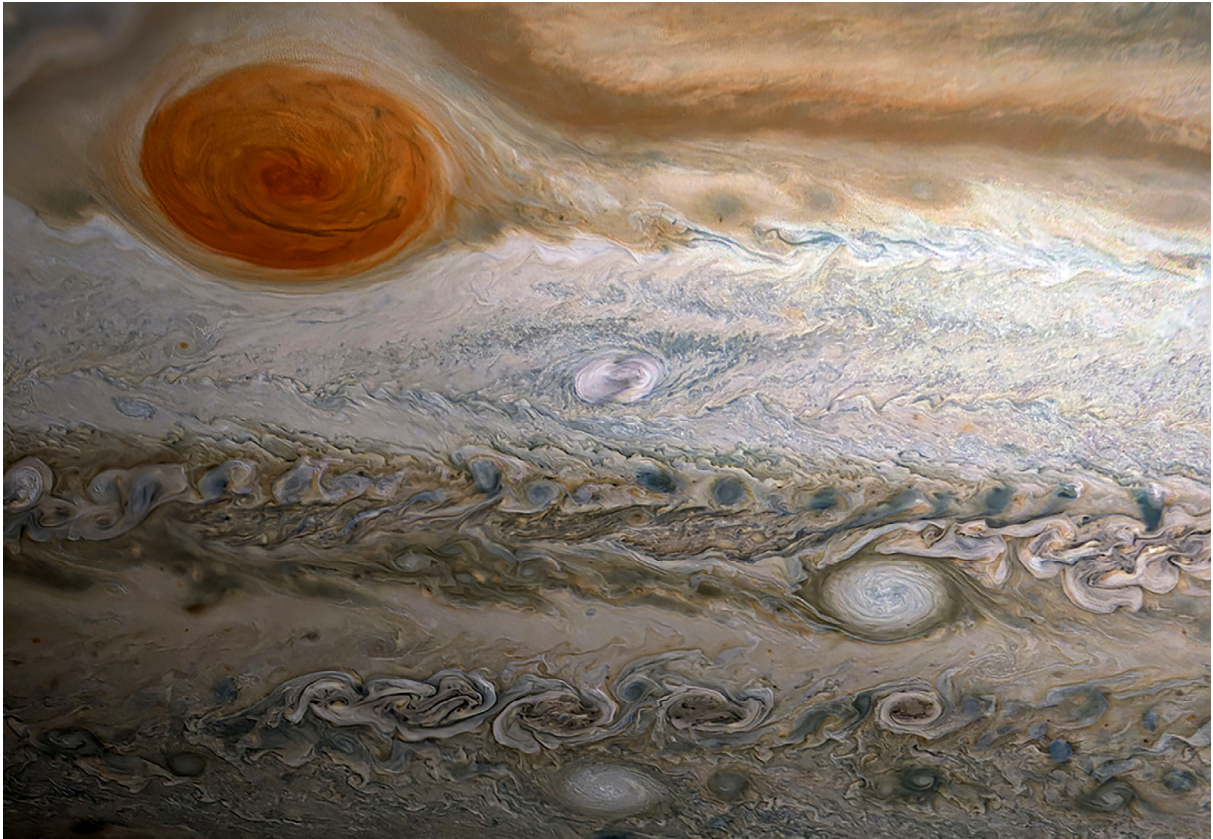
Podmínky slabé turbulence jsou ale v plazmatu splněny jen zřídka, pokud se turbulence už rozvine, bývá zpravidla silná. Podmínky silné magnetohydrodynamické turbulence zkoumali americký astrofyzik Peter Goldreich a indický fyzik Seshadri Sridhar. Jejich výsledky z roku 1995 se označují jako GS nebo GS95 model. Energetické spektrum je velmi zajímavé. Pokud jsou fluktuační izotropní alespoň v kolmé rovině na magnetické pole, stává se spektrum jednorozměrným a vede na Kolmogorovův tvar:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}_{\text{GS}}(k) \sim \varepsilon^{2/3} k_{\perp}^{-5/3} . \quad (367)$$

Pro rovnoběžnou složku se vytvoří mezi oběma komponentami vlnového vektoru rovnováha daná vztahem

$$\blacktriangleright \quad k_{\parallel} \sim k_{\perp}^{2/3} . \quad (368)$$

Koeficienty úměrnosti jsou ale v GS95 modelu funkcí Alfvénovy rychlosti a dalších parametrů, takže je experimentální ověřování poněkud obtížné. Z numerických simulací plyne, že v případě silně rozvinuté turbulence s magnetickým polem na pozadí jsou výsledky pro slabá pole blízké GS modelu, zatímco pro silná pole naopak korespondují s IK modelem. Problematika turbulencí je stále otevřenou disciplínou s mnoha nezodpovězenými otázkami.



Turbulentní struktury v Jupiterově oblačnosti. Fotografie: sonda JUNO, 2. června 2020, NASA/JPL.

Literatura k této kapitole

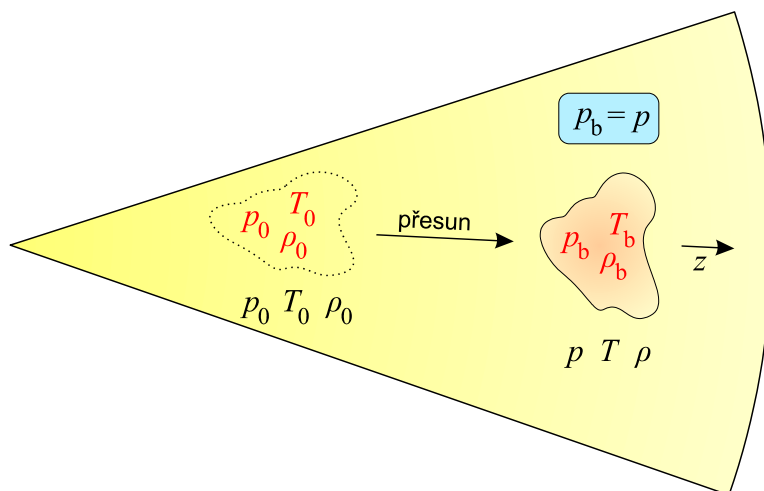
- [1] Bogdan A. Hnat: Plasma Turbulence; University of Warwick, 2016. Online: <http://sp2rc.group.shef.ac.uk/assssp16/lectures/L12Hnat.pdf>
- [2] Silvio Sergio Cerri, Daniel Grošelj, Luca Franci: *Kinetic plasma turbulence: recent insights and open questions from 3D3V simulations*; Front. Astron. Space Sci., 11 Oct 2019
- [3] Andrej Nikolajevič Kolmogorov: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers; Proceedings of the USSR Academy of Sciences, 1941, 299–303. Online anglický překlad: <https://courses.physics.ucsd.edu/2014/Spring/physics281/kolmogorov41.pdf>



7. VYBRANÉ PROBLÉMY Z FYZIKY PLAZMATU

Schwarzschildovo kritérium

V roce 1906 odvodil německý fyzik Karl Schwarzschild (1873–1916) kritérium pro rozvoj konvektivního proudění uvnitř hvězd. Jeho kritérium pro vznik konvekce je platné nejenom ve hvězdách, ale i pro jakýkoli plazmový systém. Předpokládejme, že nějakým náhodným procesem dojde k přesunu malé oblasti plazmatu do jiného místa hvězdy. Pro určitost uvažujme malou oblast plazmatu, která se přesune z nitra hvězdy o něco výše ve směru osy z (viz následující obrázek).



Před přesunem jde jen o myšlenou oblast a parametry naší „bubliny“ jsou shodné s parametry okolního plazmatu. Po přesunu bude ale situace jiná, v bublině bude teplota T_b , hustota ρ_b a tlak p_b , v okolním plazmatu budou hodnoty T, ρ, p . Jen tlaky se musí shodovat, jinak by hranice bubliny probíhala jinde. Pokud bude v nové oblasti hustota bubliny větší, než má okolí, bude mít tendenci se vracet zpět (ve směru tíže) a půjde o stabilní situaci. Pokud bude hustota bubliny menší, než má okolí, bude se dále přesouvat ve stejném směru a dojde k rozvoji konvekce (proudění). Říkáme, že situace je konvektivně nestabilní. Podmínka pro vznik proudění je tedy velmi jednoduchá:

$$\blacktriangleright \quad \rho_b < \rho. \quad (369)$$

Nejprve rozepíšeme levou stranu kritéria. Předpokládejme, že přesun bubliny je klasickou poruchou, trvá velmi krátkou dobu a bublina nestačí vyměnit s okolím tepelnou energii, tedy jde o adiabatický děj:

$$p_b = K \rho^\gamma; \quad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}. \quad (370)$$

Nyní provedeme Taylorův rozvoj tohoto vztahu do 1. řádu:

$$p_b = K \rho^\gamma \approx p_0 + \frac{\partial p_b}{\partial \rho} (\rho_b - \rho_0) = p_0 + K \gamma \rho_0^{\gamma-1} (\rho_b - \rho_0) = p_0 + \frac{p_0}{\rho_0} \gamma (\rho_b - \rho_0). \quad (371)$$

Konstantu K jsme určili ze vztahu (370). Nyní již snadno dopočteme hustotu bubliny do levé části kritéria (při výpočtu využijeme, že tlak v bublině je stejný jako v okolí):

$$\rho_b = \rho_0 + \frac{\rho_0}{\gamma p_0} (p - p_0). \quad (372)$$

Pravou stranu kritéria vyjádříme ze stavové rovnice plazmatu

$$p = A \rho T \quad (373)$$

Opět provedeme rozvoj do prvního řádu a konstantu A poté vyjádříme z posledního vztahu:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho - \rho_0) + \frac{\partial p}{\partial T}(T - T_0) = p_0 + AT_0(\rho - \rho_0) + A\rho_0(T - T_0) = \\ &= p_0 + \frac{p_0}{\rho_0}(\rho - \rho_0) + \frac{p_0}{T_0}(T - T_0) \end{aligned} \quad (374)$$

Nyní určíme hustotu do první části kritéria:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_0}{p_0}(p - p_0) - \frac{\rho_0}{T_0}(T - T_0) \quad (375)$$

Po dosazení (375) a (372) do kritéria (369) máme podmínku pro rozvoj konvekce

$$\frac{\rho_0}{\gamma p_0}(p - p_0) < \frac{\rho_0}{p_0}(p - p_0) - \frac{\rho_0}{T_0}(T - T_0). \quad (376)$$

Další úpravy jsou již přímočaré a vedou na vztah

$$dT < \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{T_0}{p_0} dp. \quad (377)$$

Pro situaci znázorněnou na obrázku je ale dT i dp záporné (s rostoucí výškou klesá tlak i teplota), takže výsledný vztah je (indexy 0 už můžeme vynechat, jde o obecné místo, v němž jsme v plazmatu konali myšlenkový experiment):

$$\blacktriangleright \quad |dT| > \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{T}{p} |dp|. \quad (378)$$

K rozvoji konvekce je nutné, aby v plazmatu byl dostatečně velký teplotní gradient, což je například v našem Slunci splněno až 200 000 km pod povrchem a výše. Energie z nitra Slunce se nejprve přenáší zářením a až posledních 200 000 kilometrů prouděním. U hvězd, v jejichž nitru probíhá CNO cyklus je produkce energie v jádře podstatně vyšší než u našeho Slunce a teplotní gradient je naopak největší v okolí jádra. U těchto hvězd se konvekce rozvine pouze v okolí jádra a ve vnějších vrstvách se energie přenáší pouze zářením. Schwarzschildovo kritérium se uvádí v různých alternativních tvarech, uveďme ještě některé:

$$\blacktriangleright \quad \frac{|dT|}{T} > \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{|dp|}{p}, \quad (379)$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d \ln T}{d \ln p} < \frac{\gamma - 1}{\gamma}. \quad (380)$$

Schwarzschildovo kritérium platí obecně, a tam, kde je velký gradient teploty, dojde v plazmatu k nestabilní situaci a rozvoji proudění.

Relativistická Boltzmannova rovnice

Boltzmannova rovnice se ve fyzice plazmatu využívá k určení časoprostorového vývoje hustoty pravděpodobnosti výskytu částic a lze ji včetně normování zapsat ve tvaru

$$f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}); \quad (381)$$

$$\frac{df}{dt} = S; \quad (382)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f + \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f = S, \quad (383)$$

$$\int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} = n(t, \mathbf{x}). \quad (384)$$

Hustota pravděpodobnosti je normována vzhledem k počtu částic. Levá strana rovnice (383) je zjevně nerelativistická, stejně tak jako srážkový člen na pravé straně. Srážkový člen lze vyjádřit v mnoha různých tvarech, jedním z nejčastěji používaných je tvar vedoucí na Fokkerovu-Planckovu rovnici. Obecný přepis srážkového členu do relativity neexistuje. Leckdy ho není třeba ani znát, neboť při vysokých rychlostech účinný průřez srážek zpravidla rychle klesá a lze je zanedbat. Neplatí to ale paušálně a relativistický přepis srážkového členu by byl v některých případech velmi užitečný. S levou stranou Boltzmannovy rovnice je situace jednodušší, lze ji snadno přepsat do lorentzovsky kovariantního tvaru. Namísto rychlosti, jakožto nezávislé proměnné, musíme použít hybnost, resp. čtyřhybnost, tedy

$$f = f(x^\alpha, P^\alpha) = f(t, \mathbf{x}, E, \mathbf{p}); \quad (385)$$

Čtyřhybnost má vzájemně provázané složky (velikost čtyřhybnosti je $-m_0^2 c^2$), takže platí

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad (386)$$

a tedy $E = E(\mathbf{p})$. Nové normování se bude týkat hybnosti namísto rychlosti, takže budeme požadovat

$$\int f(x^\alpha, P^\alpha) d^3 p = n(t, \mathbf{x}). \quad (387)$$

Takový zápis vypadá na první pohled nerelativisticky, ale musíme si uvědomit, že $E = E(\mathbf{p})$ a relativisticky lze normování zapsat přes Diracovu distribuci:

$$\int f(t, \mathbf{x}, E, \mathbf{p}) \delta(E - E(\mathbf{p})) d^4 P = n(t, \mathbf{x}). \quad (388)$$

Relaci (382) musíme relativisticky zobecnit, proto namísto souřadnicového času použijeme vlastní čas, který je invariantem Lorentzovy transformace, tj.

$$\frac{df}{d\tau} = S; \quad (389)$$

Po rozepsání derivace vlevo máme

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial P^\alpha} \frac{dP^\alpha}{d\tau} = S. \quad (390)$$

První člen obsahuje jak časové, tak prostorové derivace a je zobecněním prvních dvou členů na levé straně Boltzmannovy rovnice. Uvědomíme-li si význam obou časových derivací, můžeme psát

$$U^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + F^\alpha \frac{\partial f}{\partial P^\alpha} = S. \quad (391)$$

Lorentzovu čtyřsílu vyjádříme ze vztahu (101)

$$U^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + Q F^{\alpha\beta} U_\beta \frac{\partial f}{\partial P^\alpha} = S. \quad (392)$$

Jako poslední krok musíme čtyřrychlosti převést na čtyřhybnosti:

$$P^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + Q F^{\alpha\beta} P_\beta \frac{\partial f}{\partial P^\alpha} = m_0 S. \quad (393)$$

Jedná se o hledaný relativisticky kovariantní zápis Boltzmannovy rovnice. V prvním členu můžeme čtyřhybnost přesunout k hustotě pravděpodobnosti a nic se nestane. U druhého členu ale to lze udělat také, protože

$$\frac{\partial}{\partial P^\alpha} (F^{\alpha\beta} P_\beta f) = F^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} f + F^{\alpha\beta} P_\beta \frac{\partial f}{\partial P^\alpha} = F^{\alpha\beta} P_\beta \frac{\partial f}{\partial P^\alpha}. \quad (394)$$

První člen je po derivování součinu nulový, protože jde o zúžení symetrické a antisymetrické matice. Pro obecné silové pole závislé na rychlosti to ale platit nebude. Můžeme tedy psát

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (P^\alpha f) + \frac{\partial}{\partial P^\alpha} (QF^{\alpha\beta} P_\beta f) = m_0 S. \quad (395)$$

Tento tvar je elegantním zápisem Boltzmannovy rovnice pro případ elektromagnetického pole a Lorentzovy čtyřsíly.

* * *

Zajímavou úlohou je přepis Boltzmannovy rovnice v obecné relativitě, kde je pohyb částic dán zakřivením časoprostoru. V tomto případě zavádíme kovariantní derivaci čtyřvektoru

$$\frac{DA^\alpha}{Dx^\nu} \equiv A^\alpha{}_{;\nu} = A^\alpha{}_{,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A^\mu, \quad (396)$$

kde první člen je obyčejná parciální derivace a druhý člen souvisí se změnou čtyřvektoru A^α způsobenou zakřivením časoprostoru. Koeficienty Γ se nazývají Christoffelovy symboly a jsou dány formulí

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (397)$$

Rovnice geodetiky (nejrovnější možné dráhy v zakřiveném časoprostoru) je

$$d^2 x^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (398)$$

Čtyřsílu v rovnici (391) vyjádříme z rovnice geodetiky:

$$F^\alpha = \frac{dP^\alpha}{d\tau} = m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -m_0 \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -m_0 \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\mu U^\nu. \quad (399)$$

Boltzmannova rovnice (391) po přepsání do čtyřhybností bude mít tvar

$$\blacktriangleright \quad P^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} P^\mu P^\nu \frac{\partial f}{\partial P^\alpha} = m_0 S. \quad (400)$$

Ray-Tracing (sledování paprsku)

Velmi zajímavou úlohou je sledování paprsku, který se pohybuje plazmatickým prostředím (v přiblížení geometrické optiky). Existují vytříbené metody jak ze znalosti tenzoru permeability a tenzoru permitivity určit v daném místě směr paprsku a jeho přesun do místa následujícího. Takto pojatá úloha ale předpokládá znalost obou tenzorů. Trasování paprsku lze provést jednoduše i z pouhé znalosti disperzní relace pro šíření elektromagnetické vlny. Začneme Hamiltonovými rovnicemi pro kvantum elektromagnetického záření

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \quad (401)$$

Nyní využijeme relace pro částicově-vlnový dualizmus

$$H = \hbar\omega; \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (402)$$

a obě relace dosadíme do Hamiltonových rovnic:

$$\blacktriangleright \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}}. \quad (403)$$

Nalezené rovnice mohou být použity pro sledování paprsku. Je třeba si ale uvědomit několik základních faktů: 1) čas zde figuruje pouze jako parametr trajektorie paprsku; 2) při provádění numerické simulace dostaneme vždy v daném bodě \mathbf{x} vektor \mathbf{k} , tedy tečnu ke sledovanému paprsku. Po ní se přesuneme do dalšího místa a postup opakujeme; 3) nalezené rovnice pro *ray-tracing* vyžadují explicitní znalost disperzní relace $\omega = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, tedy z disperzní relace musíme umět vyjádřit úhlovou frekvenci, což může být někdy problém; 4) závislost na poloze \mathbf{x} se do disperzní relace dostane prostřednictvím znalosti závislosti koncentrace či vnějšího magnetického (elektrického) pole na poloze v plazmatu.

Nejčastěji známe disperzní relaci v implicitním tvaru, tj. neřešenou vzhledem k proměnným ω ani \mathbf{k} :

$$\phi(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (404)$$

Nalezneme diferenciál této relace (frekvence ω je fixní, daná frekvencí vyslaného paprsku)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{k}} \cdot d\mathbf{k} = 0. \quad (405)$$

Předpokládejme, že trasa paprsku je dána parametricky, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\tau); \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}(\tau). \end{aligned} \quad (406)$$

Ze vztahu (405) okamžitě máme

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = 0. \quad (407)$$

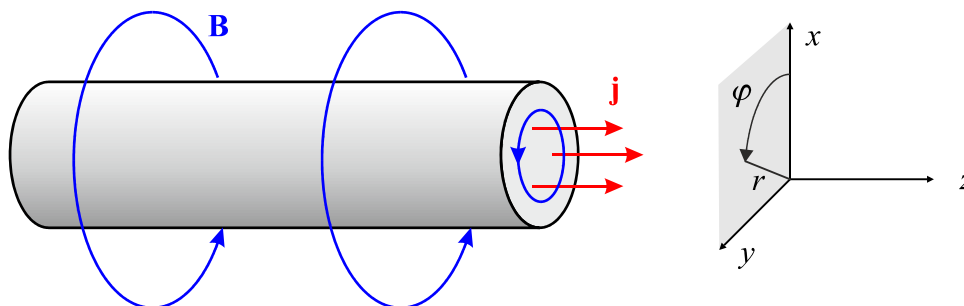
Parametr τ může být libovolný. Toho využijeme a zvolíme ho tak, aby platilo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{k}}; \\ \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} &= -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (408)$$

Touto volbou jednak splníme rovnici (407) a jednak získáme nové rovnice pro sledování paprsku, v nichž roli hamiltoniánu zastává funkce ϕ , tedy libovolný implicitní zápis disperzní relace. Na soustavu Hamiltonových rovnic (408) lze použít libovolné diferenční schéma a můžeme pohodlně sledovat průchod paprsku plazmatem.

Mechanismy geneze proudů v z-pinči

Z-pinč je jednoduchá konfigurace, v níž je válec plazmatu protékán elektrickým proudem, který generuje azimutální magnetické pole, jemuž odpovídající síla udržuje plazma v (většinou nestabilní) rovnováze. Představa, že proud je veden elektrony letícími podél osy je zcela mylná. Elektrony konají gyrační pohyb a za elektrický proud procházející plazmatem jsou v rovnováze zodpovědné driftы (drift zakřivení a grad B drift) a magnetizační proud, který vzniká díky Larmorově rotaci částic, jež není sousedními částicemi kompenzována přesně na nulu. Odvoďme nyní vztahy pro jednotlivé proudové hustoty uvnitř vlákna, jehož geometrie je popsána souřadnicemi dle obrázku:



Gradient | B | drift. Tento drift je způsoben změnou hustoty magnetických siločar a souvisí s kolmou složkou rychlosti nabitě částice (vzhledem k magnetické siločáře). Elektrický proud je dán obecnou formulí

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = \left\langle \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \right\rangle. \quad (409)$$

kde sumace probíhá přes elektrony a ionty, středování přes všechny částice. Za rychlost dosadíme driftovou rychlost

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{-\mu \nabla B \times \mathbf{B}}{QB^2} = \frac{mv_{\perp}^2}{2Q} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3} \quad (410)$$

a využijeme cylindrické symetrie proudového vlákna:

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = -\frac{1}{B^2} \left\langle n_e \frac{m_e v_{e\perp}^2}{2} + n_i \frac{m_i v_{i\perp}^2}{2} \right\rangle \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_z. \quad (411)$$

Připomeňme, že pole uvnitř vlákna s rostoucím r roste a tedy derivace $\partial B/\partial r > 0$. Z geometrie problému je zřejmé, že grad B drift míří v záporném směru osy z . Středujme nyní kolmou složku kinetické energie. Kolmá složka má jen dva stupně volnosti, a proto platí

$$\left\langle \frac{mv_{\perp}^2}{2} \right\rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T = k_B T, \quad (412)$$

a tedy

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{j}_{\nabla B} = -\frac{1}{B^2} (n_e k_B T_e + n_i k_B T_i) \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_z = -\frac{p}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_z. \quad (413)$$

Drift zakřivení. Tento drift je způsoben zakřivením magnetických siločar a souvisí s podélnou složkou rychlosti nabitě částice (vzhledem k magnetické siločáře). Elektrický proud je opět dán obecnou formulí

$$\mathbf{j}_R = \left\langle \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \right\rangle. \quad (414)$$

Pro drift zakřivení platí jednoduchý vztah

$$\mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{QB^2} \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{R_k^2}. \quad (415)$$

Podobně jako při grad B driftu určíme z driftu zakřivení proudovou hustotu

$$\mathbf{j}_R = \frac{1}{rB} \left\langle n_e m_e v_{e\parallel}^2 + n_i m_i v_{i\parallel}^2 \right\rangle \mathbf{e}_z. \quad (416)$$

Vypočteme střední hodnotu složky kinetické energie (částice má jeden stupeň volnosti podél magnetického pole)

$$\left\langle \frac{mv_{\parallel}^2}{2} \right\rangle = 1 \cdot \frac{1}{2} k_B T = \frac{1}{2} k_B T \quad (417)$$

a pro proudovou hustotu způsobenou driftem zakřivení máme výsledný vztah

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{j}_R = \frac{1}{rB} (n_e k_B T_e + n_i k_B T_i) \mathbf{e}_z = \frac{p}{rB} \mathbf{e}_z. \quad (418)$$

Magnetizační proud. V případě homogenního plazmatu a konstantního magnetického pole je proudový příspěvek od soustavy shodně Larmorovsky rotujících částic nulový. Je-li pole nehomogenní, jsou Larmorovy orbity v různých místech různé a průměrný příspěvek k tekoucímu proudu může být nenulový. Podobně v nehomogenním plazmatu v některém směru narůstá počet nosičů náboje a při průměrování příspěvku k celkovému proudu dostaneme nenulový výsledek. Magnetický moment jedné částice je

$$\mathbf{p}_M = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \mathbf{e}_{\varphi}. \quad (419)$$

Gyrující nabitá částice generuje vlastní magnetické pole, které má opačný směr než pole původní. Hovoříme proto o diamagnetizmu plazmatu. V souřadnicové soustavě na obrázku má původní magnetické pole směr $-\mathbf{e}_{\varphi}$, magnetický moment částice má směr $+\mathbf{e}_{\varphi}$. Nyní určíme celkovou magnetizaci a opět vystředujeme přes druhé mocniny rychlostí:

$$\mathbf{M} = \left\langle \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha}^{(M)} \right\rangle = \frac{\langle n_e m_e v_{e\perp}^2 + n_i m_i v_{i\perp}^2 \rangle}{2B} \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{(n_e k_B T_e + n_i k_B T_i)}{B} \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{p}{B} \mathbf{e}_{\varphi}. \quad (420)$$

Magnetizační proud určíme v zadané geometrii již snadno:

$$\mathbf{j}_M = \text{rot } \mathbf{M} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p}{B} \right) \mathbf{e}_z. \quad (421)$$

Na závěr ukažme, že součet všech tří proudových hustot odvozených výše dá celkový proud tekoucí plazmatem:

$$j_{\nabla B} + j_R + j_M = -\frac{p}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{p}{rB} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p}{B} \right) = -\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (422)$$

Zřejmě tedy platí

$$(j_{\nabla B} + j_R + j_M) B = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (423)$$

což je podmínka rovnováhy $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla p$, ve které vystupuje celkový proud. Mikroskopické procesy jsou tak přirozenou cestou provázány s makroskopickými proudy v kontinuu.

Literatura k této kapitole

- [1] Karl Schwarzschild: *Gesammelte Werke – Collected Works*; Springer Berlin Heidelberg (1992), str. 106.
- [2] Gilberto M. Kremer: *Theory and applications of the relativistic Boltzmann equation*; International Journal of Geometrical Methods in Modern Physics, Vol. 11, 1460005 (2014); arXiv:1404.7083 [cond-mat.stat-mech]
- [3] E. R. Tracy, A. J. Brizard, A. S. Richardson, A. N. Kaufman: *Ray Tracing and Beyond: Phase Space Methods in Plasma Wave Theory*; Cambridge University Press (2014)
- [4] P. Kulhánek: *3D PIC Model of the Helical Current Filament*; Inaugural Dissertation (prof), 2004, Collection of 3D PIC package papers, FEE CTU (2004), online: https://www.aldebaran.cz/~kulhanek/texts/2004_PIC.pdf



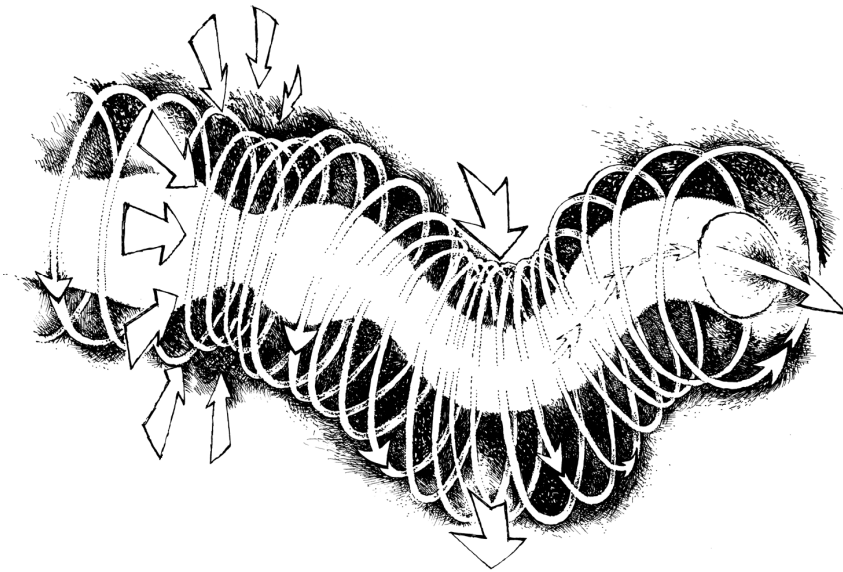
LITERATURA

Literatura k daným tématům je uvedena v každé kapitole zvlášť. V této části je veškerá literatura, která by mohla být užitečná.

- [1] Max Abraham: *Theorie der Elektrizität: Elektromagnetische Theorie der Strahlung*; Teubner, Leipzig (1905)
- [2] Paul A. M. Dirac: *Classical Theory of Radiating Electrons*; Proc. Roy. Soc. London A167, 148 (1938)
- [3] Andrej Nikolajevič Kolmogorov: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers; Proceedings of the USSR Academy of Sciences, 1941, 299–303. Online anglický překlad: <https://courses.physics.ucsd.edu/2014/Spring/physics281/kolmogorov41.pdf>
- [4] Wolfgang Pauli: *Theory of Relativity*; Pergamon Press 1958
- [5] G. B. Rybicki, A. P. Lightman: *Radiative Processes in Astrophysics*; John Willey & Sons 1979.
- [6] N. Nagesha Rao, Ram K. Varma: *A theory for Langmuir solitons*; J. Plasma Physics (1982), vol. 27, part 1, pp. 95–120
- [7] J. Kvasnica: *Teorie elektromagnetického pole*; ACADEMIA 1985
- [8] Anthony L. Perat: *Physics of the Plasma Universe*; Springer 1991
- [9] C. K. Birdsall, A. B. Langdon: *Plasma Physics via Computer Simulation*; Adam Hilger, Bristol 1991
- [10] Karl Schwarzschild: *Gesammelte Werke – Collected Works*; Springer Berlin Heidelberg (1992), str. 106.
- [11] Robert J. Goldston, Paul H. Rutherford: *Introduction to Plasma Physics*; IOP Publishing 1995
- [12] Margaret G. Kivelson, Christopher T. Russell: *Introduction to Space Physics*; Cambridge University Press 1996
- [13] Sascha Vongehr: *Solitons*; Nanjing University 1997, online: aldebaran.cz/studium/tpla/docs/Vongehr-solitons.pdf
- [14] Eric Poisson: *An introduction to the Lorentz-Dirac equation*; arXiv:gr-qc/9912045v1 (1999)
- [15] Thomas James Dolan: *Fusion research – Principles, Experiments and Technology*; Pergamon Press 2000
- [16] Michael Ibison, Harold E Puthoff: *Relativistic integro-differential form of the Lorentz–Dirac equation in 3D without runaways*; J. Phys. A: Math. Gen. 34, 3421–3428 (2001)
- [17] P. Kulhánek: *3D PIC Model of the Helical Current Filament*; Inaugural Dissertation (prof), 2004, Collection of 3D PIC package papers, FEE CTU (2004), online: https://www.aldebaran.cz/~kulhanek/texts/2004_PIC.pdf
- [18] T. J. M. Boyd, J. J. Sanderson: *The Physics of Plasmas*; Cambridge University Press 2005, ISBN 0521459125
- [19] K. Miyamoto: *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*; Springer 2005
- [20] T. H. Stix: *Waves in Plasmas*; Springer 2006, ISBN: 0883188597
- [21] Andi Klein and Alexander Godunov: *Introductory Computational Physics*; Cambridge University Press 2006
- [22] Jerome Fung: *High Resolution Flow and Ion Temperature Measurements with Ion Doppler Spectroscopy at SSX (Magnetic Reconnection Studies)*; SSX 2006
- [23] Boris V. Somov: *Plasma Astrophysics I*; Springer 2006

- [24] Maarten De Bock: *Understanding and controlling plasma rotation in tokamaks*; Technische Universiteit Eindhoven, 2007
- [25] Judith A. Irwin: *Astrophysics – Decoding the Cosmos*; John Willey & Sons 2007
- [26] Jeffrey P. Freidberg: *Plasma Physics and Fusion Energy*; Cambridge University Press 2007
- [27] Roger Grimshaw: *Korteweg-de Vries Equation*; Loughborough University (UK) 2008. online: aldebaran.cz/studium/tpla/docs/KdV_Grimshaw.pdf
- [28] Michael C. Kelley: *The Earth's Ionosphere Plasma Physics and Electrodynamics*; Elsevier 2009
- [29] E. M. de Jager: *On the Origin of the Korteweg-de Vries Equation*; arXiv:math/0602661v2 [math.HO] 8 Dec 2011
- [30] P. Kulhánek: *Úvod do teorie plazmatu*; AGA 2011, ISBN 978-80-902582-2-2 (učebnice, na kterou tento text volně navazuje; online: <http://www.aldebaran.cz/studium/tpla.pdf>)
- [31] Stephen Jardin: *Computational Methods in Plasma Physics*; A CHAPMAN & HALL BOOK 2012
- [32] Katie Banks: *Solitons and the Korteweg de Vries Equation: Starting with Shallow-Water Waves*; Semantic Scholar 2012; online: aldebaran.cz/studium/tpla/docs/KdV_Banks.pdf
- [33] P. Kulhánek: *Blýskání aneb třináctero příběhů o plazmatu*; AGA 2013
- [34] Ladislav Šubr: *Lecture notes NAST008: Cosmic electrodynamics*; MFF UK 2013
- [35] Matthew C. Williams: *Solitons – Interactions, Theoretical and Experimental Challenges and Perspectives*; Nova Science Publishers 2013
- [36] Gilberto M. Kremer: *Theory and applications of the relativistic Boltzmann equation*; International Journal of Geometrical Methods in Modern Physics, Vol. 11, 1460005 (2014); arXiv:1404.7083 [cond-mat.stat-mech]
- [37] Marian Karlický: *Plasma Astrophysics*; MatfyzPress Praha 2014, ISBN 978-80-7378-281-8
- [38] E. R. Tracy, A. J. Brizard, A. S. Richardson, A. N. Kaufman: *Ray Tracing and Beyond: Phase Space Methods in Plasma Wave Theory*; Cambridge University Press (2014)
- [39] A. Cabo Montes de Oca, N. G. Cabo Bizet: *Newton-like equations for a radiating particle*; Physical Review D91, 016001 (2015)
- [40] Bogdan A. Hnat: *Plasma Turbulence*; University of Warwick, 2016. Online: <http://sp2rc.group.shef.ac.uk/assssp16/lectures/L12Hnat.pdf>
- [41] Silvio Sergio Cerri, Daniel Grošelj, Luca Franci: *Kinetic plasma turbulence: recent insights and open questions from 3D3V simulations*; Front. Astron. Space Sci., 11 Oct 2019
- [42] P. Kulhánek: *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky I (Teoretická mechanika, Kvantová teorie, Matematika pro fyziku)*; AGA 2020, ISBN: 978-80-906638-2-4
- [43] Petr Kulhánek: *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky II (Statistická fyzika, Elektromagnetické pole, Relativita)*; AGA 2020, ISBN: 978-80-906638-3-1
- [44] P. Kulhánek: *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky III (Teorie plazmatu, Numerické simulace)*; AGA 2020, ISBN: 978-80-906638-4-8





Petr Kulhánek
Vybrané kapitoly z teorie plazmatu



Každá část této publikace může být šířena jakýmkoli způsobem.
Cílem není restrikce, ale vzdělávání co nejširšího okruhu čtenářů.

Autor: Prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.

Odborná recenze: průběžná, studenti kurzu

Formát: elektronické skriptum, pdf, A4, 73 stran

Nakladatelství: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)

Sazba: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)

Vydání: druhé, 2024, průběžně upravované

Ikona videa: freepik.com CC BY 3.0

