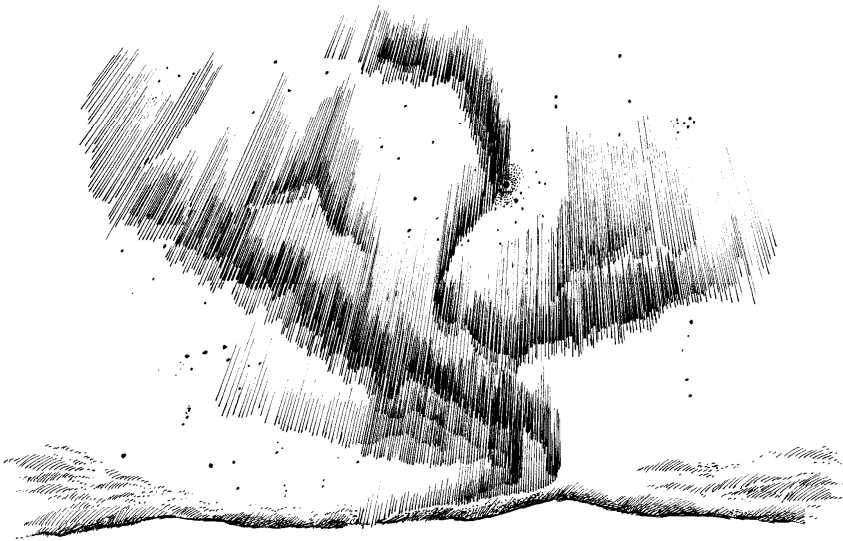


Úvod do teorie plazmatu



Petr Kulhánek

AGA 2020

Obsah

PŘEDMLUVA	9
ÚVOD.....	11
1. POHYBY NABÍTÝCH ČÁSTIC	15
1.1 NERELATIVISTICKÉ POHYBY	16
1.1.1 Lagrangeova a Hamiltonova funkce	16
1.1.2 Pohyb v elektrickém poli, optická analogie	18
1.1.3 Pohyb v homogenním magnetickém poli.....	19
1.1.4 Pohyb ve zkřížených polích.....	22
1.2 RELATIVISTICKÉ POHYBY	25
1.2.1 Lagrangeova a Hamiltonova funkce	25
1.2.2 Pohyb v homogenním elektrickém poli	26
1.3 ADIABATICKÉ PŘIBLÍŽENÍ.....	28
1.3.1 První adiabatický invariant	29
1.3.2 Pohyb gyračního středu	30
1.3.3 Síla $-\mu$ grad B	32
1.3.4 Driftová rovnice.....	34
1.3.5 Drifty	34
1.4 POHYBY VE SPECIÁLNÍCH KONFIGURACÍCH.....	37
1.4.1 Magnetické zrcadlo.....	37
1.4.2 Druhý adiabatický invariant, Fermiho mechanismus	38
1.4.3 Magnetický dipól, třetí adiabatický invariant	40
1.4.4 Elektrický a magnetický monopól	43
1.4.5 Tokamak	44
1.4.6 Plazmové vlákno a souvislost driftů s proudy	48
1.5 NUMERICKÉ SIMULACE POHYBU ČÁSTIC.....	50
1.5.1 Newtonovo-Eulerovo schéma (NE).....	51
1.5.2 Skákající žába aneb Leap-Frog schéma (LF).....	54
1.5.3 Přesnější schémata (RK, BB).....	55
1.5.4 Relativistická schémata.....	56

2. STATISTICKÝ POPIS PLAZMATU.....	59
2.1 BOLTZMANNOVA ROVNICE	60
2.1.1 Různé varianty Boltzmannovy rovnice.....	61
2.1.2 Boltzmannův srážkový člen.....	64
2.1.3 Rovnice přenosu (momentová rovnice).....	67
2.2 PŘECHOD OD STATISTIKY KE KONTINUU.....	71
2.2.1 Nultý moment (zachování náboje) – částice.....	71
2.2.2 Nultý moment (zachování náboje) – pole.....	72
2.2.3 První moment (zachování hybnosti) – částice.....	73
2.2.4 První moment (zachování hybnosti) – pole.....	75
2.2.5 Druhý moment (zachování energie) – částice.....	76
2.2.6 Druhý moment (zachování energie) – pole.....	77
2.3 JEDNODUCHÉ TRANSPORTNÍ JEVY.....	78
2.3.1 Transport náboje (Ohmův zákon).....	79
2.3.2 Transport částic (Fickův zákon).....	81
2.3.3 Ambipolární difúze.....	82
2.3.4 Difúze v magnetickém poli.....	84
2.3.5 Transport tepla (Fourierův zákon).....	87
2.3.7 Produkce entropie, Onsagerovy relace.....	88
2.4 COULOMBOVA INTERAKCE	89
2.4.1 Debyeova stínící vzdálenost.....	89
2.4.2 Coulombův rozptyl (Rutherfordova formule).....	91
2.4.3 Fokkerova-Planckova rovnice.....	94
2.4.4 Rosenbluthovy potenciály.....	96
2.4.5 Brzděná a ubíhající testovací částice.....	102
2.4.6 Relaxační časy a srážkové frekvence.....	106
2.5 MONTE CARLO SIMULACE	107
2.5.1 Generátory náhodných čísel.....	109
2.5.2 Realizace pravděpodobnostního rozdělení.....	111
2.5.3 Metropolisova metoda.....	117
2.5.4 MC simulace srážky dvou nabitých částic.....	118
3. MAGNETOHYDRODYNAMIKA	123
3.1 MINIMÁLNÍ VARIANTA	124
3.1.1 Substancionální derivace a rovnice proudnice.....	126
3.1.2 Rovnice pro magnetické pole.....	127
3.1.2 Rovnice pro hustotu.....	133
3.1.3 Rovnice pro rychlost.....	134
3.1.4 Uzavření soustavy.....	139
3.2 VYBRANÉ JEVY	140
3.2.1 Hartmannovo řešení.....	140
3.2.2 Vlny konečné amplitudy.....	144
3.2.3 Helicita.....	146
3.2.4 Tekutinové dynamo.....	151
3.2.5 Přepojení magnetických indukčních čar.....	158

3.3 NĚKTERÉ ROVNOVÁŽNÉ KONFIGURACE V PLAZMATU	166
3.3.1 Rovnováha v plazmatu.....	166
3.3.2 Proudové vlákno (pinč).....	168
3.3.3 Proudová stěna.....	173
3.3.4 Dvojvrstva	174
3.3.5 Rázové vlny	179
3.4 DIFERENČNÍ SCHÉMATA V MAGNETOHDRODYNAMICE	181
3.4.1 Parciální diferenciální rovnice	182
3.4.2 Tvorba diferenčních schémat.....	185
3.4.3 Posuzování stability schématu	190
4. LINEÁRNÍ VLNY V PLAZMATU	193
4.1 ZÁKLADNÍ POJMY.....	194
4.1.1 Vlnění	194
4.1.2 Rozměrová analýza (vlny na hluboké vodě).....	198
4.1.3 Lineární teorie (elektromagnetické vlny).....	201
4.1.4 Nelineární teorie (zvukové vlny)	205
4.1.5 Další příklady (Jeansovo kritérium, různé vlnové rovnice)	208
4.2 PLAZMOVÉ OSCILACE A VLNY	214
4.2.1 Odvození disperzní relace.....	214
4.2.2 Plazmové oscilace.....	216
4.2.3 Plazmové vlny	217
4.2.4 Iontové vlny	219
4.2.5 Další vlivy.....	220
4.3 MAGNETOAKUSTICKÉ VLNY	222
4.3.1 Odvození disperzní relace.....	222
4.3.2 Vlnoplochy magnetoakustických vln.....	224
4.3.3 Směry vektorů v magnetoakustických vlnách	226
4.4 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY	227
4.4.1 Disperzní relace elektromagnetického komplexu	228
4.4.2 Stixovy koeficienty, CMA diagram	235
4.4.3 Faradayova rotace.....	238
4.4.4 Hvizdy (whistlers)	240
4.4.5 Tenzor permitivity pro elektromagnetické vlny v plazmatu	243
4.4.6 Šířová fotografie	244
4.5 NUMERICKÉ HLEDÁNÍ KOŘENŮ POLYNOMIÁLNÍ ROVNICE	246
4.5.1 Weylův algoritmus.....	246
4.5.2 Newtonův algoritmus.....	248
4.5.3 Zobecněný Newtonův algoritmus	249
5. NESTABILITY V PLAZMATU	251
5.1 NEOMEZENÉ CHLADNÉ PLAZMA	252
5.1.1 Základní pojmy	252
5.1.2 Vícesvazková nestabilita.....	255
5.1.3 Dva symetrické svazky	257

5.1.4	Nestabilita typu svazek-plazma	259
5.1.5	Další nestability (driftová, Weibelova)	259
5.2	PLAZMA S HRANICÍ A VÝMĚNNÉ NESTABILITY	260
5.2.1	Základní vztahy, vektor posunutí	260
5.2.3	Nestability plazmového vlákna	267
5.2.4	Rayleighova-Taylorova nestabilita	274
5.2.5	Kelvinova-Helmholtzova nestabilita	278
5.2.6	Další nestability (Richtmyerova–Meškovova, diocotronová)	281
5.2.7	Výměnné (tlakem řízené) nestability	283
5.3	REZISTIVNÍ NESTABILITY	288
5.3.1	Základní vztahy	288
5.3.2	Ostrůvková (tearing) nestabilita	291
5.3.3	Řízené rezistivní nestability	293
5.3.4	Tokamakové nestability	293
5.4	MIKRONESTABILITY	294
5.4.1	Základní vztahy	294
5.4.2	Landauův útlum na elektronech	295
5.4.3	Landauův útlum na iontech	301
5.4.4	Bernsteinovy módy	302
5.5	PIC SIMULACE	303
5.5.1	Váhování	305
5.5.2	Řešení polí	306
5.5.3	Řešení pohybu částic	308
DODATKY		309
DODATEK A – UŽITEČNÉ VZTAHY		310
A1	Některé integrály a řady	310
A2	Vektorový součin a některé vektorové identity	311
A3	Základní vztahy z komplexní analýzy	312
A4	Některé speciální funkce	318
A5	Výpočet Rosenbluthových potenciálů pro Maxwelllovo rozdělení rychlostí	322
A6	Základní trigonometrické vztahy	324
DODATEK B – ZOBECNĚNÉ FUNKCE		326
B1	Diracova distribuce	326
B2	Konvoluce	330
B3	Greenův operátor a Greenova funkce	330
B4	Fourierova transformace	332
B5	Obecné řešení rovnice difúze	333
DODATEK C – KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE, VÍCEROZMĚRNÉ INTEGRÁLY		335
C1	Křivočaré souřadnice	335
C2	Křivkové, plošné a objemové integrály	337
C3	Vnější algebra	339

DODATEK D – PŘEHLED VZTAHŮ A DEFINIC	341
D1 Základní vztahy.....	341
D2 Bezrozměrné charakteristiky plazmatu.....	344
D3 Potenciály elektromagnetického pole	346
DODATEK E – MULTIPÓLOVÝ ROZVOJ	347
E1 Rozvoj potenciálu elektrostatického pole.....	347
E2 Rozvoj potenciálu magnetostatického pole	350
SEZNAM SYMBOLŮ	353
REJSTŘÍK OSOBNOSTÍ	359
REJSTŘÍK POJMŮ	369
LITERATURA	373
PŘÍLOHA ANEB O ČEM BYSTE MĚLI VĚDĚT	377



Předmluva

Milí čtenáři,

tento text vznikl v průběhu několika let z přednášek, které jsem měl zpočátku na Fakultě elektrotechnické a později na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské Českého vysokého učení technického v Praze. Mé první setkání s plazmatem nastalo ale mnohem dříve, v době mých studií na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, kde jsem ve čtvrtém ročníku navštěvoval vynikající přednášku Úvod do fyziky plazmatu profesora Jozefa Kvasnici. Po studiích jsem nastoupil na katedru fyziky Fakulty elektrotechnické ČVUT, kterou tehdy vedl profesor Jiří Kracík, člověk, který fyzice plazmatu zasvětil většinu svého života. Poslední česká kniha věnovaná plazmatu pochází právě od něho. Vyšla v nakladatelství ACADEMIA v roce 1974, což je již 37 roků. Za ta léta jsem snad nasbíral dostatek zkušeností a materiálů, abych měl tu odvahu sepsat učebnici fyziky plazmatu odpovídající současným požadavkům. Rád bych při této příležitosti také vzpomenu vedoucího mé kandidátské práce, docenta Josefa Malocha, který byl skvělým školitelem i manažerem v jedné osobě, a to v době mimořádně nelehké. Bohužel již ani jeden z těch, kteří můj vztah k fyzice plazmatu kdysi ovlivnili, není mezi námi. Bez jejich úsilí by tato kniha nikdy nevznikla.

Před tím, než se pustíte do studia, byste měli mít osvojeny základní znalosti z teoretické mechaniky, zejména umět používat Lagrangeovy a Hamiltonovy rovnice. Čerpat můžete například z online publikace [1]. Předpokládá se také znalost Einsteinovy sumární konvence. Na škodu nebude ani znalost základů rovnovážné statistické fyziky, nicméně pro pochopení textu to není nezbytné. Zde můžete využít například online publikaci [3]. Co se matematiky týče, měli byste ovládat základy diferenciálního a integrálního počtu v rozsahu běžného kurzu matematiky v bakalářském studiu na vysoké škole. Vhodná je také alespoň zběžná znalost parciálních diferenciálních rovnic a komplexní analýzy. Pokročilejší partie jsou uvedeny v knížce formou dodatků. Čtenář, který je nezná, se s nimi může seznámit až v průběhu studia této učebnice. Naleznete zde základní informace o distribucích a Greenových funkcích, Fourierově transformaci, konvoluci a speciálních funkcích. Dodatky obsahují i základy komplexní analýzy, něco málo o křivočarých souřadnicích a vektorových identitách, přehledové informace o vícerozměrných integrálech včetně definice vnější algebry. Z fyziky jde o multipólové rozvoje, výpočet Rosenbluthových potenciálů pro Maxwellovo rozdělení, obecné řešení rovnice difúze a přehled bezrozměrných charakteristik plazmatu a důležitých vztahů.

Samotný text je rozdělen do několika celků. V krátkém úvodu se seznámíte s plazmatem jakožto čtvrtým skupenstvím látky, jeho různými druhy a formami. V první části knihy jsou řešeny pohyby nabitých částic v předem daných elektrických a magnetických polích. Druhá část bude pro čtenáře pravděpodobně nejnáročnější, jde o statistický popis plazmatu, při kterém sledujeme zejména kolektivní chování velkého množství nabitých částic ve fázovém prostoru (zajímáme se o informace obsažené ve statistickém rozdělení poloh a rychlostí částic). Takový postup je výhodný například k pochopení transportních jevů a některých typů nestabilit v plazmatu. Třetí část knihy je věnována základům magnetohydrodynamiky, která na plazma pohlíží jako na vodivou tekutinu.

Následují kapitoly věnované základním typům vln a nestabilit v plazmatu. Každá kapitola končí ukázkami vybraných numerických algoritmů, pomocí nichž může hloubavější čtenář simulovat některé probírané jevy na počítači. Numerické simulace, teorie a experimenty dnes tvoří nedílný trojúhelník fyziky plazmatu. V úplném závěru knihy naleznete stručné informace o významných osobnostech, které přispěly k rozvoji fyziky plazmatu a které jsou zmíněny v textu. Nezapomeňte se občas do této části podívat. Názvy rovnic a řešení přestanou být prázdňnými pojmy a získají podobu konkrétních vědců, kteří se danou problematikou zabývali.

Proměnné jsou reprezentovány zásadně šikmým řezem písma, vektory tučným řezem písma. Ve výjimečných případech, kdy by mohlo dojít k nejednoznačnosti či záměně, jsou nad vektory a tenzory šipky. Základním řezem jsou zobrazeny funkce, zkratky, číslice a různé matematické operace. Latinské indexy znamenají pořadí veličiny, souřadnicové osy atd. Řeckými písmeny jsou indexovány druhy částic (elektrony a ionty různých násobností) nebo složky čtyřvektorů (0 – časová složka, 1, 2, 3 – prostorové složky). Indexy jsou uváděny zpravidla napravo dole od základního symbolu. Z důvodu přehlednosti je v některých případech index přesunut do pravé horní části. Pokud by mohlo dojít k záměně s mocninou, je takový index v závorce:

$$F_n, F_{EM}^{(n)}.$$

Vzhledem k tomu, že počet písmen abecedy je omezený, jsou některé veličiny označeny stejným symbolem. Jejich význam lze ale snadno odhadnout z kontextu. Pomoci při tom může i seznam symbolů zařazený v závěru knihy. Při čtení nepřeskakujte poznámky, často jde o důležité postřehy potřebné k pochopení probíraného jevu. V knize je naleznete na šedém podkladu. Ilustrativní příklady jsou odděleny od ostatního textu na začátku a na konci značkou pŭlměsíce. Důležité vztahy jsou na levé straně označeny šedým trojúhelníkem. Snad toto značení přispěje k lepší orientaci čtenáře v náročném studijním textu.

Co říci na závěr? Mé poděkování patří především řadě mých studentů, kteří se z textů, na jejichž základě vznikala tato kniha, učili a pečlivě objevovali překlepy a nejasnosti. Bohužel je zde nemohu jmenovat jednotlivě. Kvalitní práci odvedli oba recenzenti, Doc. RNDr. Ing. Rudolf Novák, DrSc. a RNDr. David Břeň, Ph.D. Můj dík patří též Ing. arch. Ivanu Havlíčkovi, který se postaral o úvodní grafiku k jednotlivým kapitolám a o obálku. Poděkování patří i mým dětem, kterým psaní knihy podstatnou měrou ubíralo čas strávený s nimi. Budoucím studentům bych chtěl popřát co nejvíce radosti z pochopení probíraných jevů a uspokojení z toho, jak se před nimi otevírá malá část tajemného světa kolem nás.

Petr Kulhánek, březen 2011, Praha

Vznik této učebnice byl podpořen grantem IAA101210801: „Simulace DD fúzní reakce“ Grantové agentury Akademie věd České republiky a dále projektem OP „Vzdělávání pro konkurenceschopnost“, reg. číslo CZ.1.07/2.2.00/07.0289 s názvem „Inovace a zvýšení atraktivita studia optiky“. Aktuální elektronickou verzi s opravenými překlepy nalezne čtenář na adrese <http://www.aldebaran.cz/studium/tpla/>. Tamtéž najdete i nahrávky všech přednášek.



Úvod

Plazma je často označováno jako čtvrté skupenství hmoty. Přírodním způsobem doplňuje řadu pevná látka – kapalina – plyn. Dodáme-li další tepelnou energii plynu, dojde k jeho částečné a později úplné ionizaci. Látka se stane plazmatem, jsou v ní volné nosiče náboje, čímž má toto skupenství zcela nové vlastnosti a jako jediné kolektivně reaguje na elektrická a magnetická pole a samo je vytváří. Vlastnosti plazmatu jsou velmi odlišné od vlastností plynů a kapalin.

Název plazma pro ionizovaný plyn poprvé použil Irving Langmuir (1881–1957) v roce 1928, protože mu chováním tento stav látky připomínal krevní plazmu. Jako plazma chápal Langmuir oblast výboje v plynu, která není ovlivněna stěnami nebo elektrodami a má následující tři vlastnosti:

1. V plazmatu jsou volné nosiče elektrického náboje.
2. Plazma vykazuje kolektivní chování, tj. jako celek reaguje na elektrická a magnetická pole a také je vytváří.
3. Plazma je kvazineutrální, tj. v makroskopickém objemu je stejné množství kladných i záporných nábojů.

V českém jazyce se ustálilo používání ženského rodu pro krevní plazmu, zatímco pro plazma, jakožto čtvrté skupenství hmoty, používáme střední rod (tato knížka je tedy věnována plazmatu, nikoli plazmě).

Ve vesmíru je většina atomární látky ionizována a nachází se ve formě plazmatu. Plazmatem jsou tvořeny nitra i obálky hvězd, mlhoviny, výtrysky, naše Slunce i jeho rozsáhlá koróna. Celá naše sluneční soustava je zaplavena plazmatem slunečního větru a Země v ní tvoří jakousi malou neplazmatickou oázu. Na Zemi se s plazmatem setkáváme minimálně, přírodní plazma nalezneme v kanálech blesků, v ionosféře a v polárních zářích. Plazma v kanálech blesků má vysoký tlak a je lokalizováno v úzkém a ostře ohraničeném svítícím kanále. Naopak plazma polární záře má nízký tlak a jde o rozsáhlé plošné útvary s difúzním svitem. Plazma nalezneme v laboratořích výzkumných ústavů a v mnoha zařízeních využívajících nejrůznější plazmové technologie (řezání, obrábění, nanášení vrstev atd.).

Plazma je charakteristické lineárními a plošnými útvary (vlákny a stěnami) drženými vlastním magnetickým polem, které vzniká protékajícím proudem. Nabitě částice mohou jednak rotovat kolem magnetických indukčních čar a jednak driftovat napříč magnetickému a nějakému dalšímu poli. V oblastech intenzivnějšího magnetického pole se mohou odrážet, takový jev nazýváme magnetické zrcadlo. V plazmatu existuje neuvěřitelné množství módů různých nízkofrekvenčních i vysokofrekvenčních vln. Přítomnost plazmatu velmi výrazně ovlivní šíření zvukových i elektromagnetických vln. Pro plazma je charakteristická řada nestabilit, se kterými se dlouhá léta potýkají konstruktéři termojaderných reaktorů. Neméně zajímavé jsou nelineární jevy v plazmatu nebo záření plazmatu. S některými z těchto jevů se seznámíme v učebnici, kterou jste právě otevřeli.

U plazmových fyziků je velmi oblíbenou jednotkou elektronvolt. V elektronvoltech se dá vyjádřit nejen energie ($1 \text{ eV} \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$), ale i teplota ($E = k_B T$, $1 \text{ eV} \approx 11\,600 \text{ K}$)

nebo hmotnost částic (přes vztah $E = mc^2$). V této učebnici jsou dominantně používány jednotky SI.

Plazma dělíme z mnoha úhlů pohledu. Typické druhy plazmatu můžeme znázornit na diagramu, ve kterém je na vodorovné ose koncentrace elektronů a na svislé teplota elektronů:

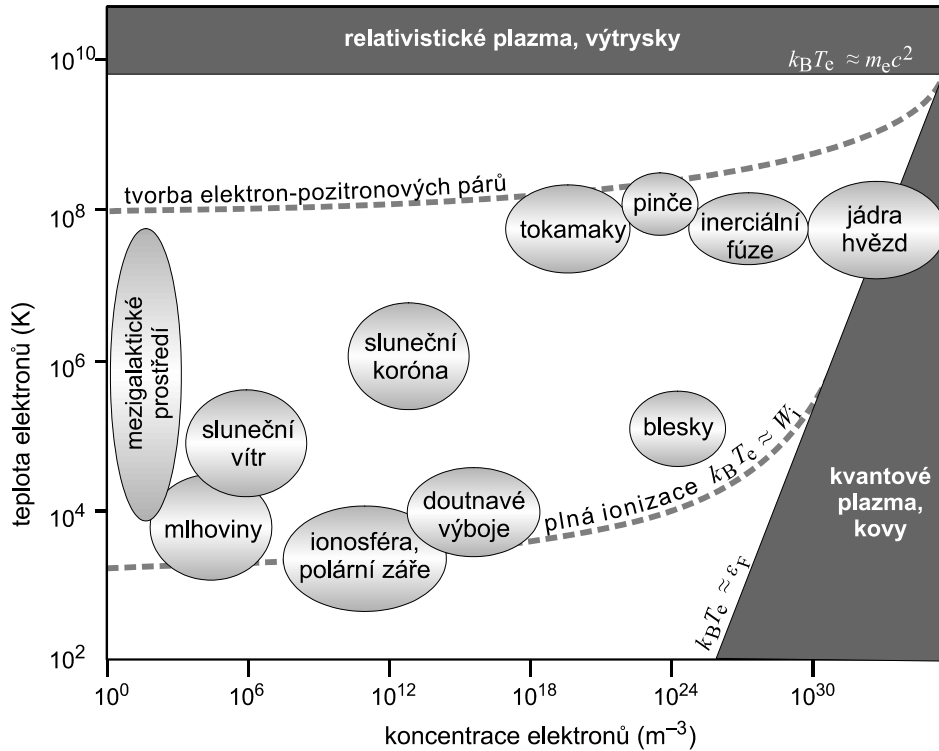


Diagram je nakreslen pro vodíkové plazma, ale podobný diagram platí i pro jakékoli plazma. Půjdeme-li ve směru teplotní osy (svisle), narazíme celkem na čtyři oblasti plazmatu. Pro nejnižší teploty je plazma jen částečně ionizované. Od křivky označené „plná ionizace“ je plazma zcela (u vodíku jedenkrát) ionizováno. Hranici této oblasti můžeme zapsat jako $k_B T_e \approx W_i$, kde W_i je ionizační energie. Při ještě vyšší teplotě (přibližně nad 10^8 kelvinu) dochází k samovolné tvorbě elektronových-pozitronových párů. Od teploty 6×10^9 K je tepelná energie elektronů vyšší než jejich klidová energie, tj. platí vztah $k_B T_e > m_e c^2$ a plazma považujeme za relativistické. Můžeme si tak povšimnout prvních způsobů dělení plazmatu:

- plazma částečně ionizované – plazma úplně ionizované;
- plazma bez tvorby elektron pozitronových párů – plazma s tvorbou párů;
- plazma nerelativistické – plazma relativistické.

V pravé dolní části diagramu (husté a chladné plazma) nalezneme oblast kvantového plazmatu. Elektronový plyn je degenerován, tj. jeho obsazovací čísla ve fázovém prostoru nejsou malá. Ve fázovém objemu $\Delta\phi = \Delta^3x\Delta^3p$ je počet dostupných kvantových stavů roven $\Delta\phi/(2\pi\hbar)^3$, viz [3]. Pokud je počet elektronů na jeden stav zanedbatelný, má

elektronový plyn klasické chování a je popsán Boltzmannovým rozdělením. Pokud tomu tak není, musíme použít Fermiho-Diracovo rozdělení a elektronový plyn se chová kvantově. Tak je tomu v jádrech hvězd, v celém objemu bílého trpaslíka nebo v neutronové hvězdě (zde nejde o elektrony, ale o neutrony). Rovnici hranice této oblasti můžeme zapsat pomocí Fermiho energie elektronů ε_F jako $k_B T_e \approx \varepsilon_F$. Dalším možným rozdělením plazmatu tedy je

- plazma klasické – plazma kvantové.

Plazma je schopné vést elektrický proud. Mnohdy je lepším vodičem než zlato nebo měď. Jeho vodivost je úměrná $T_e^{3/2}$ a závisí jen málo na koncentraci plazmatu. Často ve výpočtech nahrazujeme plazma nekonečně vodivou tekutinou. V takové limitě v plazmatu neprobíhají žádné difúzní procesy a magnetické pole je dokonale „vmrznuté“ do plazmatu, tj. sleduje všechny jeho pohyby. Pokud je vodivost konečná, magnetické pole je částečně zamrzlé a částečně difunduje do okolí. Můžeme tak dojít k dalšímu dělení plazmatu:

- plazma se zamrzlým magnetickým polem – plazma s difundujícím polem.

Teplota plazmatu je dána chaotickým pohybem jeho jednotlivých složek. Na vnější podněty nejprve reagují málo hmotné elektrony, elektronová tekutina se zahřeje a při srážkách pak svou tepelnou energii předává iontům. Může se tedy stát, že elektrony mají jinou teplotu než ionty. Pokud jsou obě teploty vyrovnány a ustanou veškeré makroskopické toky, řekneme, že plazma je v *termodynamické rovnováze*. V opačném případě hovoříme o *nerovnovázném plazmatu*. A máme zde další dělení:

- plazma rovnovážné – plazma nerovnovážné.

V přítomnosti magnetického pole je zavedení teploty ještě složitější. Pohyby nabitých částic podél magnetických indukčních čar jsou jiné než napříč indukčními čarami a můžeme proto zavést teploty dvě – podélnou a příčnou. Kromě dělení plazmatu na rovnovážné a nerovnovážné můžeme plazma z hlediska dosažené teploty iontů také rozdělit na vysokoteplotní (fúzní, $T_i > 10^6$ K) a nízkoteplotní ($T_i < 10^5$ K):

- plazma nízkoteplotní – plazma vysokoteplotní.

Někdy se ale nízkoteplotní plazma definuje jako částečně ionizované plazma a vysokoteplotní jako plně ionizované plazma.

V neutrálním plynu jsou srážky charakterizované prudkou změnou směru pohybu, dráha atomů či molekul připomíná lomenou „cikcak“ čáru. V plně ionizovaném plazmatu jsou srážky dány Coulombovou interakcí (elektrickým přitahováním či odpuzováním) a částice jen zvolna mění směr. Střední volnou dráhu chápeme jako průměrnou vzdálenost, na které se směr pohybu částice změní o 90° . V částečně ionizovaném plazmatu dochází k oběma druhům srážek – coulombickým mezi nabitými částicemi a „cikcak“ mezi nabitou a neutrální částicí nebo mezi dvěma neutrálními částicemi. Plazma považujeme za *bezesrážkové*, je-li střední volná dráha mezi srážkami větší než rozměry plazmatu ($\lambda_{e,i} > L$). V takovém případě částice buď neinteragují nebo vzájemně interagují prostřednictvím kolektivních polí, která samy vytvářejí. V bezesrážkovém plazmatu se mohou snadno vytvořit oblasti, které nejsou kvazineutrální. Plazma tedy můžeme také rozdělit na

- plazma bezesrážkové – plazma srážkové.

Velmi důležitým parametrem pro posuzování vlastností plazmatu je Debyeova vzdálenost λ_D . Pokud je nabitá částice ve vakuu, ubývá její potenciál se vzdáleností jako $1/r$. V plazmatu je částice stíněná a její elektrický potenciál ubývá jako $\exp(-r/\lambda_D)/r$. Do vzdálenosti λ_D od nabitě částice ji ostatní částice „vnímají“ jako částici, ve větších vzdálenostech je její potenciál odstíněn. Hovoříme o tzv. Debyeově sféře a klíčovým parametrem je počet částic v této sféře $N_D = (4/3)\pi n\lambda_D^3$. Je-li $N_D \gg 1$, vyruší se celková průměrná síla od jednotlivých částic a převládají kolektivní procesy nad srážkami – hovoříme o tzv. ideálním plazmatu, pro jehož všechny složky platí stavová rovnice ideálního plynu. Typicky jde o horké (s vysokou vodivostí) a/nebo řídké plazma. Dalším možným dělením tedy je:

- plazma ideální – plazma neideální.

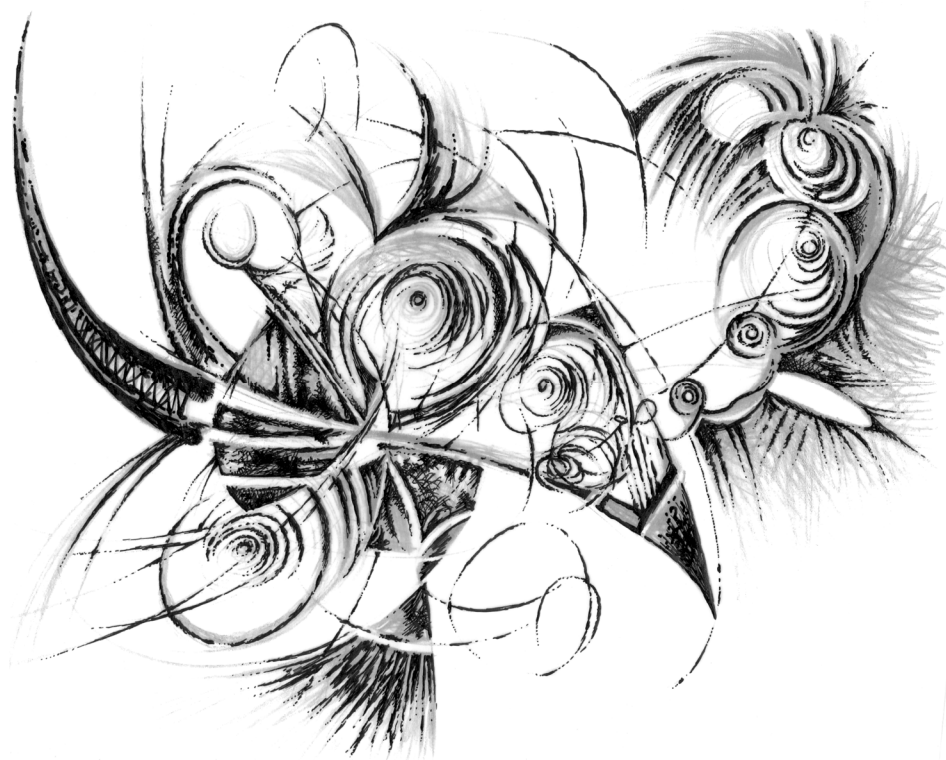
V astrofyzikálních aplikacích, ale i v laboratorním plazmatu se často setkáváme s plazmatem obsahujícím prach. Takové plazma má specifické vlastnosti, je třeba uvažovat nabíjení prachových zrn, ultranízko-frekvenční módy vln souvisící s pohyby prachových zrn, u rozsáhlých oblaků se neobejdeme bez zahrnutí gravitační interakce prachových zrn atd. Často proto také plazma dělíme na

- plazma prachové – plazma bez prachu.

Existují samozřejmě i další různá dělení plazmatu, v každém oboru je důležité jiné hledisko. Pro základní orientaci v druzích plazmatu nám výše uvedený přehled postačí.



1. Pohyby nabitých částic



V celé první kapitole budeme počítat pohyby částic ve vnějších, předem známých (zadaných) polích. Předpokládáme, že

1. částice vzájemně neinteragují,
2. vlastní pole částic jsou zanedbatelná.

Pro popis elektrického pole využijeme intenzitu elektrického pole \mathbf{E} , pro popis magnetického pole magnetickou indukci \mathbf{B} . Alternativně můžeme elektrické a magnetické pole popsat za pomoci skalárního a vektorového potenciálu (ϕ, \mathbf{A}) . Převodní vztahy jsou

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.2)$$

Odvození těchto vztahů nalezne čtenář v jakékoli učebnici elektromagnetického pole, například v [8]. Při výpočtu pohybu nabitých částic budeme předpokládat, že potenciály $\phi(t, \mathbf{x})$ a $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ jsou předem dané funkce. Poznamenejme, že tvoří relativistický čtyřvektor a lze je z jedné souřadnicové soustavy do druhé transformovat za pomoci Lorentzovy transformace.

1.1 Nerelativistické pohyby

Za nerelativistické považujeme pohyby nabitých částic, jejichž rychlost je zanedbatelná vzhledem k rychlosti světla, tj. $v \ll c$. Takové částice nalezneme například ve slunečním větru nebo v plazmatu obloukového výboje.

1.1.1 Lagrangeova a Hamiltonova funkce

Problematika pohybu nabitých částic v elektromagnetických polích je dána Lagrangeovou funkcí

$$L = L_{\text{part}} + L_{\text{int}} + L_{\text{elmg}}, \quad (1.3)$$

kde L_{part} je Lagrangeova funkce částice, L_{int} popisuje interakci mezi částicí a polem a L_{elmg} je Lagrangeova funkce elektromagnetického pole. V našem přiblížení jsou pole pevně dána a nebudeme je počítat, proto je polní část Lagrangeovy funkce nulová. Pokud budeme uvažovat jen elektrické pole, které je potenciální, bude Lagrangeova funkce dána vztahem

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - Q\phi. \quad (1.4)$$

Tvar je shodný s klasickou mechanikou [1], kde je Lagrangeova funkce dána rozdílem kinetické a potenciální energie $L = T - V$. Kinetická energie představuje Lagrangeovu funkci volné částice L_{part} a potenciální energie Lagrangeovu funkci interakce s elektrickým polem L_{int} . V přítomnosti magnetického pole, které není potenciální, musí mít inte-

rakční část Lagrangeovy funkce další člen. Ten bude nějakou funkcí čtyřvektoru toku náboje pro částici (charakterizuje částici) a čtyřvektoru potenciálů pole (charakterizuje pole):

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} c\rho_Q \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cQ\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ Q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{x}' je poloha částice a \mathbf{x} poloha pozorovatele. Lagrangeova funkce by měla být skalárem, jedinou rozumnou kombinací připadající v úvahu je tedy veličina úměrná skalárnímu součinu obou čtyřvektorů integrovanému přes objem (bez integrace přes objem bychom dostali veličinu úměrnou hustotě Lagrangeovy funkce):

$$\int (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}) d^3\mathbf{x}' = \int (-Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}' = -Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

Z uvedeného vztahu je již jasná chybějící část ve vztahu (1.4), správná Lagrangeova funkce pro nerelativistický pohyb částic v elektrickém a magnetickém poli bude

$$\blacktriangleright \quad L = \frac{1}{2}mv^2 - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.5)$$

Standardními postupy určíme zobecněnou hybnost, zobecněnou energii a po vyloučení rychlosti z obou vztahů Hamiltonovu funkci:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}, \quad (1.6)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2}mv^2 + Q\phi, \quad (1.7)$$

$$\blacktriangleright \quad H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi. \quad (1.8)$$

Poznámka 1: Energii budeme v této kapitole značit symbolem \mathcal{E} , abychom ji odlišili od intenzity elektrického pole \mathbf{E} .

Poznámka 2: Zobecněná hybnost není součinem hmotnosti a rychlosti jako v klasické mechanice, ale figuruje v ní vektorový potenciál!

Poznámka 3: Energie nezávisí na magnetickém poli (vektorovém potenciálu \mathbf{A}), protože magnetické pole nemění energii částice, ale jen směr její rychlosti.

Ukažme, že příslušné Lagrangeovy rovnice jsou totožné s Lorentzovou pohybovou rovnicí pro nabitou částici. Ve složkách máme

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}mv_j v_j - Q\phi(t, \mathbf{x}) + QA_j(t, \mathbf{x})v_j; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{d}{dt} (mv_i + QA_i) + Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - Q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(mv_i) + Q \frac{\partial A_i}{\partial t} + Q \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - Q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(mv_i) = Q \left[-\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + v_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \right].$$

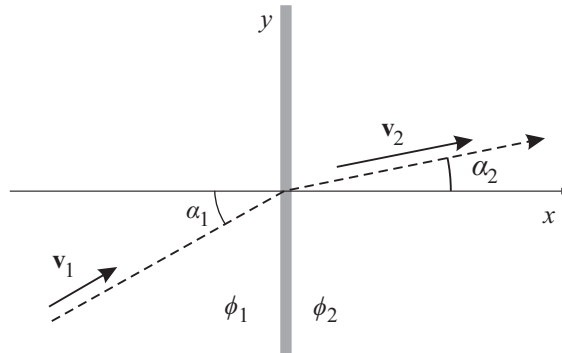
Poslední výraz v hranaté závorce snadno upravíme pomocí Levi-Civitova tenzoru do tvaru – postup naleznete v dodatku A, vztah (A.20).

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = Q \left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} \right] \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = Q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (1.9)$$

což je známá Lorentzova pohybová rovnice.

1.1.2 Pohyb v elektrickém poli, optická analogie

Pokud se nabitá částice pohybuje dostatečně dlouho jen v homogenním elektrickém poli, nelze situaci řešit nerelativisticky. Elektrické pole by částici urychlovalo nade všechny meze, což je v rozporu se speciální relativitou. Můžeme ale řešit úlohu, ve které je elektrické pole nenulové jen v malé oblasti prostoru, například v nějaké vrstvě plazmatu. Idealizovaným případem je rázová vlna se skokem elektrického potenciálu (tzv. dvojrivrva, se kterou se podrobněji seznámíme v kapitole 3.3.4).



Obr. 1: Skok elektrického potenciálu.

Předpokládejme, že v obou poloprostorech na obrázku je potenciál konstantní a elektrické pole tedy nulové. Nabitá částice se proto pohybuje rovnoměrně přímočaře. V tenké vrstvě (je označena šedě) na rozhraní obou oblastí se potenciál mění, elektrické pole je zde nenulové a míří ve směru osy x . Pokud je přechodová vrstva infinitesimálně malá, je změna potenciálu skoková. Ve směru osy y nepůsobí žádné pole, proto se složka rychlosti částice ve směru osy y nemění. Tečná složka rychlosti vzhledem k rozhraní je proto spojitá:

$$v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2. \quad (1.10)$$

Při pohybu nabitě částice se bude zachovávat energie (1.7):

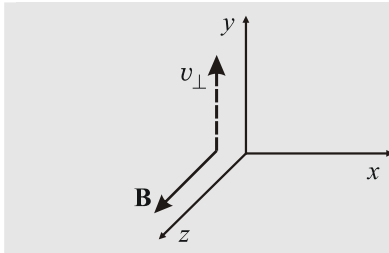
$$\frac{1}{2} m v_1^2 + Q\phi_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + Q\phi_2 = \mathcal{E}. \quad (1.11)$$

Pokud z posledního vztahu vypočteme rychlosti a dosadíme do (1.10), dostaneme

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{\frac{\mathcal{E} - Q\phi_2}{\mathcal{E} - Q\phi_1}} = \sqrt{\frac{C - \phi_2}{C - \phi_1}} = \sqrt{\frac{U_2}{U_1}}. \quad (1.12)$$

Uvedenému vztahu se říká *optická analogie pohybu částice v elektrickém poli*. Svým tvarem připomíná Snellův zákon lomu.

1.1.3 Pohyb v homogenním magnetickém poli



elektromagnetické pole:

$$\mathbf{E} = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, B);$$

počáteční podmínky:

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{p}(0) = (0, m v_{\perp}, 0).$$

Předpokládejme homogenní magnetické pole; souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby osa z mířila ve směru pole. Nabitou částici vypustíme kolmo na magnetické indukční čáry ve směru osy y . Pohyb budeme řešit za pomoci Hamiltonových pohybových rovnic. Pro sestavení Hamiltonovy funkce proto nejdříve potřebujeme nalézt potenciály pole. Potenciály nejsou vztahy (1.1) a (1.2) určeny jednoznačně (různé potenciály vedou na stejná pole). Například pro magnetický potenciál můžeme v našem případě využít výrazy $\mathbf{A} = (-yB, 0, 0)$ nebo $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$ nebo $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-yB, xB, 0)$. Vyzkoušejte si, že $\text{rot } \mathbf{A}$ vede vždy na pole $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Pro další výpočet zvolíme potenciály ve tvaru

$$\phi = 0,$$

$$\mathbf{A} = (0, xB, 0).$$

Potenciály elektrických a magnetických polí pro typické konfigurace naleznete v dodatku D3. Zobecněná hybnost je v našem případě dána vztahem $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}$. Pro Hamiltonovu funkci platí

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi = \frac{p_x^2 + (p_y - QBx)^2 + p_z^2}{2m}$$

a Hamiltonovy rovnice jsou

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad (1.13)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - QBx}{m}, \quad (1.14)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \quad (1.15)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{QB(p_y - QBx)}{m}, \quad (1.16)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (1.17)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (1.18)$$

Z rovnic(1.17), (1.18) máme ihned

$$p_y(t) = p_y(0) = mv_{\perp},$$

$$p_z(t) = p_z(0) = 0.$$

Tyto výrazy spolu s p_x vyjádřeným z (1.13) dosadíme do (1.16) a získáme tak rovnici

$$\ddot{x} + \left(\frac{QB}{m}\right)^2 x = \frac{QBv_{\perp}}{m}$$

pro proměnnou x . Po jejím vyřešení (je součtem homogenního a partikulárního) známe závislost $x(t)$ a můžeme již přímo integrovat rovnice (1.14), (1.15). Výsledné řešení má tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= R_L - R_L \cos \omega_c t, \\ y(t) &= R_L \sin \omega_c t, \\ z(t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

kde jsme označili

$$R_L \equiv \frac{mv_{\perp}}{QB}; \quad \omega_c \equiv \frac{QB}{m} \quad (1.20)$$

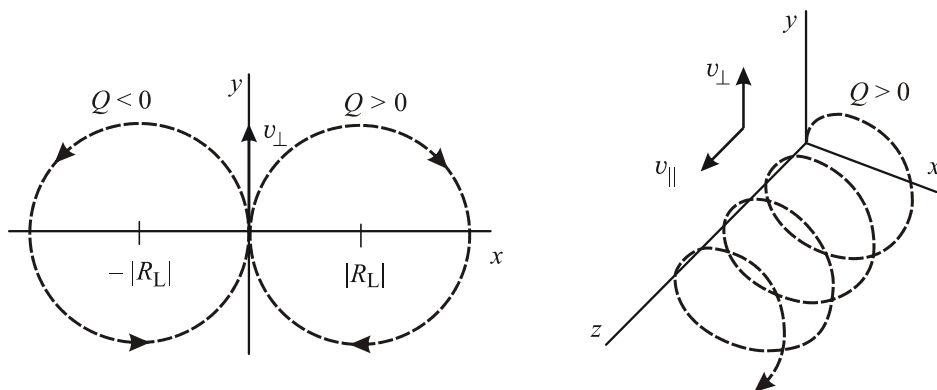
tzv. Larmorův poloměr R_L a cyklotronní frekvenci ω_c . Trajektorii získáme vyloučením času z (1.19):

$$(x - R_L)^2 + y^2 = R_L^2. \quad (1.21)$$

Vidíme, že pohyb se děje po kružnici s poloměrem R_L a se středem $S = [R_L, 0]$. Poloha středu závisí na znaménku náboje částice.

Magnetické pole nepůsobí na pohyb částice ve směru podél pole. Kolmo na směr pole působí Lorentzova síla, která zakřivuje trajektorii částice na kružnici. Při nenulové počáteční rychlosti $v_z(0)$ je pohyb částice složen z rovnoměrného přímočarého pohybu podél pole a Larmorovy rotace (tzv. *gyrace*) v rovině kolmé na pole – tím vzniká pohyb po šroubovici.

Samotné elektrické pole naopak nepůsobí na pohyb částice napříč pole (v nerelativistickém případě) nebo jen velmi málo (v relativistickém případě). Ve směru pole dochází k urychlování.



Obr. 2: Pohyby nabité částice v homogenním magnetickém poli.

Poznámka: Výpočet Larmorova pohybu lze také provést přímo z Lorentzovy pohybové rovnice $m\ddot{\mathbf{r}} = Q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$. Složka z opět vede na volný pohyb. Ve složce x a y dostáváme

$$\ddot{x} = \frac{QB}{m} \dot{y}, \quad (1.22)$$

$$\ddot{y} = -\frac{QB}{m} \dot{x}. \quad (1.23)$$

Obě rovnice je možné řešit různými způsoby. Asi nejrychleji k cíli vede Landaův postup: druhou rovnici vynásobíme komplexní jednotkou a sečteme s první. Kombinaci QB/m označíme jako cyklotronní frekvenci:

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -i\omega_c(\dot{x} + i\dot{y}) \quad (1.24)$$

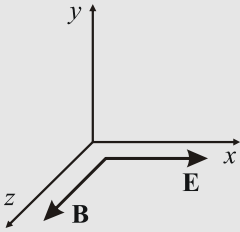
Nyní stačí zavést komplexní proměnnou $\xi \equiv x + iy$ a řešit jednoduchou rovnici

$$\ddot{\xi} = -i\omega_c \dot{\xi} \quad (1.25)$$

v komplexním oboru. Po nalezení integračních konstant získáme hledanou polohu částice x a y tak, že oddělíme reálnou a imaginární část řešení.

1.1.4 Pohyb ve zkřížených polích

Řešme nyní pohyb v homogenním magnetickém poli a na něj kolmém homogenním poli elektrickém:



elektromagnetické pole

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0),$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, B);$$

počáteční podmínky:

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{p}(0) = (0, 0, 0).$$

Volba souřadnicové soustavy je patrná z obrázku. Nabitou částici vložíme s nulovou rychlostí do počátku souřadnicové soustavy. Potenciály polí zvolíme ve tvaru

$$\phi = -Ex,$$

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0).$$

Zobecněná hybnost je opět $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}$. Pro Hamiltonovu funkci platí

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi = \frac{p_x^2 + (p_y - QBx)^2 + p_z^2}{2m} - QE x$$

a Hamiltonovy rovnice naší úlohy jsou

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad (1.26)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - QBx}{m}, \quad (1.27)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \quad (1.28)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{QB(p_y - QBx)}{m} + QE, \quad (1.29)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (1.30)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (1.31)$$

Postupem zcela analogickým předešlému příkladu získáme řešení

$$\begin{aligned} x(t) &= R_D - R_D \cos \omega_c t, \\ y(t) &= R_D \sin \omega_c t - v_D t, \\ z(t) &= 0, \end{aligned} \tag{1.32}$$

kde jsme označili

$$\omega_c \equiv \frac{QB}{m} \quad ; \quad v_D \equiv \frac{E}{B} \quad ; \quad R_D \equiv \frac{m v_D}{QB} \tag{1.33}$$

tzv. cyklotronní frekvenci ω_c , driftovou rychlost v_D a driftový poloměr R_D . Rovnice trajektorie má po částečném vyloučení času z rovnic (1.32) tvar

$$(x - R_D)^2 + (y + v_D t)^2 = R_D^2. \tag{1.34}$$

Jde tedy o pohyb po kružnici s poloměrem R_D , jejíž střed $S = [R_D, -v_D t]$ se pohybuje konstantní driftovou rychlostí v_D kolmo na elektrické i magnetické pole. Pro nulovou počáteční rychlost platí vztah plynoucí okamžitě z definic (1.33)

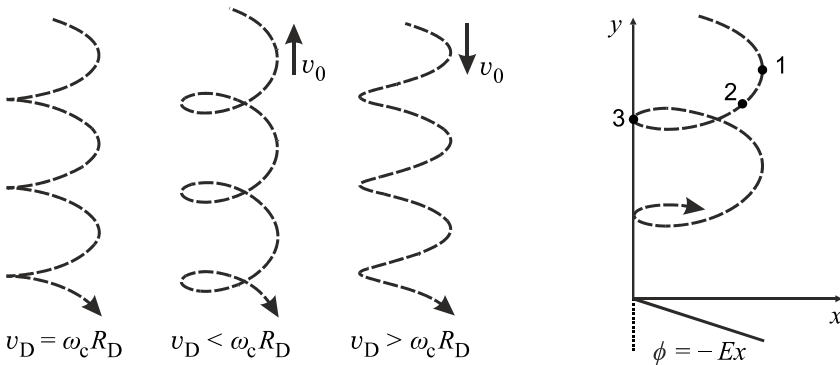
$$v_D = \omega_c R_D \tag{1.35}$$

a výsledná křivka (1.34) se nazývá *cykloida*. Stejnou křivku opisuje nalepená nečistota na kole jedoucího automobilu. Pro nenulovou počáteční rychlost již neplatí vztah (1.35) a pohyb probíhá po obecnější křivce, tzv. *trochoidě* (řešení je analogické):

$$\begin{aligned} x(t) &= R_D - R_D \cos \omega_c t, \\ y(t) &= R_D \sin \omega_c t - v_D t, \\ z(t) &= v_{0z} t, \end{aligned} \tag{1.36}$$

kde se driftový poloměr změnil na

$$R_D = \frac{m}{QB} \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} + v_D)^2}. \tag{1.37}$$



Obr. 5: Pohyby nabité částice ve zkřížených polích.

Pro $v_{0z} = 0$ výsledná trochoida vzniká složením pohybu po kružnici s pohybujícím se středem $S = [R_D, -v_D t]$. Trochoidu si opět můžete představit za pomoci analogie s jedoucím automobilem. Automobil ale jede na ledu, a buď se rozjíždí, nebo brzdí. Kola se částečně protáčí (obvodová rychlost kol není totožná s rychlostí vozidla). V takovém případě nečistota na kole opisuje trochoidu. Pro $Q > 0$ mají trochoidy tvar znázorněný na obrázku 5 (cykloida je speciálním případem trochoidy a na obrázku je nalevo). V bodech trajektorie 1, 2, 3 je různý elektrický potenciál

$$\phi = -Ex \quad \Rightarrow \quad \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 .$$

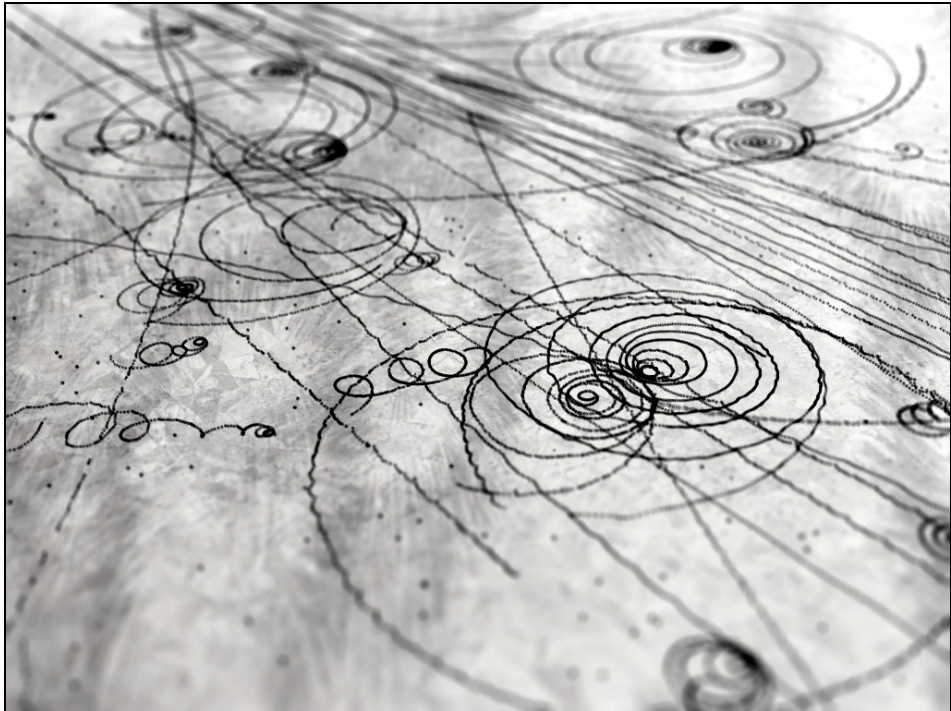
a vzhledem k zákonu zachování energie má částice různou rychlost

$$\frac{1}{2}mv^2 + Q\phi = \text{const} \quad \Rightarrow \quad v_1 > v_2 > v_3$$

a tím i různý Larmorův poloměr:

$$R_L = \frac{mv}{QB} \quad \Rightarrow \quad R_{L1} > R_{L2} > R_{L3} .$$

Trochoidální trajektorii částice lze tedy interpretovat jako pohyb po kružnici s proměnným poloměrem. Na následujícím obrázku jsou typické stopy nabitých částic v mlžné komoře. Vliv magnetického pole na trajektorie částic je velmi dobře patrný.



Obr. 6: Stopy částic v mlžné komoře. Zdroj: Christian Parsons, Argentina.

1.2 Relativistické pohyby

1.2.1 Lagrangeova a Hamiltonova funkce

V Lagrangeově funkci (1.5) je správně relativisticky zapsána jen interakční část, protože vznikla jako skalární součin dvou čtyřvektorů. Akce pro volnou částici $dS = Ldt$ by měla být invariantem teorie. V nerelativistické fyzice, kde je čas absolutní, postačí invariance Lagrangeovy funkce L . V relativitě požadujeme invarianci celého Ldt . Jediným invariantem je interval $ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2$. Ve vlastní soustavě částice je $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, kde τ je vlastní čas částice. Z poslední relace je patrné, že vlastní čas je také invariantem. Z porovnání obou vyjádření plyne vztah mezi vlastním a laboratorním časem

$$d\tau \equiv dt\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}.$$

Výraz Ldt by tedy měl být funkcí tohoto invariantu, nejjednodušší volba je $Ldt = \alpha d\tau$, tj.

$$L_{\text{part}} = \alpha\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}.$$

Koeficient úměrnosti α určíme tak, aby v limitě malých rychlostí výraz přešel v Lagrangeovu funkci $m_0\mathbf{v}^2/2$ pro nerelativistickou částici (m_0 je klidová hmotnost částice):

$$L_{\text{part}} = \alpha\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} \approx \alpha\left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2}\right) = \alpha - \alpha\frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -m_0c^2.$$

Odmocninu jsme rozvinuli do prvního řádu za pomoci vztahu $(1+x)^n \approx 1+nx$, který platí pro $x \ll 1$. Posunutí o konstantu není podstatné. Výsledná Lagrangeova funkce pro relativistické pohyby nabitých částic v elektrických a magnetických polích tedy je

$$\blacktriangleright \quad L = -m_0c^2\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.38)$$

Standardním způsobem určíme hybnost a energii:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + Q\mathbf{A}, \quad (1.39)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + Q\phi. \quad (1.40)$$

Povšimněte si, že zavedeme-li tzv. „pohybovou“ hmotnost

$$m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \quad (1.41)$$

získají vztahy pro hybnost a energii jednoduchý a srozumitelný tvar

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}; \quad \mathcal{E} = mc^2 + Q\phi. \quad (1.42)$$

Posledním krokem bude odvození Hamiltonovy funkce. Z klasické mechaniky víme, že je vždy možné nalézt Legendreovu duální transformaci, tj. z výrazů (1.39) a (1.40) vyloučit rychlost. Nejjednodušším postupem je ponechat na pravé straně výrazů jen odmocniny a rovnice umocnit na druhou:

$$(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2 = \frac{m_0^2 \mathbf{v}^2}{1 - \mathbf{v}^2/c^2};$$

$$\frac{1}{c^2}(\mathcal{E} - Q\phi)^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1 - \mathbf{v}^2/c^2}.$$

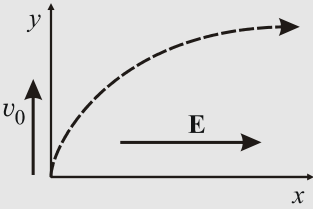
Odečteme-li nyní obě rovnice od sebe, vykrátí se na pravé straně čítel se jmenovatelem a zmizí závislost na rychlosti:

$$\frac{1}{c^2}(\mathcal{E} - Q\phi)^2 - (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2 = m_0^2 c^2.$$

V tuto chvíli již stačí jen dopočítat energii a označit ji jako Hamiltonovu funkci:

$$H = c\sqrt{m_0^2 c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2} + Q\phi. \quad (1.43)$$

1.2.2 Pohyb v homogenním elektrickém poli



elektromagnetické pole

$\mathbf{E} = (E, 0, 0),$
 $\mathbf{B} = (0, 0, 0);$

počáteční podmínky:

$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0),$
 $\mathbf{p}(0) = (0, p_0, 0),$ kde $p_0 \equiv \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$

Úlohu budeme řešit jako rovinný (2D) problém. Volba souřadnicové soustavy je patrná z obrázku. Počáteční rychlost částice předpokládáme kolmou na elektrické pole. Potenciály polí zvolíme ve tvaru

$$\phi = -Ex,$$

$$\mathbf{A} = 0.$$

Hodnota potenciálu ϕ plyne ze vztahu (1.1) pro $\mathbf{A} = 0$. Hamiltonova funkce problému je

$$H = c\sqrt{m_0^2 c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2} + Q\phi = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2} - QEx$$

a příslušné Hamiltonovy rovnice mají tvar

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{cp_x}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2}}, \quad (1.44)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{cp_y}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2}}, \quad (1.45)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = QE, \quad (1.46)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0. \quad (1.47)$$

Integrací rovnic (1.46), (1.47) dostaneme

$$p_x(t) = QEt, \\ p_y(t) = p_y(0) = \text{const} = p_0.$$

Toto řešení dosadíme do rovnic (1.44), (1.45) a integrujeme (tabulku potřebných integrálů naleznete v dodatku A1):

$$x(t) = \int_0^t \frac{cp_x}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2}} dt' = c \int_0^t \frac{QE t'}{\sqrt{\pi_0^2 + (QE t')^2}} dt' = \frac{c}{QE} \left(\sqrt{\pi_0^2 + (QE t)^2} - \pi_0 \right),$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{cp_y}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2}} dt' = c \int_0^t \frac{p_0}{\sqrt{\pi_0^2 + (QE t')^2}} dt' = \frac{p_0 c}{QE} \operatorname{argsh} \left(\frac{QE t}{\pi_0} \right).$$

Výsledné řešení je tedy dáno vztahy

$$x(t) = \frac{\pi_0 c}{QE} \left(\sqrt{1 + (QE t / \pi_0)^2} - 1 \right), \\ y(t) = \frac{p_0 c}{QE} \operatorname{argsh} (QE t / \pi_0), \quad (1.48)$$

kde jsme označili

$$p_0 \equiv m_0 v_0 / \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}, \\ \pi_0 \equiv \sqrt{m_0^2 c^2 + p_0^2}. \quad (1.49)$$

Ukažme nyní, že pro krátký čas výrazy přecházejí v nerelativistické. Tehdy platí

$$v \ll c \quad (\text{tj. } p_0 \ll m_0 c) \Rightarrow \pi_0 \approx m_0 c; \quad p_0 = m_0 v_0, \text{ tj.}$$

$$x(t) = \frac{m_0 c^2}{QE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{QE t}{m_0 c} \right)^2} - 1 \right) \approx \frac{m_0 c^2}{QE} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{QE t}{m_0 c} \right)^2 - 1 \right) = \frac{QE}{2m_0} t^2,$$

$$y(t) = \frac{cm_0 v_0}{QE} \operatorname{argsh} \left(\frac{QE t}{m_0 c} \right) \approx \frac{cm_0 v_0}{QE} \cdot \frac{QE t}{m_0 c} = v_0 t.$$

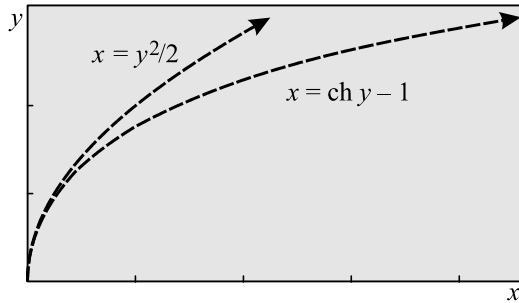
Vidíme, že výrazy přecházejí ve známé klasické vztahy – pohyb rovnoměrně zrychlený ve směru pole a pohyb rovnoměrný napříč polem. Na rozdíl od klasického případu nyní rychlost ve směru pole v_x při urychlování v homogenním elektrickém poli neroste nade všechny meze:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c}{QE} \cdot (QE)^2 \cdot \frac{t}{\sqrt{\pi_0^2 + (QE t)^2}} = c.$$

V libovolném konečném čase t je vždy $v_x < c$. Vyloučíme-li z (1.48) čas (z druhé rovnice dosadíme do první), dostaneme trajektorii částice

$$x = \frac{\pi_0 c}{QE} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{QE}{p_0 c} y \right) - 1 \right]. \quad (1.50)$$

Rozdíl mezi funkcemi $x = y^2/2$ (klasická trajektorie) a $x = \operatorname{ch}(y) - 1$ je na obrázku:



Obr. 8: Rozdíl mezi relativistickou (skutečnou) a nerelativistickou trajektorií.

1.3 Adiabatické přiblížení

Budeme předpokládat, že magnetické pole dominantně ovlivňuje pohyb nabitých částic a základním pohybem je tedy Larmorova rotace neboli gyrace kolem magnetických indukčních čar. V plazmatu mohou být samozřejmě přítomna i další pole, například elektrické a gravitační. Předpokládejme, že všechna pole se za jednu Larmorovu otočku změni jen málo. V čase to znamená, že dojde k malé změně polí za dobu jedné otočky částice; v prostoru tato podmínka říká, že se pole změni málo na Larmorově poloměru. Matematicky lze oba předpoklady vyjádřit takto:

$$\left| \frac{\partial F_k}{\partial t} \right| \ll \frac{F}{T}; \quad \left| \frac{\partial F_k}{\partial x_l} \right| \ll \frac{F}{R_L} \quad \text{pro } \forall k, l, \quad (1.51)$$

kde \mathbf{F} je jakékoli pole ovlivňující pohyb částic. Pole se mohou měnit v čase i v prostoru, ale jen v malé míře. Za tohoto předpokladu se zachovává veličina, kterou nazýváme *první adiabatický invariant*. Uvedený předpoklad je speciálním případem adiabatického přiblížení, při kterém se pole měni málo vzhledem k jakémukoli periodickému ději (viz

poznámka 2). Často budeme potřebovat znát projekci rychlosti částice do směru magnetického pole (ve směru pole je pohyb volný a částice se pohybuje podél indukčních čar) a projekci do směru kolméno na indukční čáry (odpovídá Larmorově rotaci):

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \frac{\mathbf{B}}{B} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_B) \mathbf{e}_B, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_B) \mathbf{e}_B = \mathbf{e}_B \times (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_B). \quad (1.53)$$

Rovnoběžnou projekci jsme standardním způsobem rozepsali jako velikost \times směr.

1.3.1 První adiabatický invariant

Předpokládejme, že se částice pohybuje Larmorovou rotací v pomalu sílicím magnetickém poli $\mathbf{B}(t)$. Měníci se pole dá vzniknout elektrickému poli $\mathbf{E}(t)$, které za jednu otočku změní kolmou složku kinetické energie podle vztahu

$$\Delta W_{\perp} = \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma=\partial S} Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q \int_S (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -Q \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \cong Q \frac{\partial B}{\partial t} \pi R_L^2.$$

Při odvození jsme využili Stokesovu větu, Faradayův indukční zákon a v poslední rovnosti adiabatické přiblížení. Vzhledem k tomu, že se pole mění za jednu otočku jen málo, můžeme derivaci pole nahradit jeho změnou za jednu otočku, tedy za periodu:

$$\Delta W_{\perp} \cong Q \frac{\Delta B}{T} \pi R_L^2 = Q \frac{\Delta B}{2\pi/\omega_c} \pi R_L^2.$$

Nyní dosadíme dříve odvozené vztahy pro Larmorův poloměr $R_L = mv_{\perp}/QB$ a cyklotronní frekvenci $\omega_c = QB/m$ a dostaneme relaci

$$\Delta W_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2} \frac{\Delta B}{B} = W_{\perp} \frac{\Delta B}{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta W_{\perp}}{W_{\perp}} = \frac{\Delta B}{B} \quad \Rightarrow \quad W_{\perp} \sim B \quad \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad \mu \equiv \frac{W_{\perp}}{B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{const}. \quad (1.54)$$

S nárůstem pole tedy úměrně poroste kolmá složka kinetické energie. Veličina μ se nazývá první adiabatický invariant a je konstantní pro pomalu se měnící pole.

Poznámka 1: Při odvození vztahu (1.54) jsme využili relaci

$$\frac{\Delta W_{\perp}}{W_{\perp}} = \frac{\Delta B}{B} \quad \Leftrightarrow \quad W_{\perp} \sim B,$$

jejíž platnost pro nenulové pole dokážeme oběma směry:

$$\frac{dW_{\perp}}{W_{\perp}} = \frac{dB}{B} \quad \Rightarrow \quad \ln W_{\perp} = \ln B + C \quad \Rightarrow \quad W_{\perp} \sim B;$$

$$W_{\perp} \sim B \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{W_{\perp}}{B}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{B dW_{\perp} - W_{\perp} dB}{B^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dW_{\perp}}{W_{\perp}} = \frac{dB}{B}.$$

Poznámka 2: Odvozený adiabatický invariant má mnohem obecnější platnost a zůstává konstantní při jakýchkoli malých časových i prostorových změnách všech polí působících na částici. V teoretické mechanice se ukazuje, že jde o obecnější princip. Pokud se pole mění málo (tzv. adiabatické přiblížení) při jakémkoli kvaziperiodickém pohybu (nejen při Larmorově rotaci), zachovává se veličina (tzv. adiabatický invariant) daná integrálem přes periodu

$$\oint p_q dq = \text{const}.$$

Zobecněná souřadnice q je parametr popisující daný cyklický pohyb. Pokud jde o Larmorovu rotaci, za zobecněnou souřadnici volíme úhel a zobecněnou hybností bude moment hybnosti. Pro adiabatický invariant dostaneme

$$mR_L v_{\perp} \cdot 2\pi = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{const}.$$

Poznámka 3: První adiabatický invariant má několik významů:

$$\begin{aligned} 1) \quad \mu &= \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B}; \\ 2) \quad \mu &= IS; \\ 3) \quad \mu &= \left| \frac{1}{2} Q \mathbf{r} \times \mathbf{v} \right|. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Z druhého nebo třetího vyjádření vidíme, že jde o velikost *magnetického momentu* gyrující částice (viz dodatek E). Ekvivalence všech vyjádření je zřejmá z přímého dosazení (I je elektrický proud generovaný gyrující částicí):

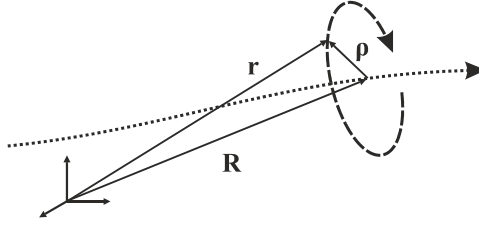
$$\begin{aligned} IS &= \frac{Q}{T} \pi R_L^2 = \dots = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}; \\ \left| \frac{1}{2} Q \mathbf{r} \times \mathbf{v} \right| &= \frac{1}{2} Q R_L v_{\perp} = \dots = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}. \end{aligned}$$

1.3.2 Pohyb gyračního středu

V mnoha případech nepotřebujeme znát detailní pohyb částice v magnetickém poli. Vystředíme-li přes známý gyrační pohyb, můžeme se zabývat jen pohybem samotného gyračního středu. Při odvození budeme používat malý parametr ε , který bude určovat, které členy jsou podstatné a které nikoli. Po vystředování provedeme limitu $\varepsilon \rightarrow 1$. Až do vystředování budeme používat dva časy:

- t pomalu se měnící čas ve shodě s adiabatickým přiblížením (čas, který popisuje změny polí),
- τ rychle se měnící čas popisující jednotlivé fáze gyrace. Přes tento čas budeme středovat a budeme předpokládat, že $\tau \sim t/\varepsilon$.

Označme (viz obrázek) $\mathbf{R}(t)$ polohu gyračního středu, $\mathbf{r}(t, \tau)$ skutečnou polohu gyrující částice a $\boldsymbol{\rho}(t, \tau)$ vektor gyrace, přes který budeme středovat:



Obr. 9: Pohyb gyračního středu (tečkovaně) a pohyb částice (čárkovaně).

Souřadnicový systém zavedeme tak, aby třetí osa lokálně mířila ve směru magnetického pole, tedy bude platit

$$\mathbf{e}_3(t) = \mathbf{B}/B. \quad (1.56)$$

Polohový vektor částice podle obrázku bude:

$$\mathbf{r}(t, \tau) = \mathbf{R}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\rho}(t, \tau). \quad (1.57)$$

Parametrem ε označujeme, že gyrace je pro nás méně podstatný jev než pohyb gyračního středu. Podle (1.19) budeme pro gyraci v našem souřadnicovém systému mít

$$\boldsymbol{\rho}(t, \tau) = -\mathbf{e}_1(t)R_L(t)\cos(\omega_c(t)\tau) + \mathbf{e}_2(t)R_L(t)\sin(\omega_c(t)\tau). \quad (1.58)$$

Povšimněte si, že rychlé změny související s gyrací jsou označeny časem τ , přes který budeme středovat. Pohybovou rovnici částice zapíšeme ve tvaru

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + Q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}. \quad (1.59)$$

V principu bychom mohli i v pohybové rovnici parametrem ε odlišit důležité a méně důležité členy, ale není to pro další výpočet podstatné. Pole jsou v této rovnici počítána v místě pohybu nabitě částice, tedy v argumentech (t, \mathbf{r}) :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t, \mathbf{r}) + Q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}), \quad (1.60)$$

Nyní ve shodě s (1.57) vypočteme jednotlivé členy. Derivaci podle času t budeme označovat tečkou, derivaci podle rychlého času $\tau \sim t/\varepsilon$ čárkou ($dt/dt \sim 1/\varepsilon$):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\rho}(t, \tau);$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{R}} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}';$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{R}} + \varepsilon \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\rho}' + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\rho}'';$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{R}) + \varepsilon (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{F}_{\text{ext}};$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \varepsilon (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Po dosazení získáme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned}
 & m \left[\ddot{\mathbf{R}} + \varepsilon \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\dot{\boldsymbol{\rho}}' + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\rho}'' \right] = \\
 & = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{R}) + \varepsilon(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{F}_{\text{ext}} + Q \left[\dot{\mathbf{R}} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}' \right] \times \left[\mathbf{B}(\mathbf{R}) + \varepsilon(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right].
 \end{aligned}$$

Nyní provedeme středování přes rychle se měnící čas τ . Z (1.58) je vidět, že

$$\langle \boldsymbol{\rho} \rangle_{\tau} = \langle \dot{\boldsymbol{\rho}} \rangle_{\tau} = \langle \boldsymbol{\rho}' \rangle_{\tau} = \langle \dot{\boldsymbol{\rho}}' \rangle_{\tau} = \langle \ddot{\boldsymbol{\rho}} \rangle_{\tau} = \langle \boldsymbol{\rho}'' \rangle_{\tau} = 0. \quad (1.61)$$

Nenulové zůstanou jen střední hodnoty z kvadrátu vektoru gyrace $\boldsymbol{\rho}$. V pohybové rovnici ponecháme jen členy do prvního řádu v ε :

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{R}) + Q\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \varepsilon Q \langle \boldsymbol{\rho}' \times (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle_{\tau}.$$

Zbývá tedy provést středování posledního členu. Za vektor gyrace dosadíme z (1.58), za gradient $\mathbf{e}_1 \partial_x + \mathbf{e}_2 \partial_y + \mathbf{e}_3 \partial_z$ a využijeme relací

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{B} = B \mathbf{e}_3;$$

$$\langle \cos \omega_c \tau \rangle_{\tau} = \langle \sin \omega_c \tau \rangle_{\tau} = \langle \sin \omega_c \tau \cos \omega_c \tau \rangle_{\tau} = 0; \quad \langle \cos^2 \omega_c \tau \rangle_{\tau} = \langle \sin^2 \omega_c \tau \rangle_{\tau} = \frac{1}{2}.$$

Středování se netýká vektorů \mathbf{e}_k , které se mění s pomalým časem t . Při středování zmizí třetí složka gradientu. Na vině je předpoklad, že se částice pohybuje jen v rovině (xy) . Výsledek provedeného středování je

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{R}) + Q\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) - \varepsilon \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \nabla B.$$

Po provedení limity $\varepsilon \rightarrow 1$ získáme hledanou pohybovou rovnici pro gyrační střed

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\mathbf{R}} &= \mathbf{F}_{\text{ext}} + Q\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B; \\
 \mu &\equiv \frac{mv_{\perp}^2}{2B}.
 \end{aligned} \quad (1.62)$$

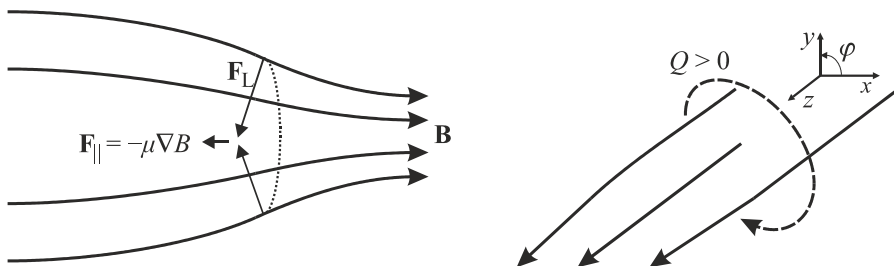
Poznámka: Všechny síly v rovnici jsou fiktivní, působí v gyračním středu, kde ve skutečnosti žádná částice není.

1.3.3 Síla $-\mu \text{grad } B$

Nová síla $-\mu \nabla B$ vytlačuje částice z oblastí silnějších magnetických polí. Závisí jen na velikosti pole B , nikoli na jeho směru. Míří z oblasti silnějšího magnetického pole do oblasti slabšího pole. Koeficientem je první adiabatický invariant. Síla opět působí v místě gyračního středu a jde tedy o fiktivní sílu.

Původ této síly je pro případ zhušťujících se siločar patrný z obrázku 10. Lorentzova síla je kolmá k indukčním čarám a vzhledem ke konečné velikosti trajektorie musí při středování vzniknout nenulová složka rovnoběžná s osou systému, která gyrující částici vytlačuje z hustého pole. Předpokládejme, že původní neporušené pole mířilo v ose z :

$$\mathbf{B} = (0, 0, B).$$



Obr. 10: Grad B síla při „přibližování“ indukčních čar.

Zaveďme nyní malou poruchu pole $\partial B/\partial z > 0$ podle pravého obrázku. V tu chvíli ale nutně vzniká nenulová radiální složka pole B_r (ve válcových souřadnicích) a síla F_z vytlačující částici z oblasti zhuštění. Nejlépe je to vidět z rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$ přepsané do válcových souřadnic ($B_\varphi = 0$):

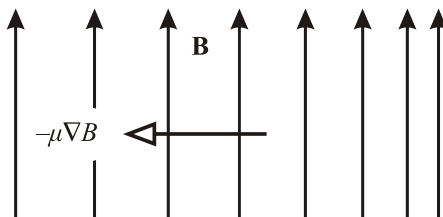
$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) &= -r \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad / \int \\ rB_r &= -\frac{r^2}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\ B_r &= -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \cong -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial z}. \end{aligned}$$

Tato radiální složka pole ($B_r \ll B_z \cong B$) způsobuje vznik síly v ose z:

$$F_z = -Qv_\varphi B_r = -Q(-\omega_c R_L) \left(-\frac{R_L}{2} \frac{\partial B}{\partial z} \right) = -\frac{Q\omega_c R_L^2}{2} \frac{\partial B}{\partial z}.$$

Podle obrázku 10 je úhlová složka rychlosti pro kladný náboj záporná. Po dosazení za úhlovou frekvenci a Larmorův poloměr z (1.20) dostaneme

$$F_z = -\frac{mv_\perp^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z}.$$



Obr. 11: Grad B síla při zhušťování indukčních čar.

Sílu $-\mu\nabla B$ lze tedy získat i jinak než středováním přes gyrační střed. Postup přes středování je ovšem obecnější, protože tuto sílu získáme i v případě, kdy působí kolmo na indukční čáry a pole se zhušťuje ve směru kolmém na indukční čáry, tj. například $\partial B_z / \partial x \neq 0$:

1.3.4 Driftová rovnice

Násobme rovnici pro pohyb gyračního středu (1.62) vektorově magnetickým polem. Po standardní úpravě dvojnásobného vektorového součinu a vydělení celé rovnice výrazem QB^2 dostaneme

$$\dot{\mathbf{R}} - \left(\dot{\mathbf{R}} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B \times \mathbf{B} - m \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}}{QB^2}.$$

Druhý výraz na levé straně je projekcí rychlosti gyračního středu do směru magnetického pole, tedy levá strana má tvar $\dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{R}}_{\parallel}$, což je kolmá projekce rychlosti gyračního středu:

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B \times \mathbf{B} - m \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}}{QB^2}. \quad (1.63)$$

Odvozená rovnice se nazývá *driftová rovnice*. Gyrační střed se může pohybovat nenulovou rychlostí $\dot{\mathbf{R}}_{\perp}$ kolmo na indukční čáry magnetického pole. Takový pohyb nazýváme drift a může vzniknout třemi způsoby odpovídajícími třem členům rovnice na pravé straně. První příčinou mohou být vnější pole, například elektrické nebo gravitační. Druhou příčinou může být nehomogenita magnetického pole, která vede na grad B drift. Poslední příčinou může být nerovnoměrný pohyb gyračního středu. Buď je způsobený změnou směru rychlosti gyračního středu pod vlivem zakřivení indukčních čar (*drifty zakřivení*) nebo změnou velikosti rychlosti gyračního středu (*inerciální drifty*).

Driftování nabitých částic kolmo na magnetické pole je velice častým jevem v plazmatu. Většinou jde o kombinaci několika driftů naráz, neboť některé drifty způsobí separaci náboje a vznik elektrického pole, které následně vede na drift v elektrickém poli. Pokud se situace pomalu mění, driftová rychlost gyračního středu tyto změny sleduje a poslední člen v driftové rovnici je nenulový. Vznikne například inerciální drift způsobený změnou velikosti rychlosti gyračního středu.

1.3.5 Drifty

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift

Jde o drift nabitých částic v elektrickém a magnetickém poli. V jednoduché podobě jsme se s ním již seznámili v kapitole 1.1.4. Z driftové rovnice (1.63) plyne pro $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.64)$$

Driftová rychlost je kolmá k oběma polím a její velikost je

$$v_E = \frac{E}{B} \sin \alpha, \quad (1.65)$$

kde α je úhel mezi oběma poli. Dříve odvozený vztah (1.33) pro driftovou rychlost je speciálním případem vztahu (1.64). Driftová rychlost nezávisí na hmotnosti a náboji částice, elektrony i ionty v elektrickém poli driftují stejným směrem. Tento drift nebude původcem elektrického proudu.

Gravitační drift

V tíhovém poli $\mathbf{F} = m \mathbf{g}$ a magnetickém poli dochází k driftu rychlostí

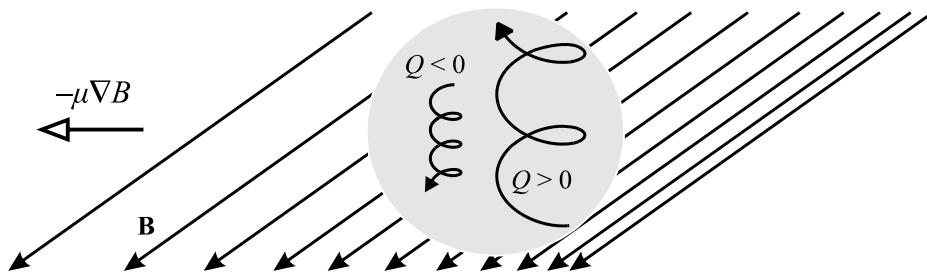
$$\mathbf{v}_g = \frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{QB^2}, \quad (1.66)$$

kteřá je kolmá ke gravitačnímu i magnetickému poli. Její směr závisí na náboji částice a pro elektrony a ionty je opačný. Velikost síly závisí na hmotnosti částic. Drift může být zdrojem elektrických proudů, vede k separaci náboje, která následně způsobí sekundární $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift.

Grad $|B|$ drift

Tento drift je způsoben změnou velikosti magnetického pole. Příslušná driftová rychlost má velikost

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{-\mu \nabla B \times \mathbf{B}}{QB^2} = \frac{mv_{\perp}^2}{2Q} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3}. \quad (1.67)$$



Obr. 12: Grad B drift.

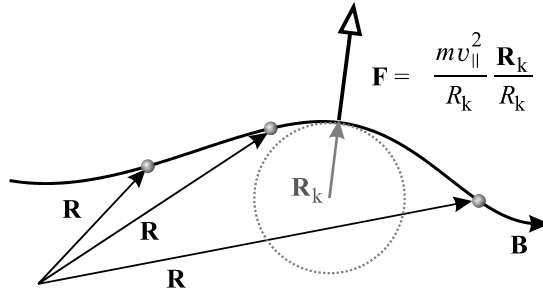
Grad B drift závisí na *kolmé složce* rychlosti, hmotnosti a náboji částic. Vede k různému driftování elektronů a iontů a ke vzniku elektrického proudu v plazmatu. Drift následně vede k separaci náboje, která způsobí sekundární $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift.

Drift zakřivení

Při pohybu kolem zakřivené indukční čáry magnetického pole bude na částici působit odstředivá síla

$$\mathbf{F} = -m\ddot{\mathbf{R}} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_k} \frac{\mathbf{R}_k}{R_k}, \quad (1.68)$$

kde R_k je poloměr křivosti indukční čáry.



Obr. 13: Drift zakřivení.

Rychlost driftu zakřivení je

$$\mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{QB^2} \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{R_k^2}. \quad (1.69)$$

Drift zakřivení závisí (na rozdíl od grad B driftu) na *podélné složce* rychlosti. Opět povede ke vzniku proudu v plazmatu a separaci náboje. Poloměr křivosti parametricky zadané křivky $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ můžeme určit ze vztahu:

$$\frac{1}{R_k} = \left\| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right\|; \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (1.70)$$

Někdy může být užitečné jiné vyjádření poloměru křivosti, které se hodí k přímému dosazení do vztahu (1.69).

$$\frac{1}{R_k} \frac{\mathbf{R}_k}{R_k} = \frac{\mathbf{R}_k}{R_k^2} \equiv \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B}. \quad (1.71)$$

Polarizační drift

Bude-li se velikost elektrického pole pomalu měnit v čase, bude se také měnit driftová rychlost gyračního středu $\mathbf{v}_E(t)$. To povede ke vzniku inerciálního driftu odpovídajícímu inerciální síle

$$-m\ddot{\mathbf{R}} = -m \frac{d\mathbf{v}_E(t)}{dt} = -m \frac{d\mathbf{E}/dt \times \mathbf{B}}{B^2}$$

a polarizačnímu driftu

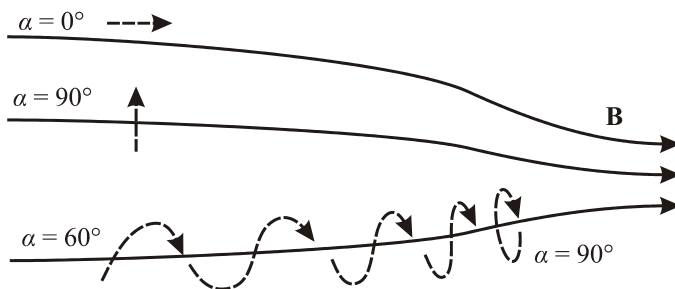
$$\mathbf{v}_P = \frac{m}{QB^4} [\mathbf{B} \times (d\mathbf{E}/dt \times \mathbf{B})], \quad (1.72)$$

který je opět původcem vzniku proudu v plazmatu. Drift vede k separaci náboje, která následně způsobí sekundární $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift. Běžnou situací tak je, že jeden drift je příčinou dalších následných driftů.

1.4 Pohyby ve speciálních konfiguracích

1.4.1 Magnetické zrcadlo

Pokud se částice pohybuje pomalu proměnným magnetickým polem, bude se měnit sklon gyrační kružnice vzhledem k magnetickým indukčním čarám. Označme úhel mezi rychlostí částice a indukčními čarami α :



Obr. 14: Magnetické zrcadlo.

Složky rychlosti ve směru pole a kolmo na pole budou dány vztahy

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha \quad ; \quad v_{\perp} = v \sin \alpha . \quad (1.73)$$

Ze zákona zachování energie \mathcal{E} a adiabatického invariantu μ

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 + Q\phi = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = \text{const} ; \\ \mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} = \text{const} \end{aligned} \quad (1.74)$$

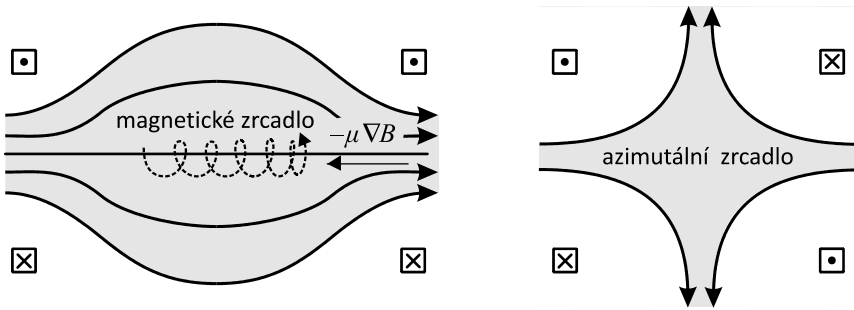
plyne tzv. zrcadlová rovnice

$$\blacktriangleright \quad \frac{\sin^2 \alpha}{B} = \text{const} \quad ; \quad \text{tj.} \quad \frac{\sin^2 \alpha}{B} = \frac{\sin^2 \alpha_0}{B_0} . \quad (1.75)$$

Index 0 označuje hodnoty pole a úhlu v místě nástřelu částice. Do čím silnějšího pole se dostane částice, tím kolměji je postavena její Larmorova šroubovice. Pokud bude rovina gyrace kolmá k poli ($\alpha = 90^\circ$), částice se odrazí. Z (1.75) plyne, že částice nastřelená pod úhlem α_0 v místě s polem B_0 bude obrácena zpět, vzroste-li velikost pole na kritickou hodnotu

$$B_c = \frac{B_0}{\sin^2 \alpha_0} . \quad (1.76)$$

Nedosáhne-li magnetické pole této hodnoty, částice oblastí hustých indukčních čar prolétne. Máme-li naopak zadáno maximální pole B_c , potom ze systému v místech s polem B uniknou všechny částice s úhlem $\alpha < \alpha_0$ (tzv. únikový kužel).

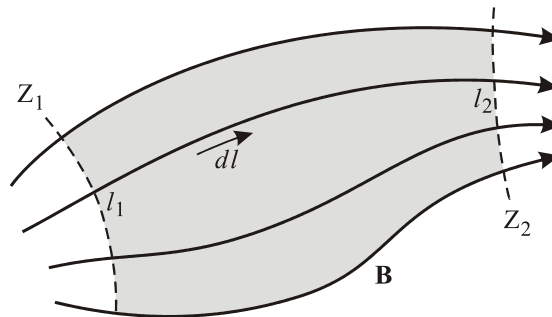


Obr. 15: Magnetická zrcadla tvořená cívkami.

Nejjednodušší magnetické zrcadlo získáme pomocí dvou shodně orientovaných cívek na obrázku vlevo. Záměnou směru proudu v cívkách vznikne tzv. azimutální zrcadlo. V azimutálním zrcadle je v centru $B = |\mathbf{B}| = 0$, Larmorův poloměr je nekonečný, cyklotronní frekvence nulová a změny polí nejsou malé ve srovnání s Larmorovou rotací. Adiabatický invariant μ se nezachovává a částice, které prošly centrální oblastí, se snadno dostanou do únikového kužele.

1.4.2 Druhý adiabatický invariant, Fermiho mechanismus

Uvažujme nyní pohyb částice mezi dvěma zrcadly. K takové situaci může dojít v poli dipólu (Van Allenovy pásy u Země), tokamaku (banánový orbit) nebo mezi dvěma cívkami.



Obr. 16: Druhý adiabatický invariant. V šedé oblasti se pohybují částice.

Částice koná dva periodické pohyby:

- 1) Larmorovu rotaci, se kterou je spojen první adiabatický invariant μ ;
- 2) pohyb od jednoho zrcadla k druhému a zpět (zakmitávání, bouncing).

Předpokládejme, že magnetické pole se mění s časem pomalu v porovnání s periodickým pohybem mezi zrcadly. Při takové změně se samozřejmě bude poloha zrcadel Z_1 a Z_2 přesouvat. Z teoretické mechaniky víme, že by se měl zachovávat tzv. druhý adiabatický invariant

$$I_2 \equiv \oint v_{\parallel} dl, \quad (1.77)$$

pro který platí

$$\frac{dI_2}{dt} = 0. \quad (1.78)$$

Fermiho urychlování prvního druhu

Představme si, že pole sílí a obě zrcadla se k sobě pomalu přibližují. Dále předpokládejme, že oblast změny pole je malá v porovnání se vzdáleností mezi zrcadly. Pak můžeme pro druhý adiabatický invariant přibližně psát:

$$\blacktriangleright \quad 2L v_{\parallel} \approx \text{const}, \quad (1.79)$$

kde L je vzdálenost mezi zrcadly. Je zřejmé, že při zmenšování vzdálenosti L mezi zrcadly musí docházet k zvětšení podélné složky rychlosti a tím i k zvětšení celkové energie částice. Částice přebírá při odrazu energii od vstřícně se pohybujícího zrcadla a dochází k jejímu urychlování. Tento mechanismus nazýváme *Fermiho urychlování prvního druhu*. Pokud se zrcadlo proti částici pohybuje rychlostí v_z , bude po odrazu rychlost částice $v_{\parallel} + 2v_z$.

Fermiho urychlování druhého druhu

Představme si, že ve vesmíru se pohybují náhodně nabitě částice v prostředí různě se měnících magnetických polí. Nabitá částice bude tu a tam odražena od magnetických zrcadel pohybujících se náhodným směrem. Díky Fermiho mechanismu bude statisticky někdy urychlena a někdy zpomalena. Rychlostní rozdělení se proto bude rozšiřovat a mezi částicemi se objeví určité procento velmi rychlých částic, které náhodně získaly energii z „příznivých“ odrazů od magnetických zrcadel. Tento mechanismus nazýváme *Fermiho urychlování druhého druhu* a italský fyzik Enrico Fermi se jím pokusil vysvětlit vysoké energie částic kosmického záření.



Obr. 17: Mlhovina Mravenec. Ve vnitřní části je pole dipólové, ve vnějších částech může v náhodných polích docházet k urychlování částic Fermiho mechanismem. HST.

1.4.3 Magnetický dipól, třetí adiabatický invariant

Magnetický dipól je nejnižším přiblížením multipólového rozvoje magnetického pole. Zdrojem dipólového pole může například být elektrický proud tekoucí po malé kružnici. Velikost magnetického dipólu je dána magnetickým dipólovým momentem \mathbf{p}_M . Pro soustavu nabitých částic je magnetický moment dán vztahem (viz dodatek E2)

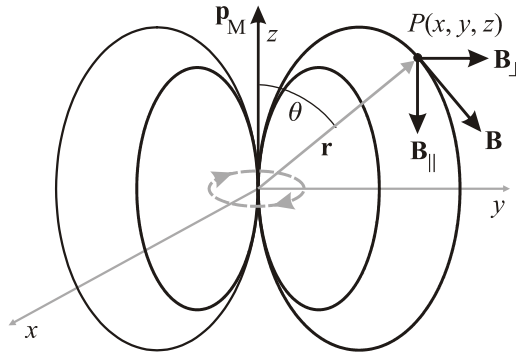
$$\mathbf{p}_M = \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a). \quad (1.80)$$

Sumace probíhá přes všechny částice. Pro jednu částici pohybující se po kružnici je magnetický moment prvním adiabatickým invariantem částice a podle (1.55) platí

$$\mathbf{p}_M = \left| \frac{1}{2} Q (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \right| = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} = IS, \quad (1.81)$$

kde I je elektrický proud tekoucí po obvodu kružnice s plochou S způsobený pohybem nabitě částice. Objemová hustota magnetického momentu se nazývá magnetizace a je rovna

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a). \quad (1.82)$$



Obr. 18: Magnetický dipól. Čárkovaně je znázorněna proudová smyčka generující dipólové pole.

Ze znalosti magnetického momentu můžeme určit vektorový potenciál (viz dodatek D, dodatek E) a magnetické pole:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_M \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.83)$$

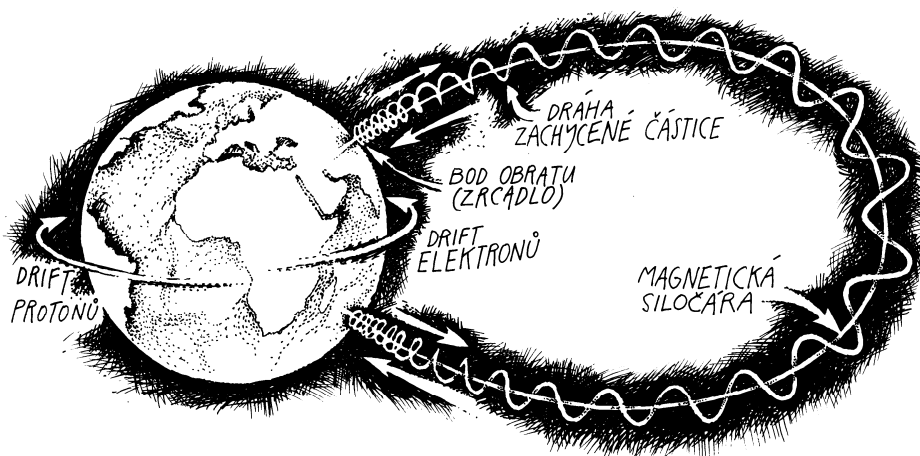
$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_M}{r^5}. \quad (1.84)$$

Pro magnetický dipólový moment orientovaný ve směru osy z máme:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} p_M \left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \quad (1.85)$$

$$\mathbf{B} = (B_{\perp}, B_{\parallel}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} p_M (3 \cos \theta \sin \theta, 3 \cos^2 \theta - 1). \quad (1.86)$$

Díky těmto explicitním formulím můžeme snadno řešit pohyby nabitých částic, například numericky. Pokud víme, pod jakým úhlem a kde do pole částice vnikla, ze zrcadlové rovnice snadno zjistíme kritické pole nutné k otočení částice na dané indukční čáře. Pokud se pole dipólu nemění mezi odrazy, zachovává se první i druhý adiabatický invariant. Díky driftu zakřivení se částice ještě pohybuje v azimutálním směru kolem dipólu a koná tak tři kvaziperiodické pohyby: 1) Larmorovu rotaci, 2) odrazy mezi zrcadly v polárních oblastech, 3) drift zakřivení. S driftem zakřivení jakožto dalším kvaziperiodickým pohybem je spojen *třetí adiabatický invariant*, který je úměrný magnetickému indukčnímu toku plochou, jejíž hranici tvoří trajektorie gyračního středu při driftu zakřivení.



Obr. 19: Periodické pohyby nabitých částic v magnetickém dipólu.

V zemském dipólovém poli je perioda jednotlivých dějů (energie částice 1 keV, siločívka ve vzdálenosti čtyřnásobku poloměru na rovníku, částice s nulovou podélnou rychlostí) [23]:

částice	1 – gyrace	2 – pohyb mezi zrcadly	3 – drift
elektron 1 keV	10^{-4} s	4 s	180 h
proton 1 keV	0,14 s	170 s	180 h

Driftová rychlost elektronů a iontů vychází stejná, jde o drift zakřivení, jehož hodnota závisí na podélné složce kinetické energie částice.

Poznámka: Dipólové pole ubývá se třetí mocninou vzdálenosti, proto astronomové vyjadřují dipólový moment planet a ostatních těles jako součin pole na rovníku a třetí mocniny poloměru. Jednotkou je Tm^3 . Tato veličina je úměrná skutečnému dipólovému momentu (1.80).

Planety Sluneční soustavy mají většinou nenulový magnetický moment. Výjimkou jsou Mars a Venuše, které nemají žádné globální magnetické pole. U Marsu objevila americká sonda *Mars Global Surveyor* magnetické pole v povrchových horninách. Z charakteru tohoto pole je zřejmé, že Mars v minulosti magnetické pole měl, a z nějakých důvodů o něho přišel. Na Venuši je povrchová teplota kolem $460\text{ }^\circ\text{C}$, což je nad Curieovou teplotou, při níž se magnetický záznam v horninách maže, takže u Venuše nelze tímto způsobem zjistit, zda někdy v minulosti pole měla.

Magnetosféry planet jsou charakteristicky deformovány slunečním větrem: na denní straně vzniká *čelní rázová vlna*, na noční straně dlouhý *magnetický ohon*. V blízkosti planety má pole přibližně dipólový charakter. V polárních oblastech jsou *polární kasy* (z anglického „*cusp*“ – roh, cíp) – trychtýřovité oblasti, kterými do polárních oblastí vnikají nabitě částice slunečního větru. Zachycené nabitě částice vytvářejí tzv. *radiační pásy*, v nichž kroužící nabitě částice emitující elektromagnetické záření (u Země jim říkáme *van Allenovy pásy*). Pro *poznávání* interakce slunečního větru s magnetosférami je nejčennější magnetosféra Merkuru. Jednak je u ní sluneční vítr nejsilnější, a jednak je interakce slunečního větru s magnetosférou minimálně ovlivněna atmosférou, která je velmi řídká.

Nejrozsáhlejší *magnetosféry* mají plynní obři (Jupiter, Saturn Uran a Neptun). Nemají pevný povrch, jejich kapalné nitro je částečně vodivé, což přispívá ke vzniku silného magnetického pole. Naprosto výjimečnou je magnetosféra Jupiteru, která má ohon dlouhý 5 astronomických jednotek, tj. sahá až ke dráze Saturnu. Objem magnetosféry Jupiteru je mnohonásobně větší než objem, který zaujímá Slunce i s celou korónou. Jupiter má také mimořádně intenzivní radiační pásy. Rádiové vlny generované těmito pásy jsou referenčním zdrojem, pomocí něhož se kalibrují přístroje na sondách.

planeta	dipólový moment [$T\text{ m}^3$]	pole na rovníku [μT]	vyosení dipólu [% průměru]	úhel mezi dipólem a rotační osou [$^\circ$]
Merkur	5×10^{12}	0.33	17	169
Venuše	–	–	–	–
Země	8×10^{15}	31	7.25	11.4
Mars	–	remanentní	–	–
Jupiter	160×10^{18}	430	13	9.6
Saturn	5×10^{18}	21	5	<1
Uran	0.4×10^{18}	23	30	59
Neptun	0.2×10^{18}	14	55	47

1.4.4 Elektrický a magnetický monopol

Magnetické monopóly sice neexistují, ale čistě teoreticky můžeme zkoumat pohyb v poli elektrického a magnetického monopolu, u kterých jsou pole dána vztahy:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_E}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}; \quad \mathbf{B} = Q_M \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.87)$$

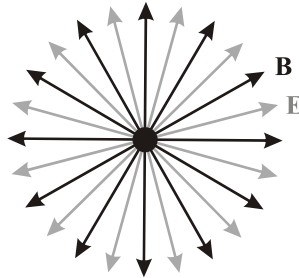
Celkem snadno lze ukázat, že se při pohybu testovací částice s nábojem q nebude zachovávat moment hybnosti, ale vektor

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times m\mathbf{v} - qQ_M \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.88)$$

Pojďme toto tvrzení dokázat:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times m\mathbf{v} - qQ_M \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} - qQ_M \frac{r\mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{r}}{r}}{r^2} = \\ &= 0 + \mathbf{r} \times (q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - qQ_M \frac{\mathbf{v}}{r} + qQ_M \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = \\ &= q\mathbf{r} \times \left(\frac{Q_E}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{v} \times Q_M \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - qQ_M \frac{\mathbf{v}}{r} + qQ_M \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = \\ &= 0 + \frac{qQ_M}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) - qQ_M \frac{\mathbf{v}}{r} + qQ_M \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = 0. \end{aligned}$$

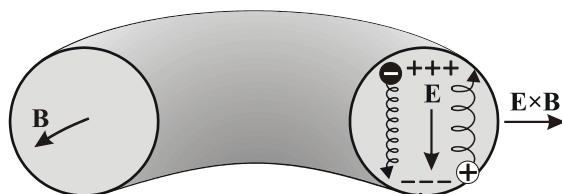
Vektor \mathbf{N} se při pohybu tedy zachovává. Pohyb se děje po kuželové ploše s osou totožnou s vektorem \mathbf{N} . Rostoucí magnetické pole v počátku souřadnic způsobí, že každý náboj bude odražen silou $-\mu\nabla B$ v nějaké vzdálenosti r_{\min} od monopolu. Má-li pohybující se elektrický náboj shodné znaménko s Q_E , bude se odpuzovat a pohyb bude neomezený, $r \in (r_{\min}, \infty)$. Má-li pohybující se náboj opačné znaménko, bude se přitahovat a pohyb bude omezený, $r \in (r_{\min}, r_{\max})$. Hodnotu r_{\max} můžeme určit ze zákona zachování energie.



Obr. 20: Elektrický a magnetický monopol.

1.4.5 Tokamak

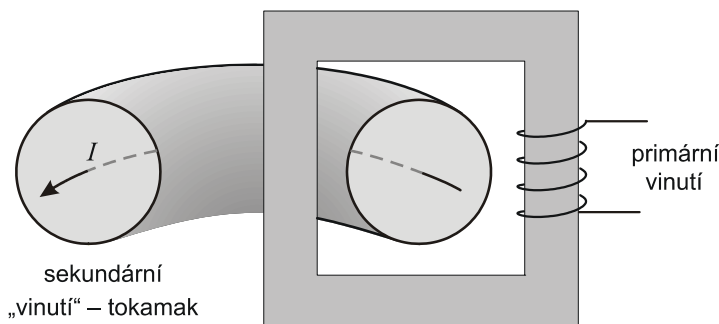
V tokamaku (z ruského TOroidnaja KAmera v MAgnitnych Katuškach) je plazmové vlákno stočené do toroidální geometrie, základním polem je *toroidální* pole sledující plazmové vlákno. Zpravidla je generováno cívkou navinutou na plášť toroidu. Pouhé toroidální pole vede na driftы, které způsobí únik nabitých částic z vnitřního prostoru tokamaku.



Obr. 21: Drifty v toroidální geometrii.

V toroidální geometrii dochází k driftu zakřivení, který způsobuje separaci náboje, tím vzniká elektrické pole a následný $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift, kterým částice unikají z prostoru toroidu. Tomu lze částečně čelit zkroucením indukčních čar pole dodatečným *poloidálním* polem. Pohybem částic po zkroucených indukčních čarách bude vlastně spojena oblast kladného a záporného náboje, v jistém slova smyslu dojde ke zkratování separovaného náboje. Dodatečné poloidální pole můžeme získat různými způsoby. Jmenujme alespoň:

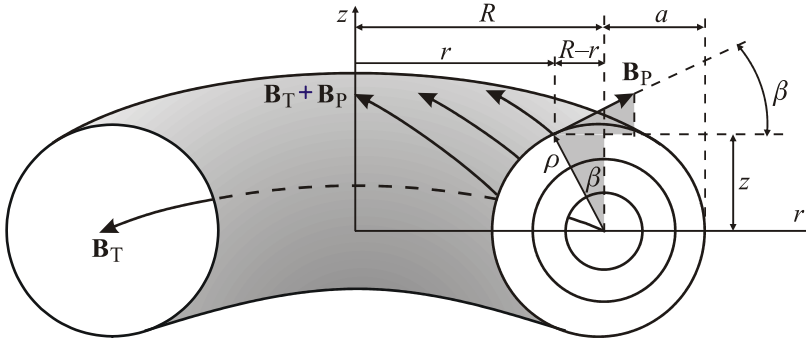
- 1) *stellarátor* – vinutí je šikmé.
- 2) *tokamak* – torus je sekundárním vinutím transformátoru. Tím v prostoru tokamaku vzniká elektrický proud, který generuje poloidální pole.



Obr. 22: Tokamak.

- 3) *multipóly* – v pracovním prostoru jsou vodiče, které generují poloidální pole.

Naším cílem nyní bude určit alespoň přibližné analytické výrazy pro pole v toroidální geometrii. To umožní odhad pohybu nabitých částic v kombinaci toroidálního a poloidálního pole a numerický výpočet jejich skutečné trajektorie.



Obr. 23: Magnetické pole v tokamaku.

Toroidální pole musí podle Ampérova zákona ubývat se vzdáleností od středu jako $1/r$:

$$B_T(r) = B_{T0} \frac{R}{r}; \quad B_{T0} \equiv B_T(R). \quad (1.89)$$

Velikost poloidálního pole může být na každém magnetickém povrchu s poloměrem ρ (viz obrázek) různá a bude ubývat se vzdáleností stejně jako toroidální pole:

$$B_P(\rho, r) = B_{P0}(\rho) \frac{R}{r}; \quad B_{P0}(\rho) \equiv B_P(\rho, R). \quad (1.90)$$

Určeme nyní projekce poloidálního pole do radiálního směru a do osy z . Využijeme k tomu podobnost trojúhelníků zvýrazněných v pravé části obrázku:

$$B_{Pr}(\rho, r) = B_P \cos \beta = B_{P0}(\rho) \frac{R}{r} \frac{z}{\rho}, \quad (1.91)$$

$$B_{Pz}(\rho, r) = B_P \sin \beta = B_{P0}(\rho) \frac{R}{r} \frac{R-r}{\rho}. \quad (1.92)$$

Zřejmě platí

$$B_P^2 = B_{Pr}^2 + B_{Pz}^2; \quad \rho^2 = (R-r)^2 + z^2. \quad (1.93)$$

Předpokládejme, že částice nalétne pod úhlem α_0 na vnějším okraji magnetického povrchu, kde je pole z celého povrchu minimální:

$$B_{\min} = \sqrt{B_{T0}^2 + B_{P0}^2(\rho)} \frac{R}{R+\rho}. \quad (1.94)$$

Částice bude sledovat indukční čáru směrem do oblasti menších hodnot r , kde pole roste. K případnému odrazu dojde podle zrcadlové rovnice v kritickém poli (1.76)

$$B_c = \frac{B_{\min}}{\sin^2 \alpha_0}. \quad (1.95)$$

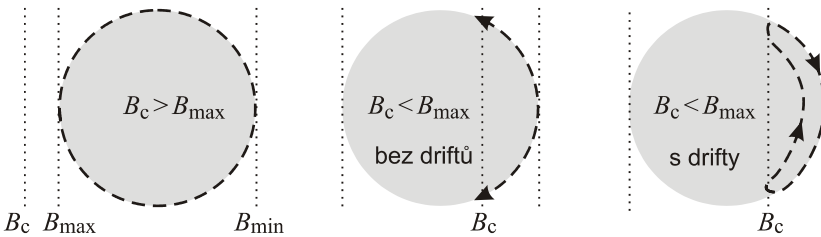
K odrazu dojde jen tehdy, pokud je kritické pole menší než maximální pole na vnitřním okraji, tj. částice se na své pouti setká s dostatečně silným polem, které ji otočí:

$$B_c < B_{\max} = \sqrt{B_{T0}^2 + B_{P0}^2(\rho)} \frac{R}{R-\rho}. \quad (1.96)$$

Kombinací posledních tří rovnic získáme podmínku pro otočení pohybu částice:

$$\sin^2 \alpha_0 > \frac{R-\rho}{R+\rho}. \quad (1.97)$$

Není-li podmínka splněna, částice se pohybuje po indukční čáře kolem dokola magnetického povrchu. Je-li podmínka splněna, odrazí se v určitém místě zpět. Díky driftům vzniká v řezu tzv. *banánová orbita* pojmenovaná podle tvaru trajektorie gyračního středu

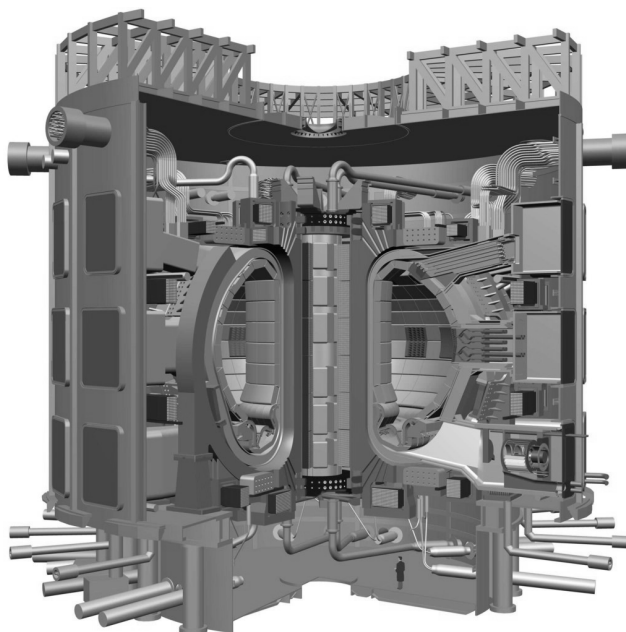


Obr. 24: Vznik banánové orbity v tokamaku.

V následující tabulce je porovnání současných velkých tokamaků Tore Supra a JET s obřím experimentálním tokamakem ITER a českým tokamakem Compass D. Tore Supra je tokamak postavený v městečku Cadarache ve Francii. Stavba byla započata v roce 1982 a první plazma bylo v tokamaku vytvořeno v roce 1988. V roce 1996 se zde dosáhlo rekordního udržení plazmatu 2 minuty a v roce 2003 dokonce 6,5 minuty. Tokamak JET (Joint European Torus) je zařízení postavené v anglickém Culhamu. Stavba byla započata v roce 1978 a byla dokončena v roce 1983. První řízená termojaderná syntéza ve „větším množství“ byla uskutečněna v roce 1991 (1 MW), v roce 1997 byl dokonce dosažen fúzní výkon 16 MW. Společnost JET Joint Undertaking provozující tokamak ukončila činnost v roce 1999. Od té doby provozuje JET společnost UKAEA (United Kingdom Atomic Energy Authority). ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) je mezinárodní termojaderný pokusný reaktor s předpokládaným výkonem reaktoru 500 MW, který bude zprovozněn v blízkosti francouzského Cadarache kolem roku 2025.

V České republice je provozován menší tokamak Compass D, který je umístěn v Ústavu fyziky plazmatu Akademie věd České republiky. Compass D byl do Prahy přestěhován v roce 2006 z anglického Culhamu, kde ho nahradil větší tokamak MAST. Tvarem plazmatu je Compass D blízký navrhovanému tokamaku ITER, obě komory mají průřez podobný písmenu D. Compass D není prvním českým tokamakem. Je následovníkem malého tokamaku CASTOR (Czech Academy of Sciences TORus), který byl postaven v Kurčatovově institutu v SSSR v roce 1958. Od roku 1977 byl umístěn v Praze a sloužil pro vědecké a výukové cíle Ústavu fyziky plazmatu AV ČR. V roce 1983 prošel rekonstrukcí a získal novou komoru. Jeho provoz byl ukončen v roce 2006. Poloměr tokamaku CASTOR byl 40 cm, maximální pole 1,5 T. Po demontáži byl převezen na Fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou ČVUT v Praze, kde byl v roce 2009 opětovně zprovozněn pro výukové účely pod novým názvem Golem.

tokamak	Tore Supra	JET	ITER	Compass D
poloměr prstence plazmatu (m)	2,25	3	6,21	0,56
poloměr plazmatu (m)	0,7	1,25	2,0	0,3
objem plazmatu (m ³)	25	155	837	0,5
proud v plazmatu (MA)	1,7	5÷7	15	0,4
magnetické pole (T)	4,5	3,4	5,3	2,1
doba udržení (s)	~ 400	10	> 300	2
termonukleární výkon	~ 1 kW	16 MW	500 MW	–



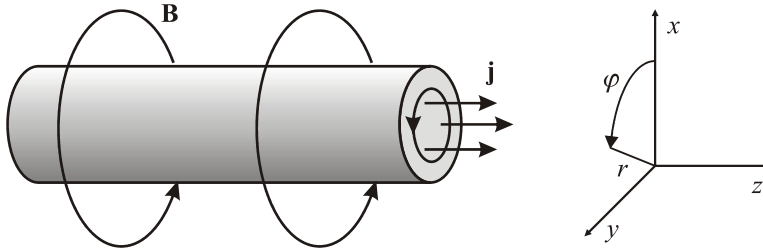
Obr. 25: Schéma tokamaku ITER. Patrná je komora ve tvaru písmene D.

Poznámka: Snaha o udržení termojaderné fúze není jen doménou tokamaků. Četné pokusy se konají v laserem iniciované fúzi i v dalších zařízeních. Cílem je dosáhnout tzv. *Lawsonova kritéria*, které zajišťuje, aby vzniklo větší množství energie, než je potřebné k ohřevu a náhradě ztrát zářením. Anglický fyzik John Lawson (1923–2008) spočetl, že postačí, aby byl součin koncentrace elektronů a doby udržení větší než jistá funkce teploty $n_e \tau > f(T)$, která má minimum. Na pravé straně se zpravidla bere hodnota v tomto minimum, jenž nastává pro teplotu T_0 . Například pro D-T reakci má pravá strana minimum pro teplotu 25 keV (290×10^6 K) a minimální hodnota součinu $n_e \tau$ je $1,5 \times 10^{20}$ s/m³.

1.4.6 Plazmové vlákno a souvislost driftů s proudy

V gravitační interakci je typickým rovnovážným útvarem koule. Tento tvar zaujímají hvězdy i větší planety. Elektromagnetická interakce má ale jiné vlastnosti a vytváří v plazmatu především lineární útvary – různá vlákna, často stočená do šroubovic nebo ještě složitějších útvarů. Vlákna jsou většinou udržována vlastním magnetickým polem a později uvidíme, že výraznější stability mohou dosáhnout jen tzv. helikální vlákna, v nichž má magnetické pole jak azimutální, tak osovou složku.

Představme si nyní nejjednodušší rovnovážné plazmové vlákno protékané elektrickým proudem podle obrázku. Magnetické pole má jen azimutální směr a jedinou nullovou složkou je B_φ . Uvnitř vlákna musí být magnetické pole rostoucí se vzdáleností od středu vlákna – plyne to z Ampérova zákona, větší indukční čára uzavírá větší plochu a teče jí větší celkový proud. Vně vlákna pole ubývá jako $1/r$.



Obr. 26: Plazmové vlákno protékané pouze osovým proudem (tzv. z pinč).

Pohyb částic vně vlákna je jednoduchý, budou podléhat driftu zakřivení (kladné částice driftují ve směru osy z) a grad B driftu stejného směru. Výsledkem je drift částic podél vlákna. Zaměříme se ale na pohyby částic uvnitř vlákna. Nalezneme rotaci magnetického pole \mathbf{B} :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \left(\mathbf{j}_C + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_M \right). \quad (1.98)$$

V závorce je celkový proud tekoucí vláknem. První člen představuje vodivostní proud, ukážeme, že je tvořen driftem zakřivení a grad B driftem částic uvnitř vlákna. Druhý člen je v našem případě statické rovnováhy nulový (v případě časové proměnnosti by souvisel s polarizačním driftem). Poslední člen je magnetizační proud $\mathbf{j}_M = \text{rot } \mathbf{M}$ – ten vzniká díky Larmorově rotaci částic, která není sousedními částicemi kompenzována přesně na nulu. Odvodme nyní vztahy pro jednotlivé proudové hustoty uvnitř vlákna.

Proud způsobený grad B driftem

Pro střední hodnotu proudové hustoty můžeme za pomoci koncentrace a rychlosti nosičů náboje psát

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = \left\langle \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \right\rangle.$$

kde sumace probíhá přes elektrony a ionty, středování přes všechny částice. Za rychlost dosadíme driftovou rychlost ze vztahu (1.67) a využijeme cylindrické symetrie proudového vlákna:

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = -\frac{1}{B^2} \left\langle n_e \frac{m_e v_{e\perp}^2}{2} + n_i \frac{m_i v_{i\perp}^2}{2} \right\rangle \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_z .$$

Připomeňme, že pole uvnitř vlákna s rostoucím r roste a tedy derivace $\partial B / \partial r > 0$. Z geometrie problému je zřejmé, že grad B drift míří v záporném směru osy z . Středujme nyní kolmou složku kinetické energie. Kolmá složka má jen dva stupně volnosti, a proto platí

$$\left\langle \frac{m v_{\perp}^2}{2} \right\rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T = k_B T ,$$

a tedy

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = -\frac{1}{B^2} (n_e k_B T_e + n_i k_B T_i) \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_z = -\frac{p}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_z . \quad (1.99)$$

Proud způsobený driftem zakřivení

Podobně jako při grad B driftu určíme z driftu zakřivení (1.69) proudovou hustotu

$$\mathbf{j}_R = \frac{1}{rB} \left\langle n_e m_e v_{e\parallel}^2 + n_i m_i v_{i\parallel}^2 \right\rangle \mathbf{e}_z .$$

Vypočteme střední hodnotu složky kinetické energie (částice má jeden stupeň volnosti podél magnetického pole)

$$\left\langle \frac{m v_{\parallel}^2}{2} \right\rangle = 1 \cdot \frac{1}{2} k_B T = \frac{1}{2} k_B T$$

a pro proudovou hustotu způsobenou driftem zakřivení máme výsledný vztah

$$\mathbf{j}_R = \frac{1}{rB} (n_e k_B T_e + n_i k_B T_i) \mathbf{e}_z = \frac{p}{rB} \mathbf{e}_z . \quad (1.100)$$

Magnetizační proud

V případě homogenního plazmatu a konstantního magnetického pole je proudový příspěvek od soustavy shodně Larmorovsky rotujících částic nulový. Je-li pole nehomogenní, jsou Larmorovy orbity v různých místech různé a průměrný příspěvek k tekoucímu proudu může být nenulový. Podobně v nehomogenním plazmatu v některém směru narůstá počet nosičů náboje a při průměrování příspěvku k celkovému proudu dostaneme nenulový výsledek. Magnetický moment jedné částice je

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \mathbf{e}_{\varphi} . \quad (1.101)$$

Poznámka: Gyrující nabitá částice generuje vlastní magnetické pole, které má opačný směr než pole původní. Hovoříme proto o *diamagnetizmu plazmatu*. V souřadnicové soustavě na obrázku má původní magnetické pole směr $-\mathbf{e}_\varphi$, magnetický moment částice má směr $+\mathbf{e}_\varphi$.

Nyní určíme celkovou magnetizaci a opět vystředujeme přes druhé mocniny rychlostí:

$$\mathbf{M} = \left\langle \sum_{\alpha} n_{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\alpha} \right\rangle = \frac{\langle n_e m_e v_{e\perp}^2 + n_i m_i v_{i\perp}^2 \rangle}{2B} \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{(n_e k_B T_e + n_i k_B T_i)}{B} \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{p}{B} \mathbf{e}_{\varphi}.$$

Magnetizační proud určíme v zadané geometrii již snadno:

$$\mathbf{j}_M = \text{rot } \mathbf{M} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p}{B} \right) \mathbf{e}_z. \quad (1.102)$$

Na závěr ukažme, že součet všech tří proudových hustot odvozených výše dá celkový proud tekoucí plazmatem:

$$j_{\nabla B} + j_R + j_M = -\frac{p}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{p}{rB} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p}{B} \right) = -\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Zřejmě tedy platí

$$(j_{\nabla B} + j_R + j_M) B = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1.103)$$

což je podmínka rovnováhy $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla p$, ve které vystupuje celkový proud. Mikroskopické procesy jsou tak přirozenou cestou provázány s makroskopickými proudy v kontinuu.

1.5 Numerické simulace pohybu částic

V předchozích kapitolách jsme našli analytické výrazy pro trajektorii nabitě částice v homogenním elektrickém nebo magnetickém poli. V obecnějším případě je nalezení analytického vyjádření trajektorie buď velmi obtížné, nebo zcela nemožné. Systémy diferenciálních rovnic, na které vedou pohybové rovnice, jsou nelineární a málokdy analyticky řešitelné. Můžeme si pomoci rozvojem řešení do nějaké nekonečné řady a ve finále se omezit na několik prvních členů, můžeme provést nějaká zanedbání, která rovnice zjednoduší nebo se můžeme omezit jen na určité přiblížení k problému, například adiabatické (přiblížení málo se měnících polí); většinou jsme ale odkázáni na numerické simulace.

Kdysi se říkalo, že fyzika má dvě neoddelitelné součásti – experiment a teorii. S razantním nástupem výpočetní techniky v posledních desetiletích můžeme dnes bez nadsázky říci, že veškerá fyzikální odvětví mají tři propojené a nezastupitelné součásti – experiment, teorii a numerické simulace. Numerické simulace pomáhají ověřit teorie bez nákladných experimentů, získat informace o chování sledovaného subjektu a připra-

vít experimenty tak, aby s co nejmenšími prostředky přinesly největší výsledky. Numerické simulace jsou užitečné i při zpracování velkého množství dat z experimentů. Současnou fyziku plazmatu si bez numerických simulací již nedokážeme představit.

Tato učebnice není zaměřena na numerické metody ve fyzice plazmatu. Přesto chceme, aby měl hloubavější čtenář, který zvládne jednoduché programování, možnost si vyzkoušet probírané jevy nasimulovat na svém počítači. Za každou kapitolou je proto přidána jakási „kuchařka“ vybraných algoritmů, která to umožní. Jde ale vždy o pouhý výběr jednoho nebo několika algoritmů z mnoha bez podrobnějšího vysvětlení. Pokud čtenáře numerické metody zaujmou, musí sáhnout po specializovaných publikacích věnovaných numerickým simulacím ve fyzice plazmatu.

1.5.1 Newtonovo-Eulerovo schéma (NE)

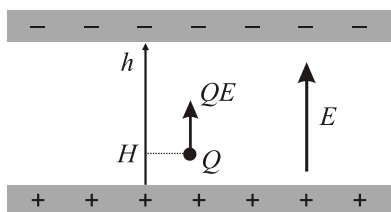
Nejjednodušším způsobem řešení diferenciálních rovnic je jejich převedení na diferenciální rovnice (namísto derivací napíšeme jen rozdíly veličin, tzv. difference). Ukažme si tento postup na jednoduché úloze pohybu nabitě částice v kondenzátoru.

■ Příklad 1: Nalezněte diferenční schéma pro urychlení nabitě částice mezi deskami kondenzátoru. Elektrické pole považujte za homogenní a pohyb za nerelativistický.

Řešení: Pohybová vyplývá z druhého Newtonova zákona

$$m\ddot{h} = QE. \quad (1.104)$$

Výsledná diferenciální rovnice $d^2h/dt^2 = QE/m$ je mimořádně jednoduchá a její řešení bychom snadno mohli najít analyticky. Tvorbu diferenčního schématu si záměrně ukážeme na takto jednoduché rovnici. Stejný postup můžete aplikovat i na složitější rovnice, které již nemají analytické řešení.



Obr. 27: Částice v kondenzátoru.

Nejprve převedeme diferenciální rovnici druhého řádu na soustavu dvou rovnic prvního řádu (ve fyzice k tomu využijeme definice rychlosti jako první derivace hledané proměnné podle času):

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{QE}{m}. \end{aligned}$$

Řešení nebudeme hledat v každém čase (diferenciální rovnice), ale jen v některých časech (diferenční rovnice). V praxi to znamená nahrazení skutečného řešení lomenou čarou. Budou nás tedy zajímat jen hodnoty

$$\begin{aligned}h_n &= h(t_n), \\v_n &= v(t_n), \\t_n &= t_0 + n \Delta t; \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Skutečné derivace nahradíme konečnými rozdíly:

$$\begin{aligned}\frac{h_{n+1} - h_n}{\Delta t} &\cong v_n, \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} &\cong \frac{QE}{m}.\end{aligned}\tag{1.105}$$

Nyní vypočteme hodnoty v čase t_{n+1} pomocí hodnot v čase t_n :

$$\begin{aligned}h_{n+1} &= h_n + v_n \Delta t, \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{QE}{m} \Delta t.\end{aligned}\tag{1.106}$$

Získali jsme tak diferenční schéma, podle kterého počítáme postupně jednotlivé hodnoty

$$h_0, v_0 \Rightarrow h_1, v_1 \Rightarrow h_2, v_2 \Rightarrow \dots$$

Je zřejmé, že k numerické konstrukci řešení postačí znát počáteční výšku a počáteční rychlost (tzv. počáteční podmínky), například:

$$h_0 = H, \quad v_0 = 0.$$

Uvedený postup se zdá být jednoduchý a přímočarý, nicméně má svá úskalí. Počítačem generovaná trajektorie se bude po určité době poněkud lišit od skutečné trajektorie. Důvodem jsou jednak zaokrouhlovací chyby a jednak nahrazení derivací diferencemi. Zaokrouhlovací chyby můžeme částečně eliminovat vhodnou volbou bezrozměrných proměnných. Chybu danou použitím diferencí namísto derivací můžeme snížit volbou menšího časového kroku. Vždy jde ale o kompromis mezi počtem provedených operací a dosaženou přesností. Časový krok nemusíme mít v průběhu celého výpočtu stejný. V oblastech, kde jsou velké gradienty polí a částice prudce mění svou polohu a rychlost, můžeme volit časový krok jemnější než v oblastech, kde se částice příliš nepohybuje.

Odvozené schéma se nazývá Newtonovo-Eulerovo a z matematického hlediska patří do skupiny tzv. *explicitních schémat*. Důvodem je to, že jsme po nahrazení derivací diferencemi vyjádřili pravou stranu rovnice (1.105) za pomoci dřívějšího času t_n . To nám umožnilo explicitní vyjádření (1.106) veličin v novém čase t_{n+1} . Kdybychom pravé strany (1.105) vyjádřili v novějším čase t_{n+1} , dostali bychom algebraickou soustavu rovnic pro h_{n+1} a v_{n+1} . Teprve po vyřešení této soustavy bychom z hodnot h_n, v_n získali nové hodnoty h_{n+1}, v_{n+1} . Takovému schématu se říká *implicitní*. Obecně je stabilnější a přesnější než explicitní schéma, na druhou stranu jsme ale nuceni v každém časovém kroku řešit soustavu algebraických rovnic.

Řád schématu

U diferenčních schémat tedy rozlišujeme, zda jde o schéma explicitní nebo implicitní. Dalšími důležitou charakteristikou je *řád schématu*. Při nahrazení derivace diferencemi jsme se dopustili určité chyby, kterou můžeme označit R (označení pochází ze slova reziduum):

$$f'(t_n) = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{\Delta t} + R(\Delta t). \quad (1.107)$$

Cílem každé numerické metody samozřejmě je, aby byl zbytek R co možná nejmenší. Pokud je jeho závislost na časovém kroku lineární, hovoříme o metodě prvního řádu. Pokud se zbytek chová jako $(\Delta t)^n$, hovoříme o metodě n -tého řádu. Čím vyšší je řád metody, tím kvalitnější je diferenční schéma a poskytuje lepší výsledky. Námi odvozené Newtonovo-Eulerovo schéma je explicitním schématem pouze prvního řádu. Pokud bychom s ním například popisovali harmonické oscilace, bude nám postupně numericky (nefyzikálně) narůstat amplituda oscilací. Newtonovo-Eulerovo schéma můžeme proto použít jen pro krátkodobou simulaci.

Stabilita schématu

Pro numerické simulace můžeme využívat jen *stabilní schémata*. To jsou taková schémata, ve kterých numerická chyba způsobená v jednom časovém kroku není příčinou nárůstu chyby v následujícím časovém kroku.

■ **Příklad 2:** Navrhněte Newtonovo-Eulerovo diferenční schéma pro pohyb nabitě částice v homogenním magnetickém poli.

Řešení: z Hamiltonových rovnic (1.13) až (1.18) snadno získáme příslušné diferenční schéma:

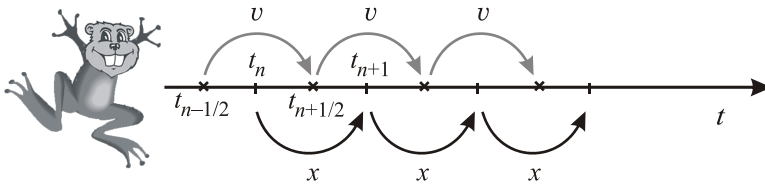
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{p_x^{(n)}}{m} \Delta t, \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{p_y^{(n)} - QB x_n}{m} \Delta t, \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{p_z^{(n)}}{m} \Delta t, \\ p_x^{(n+1)} &= p_x^{(n)} + \frac{QB(p_y^{(n)} - QB x_n)}{m} \Delta t, \\ p_y^{(n+1)} &= p_y^{(n)}, \\ p_z^{(n+1)} &= p_z^{(n)}. \end{aligned}$$

Vlivem numerických chyb bude Larmorův poloměr částice pohybující se v homogenním magnetickém poli pomalu narůstat. K dosažení lepších výsledků bychom museli zjemnit časový krok, což povede na zvýšení počtu provedených operací a následný nárůst zaokrouhlovací chyby.



1.5.2 Skákající žába aneb Leap-Frog schéma (LF)

Neduhy Newtonova-Eulerova schématu lze celkem snadno napravit. Pokud nebudeme počítat polohu a rychlost ve stejném čase, můžeme řád schématu zvýšit o jedničku. Při výpočtu nové rychlosti můžeme využít hodnotu polohy v „mezičase“, stejně tak při výpočtu nové polohy využijeme hodnotu rychlosti v „mezičase“. V příkladu 1 by na pravé straně rovnic nebyly ani staré hodnoty (explicitní schéma), ani nové hodnoty (implicitní schéma), ale mezihodnoty. Schéma je explicitní a stejně rychlé jako Newtonovo-Eulerovo schéma, ale bude druhého řádu. Při simulaci harmonického pohybu zůstane u metody Leap-Frog sinusovka skutečně sinusovkou.



Obr. 28: Princip skákající žaby (leap-frog).

Uvedený postup má jedinou komplikaci. Na počátku musíme spočítat rychlost v čase $t_0 - \Delta t/2$ a poté již počítáme nové hodnoty obdobně jako v Newtonově-Eulerově schématu. Uveďme, jak probíhá výpočet v jednodimenzionálním případě. Předpokládejme, že máme diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{F(x,v)}{m}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Nejprve spočítáme standardním způsobem hodnotu rychlosti v čase $t_0 - \Delta t/2$. Využijeme Newtonovo-Eulerovo schéma a posuneme se zpět o záporný časový krok $-\Delta t/2$:

$$v_{-1/2} = v_0 - \frac{F(x_0, v_0)}{m} \frac{\Delta t}{2}. \quad (1.109)$$

A poté již rozběhneme stále se opakující výpočetní cyklus

$$\begin{aligned} v_{n+1/2} &= v_{n-1/2} + \frac{F(x_n, v_{n-1/2})}{m} \Delta t, \\ x_{n+1} &= x_n + v_{n+1/2} \Delta t. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Postupně určujeme hodnoty

$$v_{-1/2}, x_0 \rightarrow v_{1/2}, x_1 \rightarrow v_{3/2}, x_2 \rightarrow v_{5/2}, x_3 \rightarrow \dots$$

Schéma Leap-frog je ve fyzice plazmatu velmi oblíbené. Ponechává si „dobré“ vlastnosti Newtonova-Eulerova schématu – je explicitní a velmi rychlé. Jeho přesnost je ale, na rozdíl od Newtonova-Eulerova schématu, druhého řádu.

1.5.3 Přesnější schémata (RK, BB)

Runge-Kutta (RK)

Pokud máme vyšší požadavky na kvalitu simulace, musíme využít některé z numerických schémat s vyšším řádem přesnosti. K nejoblíbenějším patří Rungeova–Kuttova metoda 4. řádu. Předpokládejme, že jsme soustavu pohybových rovnic převedli na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\frac{d\xi_k}{dt} = f_k(t, \xi_1, \dots, \xi_N). \quad (1.111)$$

Nejprve určíme v čase t pro každou proměnnou ξ_k čtveřici konstant

$$\begin{aligned} K_{1,k} &= f_k(t, \xi_1(t), \dots, \xi_N(t)), \\ K_{2,k} &= f_k\left(t + \frac{1}{2}\Delta t, \xi_1(t) + \frac{1}{2}K_{1,1}\Delta t, \dots, \xi_N(t) + \frac{1}{2}K_{1,N}\Delta t\right), \\ K_{3,k} &= f_k\left(t + \frac{1}{2}\Delta t, \xi_1(t) + \frac{1}{2}K_{2,1}\Delta t, \dots, \xi_N(t) + \frac{1}{2}K_{2,N}\Delta t\right), \\ K_{4,k} &= f_k\left(t + \Delta t, \xi_1(t) + K_{3,1}\Delta t, \dots, \xi_N(t) + K_{3,N}\Delta t\right). \end{aligned} \quad (1.112)$$

Členy čtveřice musíme počítat v uvedeném pořadí, neboť každá následující konstanta využívá hodnotu předchozí konstanty. Tyto čtveřice napočítáme pro každou z N hledaných proměnných. Numerické řešení v čase $t + \Delta t$ dostaneme ze vztahů

$$\xi_k(t + \Delta t) \cong \xi_k(t) + \frac{1}{6}(K_{1,k} + 2K_{2,k} + 2K_{3,k} + K_{4,k}) \cdot \Delta t; \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.113)$$

Tím známe řešení v čase $t + \Delta t$ a postup můžeme opakovat. Aplikujeme-li toto schéma na Lorentzovu pohybovou rovnici

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{Q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (1.114)$$

Nejprve vypočteme pomocná „pole“ v místě polohy částice

$$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \frac{Q}{m} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{E}(\mathbf{x}_n), \quad \tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q}{m} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}(\mathbf{x}_n). \quad (1.115)$$

V dalším kroku určíme vektorové konstanty \mathbf{K} (pro polohu) a \mathbf{L} (pro rychlost)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{v}_n, & \mathbf{L}_1 &= \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v}_n \times \tilde{\mathbf{B}}; \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{v}_n + \mathbf{L}_1, & \mathbf{L}_2 &= \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_2 \times \tilde{\mathbf{B}}; \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{v}_n + \mathbf{L}_2, & \mathbf{L}_3 &= \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_3 \times \tilde{\mathbf{B}}; \\ \mathbf{K}_4 &= \mathbf{v}_n + 2\mathbf{L}_3, & \mathbf{L}_4 &= \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_4 \times \tilde{\mathbf{B}}. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Nové hodnoty poloh a rychlostí určíme na závěr ze vztahů

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4)\Delta t/6, \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + (2\mathbf{L}_1 + 2\mathbf{L}_2 + 2\mathbf{L}_3 + 2\mathbf{L}_4)/6.\end{aligned}\quad (1.117)$$

Borisovo-Bunemanovo schéma (BB)

Borisovo-Bunemanovo schéma je „šité na míru“ pro výpočty trajektorií nabitých částic v elektrickém a magnetickém poli. Nejprve je spočtena polovina urychlení v elektrickém poli (1.119), následuje rotace částice v magnetickém poli (1.120) a v posledním kroku je uskutečněna zbývající část urychlení v elektrickém poli (1.121). BB schéma je velmi účinným a rychlým diferenčním schématem čtvrtého řádu:

$$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \frac{Q}{m} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q}{m} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}; \quad (1.118)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_n + \tilde{\mathbf{E}}, \quad (1.119)$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{v}}} = \tilde{\mathbf{v}} + 2 \frac{(\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}}{1 + \tilde{\mathbf{B}}^2}, \quad (1.120)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\tilde{\mathbf{v}}} + \tilde{\mathbf{E}}, \quad (1.121)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_{n+1} \Delta t. \quad (1.122)$$

1.5.4 Relativistická schémata

Při velkých rychlostech musíme použít relativistickou Lorentzovu pohybovou rovnici

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{v}) &= \frac{Q}{m_0} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]; \\ \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}\quad (1.123)$$

Hlavním problémem je, že se rychlost vyskytuje na levé i pravé straně této diferenciální rovnice. Pokud použijeme substituci

$$\mathbf{u} \equiv \gamma \mathbf{v}, \quad (1.124)$$

můžeme Lorentzovu pohybovou rovnici přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{Q}{m_0} \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{\gamma} \times \mathbf{B} \right]; \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}},\end{aligned}\quad (1.125)$$

který je výchozím vztahem pro tvorbu relativistických numerických schémat:

Newton-Euler

$$\begin{aligned}\gamma_n &= 1/\sqrt{1-\mathbf{v}_n^2/c^2}; \\ \tilde{\mathbf{E}} &\equiv \frac{Q\Delta t}{m_0} \mathbf{E}; \quad \tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q\Delta t}{m_0 \gamma_n} \mathbf{B}; \\ \mathbf{u}_n &= \gamma_n \mathbf{v}_n; \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{u}_n \times \tilde{\mathbf{B}}; \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \frac{\mathbf{u}_{n+1}}{\sqrt{1+\mathbf{u}_{n+1}^2/c^2}}; \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n}{2} \Delta t.\end{aligned}$$

Leap-frog

$$\begin{aligned}\gamma_n &= 1/\sqrt{1-\mathbf{v}_n^2/c^2}; \\ \tilde{\mathbf{E}} &\equiv \frac{Q\Delta t}{m_0} \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q}{m_0} \frac{\Delta t}{2\gamma_n} \mathbf{B}; \\ \mathbf{u}_{n-1/2} &= \frac{\mathbf{v}_{n-1/2}}{\sqrt{1-\mathbf{v}_{n-1/2}^2/c^2}}; \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{\mathbf{u}}_{n-1/2} + \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{u}}_{n-1/2} \times \tilde{\mathbf{B}}; \\ \mathbf{u}_{n+1/2} &= \tilde{\mathbf{u}} + \frac{[\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{B}}] \times \tilde{\mathbf{B}}}{1 + \tilde{\mathbf{B}}^2}; \\ \mathbf{v}_{n+1/2} &= \frac{\mathbf{u}_{n+1/2}}{\sqrt{1+\mathbf{u}_{n+1/2}^2/c^2}}; \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{u}_{n+1/2}}{\gamma_{n+1/2}} \Delta t.\end{aligned}$$

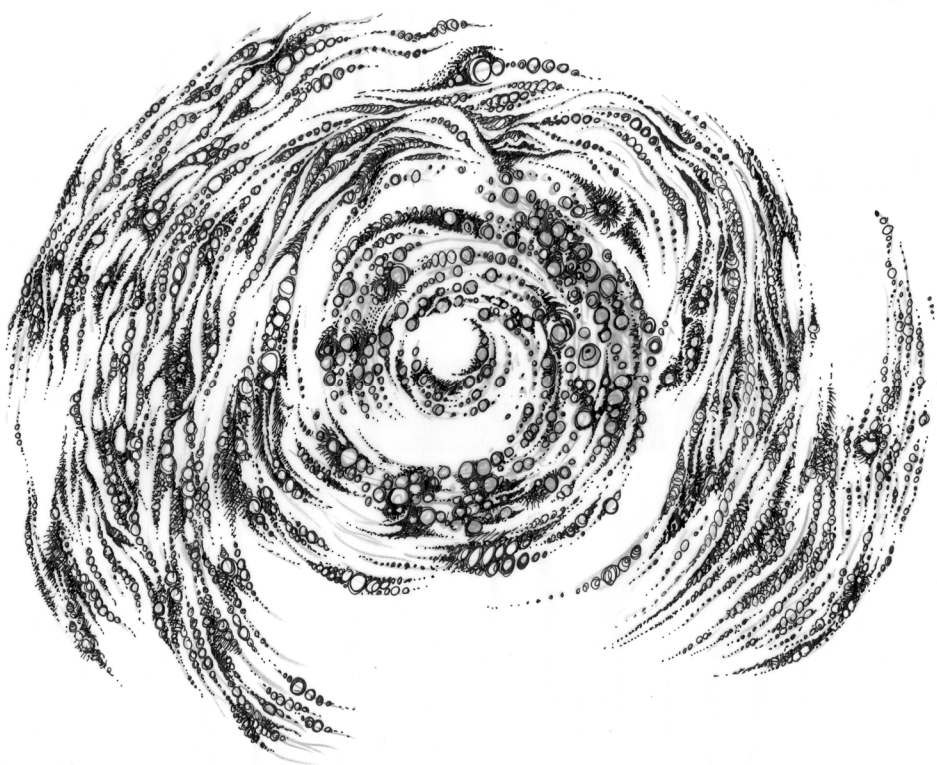
Runge-Kutta

$$\begin{aligned}\gamma_n &= 1/\sqrt{1-\mathbf{v}_n^2/c^2}; \\ \tilde{\mathbf{E}} &\equiv \frac{Q}{m} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q}{m} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}, \\ \mathbf{u}_n &= \gamma_n \mathbf{v}_n; \\ \mathbf{K}_1 &= \frac{\mathbf{u}_n}{\gamma_n}, \quad \mathbf{L}_1 = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_1 \times \tilde{\mathbf{B}}, \\ \mathbf{K}_2 &= \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{L}_1}{\gamma_{K_2}}, \quad \mathbf{L}_2 = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_2 \times \tilde{\mathbf{B}}, \\ \mathbf{K}_3 &= \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{L}_2}{\gamma_{K_3}}, \quad \mathbf{L}_3 = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_3 \times \tilde{\mathbf{B}}, \\ \mathbf{K}_4 &= \frac{\mathbf{u}_n + 2\mathbf{L}_3}{\gamma_{K_4}}, \quad \mathbf{L}_4 = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{K}_4 \times \tilde{\mathbf{B}}, \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{1}{6} \Delta t (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4), \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \frac{1}{3} (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_4), \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \frac{\mathbf{u}_{n+1}}{\sqrt{1+\mathbf{u}_{n+1}^2/c^2}}.\end{aligned}$$

Boris-Buneman

$$\begin{aligned}\gamma_n &= 1/\sqrt{1-\mathbf{v}_n^2/c^2}; \\ \tilde{\mathbf{E}} &\equiv \frac{Q}{m_0} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{B}} \equiv \frac{Q}{m_0} \frac{\Delta t}{2\gamma_n} \mathbf{B}; \\ \mathbf{u}_n &= \gamma_n \mathbf{v}_n; \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}_n + \tilde{\mathbf{E}}; \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{\mathbf{u}} + 2 \frac{(\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}}{1 + \tilde{\mathbf{B}}^2}; \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{E}}; \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \frac{\mathbf{u}_{n+1}}{\sqrt{1+\mathbf{u}_{n+1}^2/c^2}}; \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_{n+1} \Delta t.\end{aligned}$$

2. Statistický popis plazmatu



Při popisu typického plazmatu je technicky nemožné popsat trajektorie všech částic. Jen v řídkém plazmatu mezihvězdného prostoru nalezneme miliony částic v jednom metru krychlovém, v tokamacích 10^{18} částic v m^3 a v jádru Slunce dokonce 10^{31} částic v m^3 . Pro tak obrovské systémy částic je mnohdy výhodné využívat statistický popis a spokojit se jen s informací o statistickém rozdělení jednotlivých druhů částic a o jejich průměrném chování jakožto celku. Statistickým popisem plazmatu se budeme zabývat v této kapitole.

2.1 Boltzmannova rovnice

Předpokládejme, že systém může být složen z několika druhů částic (elektrony, neutrály, ionty), které budeme označovat indexem α . V celé této kapitole platí sčítací konvence pro indexy psané latinkou (i, j, k, \dots). Neplatí pro řecké indexy popisující druh částic. Označme hustotu pravděpodobnosti výskytu částic druhu α

$$f_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha).$$

V termodynamické rovnováze nezávisí hustota pravděpodobnosti na čase a splývá s kanonickou nebo grandkanonickou rozdělovací funkcí ρ [3]. Hustotu pravděpodobnosti závislou na čase budeme normovat vzhledem k počtu částic, tj.

$$\begin{aligned} \int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{v}_\alpha &= n_\alpha(t, \mathbf{x}), \\ \int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v}_\alpha &= N_\alpha(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Integrováním přes rychlostní prostor získáme koncentraci částic

$$n_\alpha = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta N_\alpha / \Delta V \quad (2.2)$$

a dostaneme se tak na pozici kontinua. Dalším středováním přes prostorové proměnné získáme celkový počet částic N_α . Při středování obecné proměnné A musíme vzhledem ke způsobu normování pravděpodobnosti výsledek dělit součtem všech pravděpodobností:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, \mathbf{x}) = \langle A \rangle_{\mathbf{v}} &= \frac{\int A f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{v}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{v}_\alpha}; \\ A(t) = \langle A \rangle_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} &= \frac{\int A f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v}_\alpha}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Veličina $\mathcal{A}(t, \mathbf{x})$ má význam hustoty veličiny A . Díky normování je

$$\int A f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{v}_\alpha = n_\alpha(t, \mathbf{x}) \mathcal{A}(t, \mathbf{x}). \quad (2.4)$$

2.1.1 Různé varianty Boltzmannovy rovnice

Hustota pravděpodobnosti výskytu částic druhu α se s časem mění z důvodu srážek částic se sebou samými i s ostatními druhy:

$$\frac{d}{dt} f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\alpha}) = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}.$$

Členy napravo se nazývají Boltzmannovy srážkové integrály a budou diskutovány v následující kapitole. Rozepíšme úplnou derivaci na levé straně:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_{k\alpha}} \frac{dv_{k\alpha}}{dt} = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}.$$

Sumační konvence platí v předchozím vztahu jen pro indexy psané latinkou, pro řecké nikoli. Časové derivace poloh jsou rychlosti a časové derivace rychlostí jsou zrychlení, která vyjádříme pomocí síly z druhého Newtonova zákona:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + v_{k\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_k} + \frac{F_{k\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_{k\alpha}} = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}.$$

Členy přes které se sčítá na levé straně, zapíšeme jako působící operátory:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_{\alpha} + \frac{1}{m_{\alpha}} (\mathbf{F}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) f_{\alpha} = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}. \quad (2.5)$$

Získaná rovnice se nazývá Boltzmannova rovnice a je základní rovnicí statistiky nerovnovážných procesů. Členy na pravé straně se nazývají Boltzmannův srážkový integrál (lze je vyjádřit jako integrál přes část fázového prostoru). Podle možných způsobů vyjádření srážkového integrálu tuto rovnici nazýváme různými způsoby:

Boltzmannova rovnice

Srážky jsou zcela obecné a vyjadřují se pomocí srážkového integrálu (kapitola 2.1.2). Boltzmannova rovnice je pojmenována podle Ludwiga Boltzmann (1844–1906), rakouského fyzika a zakladatele statistické fyziky.

Fokkerova-Planckova rovnice, Landauova rovnice

Srážkový člen započítává jen párové Coulombovy interakce, pro které je účinný průřez dobře znám. Rovnice je pojmenována podle Adriaana Daniěla Fokkera (1887–1972), holandského fyzika a muzikanta a podle Maxe Plancka (1858–1947), rakouského fyzika a jednoho ze zakladatelů kvantové teorie. Velmi příbuznou variantou Fokkerovy Planckovy rovnice je *Landauova rovnice*.

Jako dolní mez párových Coulombových srážek zvolíme záměrnou vzdálenost, při které se srážející se částice odchýlí o pravý úhel (srážky na menší vzdálenosti jsou málo pravděpodobné) a jako maximální záměrnou vzdálenost srážky Debyeovu vzdálenost (vzdálenost přirozeného stínění bodových zdrojů). Rovnice je pojmenována podle Lva

Davidoviče Landaua (1908–1968), sovětského teoretického fyzika a nositele Nobelovy ceny za fyziku pro rok 1962.

BGK rovnice

Předpokládáme, že systém není příliš daleko od lokální termodynamické rovnováhy f_{LE} a srážky způsobují jeho návrat do této rovnováhy, srážkový člen má jednoduchý tvar

$$S_\alpha \approx (\Delta f_\alpha / \Delta t)_{col} = -(f_\alpha - f_{LE}) / \tau_c = -\nu_c (f_\alpha - f_{LE}),$$

kde τ_c je střední doba mezi srážkami a ν_c je srážková frekvence (charakteristická konstanta). Rovnice je pojmenována podle autorů, jimiž jsou indický matematik Prabhu Lal Bhatnagar (1912–1976), americký teoretický fyzik Eugene Gross (1926–1991) a americký matematik a astrofyzik Max Krook (1913–1985).

Vlasovova rovnice

Srážky nemají vliv nebo je zanedbáváme (na pravé straně je nula) a působící silou je jen Lorentzova síla. Jde o nejméně přesnou, ale nejčastěji používanou aproximaci. Rovnice je pojmenována podle Anatolie Alexandroviče Vlasova (1908–1975), sovětského teoretického fyzika, který se po většinu života věnoval statistické fyzice.

❶ **Příklad 3:** Ukažte, že stacionární řešení Boltzmannovy (Vlasovovy) rovnice vede na kanonické rozdělení. Řešte v jedné dimenzi, pro jediný druh částic, které nepodléhají srážkám a pro potenciální silové pole $F = -dV/dx$.

Řešení: Z Boltzmannovy rovnice v tomto případě zbude

$$v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{dV}{dx} \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Rovnici řešíme substitucí $f(x, v) = F(x)G(v)$. Pokusíme se separovat proměnné:

$$v \frac{dF}{dx} G - \frac{1}{m} \frac{dV}{dx} F \frac{dG}{dv} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{F dx} = \frac{1}{m} \frac{dG}{G dv}.$$

Na levé straně rovnosti jsou všechny proměnné funkcí souřadnice, na pravé straně funkcí rychlosti. Je zřejmé, že mají-li se sobě rovnat dvě funkce různých proměnných, musí být obě konstantní:

$$\begin{aligned} \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = C &\Rightarrow \frac{dF}{F} = C dx \Rightarrow F(x) = K_x \exp[CV(x)]; \\ \frac{1}{mGv} \frac{dG}{dv} = C &\Rightarrow \frac{dG}{G} = C m v dv \Rightarrow G(v) = K_v \exp[Cm v^2/2]. \end{aligned}$$

Celkové řešení je

$$f(x, v) = F(x) \cdot G(v) = K \exp \left[C \left(m v^2 / 2 + V(x) \right) \right].$$

Řešení má skutečně charakter kanonického rozdělení. Hodnotu koeficientu C bychom zjistili porovnáním s termodynamikou, stejně jako při odvození kanonického rozdělení v učebnicích statistiky, například v [3]. Vyjde

$$C = -1/k_B T. \quad (2.6)$$

Poznámka (Sahova rovnice): Z rovnovážného rozdělení a kvazineutality plyne okamžitě rovnice pro poměrné zastoupení iontů různé násobnosti v plazmatu. Tuto rovnici poprvé odvodil indický astrofyzik Mehd Nad Saha (1893–1956) v roce 1920 a nezávisle na něm v roce 1923 také americký fyzik a chemik Irving Langmuir (1881–1957). Dnes se zapisuje ve tvaru

$$\frac{n_{i+1}n_e}{n_i} = C \frac{g_{i+1}g_e}{g_i} \exp\left[-\frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{k_B T}\right]; \quad (2.7)$$

$$C = \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3},$$

kde g_i je stupeň degenerace pro ionty násobnosti i , g_e je stupeň degenerace elektronů, zpravidla se pokládá roven 2, ε_i je energie potřebná k vytvoření iontu násobnosti i (k odstranění i elektronů z obalu, $i = 0$ odpovídá neutrálům). Faktor $(2\pi\hbar)^3$ je velikost jednoho kvantového stavu elektronu ve fázovém prostoru, podrobněji viz [3]. *Sahova rovnice* se často používá pro určení koncentrace elektronů při jednonásobné ionizaci, kdy $n_i = n_e$:

$$\frac{n_e^2}{n_n} = C \frac{2g_1}{g_0} \exp\left[-\frac{I}{k_B T}\right], \quad (2.8)$$

kde I je ionizační energie.

Boltzmannova rovnice v chaotických rychlostech

Vždy musíme rozlišovat mezi třemi rychlostmi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha & \text{ fázová proměnná,} \\ \mathbf{u}_\alpha(t, \mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle & \text{ rychlostní pole (průměrná, středovaná rychlost),} \\ \mathbf{w}_\alpha \equiv \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha & \text{ chaotická (tepelná) složka rychlosti.} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Doposud jsme využívali fázový prostor se sedmi proměnnými $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)$. Fázová rychlost obsahuje část odpovídající proudění i tepelnou část $(\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha)$. Někdy je výhodné pracovat s proměnnými obsahujícími jen tepelnou část pohybu, tj. provést transformaci

$$(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) \rightarrow (t, \mathbf{x}, \mathbf{w}_\alpha).$$

V Boltzmannově rovnici potom musíme nahradit derivace a rychlosti podle schématu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial w_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w_k} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial u_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w_k}, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial w_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial w_k}, \\ \frac{\partial}{\partial v_j} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial w_j}, \\ v_j &\rightarrow w_j + u_j(t, \mathbf{x}).\end{aligned}$$

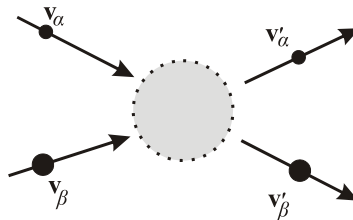
Výsledek je

$$\begin{aligned}\frac{df_\alpha}{dt} + (\mathbf{w}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\alpha + \left(\frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} - \frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{w}_\alpha} - \\ - [(\mathbf{w}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{u}_\alpha] \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{w}_\alpha} = \sum_\beta S_{\alpha\beta},\end{aligned}\quad (2.10)$$

kde $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$.

2.1.2 Boltzmannův srážkový člen

V této kapitole se budeme zabývat pravou stranou Boltzmannovy rovnice, tedy srážkami. Předpokládejme pružnou srážku dvou částic α a β .



Obr. 29: Srážka dvou částic.

Nejprve přejdeme od rychlostí částic \mathbf{v}_α a \mathbf{v}_β k relativní rychlosti \mathbf{g} (někdy ji označujeme $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$) a těžišťové rychlosti \mathbf{v}_T (někdy ji označujeme $\mathbf{v}_{(\alpha\beta)}$). Transformace jedním směrem má jednoduchý tvar:

$$\begin{aligned}\mathbf{g} \equiv \mathbf{v}_{\alpha\beta} &= \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta; \\ \mathbf{v}_T \equiv \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} &= \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta}{m_\alpha + m_\beta}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Determinant matice transformace je roven jedné, proto nalezneme inverzní matici tak, že ke každému prvku určíme subdeterminant, opatříme ho znaménkem a matici transponujeme:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha &= \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta} ; \\ \mathbf{v}_\beta &= \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Zformulujme v nových proměnných zákon zachování energie a hybnosti:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta = (m_\alpha + m_\beta) \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} = \text{const}, \\ E &= \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\beta \mathbf{v}_\beta^2 = \frac{1}{2} (m_\alpha + m_\beta) \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta}^2 = \text{const} . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Zákon zachování hybnosti vede na zachování těžišťové rychlosti. Zákon zachování energie v kombinaci se zákonem zachování hybnosti vede na zachování velikosti vzájemné rychlosti:

- Těžišťová rychlost obou částic se při srážce nemění.
- Velikost vzájemné rychlosti dvou částic se při srážce nemění.



$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} &= \text{const} , \\ |\mathbf{v}_{\alpha\beta}| &= \text{const} . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Jediná veličina, která se při srážce mění, je směr vzájemné rychlosti. Zavedme proto dvě nové veličiny charakterizující srážku:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\equiv |\mathbf{v}_{\alpha\beta}| ; \\ \mathbf{k}_{\alpha\beta} &\equiv \frac{\mathbf{v}_{\alpha\beta}}{|\mathbf{v}_{\alpha\beta}|} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

První veličina je velikost vzájemné rychlosti a po celou dobu srážky se nemění, tj. platí $g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta}$. Druhá veličina je směr vzájemné rychlosti a představuje 2 stupně volnosti srážky (dvě složky vektoru \mathbf{k} , třetí lze dopočítat, protože jde o vektor jednotkový). V literatuře se často označuje vzájemná rychlost symbolem \mathbf{g} , neboli $\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha\beta}$.

Účinný průřez srážky

Standardně se zavádí účinný průřez srážky částic druhu α nalétávajících na částice druhu β pomocí vztahu pro srážkovou frekvenci

$$v_\alpha = \sum_\beta v_{\alpha\beta} = \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} n_\beta \bar{v}_{\alpha\beta} . \quad (2.16)$$

Účinný průřez je definován jako „účinná plocha“ částice β na kterou nalétává částice α . Frekvence srážek je pak samozřejmě úměrná účinnému průřezu, průměrné hodnotě vzájemné rychlosti obou druhů částic a koncentraci cílových částic. V našem případě srážky dvou částic zavedeme účinný průřez zcela analogicky – půjde o podmíněnou pravděpodobnost (za podmínky konstantního $g_{\alpha\beta}$), kterou označíme

$$\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta} ; g_{\alpha\beta})$$

a která je normována tak, aby

$$\frac{dw}{dt} = g_{\alpha\beta} \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} \quad (2.17)$$

byla časová změna podmíněně pravděpodobnosti, že jednotkový vektor ve směru relativní rychlosti bude po srážce ležet v intervalu $(\mathbf{k}'_{\alpha\beta}, \mathbf{k}'_{\alpha\beta} + d\mathbf{k}'_{\alpha\beta})$. Účinný průřez se nemění při:

- obrácení pohybu částic: $\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) = \sigma(-\mathbf{k}'_{\alpha\beta} | -\mathbf{k}_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta})$,
- při inverzi souř. soustavy: $\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) = \sigma(-\mathbf{k}_{\alpha\beta} | -\mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta})$.

Z obou vlastností plyne důležitý symetrický vztah

$$\blacktriangleright \quad \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) = \sigma(\mathbf{k}'_{\alpha\beta} | \mathbf{k}_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}). \quad (2.18)$$

Boltzmannův srážkový integrál

Nyní již můžeme napsat srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice jako

$$S_{\alpha\beta} = \int \left[f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_{\alpha}) f_{\beta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_{\beta}) - f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\alpha}) f_{\beta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta}) \right] \cdot g_{\alpha\beta} \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\beta}. \quad (2.19)$$

Interpretace je zřejmá. Pravděpodobnost srážky dvou částic je úměrná součinu hustot pravděpodobností obou částic (tj. výskytu částic v daném místě fázového prostoru) násobené účinným průřezem srážky. První člen popisuje příznivé jevy, kdy ze všech ostatních oblastí fázového prostoru se po srážce částice dostanou do daného místa fázového prostoru. Druhý člen jsou nepříznivé případy, kdy částice z daného místa fázového prostoru po srážce uniknou. Integrace je provedena přes volné parametry srážky. Díky vlastnosti (2.18) bylo možné oba účinné průřezy zapsat jednotně a vytknout z hranaté závorky. Srážkový člen ve tvaru (2.19) znamená automatický předpoklad, že pár interagujících částic *není nijak korelovaný*. Tento předpoklad někdy nazýváme podmínkou *molekulárního chaosu*.

Srážkový invariant

Označme ψ_{α} nějaký sumační invariant (hmotnost, hybnost, energie), pro který platí

$$\psi_{\alpha} + \psi_{\beta} = \psi'_{\alpha} + \psi'_{\beta}. \quad (2.20)$$

Potom pro srážkový člen platí velmi důležitý vztah

$$\blacktriangleright \quad \sum_{\alpha, \beta} \int \psi_{\alpha} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} = 0. \quad (2.21)$$

Důkaz tohoto vztahu je sice jednoduchý, ale poněkud pracný, a proto ho může čtenář, kterému nejde o detaily, vynechat.

Důkaz:

$$S = \sum_{\alpha, \beta} \int \psi_{\alpha} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} = \\ = \sum_{\alpha\beta} \int \psi_{\alpha} [f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta}] \cdot g_{\alpha\beta} \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\beta}.$$

V integraci provedeme transformaci k těžišťové a relativní rychlosti podle schématu

$$d^3 \mathbf{v}_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\beta} = d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} d^3 \mathbf{v}_{\alpha\beta} = d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} g_{\alpha\beta}^2 dg_{\alpha\beta} d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta},$$

kde v elementu $d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta}$ jsou zahrnuty veškeré úhlové závislosti. Výsledek bude

$$S = \sum_{\alpha\beta} \int \psi_{\alpha} [f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta}] g_{\alpha\beta}^3 \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}.$$

Nyní zaměníme čárkované a nečárkované veličiny a použijeme relace

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}; \quad \mathbf{v}'_{(\alpha\beta)} = \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}; \quad \sigma(\mathbf{k} | \mathbf{k}'; g_{\alpha\beta}) = \sigma(\mathbf{k}' | \mathbf{k}; g_{\alpha\beta}).$$

Výsledek bude

$$S = \sum_{\alpha\beta} \int \psi'_{\alpha} [f_{\alpha} f_{\beta} - f'_{\alpha} f'_{\beta}] g_{\alpha\beta}^3 \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}.$$

Jako další krok provedeme symetrizaci: napíšeme výsledek jako polovinu posledního kroku a polovinu předposledního:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int (\psi_{\alpha} - \psi'_{\alpha}) [f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta}] g_{\alpha\beta}^3 \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}.$$

V dalším kroku zaměníme indexy α a β a opět provedeme symetrizaci:

$$S = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} \int (\psi_{\alpha} + \psi_{\beta} - \psi'_{\alpha} - \psi'_{\beta}) [f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta}] g_{\alpha\beta}^3 \sigma(\dots) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}.$$

Pro sumační invarianty je ale první závorka nulová a proto $S = 0$.

■

2.1.3 Rovnice přenosu (momentová rovnice)

Často nepotřebujeme pravděpodobnostní informace o celém fázovém prostoru, ale postačí nám informace jen o vývoji dynamických proměnných v čase a v poloze. Přes informace o rozložení v rychlostech je možné vystředovat. Nezapomeňte, že pravděpodobnosti jsou normovány k počtu částic a proto podle (2.3) je

$$\mathbf{u}_{\alpha}(t, \mathbf{x}) = \frac{\int \mathbf{v}_{\alpha} f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\alpha}) d^3 \mathbf{v}_{\alpha}}{\int f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\alpha}) d^3 \mathbf{v}_{\alpha}}.$$

Ztráta informace o proměnné \mathbf{v}_α způsobená středováním vede od statistiky k rovnicím kontinua. Vynásobme Boltzmannovu rovnici (2.5) libovolnou funkcí rychlosti $\phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)$ (může, ale nemusí jít o sumační invariant). Nakonec rovnici vystředujeme přes rychlostní proměnné:

$$\begin{aligned} \int \phi_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3 \mathbf{v}_\alpha + \int \phi_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha + \int \frac{\phi_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha = \\ = \int \phi_\alpha \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_\alpha . \end{aligned}$$

Postupně nyní upravíme všechny tři členy na levé straně:

První člen:

$$\int \phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3 \mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \int \phi_\alpha f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} n_\alpha(t, \mathbf{x}) \langle \phi_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \langle n_\alpha \phi_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} .$$

Druhý člen:

$$\begin{aligned} \int \phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) v_{\alpha k} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} d^3 \mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_k} \int \phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) v_{\alpha k} f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_k} n_\alpha(t, \mathbf{x}) \langle \phi_\alpha v_{\alpha k} \rangle_{\mathbf{v}} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} \langle n_\alpha \phi_\alpha v_{\alpha k} \rangle_{\mathbf{v}} . \end{aligned}$$

Třetí člen:

$$\begin{aligned} \int \frac{\phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)}{m_\alpha} F_{\alpha k}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha k}} d^3 \mathbf{v}_\alpha \stackrel{(p.p.)}{=} \\ = \left[\frac{\phi_\alpha F_{\alpha k} f_\alpha}{m_\alpha} v_k \right]_{\partial\Omega} - \frac{1}{m_\alpha} \int \frac{\partial}{\partial v_{\alpha k}} [\phi_\alpha F_{\alpha k}] f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha = \\ = - \frac{1}{m_\alpha} \left\langle n_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} (\phi_\alpha \mathbf{F}_\alpha) \right\rangle_{\mathbf{v}} . \end{aligned}$$

Při úpravě třetího členu musíme předpokládat, že silové pole může být i funkcí rychlostí (například magnetická složka Lorentzovy síly). Provedli jsme integraci per partes. První člen je nulový, protože na hranicích oblasti předpokládáme nulové hustoty pravděpodobnosti výskytu částic, symbolem v_k je označen vektor normály. Středováním přes rychlostní prostor z Boltzmannovy rovnice zůstane

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle n_\alpha \phi_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle n_\alpha \phi_\alpha v_{i\alpha} \rangle_{\mathbf{v}} - \frac{1}{m_\alpha} \left\langle n_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} (\phi_\alpha \mathbf{F}_\alpha) \right\rangle_{\mathbf{v}} = \\ = \int \phi_\alpha \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_\alpha . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Jde o rovnici přenosu (neboli momentovou rovnici), která je základem *teorie kontinua*. Než si o této rovnici řekneme trochu více, napíšeme ji pro elektromagnetickou interakci

$$\mathbf{F}_\alpha = Q_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}.$$

Při derivování třetího členu v rychlostech musíme přejít buď ke složkám nebo využít definice vektorového součinu přes Levi-Civitův tenzor. Postup je přímočarý s výsledkem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle n_\alpha \phi_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle n_\alpha \phi_\alpha \mathbf{v}_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} - \frac{Q_\alpha}{m_\alpha} \left\langle n_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right\rangle_{\mathbf{v}} = \\ = \int \phi_\alpha \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_\alpha. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Poznámka 1: Statistická fyzika využívá proměnné $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)$. Po středování přes rychlostní prostor ztrácíme část informace. Vystředované proměnné jsou jen funkcí (t, \mathbf{x}) . Sama střední hodnota rychlosti $\mathbf{u}_\alpha(t, \mathbf{x})$ se ale v rovnicích kontinua samozřejmě objevuje. Ztrácíme jen statistickou informaci o rychlostní části fázového prostoru.

Poznámka 2: Celá rovnice přenosu má tvar rovnice kontinuity. První člen je časová derivace hustoty aditivní veličiny, pak následuje divergence toku veličiny. Třetí člen odpovídá zdrojovým členům od polí a pravá strana zdrojovým členům od srážek. Proto se rovnici říká *rovnice přenosu* – popisuje, jak tečou (přenášá se) různé veličiny.

Poznámka 3: V rovnici přenosu je volná funkce rychlosti ϕ_α . Za ní se dosazují různé mocniny rychlosti a tím získáváme tzv. momenty Boltzmannovy rovnice. Proto se rovnici přenosu říká *momentová rovnice*.

Poznámka 4: Pokud byla funkce ϕ_α sumačním invariantem, bude po sečtení všech rovnic (2.23) pravá strana nulová, tj. členy od srážek se vyruší. Plyne to okamžitě ze vztahu (2.21):

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \langle n_\alpha \phi_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle n_\alpha \phi_\alpha \mathbf{v}_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} - \frac{Q_\alpha n_\alpha}{m_\alpha} \left\langle (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right\rangle_{\mathbf{v}} = 0.$$

Tomuto přiblížení říkáme *jednotekutinový model* a velmi často se používá.

Poznámka 5: Pro nulový moment můžeme položit ϕ_α rovno m_α a v jednotekutinovém přiblížení dostaneme rovnici kontinuity:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i = 0; \quad \rho \equiv \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}, \quad \mathbf{j} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}.$$

Z rovnice kontinuity počítáme časový vývoj hustoty (nulého momentu Boltzmannovy rovnice). Ve druhém členu se ale objevila nová veličina – tok hmoty \mathbf{j} obsahující střední hodnotu rychlosti proudění. Proto musíme mít i rovnici pro časový vývoj toku hmoty (hustoty hybnosti) neboli pohybovou rovnici. Získáme ji jako první moment Boltzmannovy rovnice položením $\phi_\alpha = m_\alpha v_{i\alpha}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{\partial}{\partial x_j} P_{ij} = 0.$$

V pohybové rovnici se objevuje další nová veličina – tenzor tlaku. Obsahuje dynamický tlak (tok hybnosti), běžný tlak látky (skalární složka odpovídající chaotickému pohybu), viskozitu (tenzorová část tlaku) a u elektromagnetické interakce Maxwellův tenzor pnutí (tlak způsobený přítomností elektromagnetických polí). Jako další moment Boltzmannovy rovnice získáme rovnici pro časový vývoj tenzoru tlaku (odpovídá rovnici pro přenos energie, jde o kvadráty rychlostí):

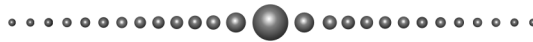
$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} Q_{ijk} = 0.$$

V druhém členu se opět objevuje nová veličina popisující tepelný tok. V této proceduře bychom mohli pokračovat libovolně daleko a získáme tak nekonečnou posloupnost momentových rovnic pro kontinuum. V praxi se soustava uzavírá nějakým algebraickým vztahem (například Fourierovým zákonem pro tepelný tok) po konečném počtu momentů.

Poznámka 6: V teorii plazmatu se často využívá i vícetekutinový model (plazma se skládá z tekutiny elektronů, tekutin různých typů iontů a tekutiny neutrálních částic). V tomto přiblížení nevymizí srážkové členy a je třeba s nimi počítat.

Poznámka 7: Chceme-li úplnější informaci o systému, musíme řešit Boltzmannovu rovnici doplněnou o příslušné polní rovnice. Postačí-li nám informace na úrovni kontinua, opíráme naše výpočty o soustavu momentových rovnic.

V následující kapitole odvodíme první tři momenty Boltzmannovy rovnice a přepíšeme je pomocí střední rychlosti proudění $\mathbf{u}_\alpha \equiv \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle$ a tepelné rychlosti $\mathbf{w}_\alpha \equiv \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha$. V momentové rovnici (2.23) dosadíme za ϕ_α postupně funkce $m_\alpha(Q_\alpha)$, $m_\alpha v_{\alpha k}$ a $m_\alpha v_\alpha^2/2$ a poté rychlost rozdělíme na uspořádanou a tepelnou část $v_{\alpha k} = u_{\alpha k} + w_{\alpha k}$. Nezapomeňte, že pro tepelnou část platí $\langle \mathbf{w}_\alpha \rangle = 0$.



2.2 Přechod od statistiky ke kontinuu

2.2.1 Nultý moment (zachování náboje) – částice

Za funkci ϕ_α postupně dosadíme skaláry m_α , Q_α a 1. Tím dostaneme zákony zachování hmotnosti, náboje a počtu částic. Pro nultý moment jsou srážkové členy všech pravých stran nulové, protože funkce ϕ_α nezávisí na rychlosti a tvrzení (2.21) by platilo i bez sumaci přes α . Je to vyjádřením faktu, že se Coulombovou srážkou nemění hmotnost, náboj ani počet částic. Výsledné zákony zachování (rovnice kontinuity) jsou:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_{m,\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial j_k^{(m,\alpha)}}{\partial x_k} = 0, \\ \blacktriangleright & \frac{\partial \rho_{Q,\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial j_k^{(Q,\alpha)}}{\partial x_k} = 0, \quad \alpha = e, i, ii, n, \dots \quad (2.24) \\ & \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial n_\alpha u_{\alpha k}}{\partial x_k} = 0. \end{aligned}$$

Připomeňme, že v celé této kapitole platí sčítací konvence pro indexy psané latinkou (i, j, k, \dots). Neplatí však pro řecké indexy popisující druh částic. Pokud bude potřeba index napsat do horní části symbolu, umístíme ho do závorky, aby se odlišil od mocniny. Kurzívou jsou sázeny jen proměnné, do kterých lze dosadit. Někdy je namísto složkového zápisu vhodný invariantní zápis (nezávislý na zvolené souřadnicové bázi):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_{m,\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{m,\alpha} = 0, \\ \blacktriangleright & \frac{\partial \rho_{Q,\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{Q,\alpha} = 0, \quad \alpha = e, i, ii, n, \dots \quad (2.25) \\ & \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0. \end{aligned}$$

V časových derivacích vystupuje postupně hustota hmoty, hustota náboje a koncentrace částic druhu α . V prostorových derivacích je tok hmoty, tok náboje a tok počtu částic druhu α . Všechny tyto veličiny jsou již jen funkcí času a prostoru a jsou definovány vztahy (použijeme jen invariantní zápis):

$$\begin{aligned} \rho_{m,\alpha} &= m_\alpha n_\alpha = \int m_\alpha f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha, \\ \rho_{Q,\alpha} &= Q_\alpha n_\alpha = \int Q_\alpha f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha, \\ \mathbf{j}_{m,\alpha} &= m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \int m_\alpha \mathbf{v}_\alpha f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha, \\ \mathbf{j}_{Q,\alpha} &= Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \int Q_\alpha \mathbf{v}_\alpha f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Po sečtení momentových rovnic pro všechny druhy částic (přes α) získáme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m &= 0, \\ \frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_Q &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) &= 0,\end{aligned}\tag{2.27}$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned}\rho_m &\equiv \sum_{\alpha} \rho_{m,\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}, & \mathbf{j}_m &\equiv \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{m,\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}, \\ \rho_Q &\equiv \sum_{\alpha} \rho_{Q,\alpha} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha}, & \mathbf{j}_Q &\equiv \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{Q,\alpha} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}, \\ n &\equiv \sum_{\alpha} n_{\alpha}, & \mathbf{u} &\equiv \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

2.2.2 Nultý moment (zachování náboje) – pole

Výpočet polí pro Boltzmannovu nebo momentovou rovnici vychází ze soustavy Maxwellových rovnic

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \tag{2.29}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{2.30}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2.31}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{2.32}$$

Zdrojové členy jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}\rho_Q &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int Q_{\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}, \\ \mathbf{j}_Q &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int Q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Zdrojové členy Maxwellových rovnic jsou v souladu s nultým momentem Boltzmannovy rovnice. Pokud derivujeme rovnici (2.29) podle času a sečteme ji s divergencí rovnice (2.32), obdržíme zákon zachování náboje

►
$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_Q = 0,$$

který jsme již odvodili jako nultý moment (2.27) Boltzmannovy rovnice.

V odvození dalších momentů budeme předpokládat, že v plazmatu platí lineární závislost mezi oběma elektrickými vektory \mathbf{E} a \mathbf{D} oběma magnetickými vektory \mathbf{B} a \mathbf{H} .

2.2.3 První moment (zachování hybnosti) – částice

Do momentové rovnice nyní dosadíme za ϕ_α vztah pro l -tou složku hybnosti $\phi_\alpha = m_\alpha v_{\alpha l}$, která je sumačním invariantem. Po dosazení budou mít momentové rovnice pro jednotlivé druhy částic tvar:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha m_\alpha u_{\alpha l}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (n_\alpha m_\alpha \langle v_{\alpha l} v_{\alpha k} \rangle_{\mathbf{v}}) = n_\alpha Q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B})_l + \int m_\alpha v_{\alpha l} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_\alpha .$$

První člen je časovou změnou hustoty hybnosti částic druhu α . Druhý člen je prostorovou derivací toku hybnosti. Tok hybnosti je tenzorem druhého řádu, neboť každá složka hybnosti může téct ve třech nezávislých směrech. V tomto členu rozepíšeme rychlosti na chaotickou a uspořádanou část dle vztahu $v_{\alpha k} = u_{\alpha k} + w_{\alpha k}$ a roznásobíme. Členy úměrné první mocnině chaotické rychlosti mají nulovou střední hodnotu a vypadnou. Zůstanou jen dva členy. První souvisí s uspořádanou složkou rychlosti a nazýváme ho dynamický tlak D_{kl} . Druhý souvisí s chaotickým pohybem a nazýváme ho tenzor tlaku P_{kl} . Celá levá strana má tvar rovnice kontinuity a tedy tvar zákona zachování l -té složky hybnosti. Nenulové členy na pravé straně znamenají, že se hybnost nezachovává. První člen popisuje nezachování způsobené přítomností polí (elektromagnetické pole předává hybnost částicím) a druhý nezachování hybnosti způsobené srážkami. Výsledný vztah tedy je:

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{\alpha l} + \frac{\partial}{\partial x_k} T_{lk}^{(\alpha)} = f_{\alpha l} + \Gamma_{\alpha l} , \quad (2.34)$$

kde jednotlivé členy jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha l} &\equiv n_\alpha m_\alpha u_{\alpha l} = m_\alpha \int v_{\alpha l} f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha ; \\ T_{lk}^{(\alpha)} &\equiv n_\alpha m_\alpha u_{\alpha l} u_{\alpha k} + n_\alpha m_\alpha \langle w_{\alpha l} w_{\alpha k} \rangle_{\mathbf{v}} = D_{lk}^{(\alpha)} + P_{lk}^{(\alpha)} ; \\ D_{lk}^{(\alpha)} &\equiv n_\alpha m_\alpha u_{\alpha l} u_{\alpha k} ; \\ P_{lk}^{(\alpha)} &\equiv n_\alpha m_\alpha \langle w_{\alpha l} w_{\alpha k} \rangle_{\mathbf{v}} = m_\alpha \int (v_{\alpha l} - u_{\alpha l})(v_{\alpha k} - u_{\alpha k}) f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha ; \\ f_{\alpha l} &\equiv n_\alpha Q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B})_l = (\rho_{Q,\alpha} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{Q,\alpha} \times \mathbf{B})_l ; \\ \Gamma_{\alpha l} &\equiv m_\alpha \int v_{\alpha l} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_\alpha . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Členy jsou vázány na druh částic α a postupně mají význam: hustota hybnosti, tenzor toku hybnosti, tenzor dynamického tlaku, tenzor tlaku, hustota Lorentzovy síly, časová změna hustoty hybnosti způsobená srážkami. Zapišme nyní zákon zachování hybnosti částic druhu α invariantně:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\gamma}_\alpha + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha + \boldsymbol{\Gamma}_\alpha, \quad (2.36)$$

kde pro jednotlivé členy nyní máme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_\alpha &\equiv n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha = m_\alpha \int \mathbf{v}_\alpha f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha; \\ \bar{\mathbf{T}}_\alpha &\equiv n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha + n_\alpha m_\alpha \langle \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{D}}_\alpha + \bar{\mathbf{P}}_\alpha; \\ \bar{\mathbf{D}}_\alpha &\equiv n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha; \\ \bar{\mathbf{P}}_\alpha &\equiv n_\alpha m_\alpha \langle \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} = m_\alpha \int (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha) \otimes (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha) f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha; \\ \mathbf{f}_\alpha &\equiv \rho_{Q,\alpha} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{Q,\alpha} \times \mathbf{B}; \\ \boldsymbol{\Gamma}_\alpha &\equiv \int m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_\alpha. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Často bývá zvykem tenzor tlaku související s chaotickou složkou rychlosti formálně rozdělit na dvě části tak, aby jedna část představovala skalární tlak a druhá (tenzorová) měla nulovou stopu. Tato část odpovídá viskozitě a viskózní tenzor se označuje záporným znaménkem (působí proti toku hybnosti):

$$\begin{aligned} P_{lk}^{(\alpha)} &\equiv p_\alpha \delta_{lk} - V_{lk}^{(\alpha)} = \frac{1}{3} n_\alpha m_\alpha \langle w_\alpha^2 \rangle_{\mathbf{v}} \delta_{lk} - n_\alpha m_\alpha \left\langle \frac{1}{3} w_\alpha^2 \delta_{lk} - w_{\alpha l} w_{\alpha k} \right\rangle_{\mathbf{v}}; \\ \bar{\mathbf{P}}_\alpha &\equiv p_\alpha \bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{V}}_\alpha = \frac{1}{3} n_\alpha m_\alpha \langle w_\alpha^2 \rangle_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{I}} - n_\alpha m_\alpha \left\langle \frac{1}{3} w_\alpha^2 \bar{\mathbf{I}} - \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha \right\rangle_{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Pokud chceme plazma chápat jako jednu jedinou tekutinu, sečteme všechny rovnice (2.36). Vzhledem k tomu, že funkce ϕ_α byla sumačním invariantem, srážky se vyruší a získáme jednoduchý tvar zákona zachování hybnosti, který již uvedeme jen v invarianním tvaru

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\gamma}_P + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}_P = \mathbf{f}; \quad (2.39)$$

kde pro jednotlivé členy máme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_P &\equiv \sum_{\alpha} n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \\ \bar{\mathbf{T}}_P &\equiv \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha} (n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha) + \sum_{\alpha} (n_\alpha m_\alpha \langle \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha \rangle_{\mathbf{v}}), \\ \mathbf{f} &\equiv \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Index P znamená, že jde o částice (Particles). Obdobný zákon zachování také odvodíme pro pole. Hustota Lorentzovy síly na pravé straně je časovou změnou hustoty hybnosti, kterou pole předává částicím. Šipky nad vektory jsou v některých výrazech proto, aby nedošlo k záměně s tenzory.

2.2.4 První moment (zachování hybnosti) – pole

Elektromagnetické pole můžeme chápat jako soustavu fotonů s nulovou klidovou hmotností a hybností

$$\mathbf{p} = mc.$$

Pro hustotu hybnosti pole potom máme

$$\boldsymbol{\gamma}_{EM} = \rho_m \mathbf{c}.$$

Pomocí Einsteinova vztahu mezi hmotou a energií v hustotách $\rho_w = \rho_m c^2$ máme

$$\boldsymbol{\gamma}_{EM} = \rho_w \mathbf{c} / c^2.$$

V čitateli je součin hustoty energie a rychlosti šíření, tj. tok energie, který je dán Poyntingovým vektorem, proto

$$\boldsymbol{\gamma}_{EM} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}.$$

Vyjádříme-li rychlost světla za pomoci permitivity a permeability ($c^2 = 1/\epsilon\mu$), dostáváme výsledný vztah pro hustotu hybnosti pole:

$$\boldsymbol{\gamma}_{EM} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \quad (2.41)$$

Naším cílem je nyní sestavit zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole, tedy najít časovou derivaci vztahu (2.41). Při úpravách využijeme soustavu Maxwellových rovnic (2.29) až (2.32):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{EM}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times (-\text{rot } \mathbf{E}) = \dots$$

Následují standardní úpravy, ve kterých členy s prostorovými derivacemi převedeme do tvaru divergence. Lze to provést například za pomoci přepisu vektorových součinů pomocí Levi-Civitova tenzoru. Výsledkem elementárních úprav s využitím Maxwellových rovnic je

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\gamma}_{EM} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{EM} = -\mathbf{f}. \quad (2.42)$$

kde pro jednotlivé členy máme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{EM} &\equiv \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \\ \tilde{\mathbf{T}}_{EM} &\equiv \tilde{\mathbf{T}}_E + \tilde{\mathbf{T}}_M, \\ \tilde{\mathbf{T}}_E &\equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \bar{\mathbf{1}} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{D}; & T_{ij}^{(E)} &\equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \delta_{ij} - E_i D_j, \\ \tilde{\mathbf{T}}_M &\equiv \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \bar{\mathbf{1}} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}; & T_{ij}^{(M)} &\equiv \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{ij} - H_i B_j, \\ \mathbf{f} &\equiv \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Tenzor toku hybnosti pole $\vec{\mathbf{T}}_{EM}$ se nazývá *Maxwellův tenzor pnutí*. Vidíme, že hybnost elektromagnetického pole se nezachovává. Je to dáno předáváním hybnosti pole částicím. Teprve celkový součet hybnosti všech částic a pole má tvar zákona zachování. Získáme ho sečtením rovnic (2.39) a (2.42):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \mathbf{u} + \mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot \left[\sum_{\alpha} \vec{\mathbf{T}}_{\alpha} + \vec{\mathbf{T}}_E + \vec{\mathbf{T}}_M \right] = 0. \quad (2.44)$$

Odvozená rovnice je zákonem zachování hybnosti pro soustavu částic a elektromagnetického pole. První člen v časové derivaci má význam *hustoty hybnosti látky* $\rho_m \mathbf{u}$, což je ale současně tok hmoty z rovnice kontinuity. Druhý člen $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ je *hustotou hybnosti elektromagnetického pole*. V prostorových derivacích se nacházejí *tenzory toku hybnosti* částic, elektrického a magnetického pole.

Zopakujme si na závěr jednotlivé parciální zákony zachování hybnosti. Hybnost samotného pole ani částic se nezachovává:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\vec{\mathbf{T}}_E + \vec{\mathbf{T}}_M) &= -\rho_Q \mathbf{E} - \rho_Q \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} \vec{\mathbf{T}}_{\alpha} \right) &= \rho_Q \mathbf{E} + \rho_Q \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Časovou změnou hustoty hybnosti je u částic hustota Lorentzovy síly vystupující na pravé straně. U elektromagnetického pole je na pravé straně člen s opačným znaménkem. Teprve součet obou rovnic dá na pravé straně nulu. V zákonech zachování hybnosti pro jednotlivé druhy částic (momentové rovnice nesečteme) se na pravých stranách objeví ještě nevykompenzované srážkové členy:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{m,\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}}_{\alpha} = \rho_{Q,\alpha} \mathbf{E} + \rho_{Q,\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B} + \sum_{\beta} \int m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}.$$

Poznámka: Platí-li zákon zachování hybnosti ve tvaru $\partial \mathcal{G} / \partial t + \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}} = 0$, lze zákon zachování momentu hybnosti psát jako $\partial \mathcal{M}_{ij} / \partial t + \partial \mathcal{N}_{ijk} / \partial x_k = 0$, kde hustota momentu hybnosti je $\mathcal{M}_{ij} = x_i \gamma_j - x_j \gamma_i$ a tok momentu hybnosti je $\mathcal{N}_{ijk} = x_i T_{jk} - x_j T_{ik}$.

2.2.5 Druhý moment (zachování energie) – částice

Volme nyní za ϕ_{α} kinetickou energii částice druhu α , tj.

$$\phi_{\alpha} = m_{\alpha} v_{\alpha}^2 / 2 = m_{\alpha} v_{\alpha k} v_{\alpha k} / 2.$$

Průběh výpočtu je identický s prvním momentem. Po dosazení do momentové rovnice rozdělíme rychlost na uspořádanou a chaotickou část ($v_{\alpha k} = u_{\alpha k} + w_{\alpha k}$) a všechny členy roznásobíme. Střední hodnoty členů s první mocninou chaotické rychlosti dají nulu a zbývající dají zákon zachování energie ve tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m,\alpha} u_\alpha^2}{2} + e_\alpha \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{m,\alpha} u_\alpha^2}{2} \mathbf{u}_\alpha + e_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \vec{\mathbf{P}}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha \right) = \mathbf{j}_{Q,\alpha} \cdot \mathbf{E} + \mathcal{I}_\alpha, \quad (2.45)$$

kde jsme označili

$$e_\alpha \equiv \rho_{m,\alpha} \left\langle \frac{w_\alpha^2}{2} \right\rangle; \quad \mathbf{q}_\alpha \equiv \rho_\alpha \left\langle \frac{w_\alpha^2}{2} \mathbf{w}_\alpha \right\rangle; \quad \mathcal{I}_\alpha \equiv \sum_\beta \int \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} S_{\alpha\beta} d^3 v_\alpha;$$

Symbol e_α je vnitřní energie související s chaotickým pohybem, \mathbf{q}_α je tepelný tok a \mathcal{I}_α je srážkový člen. V časové derivaci je hustota kinetické energie částic druhu α a hustota vnitřní energie částic druhu α . V prostorové derivaci jsou *toky energií*: tok kinetické energie, tok vnitřní energie, tok tlakové energie a tepelný tok. Na pravé straně (2.45) jsou členy způsobující nezachování energie: Jouleův ohřev částic (hustota Jouleova výkonu) a člen související s předáváním energie srážkami.

Pokud nám postačí jednotekutinové přiblížení, sečteme všechny rovnice (2.45). Vzhledem k tomu, že funkce ϕ_α byla sumačním invariantem, srážky se vyruší a získáme jednoduchý tvar zákona zachování energie:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_m u^2}{2} + e \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_m u^2}{2} \mathbf{u} + e \mathbf{u} + \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q} \right) &= \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}; \\ e &= \sum_\alpha e_\alpha; \quad \mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}_\alpha. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ostatní veličiny jsou definovány stejně jako u předchozích momentů. Energie plazmatu se nezachovává, plazma je ohříváno elektromagnetickými poli. Teprve celkový součet energie všech částic a pole má tvar skutečného zákona zachování.

2.2.6 Druhý moment (zachování energie) – pole

Z klasické elektrodynamiky je dobře známa hustota energie elektrického pole jako $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$, jde například o hustotu energie na kondenzátoru. Obdobně hustota energie v magnetickém poli je $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/2$, jde například o hustotu energie cívky. Z Maxwellových rovnic (2.29) až (2.32) vypočteme časovou změnu hustoty energie a upravíme do tvaru zákona zachování. Opět budeme uvažovat lineární vztahy mezi oběma elektrickými vektory a mezi oběma magnetickými vektory:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) + \mathbf{H} \cdot (-\text{rot } \mathbf{E}) = \\ &= \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E} = -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Výsledný zákon zachování energie pro pole má proto tvar:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \quad (2.47)$$

V časové derivaci je hustota elektrické a hustota magnetické energie. V prostorové derivaci je tok energie $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, který nazýváme Poyntingův vektor. Člen na pravé straně je

hustota Jouleova výkonu odváděná z pole na ohřev částic. Celkový zákon zachování energie získáme sečtením částicové části (2.46) a polní části (2.47):

$$\blacktriangleright \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} + e + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho u^2}{2} \mathbf{u} + e \mathbf{u} + \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) = 0. \quad (2.48)$$

V časové derivaci jsou *hustoty energií* (kinetické, vnitřní, elektrické, magnetické); v prostorové derivaci jsou *toky energií* (kinetické, vnitřní, tlakové, tepelné, elektromagnetické). Zákon zachování energie platí jen pro soustavu všech druhů částic a pole. Oddělené zákony zachování mají nenulové pravé strany s hustotou Jouleova výkonu.

Pokud nesečteme momentové rovnice a budeme uvažovat zákony zachování energie pro každý druh částic zvlášť, objeví se na pravých stranách srážkové členy. Předpokládejme nyní polytropní chování plazmatu s částicemi, které mají f stupňů volnosti, tj.

$$p = Kn^\gamma; \quad \gamma \equiv \frac{f+2}{f}. \quad (2.49)$$

Pro tlak současně platí stavová rovnice ve tvaru

$$p = nk_{\text{B}}T \quad (2.50)$$

Pro hustotu vnitřní energie potom máme

$$e = \frac{f}{2} nk_{\text{B}}T = \frac{p}{\gamma-1}. \quad (2.51)$$

Pochopitelně by bylo možné odvozovat další momenty Boltzmannovy rovnice, jejich struktura bude ale stále složitější a interpretace jednotlivých členů obtížnější. Pokud jako funkci ϕ_α použijeme obecnou mocninu rychlosti a nepůjde o sumační invariant, nedojde po sečtení rovnic pro všechny druhy částic k vyrušení srážkových členů.

Každá momentová rovnice nám přinese novou veličinu, pro kterou musíme napsat další momentovou rovnici. Získáme tak nekonečnou posloupnost momentů Boltzmannovy rovnice. Rozhodneme-li se, že nám dané přiblížení postačí, odvozování dalších momentů ukončíme nějakým empirickým vztahem, v případě druhého momentu například Fourierovým zákonem pro tepelný tok.

2.3 Jednoduché transportní jevy

Statistický přístup je využíván zejména při řešení tří okruhů problémů:

1. *Transportní jevy.* Jde o výpočet přenosu hmoty, hybnosti, energie a dalších veličin na základě srážkových procesů v plazmatu.
2. *Relaxační jevy.* Jde o návrat narušeného systému k termodynamické rovnováze vlivem srážek, výpočet relaxačních časů a s nimi spojených veličin.
3. *Mikroinstability a Landauův útlum.* Třída jevů, pro které je podstatná rychlostní část rozdělení a které nemohou být odvozeny v rámci magnetohydrodynamiky (teorie kontinua). Jsou-li charakteristické frekvence dějů podstatně větší než frekvence srážek, je možné využít bezsrážkové přiblížení (Vlasovovu rovnici).

Třetím okruhem problémů se budeme zabývat v kapitole 5.4. V této a následující kapitole se však seznámíme se základy transportních a relaxačních jevů. Uvažujme nejprve relativně jednoduché, ale účinné BGK přiblížení. Označení pochází z počátečních písmen jmen autorů (Prabhu Lal Bhatnagar, Eugene P. Gross, Max Krook). V tomto přiblížení předpokládáme, že srážkový člen je úměrný odchylce od lokálního rovnovážného rozdělení a srážky mají vratný charakter, tj. navrací plazma z počáteční odchylky zpět do rovnováhy:

$$S_\alpha \approx (\Delta f_\alpha / \Delta t)_{\text{col}} = -(f_\alpha - f_{\text{LE}}) / \tau = -\nu(f_\alpha - f_{\text{LE}}).$$

Pokud nebudeme popisovat více druhů částic naráz, budeme v dalších odvozeních index α vynechávat. BGK rovnice tedy je

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})f + \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f = -\nu(f - f_{\text{LE}}); \quad (2.52)$$

$$f_{\text{LE}} \equiv n(\mathbf{x}) \left(\frac{m}{2\pi k_{\text{B}} T(\mathbf{x})} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}))^2}{2k_{\text{B}} T(\mathbf{x})} \right]. \quad (2.53)$$

Funkce f_{LE} je lokální rovnovážné kanonické (Gibbsovo) rozdělení rychlostí, které nazýváme Maxwellovo rozdělení. Předpokládáme, že se může měnit místo od místa. Řešení pro hustotu pravděpodobnosti budeme hledat ve tvaru perturbační řady

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (2.54)$$

V následujících výpočtech je f_0 známé řešení a v odchylkách od něho se omezíme na členy prvního řádu a poté provedeme limitní přechod $\varepsilon \rightarrow 1$. Předpokládáme tedy malé odchylky od Maxwellova rozdělení.

2.3.1 Transport náboje (Ohmův zákon)

Předpokládejme homogenní rovnovážné plazma, pro které je

$$f_0 = f_{\text{LE}} \equiv n \left(\frac{m}{2\pi k_{\text{B}} T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_{\text{B}} T} \right]. \quad (2.55)$$

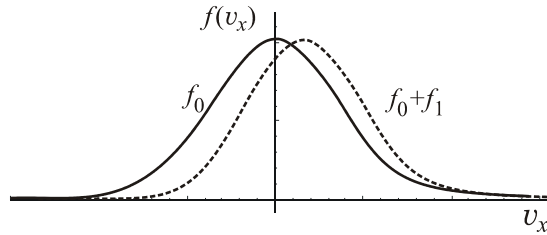
Budeme hledat ustálenou (nezávislou na t) homogenní (nezávislou na \mathbf{x}) poruchu f_1 rozdělení způsobenou zapnutím slabého elektrického pole $\varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \nabla \phi$ (chápeme ho jako první řád poruchové teorie, v systému vznikl malý spád potenciálu ϕ). V prvním řádu poruchové teorie z (2.52) proto zůstane

$$\frac{Q\mathbf{E}}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = -\nu f_1.$$

Po dosazení za f_0 dopočteme poruchu rozdělení

$$f_1 = \frac{Q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})}{\nu k_{\text{B}} T} n \left(\frac{m}{2\pi k_{\text{B}} T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_{\text{B}} T} \right]. \quad (2.56)$$

Maxwellovo rozdělení soustavy nabitých částic je elektrickým polem v prvním řádu perturbační teorie charakteristicky deformované, $f = f_0 + f_1$. Na obrázku je hustota pravděpodobnosti souboru pro složku rychlosti ve směru elektrického pole.



Obr. 30: Porucha Maxwellova rozdělení.

Určeme nyní *tok náboje* neboli hustotu elektrického proudu tekoucího plazmatem:

$$\mathbf{j}_Q = Qn\mathbf{u} = \int Q\mathbf{v}f d^3\mathbf{v} = \int Q\mathbf{v}(f_0 + f_1) d^3\mathbf{v} = \int Q\mathbf{v}f_1 d^3\mathbf{v}.$$

Integrál z $\mathbf{v}f_0$ je nulový (jde o lichou funkci). Do vztahu dosadíme za f_1 a integrujeme:

$$j_{Qk} = n \frac{Q^2 E_l}{v k_B T} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_k v_l \exp \left[-\frac{m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{2k_B T} \right] dv_1 dv_2 dv_3.$$

Všechny nediagonální integrály (ve $v_k v_l$) jsou nulové, neboť jde vždy o lichou funkci některé z rychlostí. Diagonální členy jsou všechny stejné a tak můžeme vypočítat například první:

$$j_{Qk} = n \frac{Q^2 E_l}{v k_B T} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \delta_{kl} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_l^2 \exp \left[-\frac{m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{2k_B T} \right] dv_1 dv_2 dv_3.$$

Dvě z integrací dají Gaussův integrál (A.4) a zbývající určíme jako dvojnásobek vztahu (A.2). Výsledek je

$$\mathbf{j}_Q = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \phi; \quad \sigma \equiv \frac{Q^2 n}{m\nu}. \quad (2.57)$$

Hnací silou toku náboje je elektrické pole (záporně vzatý gradient skalárního potenciálu). Koeficient úměrnosti σ se nazývá *diferenciální vodivost*. Vztah (2.57) je znám jako Ohmův zákon a je pojmenován podle německého fyzika George Simona Ohma (1789–1854). Stejný vztah můžeme získat i z jednoduché Drudeho teorie elementární vodivosti, kterou navrhl v roce 1900 Paul Drude (1863–1906). Představme si, že na nabitou částici v prostředí působí síla způsobená elektrickým polem a síla „tření“ způsobená srážkami, která je úměrná ztrátě hybnosti částice a koeficientem úměrnosti je srážková frekvence $\nu = 1/\tau$ (τ je střední doba mezi srážkami):

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = Q\mathbf{E} - \frac{m\mathbf{u}}{\tau} = Q\mathbf{E} - \nu m\mathbf{u}.$$

V ustáleném stavu má částice rychlost $\mathbf{u} = Q\mathbf{E}/m\nu$ a tok náboje (proudová hustota) bude

$$\mathbf{j}_Q = Qn\mathbf{u} = \frac{Q^2 n}{m\nu} \mathbf{E},$$

což je stejný výsledek jako (2.57). Poznamenejme, že v případě anizotropního prostředí je vodivost tenzorem a Ohmův zákon má tvar

$$j_{Q,k} = \sigma_{kl} E_l = -\sigma_{kl} \frac{\partial \phi}{\partial x_l}. \quad (2.58)$$

2.3.2 Transport částic (Fickův zákon)

Opět budeme předpokládat rovnovážné, původně homogenní plazma. Jako poruchu zavedme nyní do plazmatu malý spád jeho koncentrace, který bude hnací silou přesunu částic. Lokální rovnovážné Maxwelllovo rozdělení bude tyto změny sledovat:

$$f_{LE} \equiv n(\mathbf{x}) \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_B T} \right].$$

Na plazma nebudou působit žádná silová pole. V okolí libovolného místa plazmatu bude koncentrace splňovat

$$n(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \left. \frac{\partial n}{\partial x_l} \right|_{\mathbf{x}_0} (x_l - x_{0l}) \quad \Rightarrow \quad \bar{\nabla} n \sim \varepsilon$$

a prostorovou derivaci ($\bar{\nabla}$) proto musíme chápat jako operaci prvního řádu poruchové teorie ($\bar{\nabla} f_{LE}$ je prvního řádu, $\bar{\nabla} f_1$ druhého řádu, $\bar{\nabla} f_2$ třetího řádu atd.). Je to tím, že v Maxwelllově rozdělení se prostorová závislost normálně nevyskytuje. V BGK rovnici zůstane po dosazení $f = f_{LE} + f_1 + \dots$ v prvním řádu poruchové teorie:

$$(\mathbf{v} \cdot \bar{\nabla}) f_{LE} = -\nu f_1.$$

Poruchu f_1 tedy získáme ihned ve tvaru

$$f_1 = -\frac{(\mathbf{v} \cdot \bar{\nabla} n)}{\nu} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_B T} \right]. \quad (2.59)$$

Tok částic získáme obdobně jako v minulém případě:

$$\mathbf{j}_N = n\mathbf{u} = \int \mathbf{v} (f_{LE} + f_1) d^3 \mathbf{v} = \int \mathbf{v} f_1 d^3 \mathbf{v}.$$

Integrace se provede stejným způsobem jako v případě transportu náboje. Jednotlivé části integrálu budou nenulové jen v diagonálních členech $v_k v_l$, k jejichž integraci využijeme vztah (A.2):

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{j}_N = -D \bar{\nabla} n; \quad D \equiv \frac{k_B T}{m\nu}. \quad (2.60)$$

Hnací silou toku částic je záporně vzatý gradient koncentrace. Koeficient úměrnosti se nazývá *koeficient difúze*. Vztah (2.60) je znám jako Fickův zákon difúze a je pojmenován podle německého fyziologa Adolfa Eugena Ficka (1821–1901).

Poznámka 1: Dosadíme-li do rovnice kontinuity vztah pro tok částic, dostaneme rovnici difúze

$$\left. \begin{aligned} \partial n / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}_N &= 0, \\ \mathbf{j}_N &= -D \nabla n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n. \quad (2.61)$$

Z matematického hlediska jde o parciální diferenciální rovnici parabolického typu. Fyzikálně jde o prototyp rovnice popisující difúzi nějaké veličiny do okolí. Obdobnou rovnici splňuje například teplota [2] nebo magnetické pole, jak uvidíme později.

Poznámka 2: Z rozměrové analýzy lze koeficient difúze chápat jako součin kvadrátu střední volné dráhy a frekvence srážek:

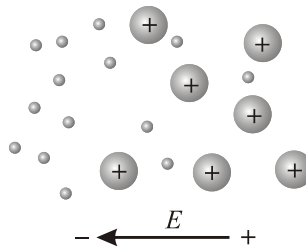
$$D \sim \lambda^2 \nu \quad (2.62)$$

2.3.3 Ambipolární difúze

Elektrony v plazmatu mají výrazně menší hmotnost a tak na jakékoli silové podněty reagují rychleji a mají tendenci plazma opustit. Tím ovšem vzniká elektrické pole, které působí na ionty. Toto pole přibrzdí elektrony a urychlí ionty takovým způsobem, aby obě složky zachovávaly při difúzi kvazineutralitu, tj. celkový náboj v jakémkoli makroskopickém objemu byl nulový. Takovou vázanou difúzi elektronů a iontů nazýváme *ambipolární difúze*.

Velice důležitou veličinou při ambipolární difúzi je *mobilita* neboli *pohyblivost* částic. Jde o koeficient úměrnosti mezi průměrnou rychlostí jejich pohybu a elektrickým polem, tedy

$$\mathbf{u}_\alpha = \mu_\alpha \mathbf{E} \quad (2.63)$$



Obr. 31: Ambipolární difúze

V této kapitole se zabýváme jak tekutinou elektronů, tak tekutinou iontů a proto musíme psát indexy α určující příslušnost k danému druhu částic. Je zřejmé, že pomocí mobility můžeme zapsat tok náboje (proudovou hustotu) i tok částic způsobený pouze elektrickým polem:

$$\mathbf{j}_{Q,\alpha} = Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = Q_\alpha n_\alpha \mu_\alpha \mathbf{E}, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{j}_{N,\alpha} = n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = n_\alpha \mu_\alpha \mathbf{E}. \quad (2.65)$$

Výraz pro mobilitu snadno určíme ze vztahu pro proudovou hustotu (2.57):

$$\mu_\alpha = \frac{Q_\alpha}{m_\alpha v_\alpha}. \quad (2.66)$$

Mobilita elektronů je záporná, elektrony se pohybují proti směru elektrického pole. Pohyb elektronů a iontů při ambipolární difúzi bude ve skutečnosti způsobený jak elektrickým polem, tak gradientem koncentrace částic (difúzí):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{N,e} &= n_e \mu_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e, \\ \mathbf{j}_{N,i} &= n_i \mu_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Požadavek kvazineutality a shodné rychlosti obou složek plazmatu lze pro Z -násobnou ionizaci vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} Q_e &= -e, & Q_i &= Ze; \\ n_e &\equiv n = Zn_i, & n_i &= n/Z; \\ \mathbf{j}_{N,e} &\equiv \mathbf{J}, & \mathbf{j}_{N,i} &\equiv \mathbf{J}/Z. \end{aligned}$$

Po dosazení koncentrací a toků do (2.67) získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= n \mu_e \mathbf{E} - D_e \nabla n, \\ \mathbf{J}/Z &= n \mu_i \mathbf{E}/Z - D_i \nabla n/Z. \end{aligned}$$

Z obou rovnic vyloučíme elektrické pole a získáme finální vztah pro ambipolární difúzi:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{J} = -D_a \nabla n; \quad D_a \equiv \frac{\mu_e D_i - \mu_i D_e}{\mu_e - \mu_i}. \quad (2.68)$$

Ve vztahu (2.68) platí $|\mu_e| \gg |\mu_i|$, a proto můžeme psát

$$D_a \approx D_i - \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e. \quad (2.69)$$

Za pomoci mobility (2.66) lze zapsat vztah pro koeficient difúze (2.60) takto:

$$D_\alpha \equiv \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha v_\alpha} = \mu_\alpha \frac{k_B T_\alpha}{Q_\alpha}. \quad (2.70)$$

Uvedený vztah se nazývá Einsteinův vztah a přesouvá srážkovou frekvenci ve výrazu pro koeficient difúze do mobility dané částice. Budeme-li předpokládat stejnou teplotu obou složek, můžeme z Einsteinova vztahu (2.70) odvodit $D_e = -(Z\mu_e/\mu_i)D_i$ a vztah (2.69) pro ambipolární difúzi získá tvar

$$D_a \approx (1+Z)D_i. \quad (2.71)$$

Výslednou ambipolární difúzi určují podle očekávání hmotnější ionty.

2.3.4 Difúze v magnetickém poli

Předpokládejme, že v plazmatu je malý gradient koncentrace a homogenní magnetické pole $\mathbf{B}_0 = (0,0,B_0)$. Pripustíme gradient koncentrace jak ve směru pole (v ose z), tak ve směru kolmém na pole (zvolíme osu x), abychom mohli prozkoumat difúzi částic podél pole a kolmo na něj, tedy $n = n(x, z)$. Magnetické pole vnáší do plazmatu anizotropii, a proto budeme předpokládat, že chaotické složky rychlosti, resp. teploty částic mohou být různé ve směru magnetického pole a ve směru na něj kolmém. Za lokální rovnovážné rozdělení proto připustíme tvar

$$f_{\text{LE}} \equiv n(x, z) \left(\frac{m}{2\pi k_B T_{\perp}} \right) \left(\frac{m}{2\pi k_B T_{\parallel}} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2k_B T_{\perp}} - \frac{mv_z^2}{2k_B T_{\parallel}} \right]. \quad (2.72)$$

V BGK rovnici v prvním řádu poruchové teorie zůstanou členy (prostorové derivace se opět chovají jako první řád poruchové teorie)

$$\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\text{LE}}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right) = -\nu f_1;$$

Lokální rovnovážné rozdělení obsahuje poruchu v souřadnicích, a proto vystupuje jako první poruchový člen v prostorových derivacích. Neobsahuje ovšem poruchu v rychlostech, a proto je v rychlostním členu jako lineární porucha až člen f_1 . Tok částic zjistíme tak, že poslední rovnici přenásobíme rychlostí a vystředujeme přes rychlosti:

$$\int \mathbf{v} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\text{LE}}}{\partial \mathbf{x}} \right) d^3 \mathbf{v} + \int \mathbf{v} \left(\frac{Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right) d^3 \mathbf{v} = -\nu \int f_1 d^3 \mathbf{v};$$

Integrál na pravé straně má přímo význam toku částic. První integrál nalevo je možné snadno dopočítat přímo. Druhý integrál napíšeme ve složkách a upravíme per partes. Výsledkem je

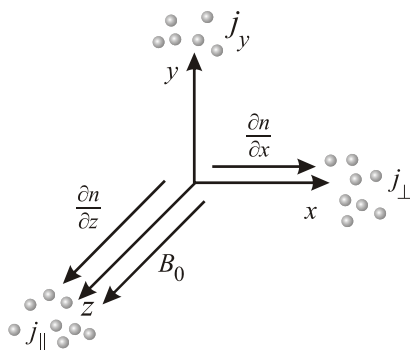
$$\begin{aligned} \frac{k_B T_{\perp}}{m} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{QB_0}{m} j_{N,y} &= -\nu j_{N,x}, \\ \frac{QB_0}{m} j_{N,x} &= -\nu j_{N,y}, \\ \frac{k_B T_{\parallel}}{m} \frac{\partial n}{\partial z} &= -\nu j_{N,z}. \end{aligned}$$

Veličina QB_0/m je tzv. gyrační (cyklotronní, Larmorova) frekvence, se kterou částice krouží kolem indukčních čar. Z prvních dvou rovnic dopočteme oba hledané toky:

$$j_{N\perp} = j_{N,x} = -D_{\perp} \frac{\partial n}{\partial x}, \quad j_{N\parallel} = j_{N,z} = -D_{\parallel} \frac{\partial n}{\partial z}, \quad j_{N,y} = -\frac{\omega_c}{\nu} j_{N\perp};$$

(2.73)

$$\blacktriangleright \quad D_{\perp} \equiv \frac{k_B T_{\perp}}{m\nu} \left[\frac{1}{1 + (\omega_c/\nu)^2} \right]; \quad D_{\parallel} \equiv \frac{k_B T_{\parallel}}{m\nu}; \quad \omega_c \equiv \frac{QB_0}{m}.$$



Obr. 32: Difúze v magnetickém poli.

Výsledek je mimořádně zajímavý. Ve směru magnetických indukčních čar je koeficient difúze stejný, jako by pole neexistovalo. Difúze není magnetickým polem v tomto směru ovlivněna. Naopak napříč indukčním čarám probíhá difúze obtížněji a koeficient difúze je modifikován faktorem v hranaté závorce. To je důvodem existence dvou typů slunečního větru – pomalého a rychlého: v oblasti rovníku částice opouštějí Slunce napříč indukčním čarám a rychlost slunečního větru je 300÷500 km/s. V polárních směrech se částice pohybují podél indukčních čar a jejich rychlost je 700÷900 km/s.

V limitě extrémně slabých polí přechází vztah pro koeficient příčné difúze v normální difúzní koeficient. Naopak, v případě extrémně silných magnetických polí můžeme jednotku ve jmenovateli zanedbat a vztah pro koeficient příčné difúze bude

$$D_{\perp} \approx \frac{k_B T_{\perp} m v}{Q^2 B_0^2} = R_L^2 v \approx \frac{1}{B_0^2}; \quad \omega_c \gg v. \quad (2.74)$$

Částice je v silném poli vázána na Larmorovu orbitu a úlohu střední volné dráhy λ ve vztahu (2.62) přejímá Larmorův poloměr $R_L = m v_T / Q B_0$ gyračního pohybu pro střední tepelnou rychlost $v_T = (k_B T_{\perp} / m)^{1/2}$. To je přirozené, neboť v plazmatu je střední volná dráha definována jako vzdálenost, na které se částice od původního směru odchýlí o 90°, což je v extrémně silném magnetickém poli právě na Larmorově poloměru.

Gyromagnetická (Bohmova) difúze

Dalším novým jevem je difúze částic ve směru kolmém jak na gradient koncentrace (hnačí sílu), tak na pole samotné, tj. nenulový tok částic $j_{N,y}$ ve vztahu (2.73). Jde o obdobný jev, jako jsou drifty. Výsledný tok má tvar

$$\blacktriangleright \quad j_{N,y} = \frac{\omega_c k_B T_{\perp}}{m v^2} \left[\frac{1}{1 + (\omega_c / v)^2} \right] \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (2.75)$$

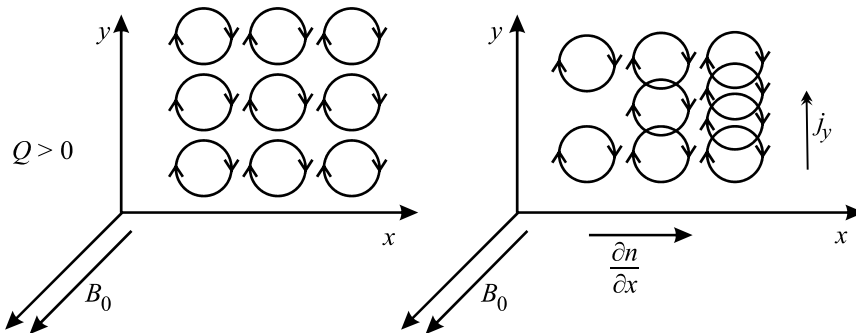
Pro silná magnetická pole můžeme zanedbat jedničku ve jmenovateli a po dosazení za cyklotronní frekvenci z (2.73) máme

$$j_{N,y} = \frac{k_B T_{\perp}}{Q B_0} \frac{\partial n}{\partial x} \approx \frac{1}{B_0}. \quad (2.76)$$

Povšimněme si několika zajímavostí:

1. Tok částic je kolmý na magnetické pole a na gradient koncentrace, míří ve stejném směru (viz obrázek) jako drift způsobený „silou“ $-\nabla n$.
2. Na rozdíl od vztahu (2.74) je výsledný tok nepřímo úměrný jen první mocnině magnetického pole, pro silná magnetická pole bude tedy tento tok dominovat.
3. Výsledný vztah (2.76) nezávisí na srážkové frekvenci, tok částic není důsledkem srážek a nejde o difúzi v pravém slova smyslu.

Co tedy způsobuje nenulový tok? Při nulovém gradientu koncentrace se gyrační pohyby částic přesně vyruší. Při nenulové koncentraci (viz obrázek) se pohyb částic v kladném a záporném směru osy y nevyruší a vznikne tak nenulový tok částic ve směru osy y , který ale nesouvisí se srážkami. Tomuto jevu říkáme *gyromagnetická difúze* a pro silná pole je pro ni charakteristické, že tok částic je úměrný $1/B_0$.



Obr. 33: Gyromagnetická (Bohmova) difúze.

Neoklasická a anomální difúze

Pokud je pole prostorově nehomogenní, jako například v tokamaku, dochází k dalším driftům, z nichž nejvýznamnější je grad B drift způsobený změnou velikosti pole nebo drift zakřivení způsobený změnou směru indukčních čar (viz kapitola 1.3.5). Posunutí gyračního středu za jednu otočku bývá typicky větší, než je Larmorův poloměr a střední volná dráha se proto výrazně zvětšuje. V úvahu je možné vzít i tzv. banánové orbity. První možností, jak zahrnout tyto jevy, je přímý výpočet analogický předchozímu odvození. Druhou možností je pouhý odhad střední volné dráhy v přítomnosti daného driftu a následně využití vztahu (2.62). Oběma způsoby tak můžeme získat vztah pro tzv. *neoklasickou difúzi*, která uvažuje gradient či zakřivení pole. Zakřivení indukčních čar zněkolikanásobí difúzi kolmo na magnetické pole. V toroidálních zařízeních je skutečně měřená difúze ještě $10\times$ až $100\times$ vyšší než neoklasická. Hovoříme o tzv. *anomální difúzi*, při které do transportu nabitých částic zasahují ještě turbulentní procesy v plazmatu. Anomální difúze je často předmětem numerických simulací na výkonných počítačích a detaily všech procesů vedoucích k anomální difúzi nejsou dodnes prozkoumány.

2.3.5 Transport tepla (Fourierův zákon)

Předpokládejme opět původně homogenní rovnovážné plazma a jako poruchu zavedme nyní do plazmatu malý spád jeho teploty, který bude hnací silou tepelného toku. Lokální rovnovážné Maxwellovo rozdělení bude tyto změny teploty sledovat:

$$f_{\text{LE}} \equiv n(\mathbf{x}) \left(\frac{m}{2\pi k_{\text{B}} T(\mathbf{x})} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_{\text{B}} T(\mathbf{x})} \right].$$

V rozdělení jsme zavedli i prostorovou závislost koncentrace částic, neboť ta je provázána s prostorovým průběhem teploty. Pokud budeme počítat tepelný přenos za konstantního tlaku $p = nk_{\text{B}}T$, budeme po derivování mít

$$T \nabla n + n \nabla T = 0. \quad (2.77)$$

Obdobně jsou obě veličiny provázány i u polytropního plazmatu ($p = Kn^\gamma$). Lokální rovnovážné rozdělení budeme považovat obdobně jako u toku částic za nulté řešení. Prostorový gradient se opět chová jako operace prvního řádu poruchové teorie. Po dosažení $f = f_{\text{LE}} + f_1 + \dots$ do BGK rovnice (2.52) dostaneme:

$$v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left[n(\mathbf{x}) \left(\frac{m}{2\pi k_{\text{B}} T(\mathbf{x})} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_{\text{B}} T(\mathbf{x})} \right] \right] = -v f_1.$$

Po provedení derivace součinu všech tří funkcí s využitím (2.77) získáme

$$f_1 = -n \frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla T)}{v} \frac{1}{T} \left[\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_{\text{B}} T} - \frac{5}{2} \right] \left(\frac{m}{2\pi k_{\text{B}} T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_{\text{B}} T} \right]. \quad (2.78)$$

Nyní již zbyvá „jen“ určit tepelný tok

$$\mathbf{q} \equiv mn \frac{1}{2} \langle w^2 \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{2} \int m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f_1 d^3 \mathbf{v} = \frac{1}{2} \int m v^2 \mathbf{v} f_1 d^3 \mathbf{v}.$$

Do výrazu dosadíme za f_1 ze vztahu (2.78) a integrujeme přes rychlosti jako v minulých případech. Integrace je přímočará, i když zdoluhavá. Nejvyšší mocnina rychlosti je šestá. K integraci je vhodné využít některý standardní program (MATHEMATICA, MATLAB) nebo použít vztahy z dodatku A. Výsledek je

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T; \quad \kappa \equiv \frac{5nk_{\text{B}}^2 T}{2m\nu}. \quad (2.79)$$

Hnací silou tepelného toku je záporně vzatý gradient teploty. Koefficient úměrnosti se nazývá *tepelná vodivost*. Vztah (2.79) je znám jako Fourierův zákon. Je pojmenován podle francouzského fyzika a matematika Jeana Baptista Josepha Fouriera (1768–1830). Ve středoškolských učebnicích je zmiňována jednodušší varianta Fourierova zákona pro homogenní tyč průřezu ΔS a délky l popisující tok tepla tyčí nebo deskou za dobu Δt :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot \Delta t} = \kappa \frac{T_2 - T_1}{l} \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = \kappa \frac{\Delta S}{l} \cdot (T_2 - T_1) \Delta t.$$

2.3.7 Produkce entropie, Onsagerovy relace

V minulých kapitolách jsme se zabývali jevy, které navrácí systém do termodynamické rovnováhy. Malý gradient elektrického potenciálu, koncentrace či teploty způsobil makroskopické toky

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_Q &= -\sigma \nabla \phi, \\ \mathbf{j}_N &= -D \nabla n, \\ \mathbf{q} &= -\kappa \nabla T, \end{aligned}$$

kteří postupně slábnou, až v termodynamické rovnováze zaniknou. Systém opět dosáhne Maxwelllova rozdělení. Záporně vzaté gradienty makroskopických veličin jsou jakýmsi hnacími silami transportních jevů a nazýváme je termodynamickými silami X_k . Jedna termodynamická síla zpravidla vytvoří několik typů makroskopických toků a naopak jeden druh makroskopického toku je často způsoben několika termodynamickými silami. Gradient koncentrace i gradient teploty mohou způsobit tok částic, náboje i tepla. Například tok náboje způsobený gradientem teploty nazýváme *termoelektrickým jevem*, tok částic způsobený gradientem teploty *termodifúzí*. Obecně může být každý tok lineární kombinací všech termodynamických sil (předpokládáme, že nejsme daleko od termodynamické rovnováhy a lineární vztah je proto dobrou aproximací):

$$J_i = c_{ik} X_k. \quad (2.80)$$

Proces návratu systému k termodynamické rovnováze je nevratný, a proto je při něm vytvářena entropie (ta při nevratných procesech musí růst). Tento fakt má mimořádnou důležitost a podrobně se jím zabýval norský-americký chemik a teoretický fyzik Lars Onsager (1903–1976). Zkusme například zjistit produkci entropie $dS = dQ/T$ způsobenou tokem elektrického náboje (proudovou hustotou). Hustota Jouleova tepelného výkonu předávaná nabitým částicím je $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Právě tento člen se objevil s různým znaménkem na pravých stranách zákonů zachování energie pro částice a pole. Produkce entropie v tomto jednoduchém případě je

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \int \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}{T} dV = \int \frac{\mathbf{j} \cdot (-\nabla \phi)}{T} dV.$$

Symbolem s jsme označili hustotu entropie. V obecném případě je produkce entropie při konkrétním procesu úměrná objemovému integrálu z toku a příslušné termodynamické síly. Pro více procesů bude úměrná součtu takových členů:

$$\frac{dS}{dt} \sim \int J_k X_k dV > 0. \quad (2.81)$$

Spojením vztahů (2.80) a (2.81) získáme obecný tvar zákona pro produkci entropie:

$$\frac{dS}{dt} = \int L_{ik} X_i X_k dV > 0. \quad (2.82)$$

Vidíme, že produkce entropie je pozitivně definitní kvadratickou formou termodynamických sil. Koeficienty úměrnosti L_{ik} nazýváme *kinetické koeficienty*. Lars Onsager ukázal na základě statistického výpočtu, že platí tzv. *relace reciprocity*

$$\blacktriangleright \quad L_{ik} = L_{ki} . \quad (2.83)$$

V odvození relací je třeba využít mikroskopické reverzibility, tj. invariantnosti pohybových rovnic vzhledem k časové inverzi. Relace reciprocity jsou velmi důležité vztahy mezi kinetickými koeficienty, které nelze odvodit v rámci fenomenologické termodynamiky. Proto se někdy nazývají čtvrtou větou termodynamickou a termodynamika je chápána jako nezávislý princip. Za objev relací reciprocity byla Larsu Onsagerovi udělena Nobelova cena za chemii pro rok 1968. Sylvestrovo kritérium aplikované na pozitivně definitní formu (2.82) dává

$$L_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \dots \quad (2.84)$$

Z Onsagerových relací reciprocity ihned plyne symetrie tenzoru elektrické vodivosti, neboť

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{\mathbf{j}_k E_k}{T} dV = \int \frac{\sigma_{kl} E_k E_l}{T} dV = \int L_{kl} E_k E_l dV = \int L_{kl} X_k X_l dV .$$

Obdobně musí být v anizotropním prostředí symetrický tenzor tepelné vodivosti. Uveďme na závěr obecný tvar rovnice difúze. Vyjděme z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_k = 0 .$$

Předpokládejme, že

$$\mathbf{j}_k = c_{kl} \mathbf{X}_l = -c_{kl} \nabla \psi_l; \quad \rho_k = a_{kl} \psi_l .$$

Potom má obecná rovnice difúze tvar

$$a_{kl} \frac{\partial \psi_l}{\partial t} = \nabla \cdot c_{kl} \nabla \psi_l . \quad (2.85)$$

2.4 Coulombova interakce

2.4.1 Debyeova stínící vzdálenost

Předpokládejme plazma složené z několika různých druhů částic. Pokud budeme sledovat průběh potenciálu v okolí vybraného bodového zdroje (ať již konkrétní částice nebo nějaké poruchy), bude ovlivněn ostatními nabitými částicemi. Pokud není plazma daleko od termodynamické rovnováhy, přesunou se k vybranému zdroji částice opačné polaritě a budou ho stínit. Výsledkem je exponenciální úbytek pole našeho zdroje s charakteristickou vzdáleností λ_D , ve které potenciál i pole poklesne na $1/e$ hodnoty dané Coulombovým zákonem. Tato vzdálenost se nazývá *Debyeova stínící vzdálenost* a je pojmenována podle holandského fyzika a chemika Petera Debyeho (1884–1966). Elektrický potenciál $\phi(r)$ v okolí zdroje určíme kombinací Maxwellovy rovnice

$\text{div } \mathbf{D} = \rho_Q$ s definicí potenciálu $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, což vede na Poissonovu rovnici pro elektrický potenciál

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_Q}{\varepsilon_0}. \quad (2.86)$$

Pravou stranu určíme z definice hustoty náboje, do které za koncentraci dosadíme rovnovážné Maxwellovo rozdělení a vzhledem k tomu, že předpokládáme plazma blízké rovnovážnému, provedeme rozvoj exponenciály do prvního řádu:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_Q}{\varepsilon_0} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha 0} \exp\left[-\frac{Q_{\alpha}\phi(\mathbf{x})}{k_{\text{B}}T_{\alpha}}\right] \approx \\ &\approx \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha 0} \right) - \left(\sum_{\alpha} \frac{Q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_{\text{B}} T_{\alpha}} \right) \phi(\mathbf{x}) \pm \dots \end{aligned}$$

První člen je nulový díky kvazineutralitě plazmatu, kterou předpokládáme přímo v definici plazmatu. Druhý člen je úměrný hledanému potenciálu, a Poissonova rovnice (2.86) má proto tvar

$$\nabla^2\phi = \alpha\phi; \quad \alpha \equiv \sum_{\alpha} \frac{Q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_{\text{B}} T_{\alpha}}.$$

Rovnici budeme řešit ve sférických souřadnicích se středem v námi vybraném zdroji:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] &= \alpha\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} = \alpha\psi; \quad \psi(r) \equiv r\phi(r) \quad \Rightarrow \\ \psi(r) &= C_1 e^{\sqrt{\alpha}r} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}r} \quad \Rightarrow \quad \phi(r) = \frac{C_1}{r} e^{\sqrt{\alpha}r} + \frac{C_2}{r} e^{-\sqrt{\alpha}r}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že potenciál bodového zdroje nemůže divergovat v nekonečné vzdálenosti, je $C_1 = 0$. Konstantu C_2 určíme tak, aby potenciál v limitě malé vzdálenosti od zdroje přešel v klasický Coulombův potenciál zdroje s nábojem Q_0 :

$$\phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_{\text{D}}}}; \quad \lambda_{\text{D}} \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_{\text{B}}}{\sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0} / T_{\alpha}}}. \quad (2.87)$$

Ve speciálním případě Z násobně ionizovaného plazmatu složeného jen z elektronů a iontů stejné teploty je

$$Q_{\text{e}} = -e, \quad Q_{\text{i}} = Ze, \quad n_{\text{i}0} = n_{\text{e}0}/Z, \quad T_{\text{e}} = T_{\text{i}} = T$$

a pro Debyeovu vzdálenost máme jednoduchý a často používaný vztah

$$\lambda_{\text{D}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_{\text{B}} T}{(1+Z)n_{\text{e}0} e^2}}. \quad (2.88)$$

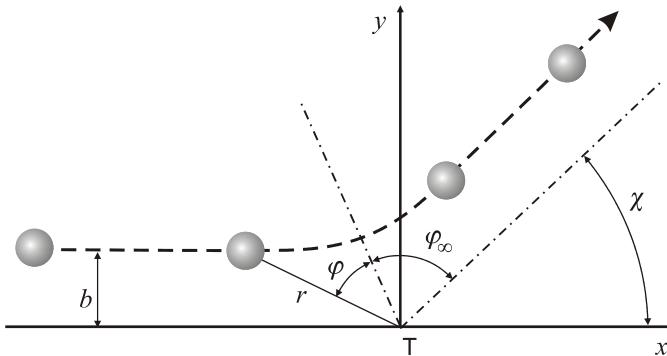
Důležitým parametrem je také počet elektronů v Debyeově sféře, což je oblast, ve které částice „vnímá“ své sousedy jako bodové částice. Nad touto hranicí je potenciál odstíněný a částice pociťují jen spojité kontinuum:

$$N_D = \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 n_{e0}. \quad (2.89)$$

Pokud je $N_D \gg 1$, je celková průměrná síla od jednotlivých částic nulová a hovoříme o ideálním plazmatu. K jeho popisu je vhodná stavová rovnice ideálního plynu. Takové plazma má buď vysokou teplotu (a tím vodivost) nebo nízkou koncentraci.

2.4.2 Coulombův rozptyl (Rutherfordova formule)

Předpokládejme, že svazek nabitých částic nalétává na nepohyblivý terč. Vybereme si jednu částici ze svazku (na obrázku je šedá) a jednu z terče. V těžišťové soustavě můžeme interakci s částicí terče řešit jako pohyb v centrálním poli, pokud za kinetickou energii částice budeme brát $T = \mu g^2/2$, kde $\mu \equiv m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$ je tzv. redukovaná hmotnost částice a g je velikost relativní rychlosti obou částic (viz kapitola 2.1.2). Plyne to okamžitě z rozkladu (2.13), ve kterém je těžišťová rychlost v těžišťové soustavě nulová.



Obr. 34: Coulombův rozptyl. Písmenem T je označeno těžiště. Polární úhel odečítáme od nejkratšího průvodiče.

Velikost relativní rychlosti g se při srážce zachovává. Budeme se zabývat výsledným stavem po rozptylu a určíme vztah mezi úhlem rozptylu χ , záměrným parametrem b (neboli impaktním parametrem) a relativní rychlostí g nalétávající částice vzhledem k částici terče. Jako poslední krok vypočteme účinný průřez pro Coulombovu interakci. Celý problém budeme chápat jako rovinný, Lagrangeovu funkci pro nalétávající částici zapíšeme ve tvaru

$$L = \frac{1}{2} \mu g^2 - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Vzhledem k tomu, že Lagrangova funkce nezávisí na polárním úhlu ϕ , zachovává se moment hybnosti p_ϕ . Lagrangeova funkce dále nezávisí explicitně na čase, a proto se bude zachovávat celková energie systému. Namísto řešení pohybových rovnic můžeme využít tyto zákony zachování (α je úhel mezi vzájemnou rychlostí a radiusvektorem):

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const} = \mu r g_\varphi = \mu r g \sin \alpha_{(r,g)} = \mu r \sin \alpha g = \mu b g ,$$

$$E = \frac{1}{2} \mu (g_r^2 + g_\varphi^2) + \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{const} = \frac{1}{2} \mu g^2 .$$

Integrační konstanty jsme určili pro $t \rightarrow -\infty$ ($r \rightarrow \infty$), b je ramenem momentu hybnosti. Z první rovnice nalezneme časovou změnu úhlu a z druhé časovou změnu radiální vzdálenosti (za časovou změnu úhlu dosadíme z první rovnice):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{bg}{r^2}, \quad \frac{dr}{dt} = \sqrt{g^2 - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{2\pi\epsilon_0 \mu r} - \frac{b^2 g^2}{r^2}} .$$

Vzhledem k tomu, že nám postačí zjistit stav v limitě $t \rightarrow \infty$, nemusíme počítat časový průběh trajektorie. Vydělením obou rovnic se zbavíme parametrizace a po separaci proměnných máme

$$\int \frac{\frac{b}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{2\pi\epsilon_0 \mu b g^2} \frac{b}{r} - \frac{b^2}{r^2}}} dr = \int d\varphi ,$$

Zavedeme substituci

$$\xi = \frac{b}{r} + \xi_0 ; \quad \xi_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 \mu b g^2}$$

a po elementárních úpravách získáme

$$-\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} d\xi = \varphi - \varphi_0 ; \quad a^2 \equiv 1 + \xi_0^2 .$$

Integrace je nyní přímočará a vede na

$$\arccos\left(\frac{\xi}{a}\right) = \varphi - \varphi_0 \Rightarrow \xi = a \cos(\varphi - \varphi_0) \Rightarrow \frac{b}{r} + \xi_0 = \sqrt{1 + \xi_0^2} \cos(\varphi - \varphi_0) .$$

Úhel budeme odečítat od nejkratšího průvodiče, jak je to běžné v laboratorní soustavě (viz obrázek 34). Pak musí mít vzdálenost r extrém pro $\varphi = 0$. Poslední vztah proto budeme diferencovat, následně určíme $dr/d\varphi$ a pro $\varphi = 0$ zapíšeme nutnou podmínku extrémnosti, tj. $dr/d\varphi = 0$. Z této podmínky plyne, že integrační konstanta φ_0 musí být nulová, $\varphi_0 = 0$. Dosti dlouho po rozptylu ($r \rightarrow \infty$) platí proto vztah

$$\xi_0 = \sqrt{1 + \xi_0^2} \cos \varphi_\infty \Rightarrow \cos \varphi_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/\xi_0)^2}} .$$

Porovnáme-li výraz se vztahem (A.86) mezi funkcemi cosinus a tangens, zjistíme, že

$$\text{tg } \varphi_\infty = \frac{1}{\xi_0} .$$

Získaný úhel φ_∞ souvisí s úhlem rozptylu χ vztahem (viz obrázek 34) $\chi + 2\varphi_\infty = \pi$, proto

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) &= \frac{1}{\xi_0} \Rightarrow \\ \operatorname{cotg}\frac{\chi}{2} &= \frac{4\pi\epsilon_0\mu b g^2}{Q_\alpha Q_\beta} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \quad b(\chi) = b_0 \operatorname{cotg}\frac{\chi}{2}; \quad \chi(b) = 2 \operatorname{arccotg}\frac{b}{b_0}, \quad (2.90)$$

kde jsme označili

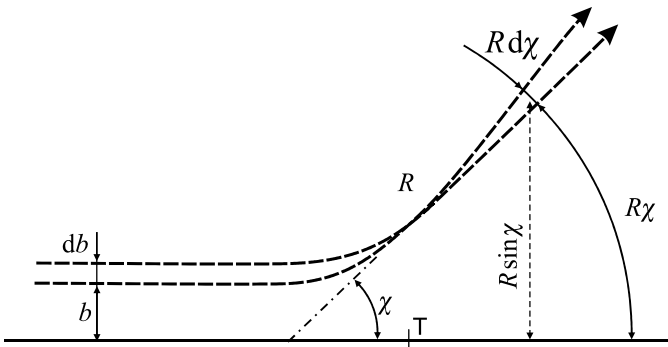
$$b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0\mu g^2}; \quad g \equiv |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|; \quad \mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}.$$

Význam parametru b_0 je zřejmý. Jde o záměrný parametr, při kterém bude úhel rozptylu 90° , tedy o spodní hranici srážek braných v úvahu v Landauově rovnici (viz kapitola 2.1.1). Parametr b_0 se nazývá *kritický záměrný parametr*. Nyní zbývá určit diferenciální účinný průřez Coulombovy interakce. Uvažujme část nalétávajícího svazku ve tvaru prstencového mezikruží se záměrným parametrem b z intervalu $(b, b + db)$, která se rozptýlí do úhlu $(\chi, \chi + d\chi)$. Pro účinný průřez máme:

$$\blacktriangleright \quad d\sigma = 2\pi b db = 2\pi b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi = \pi b_0^2 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}} d\chi. \quad (2.91)$$

Absolutní hodnota je ve výrazu proto, že s rostoucí záměrnou vzdáleností úhel rozptylu klesá a derivace ve vztahu je záporná. Formulí pro diferenciální účinný průřez můžeme zapsat také pomocí elementu prostorového úhlu (viz obrázek 35)

$$\begin{aligned} d\Omega &\equiv \frac{dS}{R^2} = \frac{2\pi R \sin\chi R d\chi}{R^2} = 2\pi \sin\chi d\chi \Rightarrow \\ d\chi &= \frac{d\Omega}{2\pi \sin\chi} = \frac{d\Omega}{4\pi \sin\frac{\chi}{2} \cos\frac{\chi}{2}}. \end{aligned}$$



Obr. 35: K odvození diferenciálního účinného průřezu.

Výsledná formule pro diferenciální účinný průřez proto bude

$$d\sigma = \frac{b_0^2}{4 \sin^4 \frac{\chi}{2}} d\Omega; \quad (2.92)$$

$$b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0\mu g^2}; \quad g \equiv |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|; \quad \mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}.$$

Jde o slavnou Rutherfordovu formuli, kterou odvodil skotský fyzik a chemik Ernest Rutherford (1871–1937) při zkoumání rozptylu alfa částic na atomárních jádrech v tenké zlaté fólii. Při těchto experimentech bylo objeveno atomové jádro. Povšimněte si, že výsledná formule nezáleží na znaménku náboje srážejících se částic, je shodná pro přitažlivou i odpudivou interakci. V dřívějších pracích se Rutherfordova formule zapisovala pomocí funkce cosecans:

$$d\sigma = \frac{1}{4} b_0^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\chi}{2} d\Omega.$$

2.4.3 Fokkerova-Planckova rovnice

Nalezněme nyní srážkový člen pro Coulombovu interakci v limitě slabých, ale mnohonásobně opakovaných srážek. Pokud to nebude nezbytně nutné, budeme vynechávat index příslušnosti k částicím druhu α . Při odvození využijeme následující předpoklady:

1. Každá částice v plazmatu prodělá za malý, ale konečný časový interval Δt velmi mnoho srážek, při nichž se směr její rychlosti mění pomalu, tj. celková změna rychlosti $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ za sledovaný malý časový interval Δt bude malá.
2. Srážky jsou pružné, tj. energie se nemění při srážce na jiné formy energie.
3. Pole u sledované částice je superpozicí polí částic v Debyeově sféře. Tyto částice vnímá sledovaná částice jako bodové. Interakci pro částice za hranicí Debyeovy sféry neuvažujeme.
4. Neuvažujeme srážky, při kterých je úhel rozptylu příliš veliký. Takové srážky jsou v plazmatu málo pravděpodobné a velká změna vektoru relativní rychlosti by byla v rozporu s prvním předpokladem. V Landauově přiblížení se uvažují například jen srážky s úhlem rozptylu menším než 90° (záměrným parametrem b větším než b_0).
5. Srážky tvoří markovský řetězec, tj. proces srážení si nepamatuje historii, a proto pravděpodobnost $\mathcal{P}(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) d^3(\Delta \mathbf{v})$, že částice za čas Δt změní svou rychlost z hodnoty \mathbf{v} na hodnotu $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$, nezávisí na čase. Jde samozřejmě jen o jisté přiblížení realitě, které výpočetně situaci značně zjednoduší.

Za těchto předpokladů najdeme srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice, tj. změnu hustoty pravděpodobnosti danou srážkovými procesy:

$$S = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} = \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{\Delta t}. \quad (2.93)$$

Standardně u markovských řetězců můžeme pro pravděpodobnosti psát

$$w_k = \sum_l w_l P_{lk} ,$$

kde w_k je pravděpodobnost konfigurace k a P_{lk} je pravděpodobnost přechodu z konfigurace l do konfigurace k . Obdobně v našem případě zapíšeme výslednou hustotu pravděpodobnosti v čase t jako superpozici všech možných přechodů z času $t-\Delta t$:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int f(t-\Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v}-\Delta \mathbf{v}) \mathcal{P}(\mathbf{v}-\Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) d^3(\Delta \mathbf{v}) . \quad (2.94)$$

Funkci $\mathcal{P}(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v})$ přechodu ze stavu \mathbf{v} do stavu $\mathbf{v}+\Delta \mathbf{v}$ nalezneme pro Coulombovu interakci v příští kapitole. Její základní vlastností je normovací podmínka vyjadřující, že vždy k nějakému přechodu dojde, tj.

$$\int \mathcal{P}(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) d^3(\Delta \mathbf{v}) = 1 . \quad (2.95)$$

Integrand výrazu (2.94) nyní rozvineme do druhého řádu Taylorovy řady v argumentu \mathbf{v} (k tomu je podstatný první předpoklad zajišťující, že za sledovaný úsek Δt bude změna rychlosti malá):

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int \left[f(t-\Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathcal{P}(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) - \Delta v_l \frac{\partial(f \mathcal{P})}{\partial v_l} + \frac{1}{2} \Delta v_l \Delta v_k \frac{\partial^2(f \mathcal{P})}{\partial v_l \partial v_k} \pm \dots \right] d^3(\Delta \mathbf{v}) .$$

Integrace prvního členu je triviální, f vytkneme před integrál a využijeme normování (2.95). Ze zbylých členů vytkneme vše, co se integrace netýká:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \equiv f(t-\Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial v_l} f \int \Delta v_l \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_l \partial v_k} f \int \Delta v_l \Delta v_k \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}) .$$

Poté převedeme první člen na levou stranu rovnosti. Oba integrály na pravé straně reprezentují střední hodnoty změny rychlosti:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f(t-\Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\frac{\partial}{\partial v_l} (f \langle \Delta v_l \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_l \partial v_k} (f \langle \Delta v_l \Delta v_k \rangle) .$$

Na pravé straně bychom nyní měli ještě Taylorovsky rozvinout hustotu pravděpodobnosti v čase jako $f(t-\Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \Delta t \partial f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) / \partial t \pm \dots$. Vzhledem k tomu, že jsme požadovali, aby Δt bylo malé, postačí nám v lineárním přiblížení se omezit jen na první člen $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. Důvodem je to, že při markovských procesech jsou obě střední hodnoty lineárně závislé na časovém úseku Δt . Je to dáno tím, že jak střední odchylka, tak střední kvadratická odchylka pro náhodné procesy roste lineárně s časem. Pokud tedy na pravé straně poslední rovnosti ponecháme oba dva členy a f uvažujeme v čase t , ponechali jsme napravo všechny členy lineární v časovém úseku Δt . Po triviální úpravě máme srážkový člen ve Fokkerově-Planckově přiblížení (pravou stranu Fokkerovy-Planckovy rovnice):

$$\frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f(t-\Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial v_l} (f \langle \Delta v_l \rangle) + \frac{1}{2\Delta t} \frac{\partial^2}{\partial v_l \partial v_k} (f \langle \Delta v_l \Delta v_k \rangle) .$$

Zapíšeme nyní celkový výsledek, tj. Fokkerovu-Planckovu rovnici:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})f + \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial f \langle \Delta v_l \rangle}{\partial v_l} + \frac{1}{2\Delta t} \frac{\partial^2 f \langle \Delta v_l \Delta v_k \rangle}{\partial v_l \partial v_k};$$

$$\blacktriangleright \quad \langle \Delta v_l \rangle \equiv \int \Delta v_l \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}), \quad (2.96)$$

$$\langle \Delta v_l \Delta v_k \rangle \equiv \int \Delta v_l \Delta v_k \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}).$$

Častý je i zápis v invariantním tvaru:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})f + \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f = -\frac{1}{\Delta t} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f \langle \Delta \mathbf{v} \rangle) + \frac{1}{2\Delta t} (\nabla_{\mathbf{v}} \otimes \nabla_{\mathbf{v}}) : (f \langle \Delta \mathbf{v} \otimes \Delta \mathbf{v} \rangle);$$

$$\blacktriangleright \quad \langle \Delta \mathbf{v} \rangle \equiv \int \Delta \mathbf{v} \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}), \quad (2.97)$$

$$\langle \Delta \mathbf{v} \otimes \Delta \mathbf{v} \rangle \equiv \int \Delta \mathbf{v} \otimes \Delta \mathbf{v} \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}).$$

Operace dvojtečka znamená dvojitý skalární součin podle předpisu (2.96). Znak tenzorového součinu se někdy vynechává. Srážkový člen Fokkerovy-Planckovy rovnice má tedy dvě části. Výraz obsahující $\langle \Delta \mathbf{v} \rangle$ se nazývá *dynamický třecí člen*, neboť vypovídá o brzdění nalétávajícího svazku částic vlivem srážek s částicemi terče. Výraz obsahující $\langle \Delta \mathbf{v} \otimes \Delta \mathbf{v} \rangle$ se nazývá *difúzní člen*, neboť vypovídá o rozptylu nalétávajícího svazku částic vlivem interakce s částicemi terče. V příští kapitole určíme oba dva členy pro Coulombovu interakci a ukážeme, že je lze zapsat pomocí tzv. Rosenbluthových potenciálů. Víme, že podle předpokladů můžeme uvažovat jen srážky s malým rozptylovým úhlem, kterých je většina. Pokud budeme záměrný parametr uvažovat v intervalu (b_{\min}, b_{\max}) , kde za b_{\min} zvolíme záměrný parametr b_0 , při kterém dojde ke srážce s úhlem rozptylu 90° a za b_{\max} Debyeovu vzdálenost, bude Fokkerova-Planckova rovnice ekvivalentní s tzv. Landauovou rovnicí.

2.4.4 Rosenbluthovy potenciály

Pro konkrétní výpočet hodnot $\langle \Delta \mathbf{v} \rangle$ a $\langle \Delta \mathbf{v} \otimes \Delta \mathbf{v} \rangle$ již bude nutné rozlišovat nalétávající částici a částici terče. Ve shodě s předchozími kapitolami budeme označovat nalétávající částici α a částici terče β . Rychlosti před srážkou budou $\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta$ a po srážce $\mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{v}'_\beta$. Vzájemnou rychlost částic označíme $\mathbf{g} \equiv \mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$. Z (2.14) víme, že při srážce se zachovává velikost vzájemné rychlosti $g = |\mathbf{g}|$, veličina g je proto pro srážku charakteristická. Směr vzájemné rychlosti $\mathbf{k} \equiv \mathbf{g}/g$ se při srážce mění. Z (2.90) známe také závislost mezi záměrným parametrem b a úhlem rozptylu χ pro Coulombovu interakci:

$$b(\chi) = b_0 \cotg \frac{\chi}{2}; \quad \chi(b) = 2 \operatorname{arccotg} \frac{b}{b_0}, \quad (2.98)$$

$$b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2}; \quad g \equiv |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|; \quad \mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}.$$

Ze vztahů je zřejmé, že parametr b_0 je takový záměrný parametr, při kterém je úhel rozptylu 90° , tedy dolní mez námi uvažovaného intervalu záměrných parametrů. Přístupme nyní k samotnému výpočtu třecího a difúzního členu ve Fokkerově-Planckově rovnici. K tomu budeme nejprve potřebovat rychlost nalétávající částice vyjádřenou pomocí těžišťové a relativní rychlosti, viz vztah (2.12)

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_T + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{g}.$$

Odečteme-li hodnoty po srážce a před srážkou a označíme-li relativní rychlost \mathbf{g} , dostaneme

$$\Delta \mathbf{v}_\alpha = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta \mathbf{g}.$$

Těžišťová rychlost se při srážce nemění, a proto v rozdílu vymizí. Hledané výrazy jsou:

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \int \Delta \mathbf{g} \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}),$$

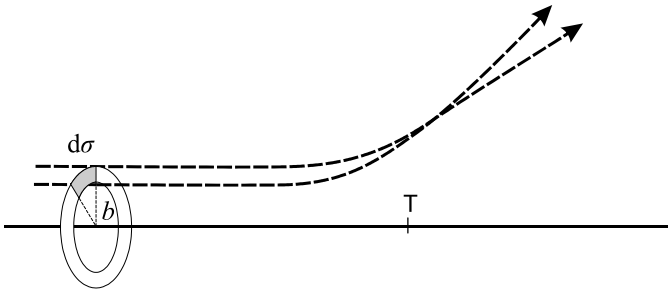
$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \otimes \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \int \Delta \mathbf{g} \otimes \Delta \mathbf{g} \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}).$$

Pravděpodobnostní element vyjádříme analogicky jako v (2.19), tj. bude úměrný velikosti vzájemné rychlosti nalétávajících částic a částic terče (čím je větší, tím s vyšší frekvencí bude docházet ke srážkám), hustotě pravděpodobnosti výskytu částic terče, časovému intervalu a samozřejmě účinnému průřezu Coulombovy interakce:

$$\mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}) = g f_\beta \Delta t d\sigma d^3 \mathbf{v}_\beta,$$

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta t \int \Delta \mathbf{g} g d\sigma f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta,$$

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \otimes \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \Delta t \int \Delta \mathbf{g} \otimes \Delta \mathbf{g} g d\sigma f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta.$$



Obr. 36: K vyjádření diferenciálního účinného průřezu.

Z obrázku 36 je zřejmé, že $d\sigma = b db d\varphi$ a integrace přes element účinného průřezu znamená integraci přes všechny hodnoty uvažovaných záměrných parametrů a přes azimutální úhel. Tím je pokryt průřez celého nabíhajícího svazku částic. Integrace přes účinný průřez se týká jen veličin g , proto nejprve určíme koeficienty

$$\gamma_k \equiv \int \Delta g_k g d\sigma = \int \Delta g_k g b db d\varphi; \quad (2.99)$$

$$\xi_{kl} \equiv \int \Delta g_k \Delta g_l g d\sigma = \int \Delta g_k \Delta g_l g b db d\varphi. \quad (2.100)$$

Pokud se nám podaří tyto koeficienty určit, budou třetí a dynamický člen dány výrazy

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta t \int \tilde{\mathbf{y}} f_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3 \mathbf{v}_\beta. \quad (2.101)$$

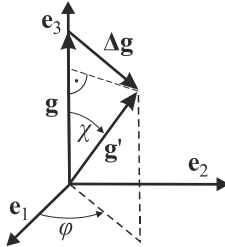
$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \otimes \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \Delta t \int \tilde{\xi} f_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3 \mathbf{v}_\beta.$$

Klíčem k určení pravé strany Fokkerovy-Planckovy rovnice tedy je výpočet koeficientů γ_k a ξ_{kl} . Ze symetrie koeficientů je zřejmé, že mohou být jen následujícími funkcemi vektoru \mathbf{g} :

$$\gamma_k = A g_k; \quad (2.102)$$

$$\xi_{kl} = B \delta_{kl} + C g_k g_l.$$

Stačí tedy určit konstanty A , B a C . Tyto konstanty mohou záviset maximálně na velikosti vzájemné rychlosti g , neboť ta se při srážce nemění. Hodnoty konstant A , B a C můžeme bez újmy na obecnosti určit v jakékoli souřadnicové soustavě. Budeme proto volit soustavu, ve které vektor $\mathbf{g} = \mathbf{v}_{\alpha\beta}$ před srážkou míří v ose \mathbf{e}_3 :



Obr. 37: Volba souřadnicové soustavy.

Nezapomeňte, že vektory \mathbf{g} , \mathbf{g}' mají stejnou velikost g , jsou jen vůči sobě potočeny. Z obrázku jsou zřejmé velikosti složek vektoru $\Delta \mathbf{g}$, který vystupuje v integracích (2.99) a (2.100):

$$\Delta g_1 = g \sin \chi \cos \varphi;$$

$$\Delta g_2 = g \sin \chi \sin \varphi;$$

$$\Delta g_3 = -g(1 - \cos \chi).$$

Vzhledem k tomu, že integrace (2.99) a (2.100) budeme provádět přes záměrný parametr b , je nutné vyjádřit závislost na úhlu rozptylu χ pomocí záměrného parametru $b = b_0 \cotg(\chi/2)$, tedy převést funkce $\sin \chi$, $\cos \chi$: na $\cotg \chi/2$. K tomu využijeme vztahy (A.90) a (A.91):

$$\sin \chi = \frac{2 \cotg(\chi/2)}{1 + \cotg^2(\chi/2)} = \frac{2bb_0}{b^2 + b_0^2},$$

$$\cos \chi = \frac{\cotg^2(\chi/2) - 1}{\cotg^2(\chi/2) + 1} = \frac{b^2 - b_0^2}{b^2 + b_0^2}.$$

Výsledné vztahy pro složky vektoru $\Delta \mathbf{g}$ tedy jsou:

$$\begin{aligned} \Delta g_1 &= g \frac{2bb_0}{b^2 + b_0^2} \cos \varphi; \\ \Delta g_2 &= g \frac{2bb_0}{b^2 + b_0^2} \sin \varphi; \\ \Delta g_3 &= -g \frac{2b_0^2}{b^2 + b_0^2}. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Ve shodě s (2.102) bude mít integrál (2.99) v naší souřadnicové soustavě jedinou nenulovou složku, a to v ose \mathbf{e}_3 , ze které určíme konstantu $A = \gamma_3/g$. Z (2.102) je patrné, že $\xi_{11} = B$, $\xi_{22} = B$ tedy B určíme pomocí ξ_{11} , ξ_{22} nebo jako $(\xi_{11} + \xi_{22})/2$. V úpravách po integraci budeme předpokládat, že $\lambda_D \gg b_0$, integraci provedeme od nuly, protože srážek se záměrným parametrem menším než b_0 je málo a jejich příspěvek k integracím je zanedbatelný:

$$\begin{aligned} A = \gamma_3/g &\equiv \frac{1}{g} \int \Delta g_3 g b db d\varphi = \int \left(-\frac{2b_0^2}{b^2 + b_0^2} \right) g b db d\varphi = -2\pi b_0^2 g \int_0^{\lambda_D} \frac{2b}{b^2 + b_0^2} db = \\ &= -2\pi b_0^2 g \ln \left[b^2 + b_0^2 \right]_0^{\lambda_D} = -2\pi b_0^2 g \ln \frac{\lambda_D^2 + b_0^2}{b_0^2} \approx -4\pi b_0^2 g \ln \frac{\lambda_D}{b_0}. \end{aligned}$$

Obdobný postup zvolíme pro konstantu B (v integraci substituujeme za $b^2 + b_0^2$):

$$\begin{aligned} B = \frac{\xi_{11} + \xi_{22}}{2} &\equiv \int (\Delta g_1 \Delta g_1 + \Delta g_2 \Delta g_2) g b db d\varphi = \frac{1}{2} \int g^2 \left(\frac{2bb_0}{b^2 + b_0^2} \right)^2 g b db d\varphi = \\ &= \pi g^3 b_0^2 \int_0^{\lambda_D} \frac{4b^3}{(b^2 + b_0^2)^2} db = 2\pi g^3 b_0^2 \left[\frac{b_0^2}{b^2 + b_0^2} + \ln(b^2 + b_0^2) \right]_0^{\lambda_D} \approx 4\pi g^3 b_0^2 \ln \frac{\lambda_D}{b_0}. \end{aligned}$$

Nyní zbývá určit poslední konstantu C . V naší zvolené souřadnicové soustavě z rozkladu (2.102) vidíme, že $\xi_{33} = B + Cg^2$:

$$\begin{aligned} B + Cg^2 = \xi_{33} &= \int \Delta g_3 \Delta g_3 g b db d\varphi = \int \left(-g \frac{2b_0^2}{b^2 + b_0^2} \right)^2 g b db d\varphi = \\ &= \pi g^3 4b_0^4 \int_0^{\lambda_D} \frac{2b}{(b^2 + b_0^2)^2} db = \pi g^3 4b_0^4 \left[-\frac{1}{b^2 + b_0^2} \right]_0^{\lambda_D} \approx 0. \end{aligned}$$

Poslední integrál neobsahuje podstatný logaritmický člen a je tedy řádově $\ln(\lambda_D/b_0)$ krát menší než A a B . Proto bude v našem přiblížení platit $C = -B/g^2$. Celkový výsledek celého výpočtu tedy je

$$A \approx -4\pi b_0^2 g \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right); \quad B \approx 4\pi b_0^2 g^3 \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right); \quad C \approx -4\pi b_0^2 g \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right). \quad (2.104)$$

Poznamenejme ještě, že příspěvek k integracím od 0 do b_0 je nepodstatný, a proto bylo možné integrace provádět od nuly. Naopak oříznutí integrálu shora Debyeovou vzdáleností je podstatné, integrál by bez oříznutí shora divergoval. Nyní máme vše potřebné pro určení třetího a dynamického členu (2.101). Konstanty A , B , C dosadíme do rozkladu (2.102) a ten do vztahu pro třetí a dynamický člen (2.101). Výsledný výraz upravíme pomocí definice záměrného parametru b_0 :

$$\begin{aligned} \gamma_k &\approx C_{\alpha\beta} \ln A_{\alpha\beta} \left(-\frac{g_k}{g^3} \right); \\ \xi_{kl} &\approx C_{\alpha\beta} \ln A_{\alpha\beta} \left(\frac{g^2 \delta_{kl} - g_k g_l}{g^3} \right), \end{aligned} \quad (2.105)$$

kde jsme označili

$$C_{\alpha\beta} \equiv \frac{(Q_\alpha Q_\beta)^2}{4\pi \epsilon_0^2 \mu^2}; \quad \ln A_{\alpha\beta} \equiv \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right); \quad \mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}. \quad (2.106)$$

Pomalu se měnící funkce $\ln A$ se nazývá Coulombův logaritmus a budeme ji nadále považovat vzhledem k derivacím i integracím za konstantní. (Pro rovnovážné plazma je $g^2 = k_B T/m$ a argument Coulombova logaritmu je až na faktor 3 roven počtu částic v Debyeově sféře.) Jako integrand zde vystupují složky relativní rychlosti g_{kl} a konstantní velikost relativní rychlosti $g = (g_k g_k)^{1/2}$. Integrandy lze snadno upravit za pomoci relací

$$\frac{\partial g}{\partial g_k} = \frac{g_k}{g}; \quad \frac{\partial}{\partial g_k} \left(\frac{1}{g} \right) = -\frac{g_k}{g^3}; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial g_k \partial g_l} = \frac{g^2 \delta_{kl} - g_k g_l}{g^3}. \quad (2.107)$$

Vzhledem k tomu, že $g_k = v_{\alpha k} - v_{\beta k}$, platí $\partial/\partial g_k = \partial/\partial v_{\alpha k}$ a třetí a difúzní člen můžeme přepsat do podoby

$$\langle \Delta v_{\alpha k} \rangle \approx \Delta t \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} C_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha k}} \int \frac{f_\beta(\mathbf{v}_\beta)}{g} d^3 \mathbf{v}_\beta . \quad (2.108)$$

$$\langle \Delta v_{\alpha k} \Delta v_{\alpha l} \rangle \approx \Delta t \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 C_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial v_{\alpha k} \partial v_{\alpha l}} \int g f_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3 \mathbf{v}_\beta .$$

Zavedme Rosenbluthovy potenciály H a G za pomoci předpisů

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{f_\beta}{g} d^3 \mathbf{v}_\beta ; \quad (2.109)$$

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int g f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta$$

Tyto potenciály jsou pojmenovány po významném americkém plazmovém fyzikovi Marshallu Nicholasi Rosenbluthovi (1927–2003) a vyjadřují vliv rozptylového centra β na rozptylovanou částici α . Upravme nyní srážkový člen na pravé straně Fokkerovy-Planckovy rovnice (2.96) za pomoci výrazů (2.108) a (2.109)

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= -K_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha l}} \left(f_\alpha \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial v_{\alpha l}} \right) + D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial v_{\alpha l} \partial v_{\alpha k}} \left(f_\alpha \frac{\partial^2 G_{\alpha\beta}}{\partial v_{\alpha k} \partial v_{\alpha l}} \right); \\ S_{\alpha\beta} &= -K_{\alpha\beta} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f_\alpha \nabla_{\mathbf{v}} H_{\alpha\beta}) + D_{\alpha\beta} (\nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}}) : (f_\alpha \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}} G_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$K_{\alpha\beta} \equiv C_{\alpha\beta} \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{Q_\alpha Q_\beta}{\varepsilon_0 m_\alpha} \right)^2 \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta};$$

$$D_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{Q_\alpha Q_\beta}{\varepsilon_0 m_\alpha} \right)^2.$$

První zápis je ve složkách, druhý je invariantní. Tenzorové (diadické) součiny nejsou v zápisu pro přehlednost značeny, způsob zúžení tenzorů je patrný ze složkového zápisu. Rychlostní gradienty působí na rychlost nalétávající částice, přes rychlosti terče je v Rosenbluthových potenciálech již integrováno. Rosenbluthovy potenciály se ve fyzice plazmatu často využívají. Známe-li hustotu pravděpodobnosti částic terče, lze pro Rosenbluthovy potenciály odvodit rovnice, které jsou analogií známé Poissonovy rovnice. Proto je lze snadno rozvinout do kulových funkcí a řešit pomocí nich sféricky symetrické problémy. Porovnejme elektrický potenciál dvou nábojů v elektrostatiice s definicí Rosenbluthova potenciálu H :

$$\phi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|} d^3 \mathbf{r}_\beta ;$$

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{f_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} d^3 \mathbf{v}_\beta .$$

Elektrický potenciál splňuje Poissonovu rovnici

$$\nabla^2 \phi_{\alpha\beta} = -\frac{\rho_\beta}{\varepsilon_0} .$$

Z analogie je jasné, že bude platit

$$\nabla_{\mathbf{v}}^2 H_{\alpha\beta} = -4\pi f_{\beta}. \quad (2.111)$$

Přímo z definice lze ukázat, že $\nabla_{\mathbf{v}}^2 G_{\alpha\beta} = 2H_{\alpha\beta}$. Druhý potenciál proto bude splňovat rovnici

$$\nabla_{\mathbf{v}}^2 \nabla_{\mathbf{v}}^2 G_{\alpha\beta} = -8\pi f_{\beta}. \quad (2.112)$$

Známe-li tedy hustotu pravděpodobnosti částic v terči, můžeme z posledních dvou rovnic určit Rosenbluthovy potenciály interakce nalétávajícího svazku s terčem. Napišme na závěr přehledně výsledek této kapitoly – Fokkerovu Planckovu rovnici pro svazek částic α nalétávajících na terč β za pomoci Rosenbluthových potenciálů:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_{\alpha} + \left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha}}{m_{\alpha}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_{\alpha} &= \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}; \\ S_{\alpha\beta} \equiv K_{\alpha\beta} \ln A_{\alpha\beta} \left[-\nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f_{\alpha} \nabla_{\mathbf{v}} H_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} (\nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}}) : (f_{\alpha} \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}} G_{\alpha\beta}) \right]; \quad (2.113) \\ H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_{\alpha}) &\equiv \int \frac{1}{g} f_{\beta} d^3 \mathbf{v}_{\beta}, \\ G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_{\alpha}) &\equiv \int g f_{\beta} d^3 \mathbf{v}_{\beta}. \end{aligned}$$

2.4.5 Brzděná a ubíhající testovací částice

Uvažujme nyní jednoduchou situaci, kdy monochromatický svazek α (částice mají stejnou rychlost a konstantní koncentraci) nalétává do homogenního izotropního maxwellovského plazmatu a je v něm brzděn na rychlost $\mathbf{v}(t)$. V plazmatu nepůsobí žádné vnější silové pole. Hustota pravděpodobnosti částic svazku bude dána Diracovou distribucí (viz dodatek B) a hustota pravděpodobnosti terče Maxwellovým rozdělením:

$$\begin{aligned} f_{\alpha} &= n_{\alpha} \delta(\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}(t)); \\ f_{\beta} &= n_{\beta} \left(\frac{m_{\beta}}{2\pi k_{\text{B}} T_{\beta}} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv_{\beta}^2}{2k_{\text{B}} T_{\beta}}}. \quad (2.114) \end{aligned}$$

Uvažujme nyní Fokkerovu-Planckovu rovnici ve tvaru (2.113). Monochromatický svazek je ekvivalentní jedné vyslané částici a nejeví proto difúzi. Stačí tedy určit vliv potenciálu H (třetího členu) na pohyb svazku. Nejprve vypočteme H pro Maxwellovo rozdělení terče:

$$H(\mathbf{v}_{\alpha}) \equiv \int \frac{1}{g} f_{\beta} d^3 \mathbf{v}_{\beta} = n_{\beta} \left(\frac{m_{\beta}}{2\pi k_{\text{B}} T_{\beta}} \right)^{3/2} \int \frac{1}{|\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}|} e^{-\frac{mv_{\beta}^2}{2k_{\text{B}} T_{\beta}}} d^3 \mathbf{v}_{\beta} =$$

$$= \frac{n_\beta}{\pi^{3/2} v_{0\beta}^3} \int \frac{1}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} e^{-\left(\frac{v_\beta}{v_{0\beta}}\right)^2} d^3 \mathbf{v}_\beta; \quad v_{0\beta} \equiv \sqrt{\frac{2k_B T_\beta}{m_\beta}}.$$

Integrand má singularitu pro $\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\alpha$, proto je nutné integraci rozdělit na dvě části. Po delším výpočtu dostaneme (viz dodatek A5)

$$H(\mathbf{v}_\alpha) = n_\beta \frac{1}{v_\alpha} \phi\left(\frac{v_\alpha}{v_{0\beta}}\right); \quad \phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \quad (2.115)$$

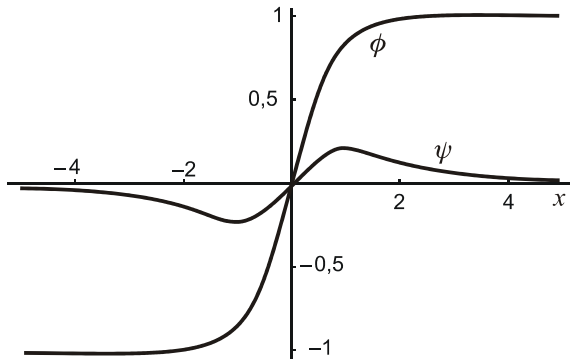
Rosenbluthův potenciál H pro Maxwellovo rozdělení lze tedy zapsat za pomoci chybové funkce ϕ . Příbuznou funkcí, která se nám v budoucnosti hodí, je Chandrasekharova funkce definovaná vztahem

$$\psi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi} x^2} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi. \quad (2.116)$$

Nalezněme limity obou dvou funkcí pro malé a velké argumenty:

$$\begin{aligned} x \ll 1: \quad \psi(x) &\equiv \frac{2}{\sqrt{\pi} x^2} \int_0^x \xi^2 (1 \pm \dots) d\xi \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}} x, & \phi(x) &\equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (1 \pm \dots) d\xi \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} x, \\ x \gg 1: \quad \psi(x) &\approx \frac{2}{\sqrt{\pi} x^2} \int_0^\infty \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2x^2}, & \phi(x) &\approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = 1. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Průběh obou funkcí je na následujícím obrázku. Chandrasekharova funkce je pojmenována podle indického fyzika Subramanyana Chandrasekhary (1910–1995).



Obr. 38: Chybová a Chandrasekharova funkce.

Funkce ϕ a ψ spolu souvisí jednoduchým vztahem

$$\psi(x) = \frac{\phi - x\phi'}{2x^2}. \quad (2.118)$$

Důkaz je jednoduchý. Dosadíme do levé strany definici Chandrasekharovy funkce a do pravé strany definici chybové funkce a na obou stranách vynecháme jmenovatel x^2 :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi - x \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Na obou stranách zkrátíme číselné koeficienty a výrazy budeme derivovat podle x :

$$2x^2 e^{-x^2} \stackrel{?}{=} e^{-x^2} - \left(e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} \right).$$

Obě strany jsou si rovny a tak se původní funkce mohly lišit jen o konstantu. Snadno zjistíme, že je nulová. Přepis Chandrasekharovy funkce pomocí chybové funkce je tedy správný.

Vynásobme nyní Fokkerovu-Planckovu rovnici rychlostí \mathbf{v}_α a integrujme ji přes \mathbf{v}_α , tedy nalezneme první moment FP rovnice. Hustota pravděpodobnosti f_α nezávisí na \mathbf{x} , a proto na levé straně zmizí druhý člen. Díky nepřítomnosti polí je nulový i člen třetí. Na pravé straně budeme zkoumat jen vliv prvního Rosenbluthova potenciálu (příspěvek druhého potenciálu je vzhledem k izotropii nulový):

$$\int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3 \mathbf{v}_\alpha = -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \mathbf{v}_\alpha \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f_\alpha \nabla_{\mathbf{v}} H) d^3 \mathbf{v}_\alpha \quad (2.119)$$

Za hustotu pravděpodobnosti nalétávající částice nyní dosadíme Diracovu distribuci $n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t))$ a provedeme středování přes rychlost nalétávající částice. Upravme nejprve levou stranu rovnice (2.119):

$$\begin{aligned} \mathbf{LS} &= \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3 \mathbf{v}_\alpha = n_\alpha \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t))}{\partial t} d^3 \mathbf{v}_\alpha = \\ &= n_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v}_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) d^3 \mathbf{v}_\alpha = n_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nyní zbývá nalézt pravou stranu FP rovnice:

$$\begin{aligned} \mathbf{PS} &= -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \left(n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) \frac{\partial H(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) d^3 \mathbf{v}_\alpha \stackrel{(1)}{=} \\ &= n_\alpha K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \left(\delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) \frac{\partial H(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) d^3 \mathbf{v}_\alpha = \\ &= n_\alpha K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial H(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Operace (1) označuje integraci per partes. Pokud bychom na pravé straně ponechali i druhý Rosenbluthův potenciál, provedla by se integrace per partes dvakrát, výsledek bude vzhledem k izotropii nulový. První moment FP rovnice pro testovací částici dá

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial H(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}; \quad H(\mathbf{v}) \equiv n_\beta \frac{1}{v} \phi \left(\frac{v}{v_{0\beta}} \right). \quad (2.120)$$

Vidíme, že potenciál H je zodpovědný za změnu rychlosti částice a označení tohoto členu jako dynamické tření bylo oprávněné. Provedme nyní derivaci na pravé straně

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{1}{v} \phi(v/v_{0\beta}) \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} \phi(v/v_{0\beta}) \right) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\phi' \frac{v}{v_{0\beta}} - \phi}{v^2} \frac{\mathbf{v}}{v} = -2v_{0\beta}^{-2} \psi(v/v_{0\beta}) \frac{\mathbf{v}}{v},$$

kde jsme využili vztah (2.118) pro Chandrasekharovu funkci. Středovanou FP rovnici (2.120) lze nyní přepsat do jednoduchého tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} 2n_{\beta} v_{0\beta}^{-2} \frac{\psi(v/v_{0\beta})}{v} \mathbf{v}. \quad (2.121)$$

Výsledek jsme záměrně upravili do tvaru $\partial \mathbf{v} / \partial t = -\nu_{\alpha\beta} \mathbf{v}$, ze kterého lze odečíst srážkovou frekvenci částice prolétávající plazmatem s Maxwellovým rozdělením:

$$\nu_{\alpha\beta} \equiv 2K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} n_{\beta} v_{0\beta}^{-2} \frac{\psi(v/v_{0\beta})}{v}. \quad (2.122)$$

Poznámka 1: Uvedený postup je zcela obecným postupem ke zjištění srážkové frekvence pro určitý děj. Převrácená hodnota této frekvence je relaxačním časem daného děje. Do plazmatu vyšleme testovací částici a středujeme FP rovnici přes určitý moment rychlosti (při sledování přenosu hybnosti přes první, při sledování přenosu energie přes druhé). Poté FP upravíme na tvar $\partial A / \partial t = -\nu A$, kde A je sledovaná veličina. Z pravé strany zjistíme frekvenci ν , její převrácená hodnota je relaxační čas pro příslušný děj.

Poznámka 2: Relaxační časy a příslušné frekvence samozřejmě závisí na ději. Jinou rychlostí systém vyrovnává hybnost s okolím a jinou svou energií.

Poznámka 3: Obecně dá příspěvek i druhý Rosenbluthův potenciál, který souvisí s difúzí nalétávajícího svazku. Tensor difúze má tvar $D_{kl} = A \partial^2 G / \partial v_k \partial v_l$.

Poznámka 4: V našem případě závisí srážková frekvence na rychlosti částice jako $\psi(v/v_0)/v$. Pro malé rychlosti (například tečení elektrického proudu) je závislost dána vztahem $\psi(x) \approx 2x/3\pi^{1/2}$ a srážková frekvence na rychlosti nezávisí. Naopak pro velmi vysoké (relativistické) rychlosti je $\psi(x) \approx 1/2x^2$ a srážková frekvence s rostoucí rychlostí prudce klesá jako $1/v^3$.

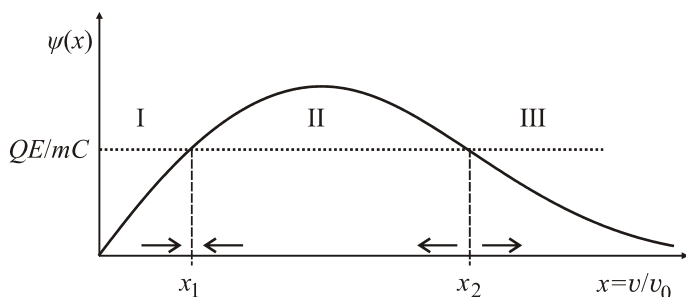
Poznámka 5: Obecně se srážkové frekvence počítají numericky, zejména v přítomnosti polí a v plazmatu, které nemá Maxwellovo rozdělení.

Poznámka 6: Pro Maxwellovo rozdělení je výpočet potenciálů v dodatku A5.

Je-li v plazmatu přítomné slabé elektrické pole urychlující částici, lze pro ni napsat pohybovou rovnici

$$\frac{dv}{dt} = \frac{QE}{m} - \nu(v)v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{QE}{m} - C\psi(v/v_0). \quad (2.123)$$

Zda bude částice urychlována nebo brzděna závisí na tom, který člen vpravo převládne.



Obr. 39: Brzděné a ubíhající částice.

Pro malé rychlosti v oblasti I dochází k urychlování částic polem (tečkovaná polopřímka je nad Chandrasekharovou funkcí). V oblasti II jsou částice naopak brzděny. Rovnováha v bodě x_1 je stabilní. Zde je vliv urychlení polem vyrovnán brzděním třecím členem. Částice se pohybují konstantní rychlostí, prostředí vede elektrický proud. Naopak pro rychlosti vyšší, než odpovídá průsečíku x_2 , (oblast III) dojde k nekontrolovatelnému urychlování částic. Interakce s prostředím klesá na zanedbatelnou míru a částice je urychlována polem na stále vyšší a vyšší rychlosti. Takové částice se nazývají *ubíhající* (runaway). Rovnováha v bodě x_2 je nestabilní. K tomu, aby částice byla nekontrolovatelně urychlována, postačí, aby v daném poli byla její rychlost vyšší než hodnota daná průsečíkem x_2 . Například elektrony vzniklé interakcí kosmického záření s atmosférou mohou mít počáteční rychlost vyšší, než je mez pro nekontrolovatelné urychlení v elektrickém poli mraků. Takové elektrony získávají snadno relativistické rychlosti, jsou zodpovědné za gama záblesky pozorované v atmosféře při bouřkách a mohou pronikat do Van Allenových pásů, kde je nazýváme *zabijácké elektrony*, neboť jsou nebezpečné pro přístroje kosmických lodí i pro jejich posádky.

2.4.6 Relaxační časy a srážkové frekvence

Relaxační časy či srážkové frekvence se počítají způsobem naznačeným v minulém kapitole, většinou numericky. Analytická řešení jsou vždy jen určitým přiblížením, zpravidla pro malé rychlosti nebo malé předané energie, kdy lze Chandrasekharovu nebo jinou obdobnou funkci nahradit rozvojem pro malý argument. Vždy jde o výpočet momentů Fokkerovy-Planckovy rovnice pro určitý typ přenosu. Zpravidla se počítají čtyři typy srážkových frekvencí:

- 1) brzdění testovací částice o okolní prostředí,
- 2) difúze testovací částice kolmo na magnetické pole,
- 3) difúze testovací částice podél magnetického pole,
- 4) energetické ztráty testovací částice.

Získané hodnoty se uvádějí v limitě pomalých nebo v limitě vysokých rychlostí a čtenář je nalezne v každoročně aktualizované publikaci NRL Plasma Formulary [37]. Uvedme zde pro ilustraci výsledek srážkové frekvence pro brzdění částice α o prostředí částic β . Při výpočtu typu 1) se počítá přenos kolmé složky rychlosti, neboť je doba mezi srážkami definována časovým intervalem, při kterém se změnil směr rychlosti částice o 90° . Výsledkem je výraz

$$v_{\alpha\beta} = n_{\beta} \frac{Q_{\alpha}^2 Q_{\beta}^2 \ln A_{\alpha\beta}}{2\pi\epsilon_0^2 m_{\alpha}^2 v_{0\alpha}^3} \left[\phi(v_{0\alpha}/v_{0\beta}) - \psi(v_{0\alpha}/v_{0\beta}) \right]. \quad (2.124)$$

Je zřejmé, že $v_{ei} \sim Zv_{ee} \gg v_{ii} \gg v_{ie}$. Je to především dáno různými hmotnostmi a různými tepelnými rychlostmi elektronů a iontů. Ve vztahu je rychlost $v_{0\alpha}$ nejpravděpodobnější rychlostí nalétávající částice při dané teplotě, $v_{0\beta}$ nejpravděpodobnější rychlostí částic prostředí. Mezi základními frekvencemi platí poměry:

$$\begin{array}{ccccccc} v_{ei} & : & v_{ee} & : & v_{ii} & : & v_{ie} \\ Z & : & 1 & : & \sqrt{m_e/m_i} & : & m_e/m_i \end{array} \quad (2.125)$$

■ **Příklad 4:** Určete vztah pro elektronovou vodivost pro malé rychlosti elektronů. Vydeme ze vztahu pro vodivost (2.57), do kterého dosadíme výraz (2.124):

$$\sigma_{ee} \approx \frac{2m_e \pi \epsilon_0^2}{e^2 \ln \Lambda} \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{3/2}; \quad \phi(1) - \psi(1) \approx 0,6 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_{ee} \approx \frac{10\pi}{3} \frac{m_e \epsilon_0^2}{e^2 \ln \Lambda} \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{3/2} \propto T_e^{3/2}. \quad (2.126)$$

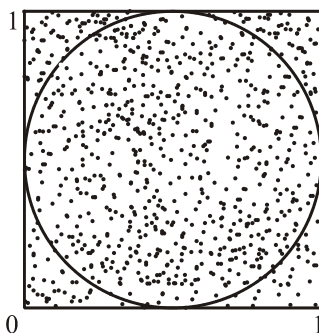
Elektronová vodivost plazmatu nezávisí na koncentraci. S rostoucí koncentrací roste počet nosičů elektrického proudu a tak by se měla vodivost zvětšovat. Roste ovšem i srážková frekvence, což vodivost plazmatu zmenšuje. Oba faktory se právě vyrovnají. Proto vodivost plazmatu závisí jen na teplotě plazmatu. Formule (2.126) se nazývá Spitzerova formule a je pojmenována podle amerického teoretického fyzika Lymana Spitzera (1914–1997). Někdy má plazma podstatně vyšší vodivost – tzv. *anomální rezistivitu* způsobenou drifty, turbulencemi nebo interakcí vln s částicemi. ■

2.5 Monte Carlo simulace

K nejvýraznější skupině numerických metod využívaných ve statistické fyzice patří *Monte Carlo metody*. Pod tímto názvem se skrývají algoritmy založené na posloupnostech náhodných čísel a ve fyzice je údajně poprvé Enrico Fermi ve 30. letech dvacátého století při popisu vlastností nově objeveného neutronu. Tato práce ale nebyla publikována a nedochovala se. První prokázané využití je až z konce 40. let dvacátého století, kdy byly Monte Carlo algoritmy hojně využívány v americké Národní laboratoři v Los Alamos. K jejich průkopníkům patřili Nicolas Metropolis (ten metodu údajně pojmenoval), John von Neumann, Enrico Fermi, Stanislaw Ulam, Edward Teller a Marshall Rosenbluth. Od té doby zaznamenaly Monte Carlo výpočty nebývalý rozvoj ve fyzice, matematice, chemii, ale i v ekonomii a v dalších vědních disciplínách.

Je třeba ale doplnit, že obdobné metody pod názvem *statistické vzorkování* využívali matematici k výpočtu vícerozměrných určitých integrálů již v 18. století. Náhodná čísla tenkrát nebyla generována počítačem, ale za pomoci speciálních tabulek. Dnes má téměř každý programovací jazyk implementováno několik generátorů náhodných čísel v intervalu $(0, 1)$, jejich kvalita ale nemusí být pro Monte Carlo výpočet dostatečná. V této kapitole si ukážeme základní principy Monte Carlo metod a jejich některé využití. Začneme dvěma jednoduchými úvodními příklady.

● **Příklad 5:** K velmi názorným ukázkám použití Monte Carlo metod patří výpočet Ludolfova čísla π . K tomu postačí generovat náhodné body do jednotkového čtverce $(0, 1) \times (0, 1)$.



Obr. 40: Monte Carlo výpočet čísla π .

Využijeme nějaký vestavěný generátor γ_k čísel v intervalu $(0, 1)$ a vygenerujeme mnoho bodů „padnoucích“ do plochy čtverce:

$$\begin{aligned} x_k &= \gamma_{2k-1}, \\ y_k &= \gamma_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Budeme sledovat počet bodů generovaných do jednotkového čtverce (N_{\square}) a dále počet N_{\circ} těch z nich, které padly do jednotkového kruhu (splňují relaci $x^2 + y^2 < 1$) podle obrázku 40. Pro dosti velký počet bodů jsou jejich počty úměrné plochám obrazců:

$$\frac{N_{\circ}}{N_{\square}} \approx \frac{S_{\circ}}{S_{\square}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \pi \approx 4 \frac{N_{\circ}}{N_{\square}}.$$

Pouhým počítáním generovaných bodů tak můžeme při značném počtu kroků určit s vysokou přesností číslo π .

● **Příklad 6:** Jako další ukázkou uveďme algoritmus pro výpočet určitého integrálu

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Mnohokrát po sobě generujeme bod z definičního intervalu hledaného integrálu (a, b) :

$$x_k = a + \gamma_k(b - a).$$

Nyní najdeme střední hodnotu integrované funkce f na integračním intervalu (a, b) :

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Integrál je potom přibližně roven ploše obdélníka s výškou rovnou střední hodnotě f :

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \bar{f} \cdot (b-a).$$

Pro výpočet jednorozměrného integrálu není tato metoda příliš výhodná. Integrál je roven ploše pod křivkou a mnohem rychlejší je například nahradit tuto plochu větším počtem lichoběžníků a hodnotu integrálu odhadnout pomocí součtu ploch těchto lichoběžníků. Existují ale mnohorozměrné integrály, kde jsou Monte Carlo metody mnohdy jedinou možností, jak odhadnout jejich hodnotu. ■

2.5.1 Generátory náhodných čísel

Je zřejmé, že pro Monte Carlo výpočty je rozhodující kvalita a rychlost generátoru náhodných čísel. Ideální generátor je odvozen od skutečně náhodné veličiny, například z šumu elektronické součástky nebo nějakého kvantového jevu. Takové hardwarové generátory se využívají jen pro specializované výpočty. Jejich hlavní nevýhodou je, že již jednou provedený výpočet není možné zopakovat. Zpravidla se využívají softwarové generátory založené na posloupnosti pseudonáhodných čísel generovaných určitým matematickým algoritmem. Perioda těchto generátorů je konečná a generovaná čísla se po určité době začnou opakovat. K základním požadavkům na „dobrý“ generátor patří:

- 1) dostatečně dlouhá perioda generátoru,
- 2) vysoká rychlost generování pseudonáhodných čísel,
- 3) rovnoměrné rozložení generovaných čísel,
- 4) co nejmenší korelace mezi jednotlivými skupinami generovaných čísel.

K testům kvality generátoru může být využit například programový balík DIEHARD vyvinutý na Floridské státní univerzitě. K nejběžněji používaným generátorům při Monte Carlo výpočtech patří:

Lineární multiplikativní kongruenční generátor (LCG)

Generátor navrhl v roce 1949 americký matematik Derrick Henry Lehmer. Posloupnost pseudonáhodných čísel je generována za pomoci předpisu

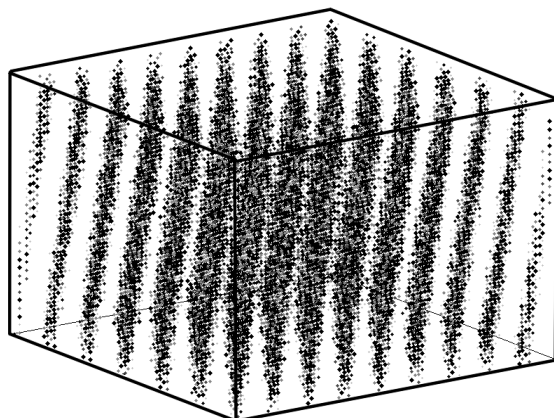
$$\gamma_k = (\lambda \cdot \gamma_{k-1} + C) \bmod P, \quad (2.127)$$

kde způsob generování je ovlivněn čtyřmi parametry λ , C , P a γ_0 . Maximální možná perioda je $P - 1$. První číslo posloupnosti γ_0 je tzv. „semínko“. Deterministicky určuje celou následující posloupnost. Využití stejného semínka umožní opakování již provedeného výpočtu. K velmi oblíbeným generátorům 60. až 80. let 20. století patřil LCG generátor IBM RANDU s parametry

$$P = 2^{31}, \quad \lambda = 2^{16} + 3, \quad C = 0.$$

V takto generované posloupnosti se ale vyskytují korelace typu 2^n , které mohou některé typy výpočtů zcela znehodnotit. Body generované do 3D krychle nejsou rozmístěny rovnoměrně, ale jsou lokalizovány v patnácti rovinách, které jsou při určitém směru pohledu dobře rozeznatelné. Dnes se proto generátory LCG využívají jen jako základ kombinovaných generátorů, například dvou provázaných generátorů LCG do jediného generátoru

$$\begin{aligned}\xi_k &= (\lambda_1 \cdot \xi_{k-1} + C_1) \bmod P_1, \\ \eta_k &= (\lambda_2 \cdot \eta_{k-1} + C_2) \bmod P_2; \\ \gamma_k &= (\xi_k + \eta_k) \bmod \max(P_1, P_2).\end{aligned}\tag{2.128}$$



Obr. 41: Příklad nevhodného generátoru náhodných čísel IBM RANDU. V 3D krychli jsou čísla generována jen v patnácti rovinách.

Fibonacciho generátory

Jde o generátory, jenž využívají ke generování i starší členy posloupnosti náhodných čísel:

$$\gamma_k = f(\gamma_{k-p}, \gamma_{k-q}) \bmod P.\tag{2.129}$$

Tyto generátory mají zpravidla vynikající vlastnosti, je však třeba uchovávat určitý počet vygenerovaných čísel. Funkce f může být prostým násobením, odčítáním nebo sčítáním. Ke kvalitním generátorům vhodným pro Monte Carlo výpočty patří například L'Ecuyerův generátor

$$\begin{aligned}\gamma_k &= (a_1 \gamma_{k-1} + a_5 \gamma_{k-5}) \bmod P; \\ a_1 &= 107374182, \\ a_5 &= 104480, \\ P &= 2^{31} - 1\end{aligned}\tag{2.130}$$

nebo velmi kvalitní kombinovaný L'Ecuyerův generátor

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= (\xi_k - \eta_k) \bmod P_1 ; \\
 \xi_k &= (a_1 \xi_{k-1} + a_2 \xi_{k-2} + a_3 \xi_{k-3}) \bmod P_1 ; \\
 \eta_k &= (b_1 \eta_{k-1} + b_2 \eta_{k-2} + b_3 \eta_{k-3}) \bmod P_2 ; \\
 a_1 &= 0, \quad a_2 = 63308, \quad a_3 = -183326, \\
 b_1 &= 86098, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -539608, \\
 P &= 2^{31} - 1, \quad P_2 = 2145483479.
 \end{aligned}
 \tag{2.131}$$

V Monte Carlo simulacích je možné využít i dalších specializovaných generátorů náhodných čísel, jejich popis ale překračuje rámeček této knihy.

2.5.2 Realizace pravděpodobnostního rozdělení

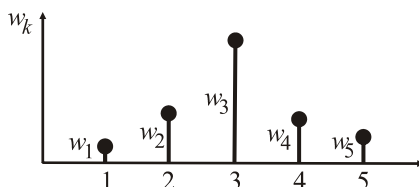
Často potřebujeme jiný generátor, než je rovnoměrný. Například můžeme chtít zkonstruovat generátor, který nám bude generovat děje ve shodě s nějakým pravděpodobnostním rozdělením. V této kapitole se naučíme některé způsoby realizace pravděpodobnostních rozdělení.

Metoda střelby (distribuční posloupnosti nebo funkce)

Představme si, že máme N dějů s pravděpodobnostmi w_1, w_2, \dots, w_N . Zavedme náhodnou veličinu ξ , v prvním řádku je pořadí děje a ve druhém řádku pravděpodobnost děje.

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & N \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_N \end{pmatrix}
 \tag{2.132}$$

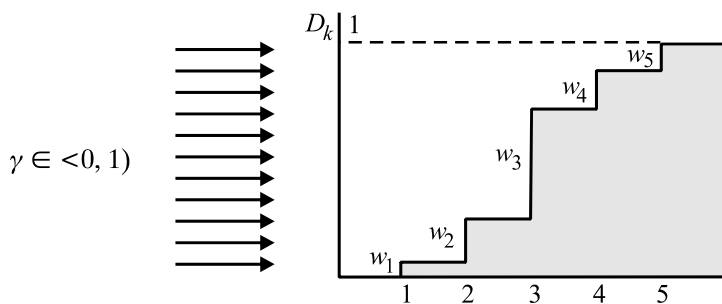
Graficky můžeme pravděpodobnostní rozdělení znázornit například takto (na obrázku bylo zvoleno 5 dějů):



Obr. 42: Diskrétní pravděpodobnostní rozdělení.

Vytvořme „schody“, u kterých bude výška jednotlivých stupňů odpovídat velikosti pravděpodobnosti děje. V matematice se takové schody nazývají distribuční posloupnost (ve spojitém případě distribuční funkce). Poslední schod musí proto být ve výšce 1, protože je součtem všech pravděpodobností. Distribuční posloupnost je definována předpisem

$$D_k \equiv \sum_{j=1}^k w_j.
 \tag{2.133}$$

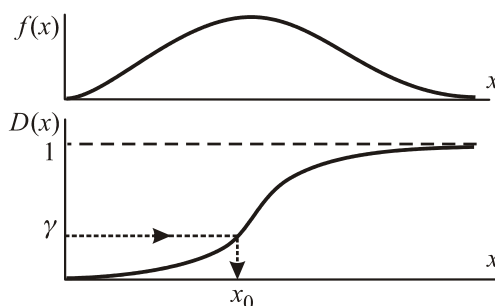


Obr. 43: Distribuční posloupnost (diskrétní případ).

Vždy jde o rostoucí posloupnost s hodnotami mezi 0 a 1. Právě toho se využívá při Monte Carlo realizaci děje. Mnohokrát opakovaně generujeme náhodné číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a každé si představíme jako střelu, která zleva nalétává na naše schody. Zjistíme do kterého schodu se střela trefila (viz obrázek 43). Padla-li do schodu k , prohlásíme, že nastal děj k . Vzhledem k tomu, že výška schodu odpovídá pravděpodobnosti děje, generujeme náhodné děje přesně ve shodě s pravděpodobnostním rozdělením. Ve spojitém případě můžeme postupovat podobně. Je-li hustota pravděpodobnosti $f(x)$, zavedeme distribuční funkci předpisem

$$D(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (2.134)$$

Opět jde o rostoucí funkci s limitou v pravém krajním bodě danou součtem všech pravděpodobností $\lim_{x \rightarrow \infty} D(x) = 1$.



Obr. 44: Hustota pravděpodobnosti a její distribuční funkce (spojitý případ).

Metodou střelby můžeme stejně jako v diskretním případě realizovat rozdělení pomocí rovnoměrného generátoru γ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Řekneme, že padl děj x_0 , je-li $D(x_0) = \gamma$. Pro uskutečněný děj tedy platí

$$x = D^{-1}(\gamma). \quad (2.135)$$

Celý postup realizace daného rozdělení je proto ve spojitém případě následující:

1. nalezneme distribuční funkci $D(x)$,
2. nalezneme inverzní funkci k $D(x)$,
3. generujeme rovnoměrně náhodné číslo $\gamma \in (0, 1)$,
4. prohlásíme, že „padl“ děj $x = D^{-1}(\gamma)$.

● **Příklad 7:** Realizujte rovnoměrné rozdělení na intervalu (a, b) .

Řešení: Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je konstantní funkce $f(x)$. Hodnotu konstanty určíme z normovací podmínky:

$$f(x) = K; \quad \int_a^b f(x) dx = 1 \quad \Rightarrow \quad K(b-a) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

Nyní snadno nalezneme distribuční funkci

$$D(x) = \int_a^x f(x) dx = \frac{x-a}{b-a}$$

a položíme ji rovnou náhodnému číslu γ z intervalu $(0, 1)$ a provedeme inverzi:

$$D(x) = \gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{x-a}{b-a} = \gamma \quad \Rightarrow \quad x = a + \gamma(b-a).$$

Výsledek je zcela přirozený: Náhodné číslo γ mezi 0 a 1 roztáhneme koeficientem $(b-a)$ na požadovaný interval a posuneme o hodnotu a do počátku intervalu. ■

● **Příklad 8:** Realizujte rozdělení Kx^2 na intervalu $(-1, +1)$.

Řešení: Nejprve určíme normovací konstantu rozdělení K :

$$f(x) = Kx^2; \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = 1 \quad \Rightarrow$$

$$K = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{3}{2}x^2.$$

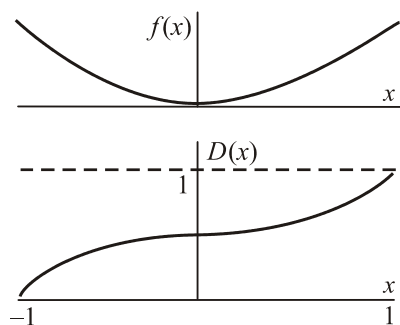
Jako další krok nalezneme distribuční funkci $D(x)$:

$$D(x) = \int_{-1}^x f(x) dx = \frac{x^3+1}{2}.$$

Distribuční funkci položíme rovnou náhodnému číslu γ z intervalu $(0, 1)$ a provedeme inverzi:

$$D(x) = \gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3+1}{2} = \gamma \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2\gamma-1}.$$

Výsledkem je nerovnoměrný generátor na intervalu $(-1, +1)$. Ve shodě s parabolickou hustotou pravděpodobnosti nejčastěji padají hodnoty na krajích intervalu a nejméně často uprostřed. Na distribuční funkci je dobře patrné, že „trefit se střelou letící zleva“ do pozice $x = 0$ je téměř nemožné:



Obr. 45: Hustota pravděpodobnosti a jí odpovídající distribuční funkce.

● **Příklad 9:** Realizujte rozdělení $\exp[-x]$ na intervalu $(0, \infty)$

Řešení: Normovaná hustota pravděpodobnosti je $f(x) = \exp[-x]$, distribuční funkce po výpočtu integrálu vyjde $D(x) = 1 - \exp[-x]$. Položme $D(x) = \gamma$, tedy $1 - \exp[-x] = \gamma$, a po inverzi máme výsledek $x = -\ln(1 - \gamma)$. Vzhledem k tomu, že γ a $1 - \gamma$ mají na intervalu $(0, 1)$ stejné rovnoměrné rozdělení, postačí volit

$$x = -\ln \gamma.$$

Poznámka: Pozor na názvosloví: *Hustota pravděpodobnosti* se ve fyzice někdy nazývá *rozdělovací funkce* (někdy také distribuční funkce). V matematice je vždy distribuční funkce integrálem s horní proměnnou mezí z hustoty pravděpodobnosti. Tak budeme chápat distribuční funkci i v této učebnici.

Metoda von Neumanna

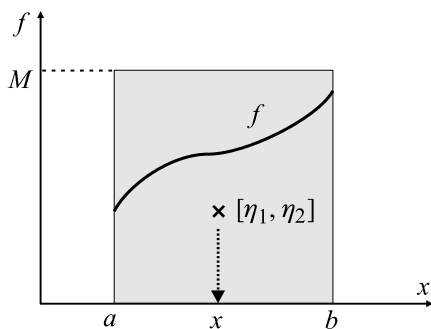
Mějme hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ definovanou na konečném intervalu (a, b) . Nalezneme co nejmenší obdélník, do kterého se vejde graf křivky $f(x)$. Na volbě výšky M nezáleží, postačí $M > f(x)$ pro každé x , ale metoda je neúčinnější pro co možná nejmenší hodnotu M . Nejprve generujeme náhodný bod v obdélníku:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a + \gamma_1(b - a), \\ \eta_2 &= M \gamma_2. \end{aligned} \tag{2.136}$$

Pravděpodobnost, že padne děj v intervalu Δx je úměrná ploše pod křivkou, protože $\Delta P = f \Delta x$. Stačí tedy algoritmus doplnit tak, aby odpovídal úměrnosti této ploše:

$$\begin{aligned} \eta_2 < f(\eta_1) &\Rightarrow \text{padl děj } x = \eta_1; \\ \eta_2 \geq f(\eta_1) &\Rightarrow \text{volíme nový bod } [\eta_1, \eta_2]. \end{aligned} \tag{2.137}$$

Metodu von Neumanna lze aplikovat vždy, ale není tak účinná jako metoda střelby (metoda inverzní funkce, metoda distribuční funkce). Tyto metody jsou lepší, pokud se podaří nalézt inverzní funkci k distribuční funkci.



Obr. 46: Metoda von Neumanna.

Metoda superpozice

Nechť platí

$$f(x) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(x); \quad \int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} f_k(x) dx = 1 \quad \text{pro } \forall k; \quad \sum_{k=1}^m c_k = 1. \quad (2.138)$$

Hustota pravděpodobnosti je dána součtem (superpozicí) několika funkcí. Každá parciální hustota pravděpodobnosti je normována k jedné, stejně tak jako celková hustota pravděpodobnosti. To vede na podmínku, že součet koeficientů superpozice je roven jedné. Zavedme součet parciálních distribučních funkcí pro jednotlivá f_k :

$$D(x) = \sum_{k=1}^m c_k D_k(x). \quad (2.139)$$

K realizaci rozdělení vede následující algoritmus:

1. Zavedeme náhodnou veličinu

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{pmatrix}$$

a generujeme rovnoměrné náhodné číslo $\gamma_1 \in \langle 0, 1 \rangle$. Podle některé z předchozích metod (nejlépe metodou střelby). Potom zvolíme podle pravděpodobností c_1, c_2, \dots, c_m některý z dějů $k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

2. Generujeme náhodné číslo $\gamma_2 \in \langle 0, 1 \rangle$ a realizujeme rozdělení $f_k(x)$ některou z předchozích metod (inverzní funkce, von Neumannova).

● **Příklad 10:** Realizujte rozdělení $f(x) = \frac{5}{12} [1 + (x-1)^4]$ na intervalu $(0, 2)$.

Řešení: Metoda inverzní funkce pro celou hustotu pravděpodobnosti je principiálně možná, ale zbytečně složitá. Hustotu pravděpodobnosti rozložíme takto (určíme f_1 a f_2 s koeficienty tak, aby byly normovány k jedné, a poté nalezneme koeficienty c_1 a c_2):

$$f_1(x) = \frac{1}{2}; \quad f_2(x) = \frac{5}{2}(x-1)^4 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{5}{6} f_1(x) + \frac{1}{6} f_2(x).$$

Distribuční funkce nyní bude:

$$D(x) = \frac{5}{6}D_1(x) + \frac{1}{6}D_2(x); \quad D_1(x) = \frac{x}{2}; \quad D_2(x) = \frac{1}{2}[1 + (x-1)^5].$$

Nejprve generujeme číslo γ_1 a rozhodneme se podle předpisu:

$$\gamma_1 < \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \text{padl děj 1};$$

$$\gamma_1 \geq \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \text{padl děj 2}.$$

Poté použijeme metodu inverzní funkce. Generujeme γ_2 a využijeme předpis:

$$\text{pro děj 1:} \quad x = 2\gamma_2;$$

$$\text{pro děj 2:} \quad x = 1 + \sqrt[5]{2\gamma_2 - 1}.$$

Celou metodu můžeme shrnout takto: Generujeme dvojici náhodných čísel v intervalu $(0, 1)$ a využijeme předpis:

$$x = \begin{cases} 2\gamma_2, & \gamma_1 < \frac{5}{6}; \\ 1 + \sqrt[5]{2\gamma_2 - 1}, & \gamma_1 \geq \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Užitečné realizace některých rozdělení

Gaussovo rozdělení:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]; \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (2.140)$$

generujeme dvojici γ_1, γ_2 náhodných čísel z intervalu $(0, 1)$. Potom dvě hodnoty Gaussova rozdělení jsou:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \cos(2\pi\gamma_2); \\ x_2 &= \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \sin(2\pi\gamma_2). \end{aligned} \quad (2.141)$$

Gama rozdělení:

$$f(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp[-ax]; \quad x \in (0, \infty); \quad a > 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.142)$$

Generujeme $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ a určíme hodnoty

$$x_n = -\frac{1}{a} \ln(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n). \quad (2.143)$$

Body uvnitř koule o poloměru R:

Rovnoměrně generované body v kouli poloměru R ve sférických souřadnicích (r, φ, θ) :

$$r = R\sqrt[3]{\gamma_1}; \quad \varphi = 2\pi\gamma_2; \quad \cos \theta = 2\gamma_3 - 1. \quad (2.144)$$

2.5.3 Metropolisova metoda

V roce 1953 byl publikován jeden z nejuspěšnějších numerických algoritmů všech dob, který je dnes znám pod názvem *Metropolisova metoda*. Algoritmus publikovala skupina pracující na vývoji prvních jaderných reaktorů v americké Národní laboratoři v Los Alamos. K autorům algoritmu patřili především: řecko-americký fyzik Nicholas Metropolis (1915–1999), americký teoretik a „otec“ vodíkové bomby Edward Teller (1908–2003) a americký plazmový fyzik Marshall Rosenbluth (1927–2003).

Metropolisův algoritmus umožňuje jednoduchým způsobem vzorkovat Boltzmannovo rozdělení. Předpokládejme, že je systém v termodynamické rovnováze odpovídající teplotě T . Příslušný statistický soubor (velké množství stejných částic, například atomů určitého druhu) podléhá rovnovážnému Boltzmannovu rozdělení

$$P_{\text{eq}}(H) = C \exp[-\beta H]. \quad (2.145)$$

Při realizaci rozdělení je základním problémem určení konstanty C rozdělení. K jejímu zjištění by bylo nutné spočítat tzv. partiční sumu, tj. sečíst (resp. integrovat) exponenciální faktory na pravé straně přes veškeré stupně volnosti. Faktor $\exp[-\beta H]$ se může měnit o mnoho řádů a numerická integrace je komplikovaná.

Metropolisova metoda umožňuje generovat tzv. reprezentativní (vzorkovací) posloupnost stavů S_n s energiemi $H_n = H(S_n)$. Vytvoříme-li dostatečný počet členů posloupnosti, simuluje generovaná posloupnost Boltzmannovo rozdělení a střední hodnoty dynamických proměnných nemusíme počítat ze vztahu

$$\langle A \rangle = \frac{\int A(S) \exp[-\beta H(S)] d\Gamma}{\int \exp[-\beta H(S)] d\Gamma},$$

ve kterém integrace probíhá přes fázový prostor (například přes veškeré zobecněné polohy a hybnosti), ale má-li posloupnost dosti velký počet členů, postačí určit pouhý aritmetický průměr z členů posloupnosti, neboť platí:

$$\langle A \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A(S_n). \quad (2.146)$$

Metropolisův algoritmus umožňuje nalezení takové reprezentativní posloupnosti bez výpočtu partiční sumy:

- 1) Zvolíme náhodně výchozí stav systému. Algoritmus zajišťuje, že generovaná posloupnost bude simulovat vlastnosti Boltzmannova rozdělení bez ohledu na volbu prvního členu.
- 2) Pomocí generátoru náhodných čísel zvolíme libovolný jiný stav systému (generátor by měl rovnoměrně pokrývat možné zobecněné souřadnice a hybnosti nebo jiné parametry systému).
- 3) Nový stav přijmeme s pravděpodobností

$$P_{n \rightarrow n+1} = \begin{cases} \exp[-\beta \Delta H] & \text{pro } \Delta H > 0 \\ 1 & \text{pro } \Delta H \leq 0 \end{cases}; \quad \Delta H \equiv H(S_{n+1}) - H(S_n). \quad (2.147)$$

- 4) Pokračujeme bodem 2).

Poznámka 1: Bod 3) lze snadno realizovat například takto: Pokud je $\Delta H \leq 0$, považujeme stav S_{n+1} za následující člen reprezentativní posloupnosti. Je-li $\Delta H > 0$, generujeme náhodné číslo $\gamma \in (0, 1)$ a pro $\gamma \leq \exp[-\beta\Delta H]$ považujeme S_{n+1} za nový člen posloupnosti, pro $\gamma > \exp[-\beta\Delta H]$ ponecháme původní stav. Stav s nižší energií tedy volíme za nový vždy. Pravděpodobnost volby konfigurace s vyšší energií než stávající exponenciálně klesá s rozdílem energií.

Poznámka 2: Generování reprezentativní posloupnosti probíhá při konstantní teplotě. Další výpočet můžeme odstartovat s nepatrně pozměněnou teplotou a postupně tímto způsobem simulovat teplotní průběh veličin. Při dostatečně pomalém snižování teploty můžeme vyhledat základní stav systému (tzv. metoda simulovaného ochlazování). Nalezení základního stavu je důležitou úlohou, nicméně Metropolisův algoritmus nemusí v některých případech najít skutečné minimum energie, ale jen některé z lokálních minim.

Poznámka 3: Monte Carlo metody zpravidla selhávají v blízkosti fázových přechodů, kdy se neúměrně prodlužují relaxační časy a počet potřebných členů reprezentativní posloupnosti.

Poznámka 4: Metropolisův algoritmus generování reprezentativní posloupnosti patří k tzv. *Markovovým procesům*. Následující člen posloupnosti totiž závisí jen na předchozím členu a nikoli na historii geneze posloupnosti.

Poznámka 5: V roce 1970 zobecnil tento algoritmus pro případ libovolného statistického rozdělení kanadský matematik Keith Hastings (1930). Nechť $P_{\text{eq}}(S)$ je dané rozdělení a $P_{n \rightarrow n+1}$ je navrhovaná pravděpodobnost přechodu (například Gaussovo rozdělení centrované kolem aktuálního stavu). Generujeme náhodné číslo $\gamma \in (0, 1)$ a nový stav akceptujeme jako další člen posloupnosti, pokud platí

$$\gamma < \min \left\{ \frac{P_{\text{eq}}(S_{n+1})P_{n \rightarrow n+1}}{P_{\text{eq}}(S_n)P_{n+1 \rightarrow n}}, 1 \right\}.$$

Vzhledem k podílu je zjevné, že pravděpodobnosti nemusí být normovány k jedné.

2.5.4 MC simulace srážky dvou nabitých částic

V plazmatu s mnoha částicemi není většinou možné počítat skutečný průběh všech srážek a proto využíváme Monte Carlo simulace srážek. Můžeme postupovat například takto:

- 1) Rozhodneme se, zda podle předem určeného kritéria (například když jsou částice blíže, než je Debyeova vzdálenost) dojde ke srážce dvou částic.
- 2) Na základě aktuálních účinných průřezů σ_k různých možných procesů (například Coulombova srážka, excitační proces, ionizační proces, nábojová výměna, atd.) sestavíme distribuční posloupnost

$$D_l = \frac{\sum_{k=1}^l \sigma_k}{\sigma_{\text{tot}}}; \quad \sigma_{\text{tot}} \equiv \sum_{k=1}^N \sigma_k. \quad (2.148)$$

a metodou strelby se rozhodneme, ke kterému procesu dojde.

- 3) Za pomoci Monte Carlo algoritmu budeme generovat ze stavu před srážkou vhodný stav po srážce.

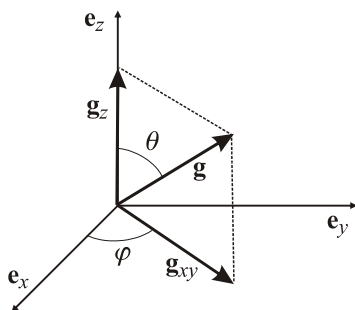
Monte Carlo odhady finálních stavů po srážce nejsou samozřejmě v pořádku pro jednu konkrétní srážku, ale pro velké množství srážek dají při popisu plazmatu statisticky korektní výsledky. Popišme nyní dnes hojně používaný Monte Carlo algoritmus Coulombovy srážky navržený T. Takizukou a H. Abem již v roce 1977.

Coulombova srážka

Předpokládejme, že v čase t dojde ke srážce dvou částic s hmotnostmi m_α, m_β a s rychlostmi $\mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{v}'_\beta$ v laboratorní soustavě. Označme vzájemnou rychlost částic v čase t :

$$\mathbf{g}^t \equiv \mathbf{v}'_\alpha - \mathbf{v}'_\beta \quad (2.149)$$

Označme \mathbf{g}_z a \mathbf{g}_{xy} projekce relativní rychlosti do osy z a roviny (xy) . Dále zavedme úhly θ (odklon \mathbf{g} od osy z) a φ (odklon projekce \mathbf{g}_{xy} od osy x):



Obr. 47: Rozklad relativní rychlosti na projekce \mathbf{g}_{xy} a \mathbf{g}_z .

K popisu srážky zvolíme novou, výhodnější souřadnicovou soustavu S' , která bude pootočená o úhel φ v ose z a úhel θ v ose y . Nová soustava je volena tak, aby vektor relativní rychlosti mířil ve směru třetí osy:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}_{S'}. \quad (2.150)$$

Celková transformační matice má tvar

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.151)$$

Pro návrat k původní soustavě budeme také potřebovat inverzní matici (transformace je unitární a tak inverzní matici snadno získáme překlopením kolem diagonály):

$$\mathbb{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.152)$$

Při Coulombově srážce se nemění velikost relativní rychlosti (viz kapitola 2.1.2), ale pouze směr rychlosti. Proto vektor $(0, 0, g)^t$ pootočíme o úhly θ a Φ .

Generování úhlů θ a Φ

Z důvodu symetrie je nejjednodušší generování úhlu Φ , stačí volit rovnoměrné rozdělení, tj. generovat náhodné číslo $\gamma_1 \in (0, 1)$ a za úhel Φ zvolit

$$\Phi = 2\pi\gamma_1. \quad (2.153)$$

Volba úhlu θ závisí na účinném průřezu daného typu srážky. Takizuka a Abe ukázali, že korektní statistickou reprezentaci Coulombovy srážky lze získat volbou

$$\theta = \arctg(2\delta), \quad (2.154)$$

kde $\delta \in (-\infty, \infty)$ je náhodná veličina generovaná ve shodě s Gaussovým rozdělením s nulovou střední hodnotou a standardní odchylkou σ danou vztahem

$$\sigma = \sqrt{\frac{Q_\alpha^2 Q_\beta^2 \min\{n_\alpha, n_\beta\} \ln A_{\alpha\beta}}{8\pi\epsilon_0^2 \mu^2 g^3}} \Delta t, \quad (2.155)$$

kde μ je redukovaná hmotnost, $\ln A_{\alpha\beta}$ je Coulombův logaritmus, g je velikost vzájemné rychlosti a Δt je časový krok.

Návrat k původním proměnným

Z úhlů θ a Φ spočteme novou relativní rychlost v pootočené soustavě S' . Poté nalezneme za pomoci inverzní matice \mathbb{R}^{-1} relativní rychlost v laboratorní soustavě S :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}_S^{t+\Delta t} &= \mathbb{R}^{-1} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}_{S'}^{t+\Delta t} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \sin \theta \cos \Phi \\ g \sin \theta \sin \Phi \\ g \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Důležitý je rozdíl relativní rychlosti po srážce a před srážkou definovaný vztahem

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}^{t+\Delta t} - \mathbf{g}^t. \quad (2.157)$$

Po dosazení z (2.156) vychází

$$\begin{aligned} \Delta g_x &= \frac{g_x^t}{g_{xy}^t} g_z^t \sin \Theta \cos \Phi - \frac{g_y^t}{g_{xy}^t} g \sin \Theta \sin \Phi - g_x^t (1 - \cos \Theta), \\ \Delta g_y &= \frac{g_y^t}{g_{xy}^t} g_z^t \sin \Theta \cos \Phi + \frac{g_x^t}{g_{xy}^t} g \sin \Theta \sin \Phi - g_y^t (1 - \cos \Theta), \\ \Delta g_z &= -g_{xy}^t \sin \Theta \cos \Phi - g_z^t (1 - \cos \Theta). \end{aligned} \quad (2.158)$$

Veličina g je velikost relativní rychlosti \mathbf{g} , veličina g_{xy} je velikost projekce \mathbf{g}_{xy} :

$$\begin{aligned} g^t &= \sqrt{(g_x^t)^2 + (g_y^t)^2 + (g_z^t)^2}, \\ g_{xy}^t &= \sqrt{(g_x^t)^2 + (g_y^t)^2}. \end{aligned} \quad (2.159)$$

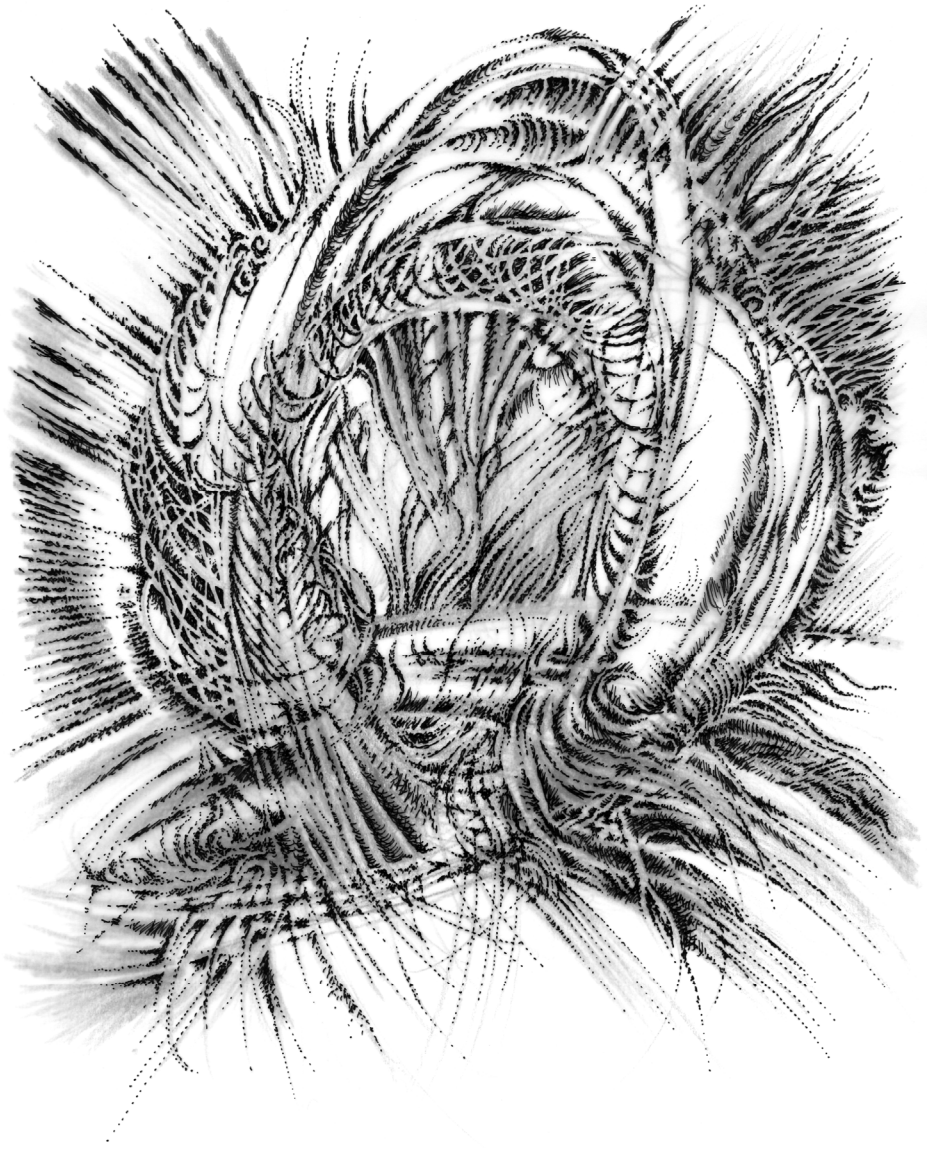
Za pomoci transformace (2.12) nyní určíme rychlosti částic po srážce:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha^{t+\Delta t} &= \mathbf{v}_\alpha^t + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta \mathbf{g}, \\ \mathbf{v}_\beta^{t+\Delta t} &= \mathbf{v}_\beta^t - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \Delta \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (2.160)$$

Popsaný algoritmus mnohokrát opakujeme pro sledovanou soustavu částic.



3. Magneto-hydrodynamika



3.1 Minimální varianta

Popis plazmatu v rámci teorie kontinua poprvé použil švédský fyzik a astrofyzik Hannes Alfvén (1908–1995). Za práce v oblasti magnetohydrodynamiky získal Nobelovu cenu za fyziku v roce 1970. Základní rovnice magnetohydrodynamiky jsme již odvodili ze středování Boltzmannovy rovnice přes různé momenty rychlosti. Spolu s Maxwellovými rovnicemi pro elektrické a magnetické pole máme výchozí soustavu pro popis plazmatu v rámci teorie kontinua. Pokud je v plazmatu dominantní magnetické pole, lze provést celou řadu dalších zjednodušení, která umožní soustavu upravit do podoby vhodné pro další výpočty. Na plazma budeme pohlížet jako na vodivou tekutinu (nebo více prolínajících se tekutin), jejíž chování dominantně ovlivňuje magnetické pole. Existuje několik možných variant výchozích předpokladů teorie, zaměříme se nejprve na tzv. minimální (nejjednodušší) předpoklady:

► Plazma lze považovat za kontinuum

Plazma je srážkově dominantní a na prostorových i časových škálách jsou srážky podstatným jevem. Střední volné dráhy částic jsou mnohem kratší než rozměry L sledovaného plazmatu a střední kolizní čas pro jednotlivé částice je mnohem kratší než doba T , po kterou plazma sledujeme:

$$\lambda_e, \lambda_i, \lambda_n \ll L; \quad \tau_e, \tau_i, \tau_n \ll T. \quad (3.1)$$

► Plazma je kvazineutrální

V plazmatu jsou volné nosiče náboje, ovšem v každém makroskopickém objemu je stejný počet kladných a záporných nábojů. Prostorová hustota náboje je nulová:

$$\rho_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum Q_\alpha n_\alpha = 0. \quad (3.2)$$

V některých variantách magnetohydrodynamiky není tento předpoklad splněn.

► Jednotekutinový model

Plazma lze v prvním přiblížení považovat za jedinou tekutinu. V modelu používáme namísto rychlostí různých komponent jen těžišťovou rychlost a proudovou hustotu

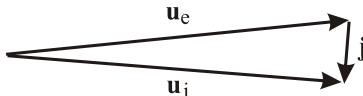
$$\mathbf{u} = \frac{\sum m_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{\sum m_\alpha}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{j} = \sum Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha. \quad (3.4)$$

Pokud je plazma složeno jen z elektronů a iontů, dochází k ambipolární difúzi a uniknou-li ze systému lehčí elektrony, táhnou za sebou pomocí Coulombova pole těžší ionty. Rychlosti elektronové i iontové složky jsou zhruba vyrovnané a rovny těžišťové rychlosti:

$$\mathbf{u}_e \approx \mathbf{u}_i \approx \mathbf{u}. \quad (3.5)$$

Nepatrný rozdíl rychlostí elektronů a iontů souvisí s proudovou hustotou tekoucí plazmatem. Například pro jedenkrát ionizované plazma je $n_e = n_i = n$, $\mathbf{j} = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$.



Obr. 48: Směr proudové hustoty.

Existují samozřejmě i magnetohydrodynamické popisy založené na vícetekutinovém modelu. Odvoďme vztah pro hustotu Lorentzovy síly v jednotekutinovém modelu

$$\mathbf{F}_\alpha = Q_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B};$$

$$\mathbf{f}_\alpha = Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B};$$

$$\mathbf{f} = \sum (Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = \left(\sum Q_\alpha n_\alpha \right) \mathbf{E} + \left(\sum Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right) \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

První člen na pravé straně je nulový z důvodu požadavku kvazineutrality. Rychlost \mathbf{v} jedné částice přejde v kontinuu na střední rychlost proudění \mathbf{u} .

► Nerelativistické plazma

V minimální variantě MHD požadujeme nerelativistické rychlosti všech druhů částic, tj.

$$\frac{u_\alpha}{c} \ll 1. \quad (3.6)$$

To s sebou nese relativně jednoduchou podobu Ohmova zákona (v pohybujícím se plazmatu je třeba transformovat elektrické pole \mathbf{E} z laboratorní soustavy na pole \mathbf{E}' v soustavě pohybující se s plazmatem, kde platí Ohmův zákon $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'$):

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}' = \sigma \frac{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \doteq \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3.7)$$

► Posuvný proud je zanedbatelný

V Maxwellově rovnici $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ zanedbáme Maxwellův posuvný člen oproti proudové hustotě. To je možné jen pro nízkofrekvenční děje, konkrétně pro periodickou závislost vlny na čase ve tvaru $\exp[i\omega t]$ vychází omezení na frekvenci

$$|\partial \mathbf{D} / \partial t| \ll |\mathbf{j}| \quad \Rightarrow \quad |i\omega \epsilon \mathbf{E}| \ll \sigma \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \omega \ll \sigma / \epsilon. \quad (3.8)$$

Podmínka je splněna pro vysoce vodivé plazma nebo nízké frekvence dějů. Není-li tato podmínka splněna, musíme se zabývat i časově proměnnými elektrickými poli.

3.1.1 Substancionální derivace a rovnice proudnice

Pojmy *substancionální derivace* a *rovnice proudnice* jsou v teorii kontinua užitečné, a proto se s nimi seznámme ještě před tím, než odvodíme základní sadu rovnic magnetohydrodynamiky.

Substancionální derivace

Nalezněme úplnou časovou derivaci nějakého vektorového pole $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_k(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dt} = \\ &= \frac{\partial A_k}{\partial t} + u_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} = \frac{\partial A_k}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) A_k. \end{aligned}$$

Úplná derivace vektorového pole (tzv. substancionální derivace) se skládá ze dvou částí

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A}. \quad (3.9)$$

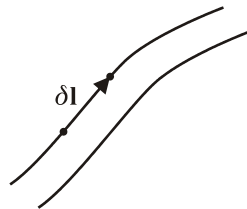
První část odpovídá explicitním změnám polí, druhá souvisí s prouděním. Pro substancionální derivaci můžeme operátorově psát

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (3.10)$$

Rovnice proudnice

Určeme nyní změnu elementu proudnice $\delta \mathbf{l}$:

$$\begin{aligned} d\delta \mathbf{l} &= \delta \mathbf{u} dt, \\ \frac{d\delta \mathbf{l}}{dt} &= \delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\ \frac{d\delta \mathbf{l}}{dt} &= (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (3.11)$$



Obr. 49: Element proudnice.

3.1.2 Rovnice pro magnetické pole

Časový vývoj magnetického pole určíme z Maxwellových rovnic doplněných Ohmovým zákonem v pohyblivém prostředí (3.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \rho_Q &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}; & \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}); \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_Q; & \mathbf{H} &= \mathbf{B}/\mu. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Z první rovnice určíme časovou změnu magnetického pole, za elektrické pole dosadíme z Ohmova zákona a za proudovou hustotu z druhé z Maxwellových rovnic:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) = -\frac{1}{\sigma\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Dvojnou rotací přepíšeme pomocí vztahu (A.17) a získáme výslednou rovnici

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3.13)$$

Rovnici pro časový vývoj magnetického pole lze upravit do tvaru se substancionální derivací. Použijeme k tomu přepis druhého členu pomocí výrazu (A.19)

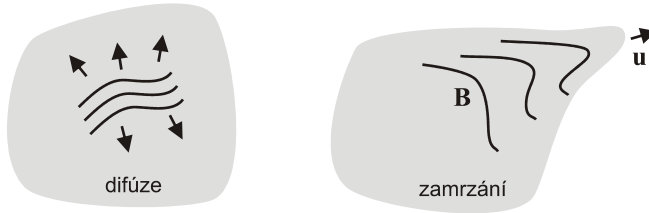
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Alternativní tvar rovnice pro časový vývoj magnetického pole tedy je

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (3.14)$$

Magnetické pole se může podle (3.13) změnit dvěma způsoby. První člen na pravé straně je klasická *difúze* – pomalé pronikání magnetického pole do okolního plazmatu. Druhý člen souvisí s pohybem plazmatu, říká se mu *člen zamrzání*. Magnetické indukční čáry sledují pohyb plazmatu, jsou jakoby vmrznutý do plazmové tekutiny. Nyní zhruba odhadněme poměr příspěvků obou členů (tzv. Reynoldsovo magnetické číslo). Všechny vektory odhadneme jejich velikostmi a derivace převrácenou hodnotou rozměrů systému:

$$\#_{\operatorname{Re},M} = \frac{\text{člen zamrzání}}{\text{člen difúze}} \approx \frac{\frac{1}{L} u B}{\frac{1}{\sigma\mu} \frac{1}{L^2} B} = \sigma\mu u L. \quad (3.15)$$



Obr. 50: Difúze v plazmatu a zamrzlé pole v plazmatu.

Pro ideálně vodivé plazma ($\sigma \rightarrow \infty$) dominuje člen zamrzání ($\#_{\text{Re},M} \gg 1$). Naopak pro pomalé pohyby plazmatu dominuje člen difúze ($\#_{\text{Re},M} \ll 1$). Limitní případy mají tvar

$$\begin{aligned} \sigma \rightarrow \infty: \quad & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \\ \mathbf{u} \rightarrow 0: \quad & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta_M \nabla^2 \mathbf{B}; \quad \eta_M \equiv \frac{1}{\sigma \mu}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

Člen zamrzání

Zabývejme se nyní jen členem zamrzání

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Rotaci na pravé straně upravíme pomocí dvojného vektorového součinu – viz (A.19)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{u}.$$

Dosaďme za $\text{div} \mathbf{u}$ z rovnice kontinuity

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{u} = 0 & \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \text{div} \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \text{div} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho. \end{aligned}$$

Po elementárních úpravách máme (zanedbáváme člen difúze)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho.$$

Celou rovnicí vydělme hustotou a přeskupme jednotlivé členy

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho.$$

První dva členy na levé straně lze spojit do jednoho výrazu a druhé dva členy na pravé straně také:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\rho}.$$

Substitucí $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/\rho$ rovnice přejde na

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Po zavedení substancionální derivace získáme rovnici proudnice (3.11) pro veličinu \mathbf{b}

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (3.17)$$

Magnetické pole proto sleduje proudnice a je vmrzlé do plazmatu. Pojem zamrzání lze zformulovat i jinak: Magnetický tok uzavřenou smyčkou, jež se pohybuje spolu s plazmatem, je konstantní.

Člen difúze

Zabývejme se nyní druhou alternativou, difúzním členem. Koeficient η_M se nazývá koeficient magnetické difúze. Rovnici difúze můžeme přepsat do tvaru

$$\hat{\mathcal{L}}\mathbf{B} = 0; \quad \hat{\mathcal{L}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \eta_M \nabla^2. \quad (3.18)$$

Operátor $\hat{\mathcal{L}}$ je lineární, řešení můžeme hledat jako superpozici Fourierových módů

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \int \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{k} = \int \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{k}. \quad (3.19)$$

Každý z Fourierových módů $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ musí splňovat rovnici difúze:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}\mathbf{B}_{\mathbf{k}} &= 0; \quad \Rightarrow \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta_M \nabla^2 \right) \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{c}_{\mathbf{k}}}{dt} + \eta_M k^2 \mathbf{c}_{\mathbf{k}} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t) &= \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(0) e^{-\eta_M k^2 t}. \end{aligned}$$

Celkové řešení tedy napíšeme ve tvaru

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \int \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(0) e^{-\eta_M k^2 t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{k}. \quad (3.20)$$

Dosadíme-li $t=0$ a provedeme inverzní transformaci, získáme vztah pro počáteční hodnoty

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{B}(0, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{x}. \quad (3.21)$$

Povšimněte si vztahu (3.20). Každá Fourierova komponenta $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$ se v čase tlumí faktorem $\exp(-\eta_M k^2 t)$. Tedy fluktuační malé rozměry (velkých k) jsou utlumeny mnohem rychleji než fluktuační velké rozměry. To je pro difúzi charakteristické, difúzi zanikají nejprve drobné nepravidelnosti.

Najdeme nyní Greenovu funkci pro rovnici difúze v neomezeném prostředí, tj. za počáteční impuls budeme volit Diracovu distribuci lokalizovanou v bodě \mathbf{x}' :

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(0, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad \boldsymbol{\beta}_0 = (1, 1, 1).$$

Situace je stejná, jako bychom počítali Greenovu funkci pro každou složku magnetického pole zvlášť, všechny složky totiž splňují rovnici difúze. Diracův impuls postupně dosadíme do (3.21) a (3.20), výsledné řešení označíme \mathbf{G}

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k(0) &= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3} \int e^{-\eta_M k^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d^3\mathbf{k}; \quad \boldsymbol{\beta}_0 = (1, 1, 1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Jde o obecný zápis trojice Greenových funkcí pro rovnici difúze v jednotlivých osách. Výsledek integrace samozřejmě závisí na okrajových podmínkách a volbě souřadnicové soustavy. Provedme integraci v jednoduchém případě neomezeného prostředí popisovaného v kartézské souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\eta_M k^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d^3\mathbf{k} = \quad / \mathbf{x} - \mathbf{x}' \equiv \mathbf{a} \\ &= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\eta_M k^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} d^3\mathbf{k} = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\eta_M k^2 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} d^3\mathbf{k} = \\ &= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left[-\eta_M t \left(\mathbf{k}^2 - \frac{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{\eta_M t}\right)\right] d^3\mathbf{k} = \\ &= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left[-\eta_M t \left(\mathbf{k} - \frac{i\mathbf{a}}{2\eta_M t}\right)^2 - \frac{\mathbf{a}^2}{4\eta_M t}\right] d^3\mathbf{k} = \\ &= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3} e^{-\frac{\mathbf{a}^2}{4\eta_M t}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left[-\eta_M t \left(\mathbf{k} - \frac{i\mathbf{a}}{2\eta_M t}\right)^2\right] d^3\mathbf{k} = \\ &= \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(2\pi)^3} e^{-\frac{\mathbf{a}^2}{4\eta_M t}} \left(\frac{\pi}{\eta_M t}\right)^{3/2} = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{(4\pi\eta_M t)^{3/2}} e^{-\frac{\mathbf{a}^2}{4\eta_M t}}, \end{aligned}$$

kde jsme argument doplnili na čtverec ve vlnovém vektoru \mathbf{k} . V neomezeném prostředí máme tedy výsledek:

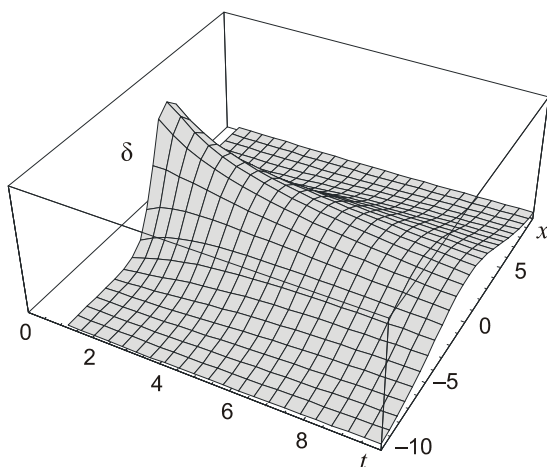
$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\beta_0}{(4\pi\eta_M t)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\eta_M t}} ; \quad G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(4\pi\eta_M t)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\eta_M t}} . \quad (3.23)$$

Je zřejmé, že Diracův impuls lokalizovaný v \mathbf{x}' je gaussovsky s časem „rozmýván“. V 1D problému je situace ukázána na obrázku 51.

Obecnou počáteční podmínku rozložíme na jednotlivé Diracovy impulzy a výsledná řešení sečteme (Greenova funkce je pro všechny tři složky pole stejná):

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = G *_{(\mathbf{x})} \mathbf{B}_0 = \frac{1}{(4\pi\eta_M t)^{3/2}} \int e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\eta_M t}} \mathbf{B}(0, \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' . \quad (3.24)$$

Pole je tedy prostorovou konvolucí počáteční podmínky a Greenovy funkce. Přímým dosazením do rovnice difúze lze snadno ukázat, že vztah (3.24) je jejím řešením. Obecné odvození nalezneme čtenář v dodatku B5.



Obr. 51: Časový vývoj Diracova impulsu.

Poznámka 1: Alternativně lze při řešení využít shodného tvaru rovnice difúze se Schrödingerovou rovnicí a operátorově ihned napsat řešení

$$|\mathbf{B}(t)\rangle = e^{\eta_M \nabla^2 (t-t_0)} |\mathbf{B}_0\rangle .$$

Dosazením do rovnice difúze okamžitě vidíme, že jde o řešení, které navíc splňuje počáteční podmínku. Standardními metodami popsanými v [2] je třeba najít spektrum Laplaceova operátoru ∇^2 a poté použít větu o spektrálním rozvoji:

$$|\mathbf{B}(t)\rangle = \sum_k e^{\eta_M \lambda_k (t-t_0)} |k\rangle \langle k | \mathbf{B}_0 \rangle ,$$

$$\nabla^2 |k\rangle = \lambda_k |k\rangle .$$

Poznámka 2: Stejně řešení má i rovnice pro difúzi částic:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n;$$

$$G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4Dt}}; \quad (3.25)$$

$$n(t, \mathbf{x}) = \int G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') n(0, \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'$$

Poznámka 3: V případě zdroje částic, který je v jedné dimenzi doplňuje tak, aby v počátku byla neustále koncentrace n_0 , je řešením rovnice difúze (lze snadno dokázat dosazením)

$$n(t, x) = n_0 \left[1 - \phi \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right], \quad (3.26)$$

kde ϕ je chybová funkce definovaná vztahem (A.50)

● **Příklad 11:** Nalezněte střední polohu a střední kvadratickou fluktuaci polohy částic pro difúzi Diracova impulzu, tedy pro Greenovu funkci (3.25), pokud je zdroj v počátku ($\mathbf{x}' = 0$)

Řešení: Určeme například $\langle x \rangle$ a $\langle x^2 \rangle$:

$$\langle x \rangle = \int G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') x d^3 \mathbf{x} = \int \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} x dx dy dz = 0,$$

$$\langle x^2 \rangle = \int G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') x^2 d^3 \mathbf{x} = \int \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} x^2 dx dy dz = 2Dt.$$

Integrály se rozdělí na jednotlivé integrace a ty určíme ze vztahů (A.1) a (A.2). Je zřejmé, že střední poloha je v počátku (tam, kde byl lokalizován Diracův impulz) a platí:

$$\langle \mathbf{x} \rangle = (0, 0, 0),$$

$$\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = 6Dt,$$

$$l_{kv} \equiv \sqrt{\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{6Dt}.$$

Pro difúzi je charakteristické, že střední kvadratické fluktuace rostou s časem jako $t^{1/2}$. ■

Rovnice pro vektorový potenciál

Někdy je výhodnější namísto magnetického pole používat vektorový potenciál splňující vlnovou rovnici a Lorentzovu podmínku

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j}, \\ \frac{\partial \phi}{c^2 \partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} &= 0.\end{aligned}\tag{3.27}$$

V magnetohydrodynamice zanedbáváme Maxwellův posuvný proud, což je ekvivalentní omezení se na nízké frekvence dějů, viz (3.8). Z rovnice pro vektorový potenciál potom zbude jen

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Za proudovou hustotu dosadíme z Ohmova zákona (3.7)

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

V magnetohydrodynamice je elektrické a magnetické pole dáno jen potenciálem \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

což po dosazení do předchozí rovnice dá výslednou rovnici pro vektorový potenciál

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{A} + \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}.\tag{3.28}$$

Rovnice pro vektorový potenciál má opět člen zamrznání a člen difúze. Rozepíšeme-li dvojný vektorový součin napravo, získáme snadno tvar se substancionální derivací

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 A_i + u_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}.\tag{3.29}$$

3.1.2 Rovnice pro hustotu

Uvažujme proudění aditivní veličiny A (roste s množstvím látky, například hmotnost, náboj, energie). Proudění popisujeme čtyřmi veličinami

$$\rho_A \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta V}; \quad \mathbf{j}_A \equiv \rho_A \mathbf{u}.$$

Tyto čtyři veličiny tvoří relativistický čtyřvektor a transformují se za pomoci Lorentzovy matice – ρ_A nazýváme hustotou; \mathbf{j}_A nazýváme tokem (množství A proteklé jednotkovou plochou za jednotku času). Jestliže se veličina A při proudění neztrácí ani nepřibývá, musí časový úbytek veličiny z libovolného objemu být roven toku veličiny přes plochu ohraničující tento objem:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho_A dV = \int_{\partial V} \mathbf{j}_A \cdot d\mathbf{S}.$$

Hranice objemu V je označena ∂V . Pomocí Gaussovy věty integrálního počtu převedeme plošný integrál na objemový a oba integrály spojíme:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A \right) dV = 0.$$

Uvedený vztah musí při proudění platit v libovolném objemu a to je možné jen, je-li argument integrálu roven nule:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A = 0. \quad (3.30)$$

Odvozený vztah se nazývá rovnice kontinuity a na pravé straně je nula, pokud se veličina A při proudění zachovává. Nezachovává-li se, není na pravé straně nula. Pro hustotu hmoty budeme psát rovnici

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0, \quad (3.31)$$

kteřou můžeme upravit do tvaru se substancionální derivací:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (\rho u_k) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} u_k + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

Výsledný tvar proto je

$$\blacktriangleright \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.32)$$

Z posledního výrazu je zřejmé, že nestlačitelná tekutina (kapalina) splňuje

$$\rho = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.33)$$

3.1.3 Rovnice pro rychlost

Rovnici pro rychlost odvodíme ve třech fázích. Nejprve pro ideální hydrodynamiku (bez viskozity), poté pro viskózní proudění a nakonec pro proudění za přítomnosti magnetického a gravitačního pole. Ve všech případech nalezneme jak konzervativní tvar (ve tvaru rovnice kontinuity) tak tvar se substancionální derivací. Výsledky budou kompatibilní se středováním Boltzmannovy rovnice přes rychlost ve statistice.

1. Ideální hydrodynamika

Pro objekt o hmotnosti m platí Newtonova pohybová rovnice

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Pro proudící prostředí zavedeme hustotu síly

$$\mathbf{f} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V}. \quad (3.34)$$

V hustotách bude Newtonova pohybová rovnice mít tvar (rychlost \mathbf{v} jedné částice se stane rychlostí proudění \mathbf{u})

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (3.35)$$

Po rozepsání substancionální derivace získáme rovnici

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (3.36)$$

Zbývá určit hustotu síly. Ta se liší podle procesů, které popisujeme. Může jít o hustotu Lorentzovy síly $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, u zvukových vln v plynech půjde o tlakovou sílu. Standardně síla míří k minimu potenciální energie:

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p \quad (3.37)$$

nebo v hustotách

$$\mathbf{f} = -\nabla w_p. \quad (3.38)$$

Tlaková energie je $W_p = \int p dV$, hustota tlakové energie proto je $w_p = p$ a hustota síly způsobená tlakem vychází

$$\mathbf{f} = -\nabla p. \quad (3.39)$$

Pohybová rovnice (3.36) s hustotou síly způsobenou tlakem má proto tvar

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p. \quad (3.40)$$

Jde o hledanou rovnici pro časový vývoj rychlostního pole.

$$\blacktriangleright \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p, \quad \text{neboli} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p. \quad (3.41)$$

Nyní tuto rovnici přepíšeme do konzervativního tvaru, tj. budeme hledat zákon zachování hybnosti ve tvaru rovnice kontinuity. Nalezneme časový vývoj hustoty hybnosti

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u_k + \rho \frac{\partial u_k}{\partial t}.$$

Za časovou změnu hustoty dosadíme z rovnice kontinuity (3.31) a za časovou změnu rychlosti z pohybové rovnice (3.41):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = -\partial_l(\rho u_l) u_k - \rho(u_l \partial_l) u_k - \partial_k p.$$

Všechny členy převedeme na levou stranu a upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial(\rho u_l)}{\partial x_l} u_k + (\rho u_l) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial p}{\partial x_k} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho u_l u_k) + \frac{\partial p}{\partial x_k} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(p \delta_{kl} + \rho u_k u_l) &= 0. \end{aligned}$$

Získali jsme zákon zachování hybnosti. V závorce v prostorových derivacích je tok hybnosti neboli tenzor tlaku. Sama hybnost je vektorová veličina a proto její tok tvoří tenzor druhého řádu. Symetrie tenzoru tlaku zajišťuje zachování momentu hybnosti v proudící tekutině. Tenzor tlaku se skládá ze dvou částí – skalární části, kterou tvoří normální tlak působící ve všech směrech stejně. Druhou částí je tenzorová část související s prouděním tekutiny. Zákon zachování hybnosti můžeme napsat ve složkovém zápisu

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(T_{kl}^{(P)}) = 0; \quad T_{kl}^{(P)} \equiv p \delta_{kl} + \rho u_k u_l \quad . \quad (3.42)$$

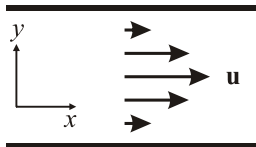
nebo v invariantním tvaru

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}_P = 0; \quad \bar{\mathbf{T}}_P \equiv p \bar{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad . \quad (3.43)$$

Připomeňme, že tento vztah jsme již odvodili jako první moment Boltzmannovy rovnice (2.34). Index (P) označuje tlak, později přibude tenzor viskozity a Maxwellův tenzor pnutí.

2. Viskózní tekutina

Pro viskózní tekutiny jsou charakteristické nenulové prostorové derivace rychlosti. Například tekutina proudící mezi dvěma deskami má u povrchu desek rychlost nulovou a mezi deskami maximální, příčná změna rychlosti $\partial u_x / \partial y$ je nenulová.



Obr. 52: Proudění viskózní tekutiny.

Ztráty hybnosti způsobené viskózními procesy budou dány tenzorem viskozity závislým na prostorových derivacích rychlosti

$$V_{kl} = f_{kl}(\partial u_i / \partial x_j) .$$

V nejjednodušším přiblížení bude tenzor lineární v derivacích rychlosti, případně provedeme Taylorův rozvoj do prvního řádu v derivacích rychlosti. Tenzor musí být symet-

rický tenzor druhého řádu (z důvodu zachování momentu hybnosti). Nejobecnější tvar symetrického tenzoru za našich předpokladů bude

$$V_{kl} = a \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + b \delta_{kl} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = a \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + b \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u} .$$

Symetrický tenzor získáme pomocí součtu derivací v závorce nebo součtem všech diagonálních členů (divergence rychlosti). V matematice i ve fyzice se dobře pracuje s tenzory s nulovou stopou (součtem diagonálních členů). Stopa tenzoru se zachovává. Proto se část druhého (skalárního) výrazu přidá k prvnímu výrazu, tak aby měl nulovou stopu:

$$V_{kl} = \eta \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \zeta \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u} . \quad (3.44)$$

Stopa tenzorové části v kulaté závorce je nulová:

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kk} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) = \left(\operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} \right) = 0 .$$

Koeficienty η a ζ se nazývají *první a druhá vazkost*. Konzervativní tvar zákona zachování hybnosti potom má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} T_{kl}^{(P)} = 0; \quad T_{kl}^{(P)} \equiv p \delta_{kl} + \rho u_k u_l - V_{kl} . \quad (3.45)$$

nebo v invariantním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}_P = 0; \quad \bar{\mathbf{T}}_P \equiv p \bar{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \bar{\mathbf{V}} . \quad (3.46)$$

U viskózního tenzoru píšeme znaménko minus, protože jde o ztráty toku hybnosti. S touto konvencí jsou oba viskózní koeficienty za běžné situace kladné. Odvodíme nyní pohybovou rovnici. Ve vztahu (3.45) dosadíme za oba tenzory a provedeme všechny derivace:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[p \delta_{kl} + \rho u_k u_l - \eta \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) - \zeta \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u} \right] = 0 .$$

Po přímočarém výpočtu získáme pohybovou rovnici

$$\blacktriangleright \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + (\zeta + \eta/3) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) . \quad (3.47)$$

Jde o slavnou *Naviereovu-Stokesovu rovnici* pro viskózní tekutinu. Je-li tekutina nestlačitelná (kapalina, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$) získá pohybová rovnice jednoduchý tvar

$$\blacktriangleright \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.48)$$

a kapalinu lze popsat jediným viskózním koeficientem η .

3. Vodivá tekutina

V případě magnetohydrodynamiky se v rovnici (3.47) objeví na pravé straně ještě hustota Lorentzovy síly:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + (\zeta + \eta/3) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3.49)$$

Pro odvození konzervativního tvaru stačí upravit jen hustotu Lorentzovy síly, konzervativní podobu všech ostatních členů známe:

$$\begin{aligned} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_k &= (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{klm} (\operatorname{rot} \mathbf{H})_l B_m = \varepsilon_{klm} \varepsilon_{lno} \partial_n (H_o) B_m = \\ &= -\varepsilon_{lkm} \varepsilon_{lno} \partial_n (H_o) B_m = (-\delta_{kn} \delta_{mo} + \delta_{ko} \delta_{mn}) \frac{\partial H_o}{\partial x_n} B_m = -\frac{\partial H_m}{\partial x_k} B_m + \frac{\partial H_k}{\partial x_m} B_m = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_m} (H_k B_m) - H_k \frac{\partial B_m}{\partial x_m}. \end{aligned}$$

Poslední člen je nulový a v prostředním členu zaměníme sčítací index:

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_k = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} (H_k B_l) = -\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{kl} - H_k B_l \right].$$

Výraz v hranaté závorce je Maxwellův tenzor pnutí pro magnetické pole. Má stejně jako tenzor tlaku skalární a vektorovou část. Po převedení na levou stranu pohybové rovnice dostaneme vztah

$$\blacktriangleright \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (T_{kl}^{(P)} + T_{kl}^{(M)}) = 0. \quad (3.50)$$

Jednotlivé tenzory mají složky

$$\begin{aligned} T_{kl}^{(P)} &\equiv p \delta_{kl} + \rho u_k u_l - V_{kl}, & \bar{\mathbf{T}}_P &\equiv p \bar{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \bar{\mathbf{V}}; \\ T_{kl}^{(M)} &\equiv \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{kl} - H_k B_l, & \bar{\mathbf{T}}_M &\equiv \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \bar{\mathbf{1}} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}; \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$V_{kl} \equiv \eta \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \zeta \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Skalární část Maxwellova tenzoru pnutí se někdy nazývá magnetický tlak a je rovna hustotě energie magnetického pole

$$\blacktriangleright p_M = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} = \frac{B^2}{2\mu}. \quad (3.52)$$

Tenzorová část souvisí se silovým působením na plazma, za které je zodpovědné zakřivení magnetických indukčních čar.

Poznámka 1: Uvedený vztah jsme již odvodili dříve jako první moment Boltzmannovy rovnice.

Poznámka 2: Magnetické pole přítomné ve slunečních skvrnách je zodpovědné za jejich nižší teplotu (tlak ve skvrně je dán magnetickou i hydrodynamickou částí)

$$p_{\text{out}} = p_{\text{in}} \quad \Rightarrow \quad nkT_{\text{out}} = B^2/2\mu + nkT_{\text{in}}.$$

Poznámka 3: Lorentzova síla má dvě části:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}_M = -\nabla p_M + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (3.53)$$

První část je gradientem magnetického tlaku, druhá část souvisí se zakřivením magnetických indukčních čar. Plazma se pod vlivem síly buď snaží indukční čáry napřímít a nebo pokud jde o čáry uzavřené, snaží se z nich udělat kružnice.

3.1.4 Uzavření soustavy

Ve statistice jsme si ukázali, jak středování Boltzmannovy rovnice přes rychlostní část fázového prostoru vede na rovnice kontinua. Jedná se o rovnici kontinuity, rovnici pro rychlost, energii (teplotu, tlak), tepelný tok, atd. Nekonečnou soustavu parciálních diferenciálních rovnic získanou středováním přes mocniny rychlosti je třeba v určité fázi ukončit algebraickým vztahem. My tak učiníme u rovnice pro tlak a budeme předpokládat, že tlak splňuje algebraický vztah (může jít o polytropní či jinou závislost)

$$p = p(\rho). \quad (3.54)$$

Na závěr запиšme přehledně získanou sadu MHD rovnic v konzervativním tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

$$\triangleright \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (T_{kl}^{(P)} + T_{kl}^{(M)}) = 0,$$

$$p = p(\rho).$$

a ve tvaru s úplnými časovými derivacemi:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{u},$$

$$\triangleright \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p - \nabla p_M + \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + (\zeta + \eta/3) \nabla(\text{div} \mathbf{u}),$$

$$p = p(\rho).$$

Existují různé modifikace uvedené soustavy rovnic, rovnice kontinuity a pohybové rovnice mohou být například uvažovány pro elektronovou a iontovou složku odděleně, soustavu můžeme uzavřít až po rovnici pro energii algebraickým vztahem pro vedení tepla, rovnice lze zobecnit i pro dominantní vliv elektrického pole. K nejčastěji používaným uzavřením soustavy MHD rovnic patří:

Uzavření nestlačitelnou tekutinou

Předpokládáme, že hustota je konstantní, tj. $\rho = \text{const}$. Úplná časová derivace hustoty je proto nulová

$$\partial\rho/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = 0 \quad (3.55)$$

a z rovnice kontinuity lze ukázat, že $\text{div } \mathbf{u} = 0$.

Uzavření polytropou

Předpokládáme polytropní závislost mezi tlakem a hustotou $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$. Po úpravě

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}(p\rho^{-\gamma}) + u_k \frac{\partial}{\partial x_k}(p\rho^{-\gamma}) = 0.$$

Provedeme obě derivace jako derivace součinu funkcí a za parciální derivaci hustoty podle času dosadíme z rovnice kontinuity. Po jednoduchých úpravách získáme

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)p + \gamma p \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (3.56)$$

Uzavření CGL

Toto uzavření magnetohydrodynamiky zohledňuje anizotropní chování plazmatu. Je nazváno podle počátečních písmen autorů této aproximace (F. Chew, M. Goldberg, F. Low), kteří již v roce 1956 uvažovali průběh tlaku ve tvaru

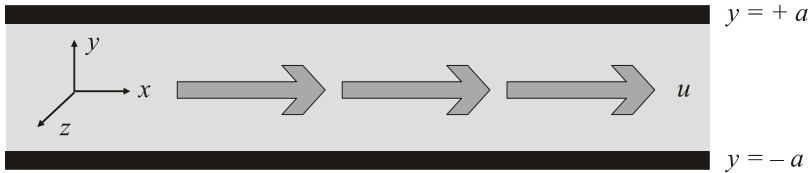
$$p\delta_{kl} \rightarrow p_{kl} = p_{\perp}\delta_{kl} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\frac{B_k B_l}{B^2}. \quad (3.57)$$

3.2 Vybrané jevy

3.2.1 Hartmannovo řešení

Z klasické hydrodynamiky je známo chování nestlačitelné viskózní kapaliny mezi dvěma vodorovnými deskami. Je-li na začátku a konci desek rozdílný tlak, může vzniknout jednoduché laminární proudění, které se řídí *Poiseuillovým zákonem*, který objevil francouzský fyzik a matematik Jean Louis Marie Poiseuille (1797–1869). Rychlost má parabolický průběh – v těsné blízkosti desek je rychlost nulová, uprostřed toku maximální.

To je způsobeno viskózními procesy neboli vnitřním třením kapaliny. Okrajové efekty desek zanedbáváme.



Obr. 53: Tekutina mezi dvěma rovinnými deskami.

Je-li kapalina vodivá, lze nalézt obdobné řešení z rovnic magnetohydrodynamiky, které poprvé odvodil dánský inženýr Julian Hartmann v roce 1937. Napišme nejprve výchozí soustavu rovnic magnetohydrodynamiky:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \left[\frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}}{\mu} \times \mathbf{B} \right], \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} + \operatorname{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

První rovnice je rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu, druhá rovnice je pohybová rovnice, napravo je postupně tlaková síla, viskózní síla a Lorentzova síla. Poslední rovnice je rovnice pro magnetické pole s difúzním členem a členem zamrznání.

Poznámka 1: Stavovou rovnicí, kterou se běžně uzavírá MHD soustava, nemůžeme u nestlačitelné kapaliny použít, protože tlak není funkcí hustoty. Tlak klesá ve směru proudění lineárně, zatímco hustota kapaliny je konstantní. Soustavu lze uzavřít předpokladem konstantního gradientu tlaku ve směru proudění.

Souřadnicovou soustavu zvolíme podle obrázku (tak, abychom maximálně využili symetrii problému). Budeme předpokládat stacionární proudění, tj. časové derivace ve vztahu (3.58) budou nulové. Proudění předpokládáme jen podél desek, tj. rychlostní pole bude mít jen složku $u_x(y)$, závislost na y je dána symetrií problému, u desek (pro $y = \pm a$) je rychlost nulová, uprostřed oblasti maximální. Budeme předpokládat nenulové magnetické pole v řezu proudění podle obrázku, tj. nenulové $B_x(y)$ a $B_y(y)$. Z Maxwellovy rovnice $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ plyne, že B_y musí být konstantní. Tlak musí klesat podél proudění a může být stejně jako ostatní veličiny závislý na souřadnici y . Hledané řešení má tedy tvar:

$$\mathbf{u} = [u(y), 0, 0]; \quad \mathbf{B} = [B(y), B_0, 0]; \quad p = p(x, y). \quad (3.59)$$

Po dosazení do sedmi rovnic (3.58) zbudou netriviální vztahy

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{B_0}{\mu} \frac{dB}{dy}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{B}{\mu} \frac{dB}{dy}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$0 = \frac{1}{\sigma\mu} \frac{d^2 B}{dy^2} + B_0 \frac{du}{dy}.$$

Řešení získané soustavy není složité. Předpokládejme (stejně jako v Poiseuillově zákoně) lineární úbytek tlaku ve směru proudění, tj. $\partial p/\partial x = \text{const}$. Lze ukázat, že jiný průběh ani není možný. Potom první a třetí rovnice dává soustavu pro rychlost a magnetické pole, z druhé rovnice je třeba dopočítat tlak. Pro u a B tedy máme:

$$\eta \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{B_0}{\mu} \frac{dB}{dy} = \text{const},$$

$$\frac{1}{\sigma\mu} \frac{d^2 B}{dy^2} + B_0 \frac{du}{dy} = 0.$$

První rovnici derivujeme podle y a z rovnic vyloučíme druhé derivace magnetického pole:

$$\frac{d^3 u}{dy^3} - \frac{1}{D^2} \frac{du}{dy} = 0; \quad \text{kde} \quad \frac{1}{D^2} \equiv \frac{\sigma B_0^2}{\eta}.$$

Po první integraci máme

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{1}{D^2} u = C_1.$$

Jde o lineární diferenciální rovnici s pravou stranou. Řešení nalezneme jako součet homogenního a partikulárního řešení (lze ho hledat ve tvaru konstanty):

$$u(y) = u_H(y) + u_P(y) = C_2 \operatorname{ch}\left[\frac{y}{D}\right] + C_3 \operatorname{sh}\left[\frac{y}{D}\right] - C_1 D^2.$$

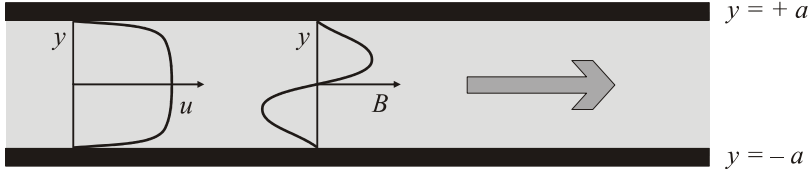
Namísto exponenciál jsme zvolili bázi homogenního řešení z funkcí ch a sh . Konstanty integrace určíme z podmínek $u(\pm a) = 0$; $u(0) = u_0$. Výsledné řešení je

$$\blacktriangleright \quad u(y) = u_0 \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{y}{D}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - 1}; \quad D \equiv \sqrt{\frac{\eta}{\sigma B_0^2}}. \quad (3.61)$$

Nyní již snadno z první nebo třetí rovnice (3.60) dopočteme magnetické pole. Integrační konstanty určíme z podmínky spojitosti tečných složek vektoru magnetické intenzity \mathbf{H} na rozhraní ($B_{1t}/\mu_1 = B_{2t}/\mu_2$), odkud plyne $B(\pm a) = 0$. Výsledek je

$$\blacktriangleright \quad B(y) = \mu u_0 \sqrt{\sigma\eta} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{D}\right) - \frac{y}{a} \operatorname{sh}\left(\frac{a}{D}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - 1}; \quad D \equiv \sqrt{\frac{\eta}{\sigma B_0^2}}. \quad (3.62)$$

Nalezený profil rychlostního a magnetického pole je na následujícím obrázku. Přítomnost magnetického pole způsobuje zploštění rychlostního pole v blízkosti centra proudění a jeho rychlý pokles v blízkosti desek. Nenulová konstantní složka pole ve směru y (napříč proudění) způsobuje existenci složky pole ve směru proudění, jejíž profil je také na obrázku.



Obr. 54: Hartmannovo řešení.

Polohu maxima a minima magnetického profilu je možné získat derivací vztahu (3.62)

$$y_{1,2} = \pm D \operatorname{argch} \left[\frac{D}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{a}{D} \right) \right]. \quad (3.63)$$

Zajímavá je limita rychlostního profilu pro slabé ($a/D \ll 1$) a silné ($a/D \gg 1$) magnetické pole.

Slabá pole

Pro slabé pole provedeme rozvoj exponenciál do prvního řádu a dostaneme známý Poiseuillův parabolický profil, magnetické pole nemá na proudění podstatný vliv:

$$u \approx u_0 \left[1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right].$$

Silná pole

Pro silné pole musíme řešit případ $y > 0$ a $y < 0$ odděleně. Ve výsledku ponecháme vždy kladnou exponenciálu, vyjde

$$u \approx u_0 \left[1 - \exp \left(- \frac{|y| - a}{D} \right) \right].$$

Rychlostní pole v tomto případě exponenciálně ubývá u stěn. Veličina D charakterizuje tloušťku hraniční vrstvy. Někdy se zavádí bezrozměrné, tzv. Hartmannovo číslo $\#_{\text{Ha}}$ vztahem

$$\#_{\text{Ha}} \equiv \frac{a}{D} = B_0 a \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}. \quad (3.64)$$

Kvadrát Hartmannova čísla je poměrem hustot magnetické a viskózní síly.

$$\#_{\text{Ha}}^2 \approx \frac{jB_0}{\eta \Delta u} \approx \frac{\sigma E B_0}{\eta u / a^2} \approx \frac{\sigma u B_0^2}{\eta u / a^2} = \frac{\sigma B_0^2 a^2}{\eta}.$$

3.2.2 Vlny konečné amplitudy

Soustava MHD rovnic je nelineární a velmi složitá. Při provádění linearizace sice dostáváme řešení ve tvaru rovinných vln, ze kterých můžeme složit vlny komplikovanější, ale vždy s infinitezimální amplitudou. Podstatnou část řešení ale vůbec nenacházíme. V této části ukážeme, že existují speciální řešení, která splňují obyčejnou vlnovou rovnici. Řešením je pak postupující vlna libovolného tvaru a libovolné amplitudy. Uvažme soustavu pro nestlačitelnou, neviskózní, ideálně vodivou kapalinu ($\eta = \zeta = 1/\sigma = 0$)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}; \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]; \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0; \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Jde o rovnici pro rychlostní pole (pohybovou rovnici s tlakovou a Lorentzovou silou) a rovnici pro pole magnetické se členem zamrzání. Doplňkové jsou rovnice pro nestlačitelnost a Gaussova věta pro magnetické pole.

Předpokládejme nyní, že veličiny se mění jen v jednom určitém směru. Volme osu z souřadnicové soustavy v tomto směru. Potom hledáme řešení ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, z); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t, z); \quad p = p(t, z). \quad (3.66)$$

Z doplňkových rovnic (divergenci) v (3.65) okamžitě plyne

$$u_z = u_0(t); \quad B_z = B_0(t).$$

Předpokládejme, že chceme nalézt řešení v podobě přesouvajícího se vlnového balíku, který je lokalizovaný v prostoru, proto nemůže rychlost plazmatu být nenulová v neko-nečnu a musíme položit $u_0 = 0$. V uvedené geometrii tedy máme

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_0), \quad \nabla \rightarrow (0, 0, \partial/\partial z).$$

Napišme nyní netriviální členy v prvních dvou rovnicích (3.65):

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= [0, 0, 0]; \\ \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B} &= \left[B_0 \frac{\partial B_x}{\partial z}, B_0 \frac{\partial B_y}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_x^2 + B_y^2}{2} \right) \right]; \\ \nabla p &= \left[0, 0, \frac{\partial p}{\partial z} \right]; \\ \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) &= \left[B_0 \frac{\partial u_x}{\partial z}, B_0 \frac{\partial u_y}{\partial z}, 0 \right]. \end{aligned}$$

Vidíme, že rozpisy jednotlivých veličin se liší ve směru osy z a v rovině (x, y) . Naše výchozí rovnice dají:

Podélný směr (v ose z)

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left[p + \frac{B_x^2 + B_y^2}{2\mu} \right]; \quad \frac{\partial B_0}{\partial t} = 0.$$

Z první rovnice plyne nezávislost celkového tlaku na souřadnici z , složku $B_z = B_0$ můžeme do pravé strany první rovnice klidně přidat, protože B_0 nezávisí na z . Podle druhé rovnice B_0 nezávisí ani na t a jde o skutečnou konstantu v čase i v prostoru. Pro celkový tlak platí

$$\Pi \equiv p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} = \Pi(t).$$

Kolmý směr (v rovině xy)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}; \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

V kolmém směru je soustava rovnic lineární, aniž bychom byli nuceni linearizaci provádět. Obě rovnice jsou navíc triviálně splněny i ve směru osy z , protože zde jsou veličiny konstantní. Lze je tedy chápat jako výchozí soustavu rovnic pro vlnění v obou směrech. Jednoduchým vyloučením proměnných získáváme pro rychlostní i magnetické pole vlnové rovnice (stačí první rovnici derivovat podle času a za $\partial \mathbf{B}/\partial t$ dosadit z druhé rovnice nebo naopak derivovat podle času druhou rovnici a dosadit za $\partial \mathbf{u}/\partial t$ z rovnice první). Výsledek je

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{u} &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} &= 0; \quad v_A \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho}}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Jde o vlnovou rovnici s charakteristickou rychlostí rovnou Alfvénově rychlosti. Nelineární MHD soustava rovnic pro případ ideálně vodivé nestlačitelné kapaliny bez tření poskytuje řešení ve tvaru obecné vlny libovolné amplitudy. Poznamenejme, že hodnotu Alfvénovy rychlosti snadno určíme z rovnosti hustoty kinetické a magnetické energie

$$\frac{\rho v_A^2}{2} \approx \frac{B^2}{2\mu} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{B}{\mu\rho}}.$$

Alfvénovu rychlost získá plazma, pokud se veškerá magnetická energie přemění v kinetickou energii. K tomu dochází například při přepojení magnetických indukčních čar. Alfvénovou rychlostí se pohybují také některé typické vlny v plazmatu.

3.2.3 Helicita

V plazmových vláknech se často pozorují typické šroubovicové útvary. Nacházejí se v laboratorním i vesmírném plazmatu, v pinčích i v kometárních ohonech. V matematice se pro podobně strukturovaná pole zavádí pojem helicity.

Helicita a Beltramova podmínka

Hustota helicity vektorového pole \mathbf{V} se definuje jako

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} \quad , \quad (3.69)$$

celkovou helicitou potom rozumíme integrál

$$\blacktriangleright \quad K(t) = \int_V \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad . \quad (3.70)$$

Helicita je skalární veličina charakterizující helikálnost (šroubovitost) indukčních čar pole. Je nulová pro všechna pole splňující podmínku nevířivosti ($\text{rot } \mathbf{V} = 0$) a také pro všechny víry s kruhovými proudnicemi. Pole s helikální strukturou mají helicitu úměrnou $\sin \beta$, kde β je úhel stoupání šroubovice. Pro plazmová vlákna popisovaná v rámci MHD teorie může být důležitá hustota helicity magnetického pole, která se definuje přes vektorový potenciál \mathbf{A} , hustota helicity elektrického pole \mathbf{E} a rychlostního pole \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A &= \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad , \\ \mathcal{H}_E &= \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \\ \mathcal{H}_u &= \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad . \end{aligned} \quad (3.71)$$

Veličinu $\boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot } \mathbf{u}$ nazýváme vířivost. Zabývejme se nyní poli, která splňují tzv. Beltramovu podmínku: *rotace pole je úměrná samotnému poli* (Beltramovo pole)

$$\text{rot } \mathbf{V} = \alpha \mathbf{V} \quad , \quad \text{neboli} \quad \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = 0 \quad . \quad (3.72)$$

Jde o pole pojmenovaná podle italského matematika Eugenia Beltramiho (1835–1899). Koeficient úměrnosti α se může měnit v čase i v prostoru, my ho budeme v dalším textu považovat za konstantní. Beltramovo pole je 1) nezdvojové, 2) helikální, 3) splňuje Helmholtzovu rovnici. Nezdvojovost plyne aplikací divergence na podmínku (3.72). Helikálnost je pro nenulové pole patrná přímo z definice:

$$\mathcal{H} \equiv \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} = \alpha \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \alpha V^2 \quad . \quad (3.73)$$

Aplikací rotace na podmínku (3.72) zjistíme, že Beltramova pole splňují Helmholtzovu rovnici

$$\blacktriangleright \quad \nabla^2 \mathbf{V} + \alpha^2 \mathbf{V} = 0 \quad . \quad (3.74)$$

Vektor \mathbf{V} je v tomto případě vlastním vektorem Laplaceova operátoru v odpovídající geometrii. Typickým matematickým příkladem Beltramových polí jsou tzv. ABC toky:

$$\mathbf{V} = (A \cos y + B \sin z, B \cos z + C \sin x, C \cos x + A \sin y) \quad . \quad (3.75)$$

Pro ABC pole platí $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{V}$ a $\nabla^2 \mathbf{V} = -\mathbf{V}$. Tyto toky jsou důležité v teorii chaosu.

Ve fyzice plazmatu se často uvažují bezsilové konfigurace, ve kterých míří proudová hustota ve směru magnetického pole $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$ (tzv. Birkelandovy proudy). V tomto případě je hustota Lorentzovy síly $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ nulová. Konfigurace má nejnižší možnou energii a disipativní plazma se k této konfiguraci vždy postupně blíží. Magnetické pole v bezsilové konfiguraci splňuje Beltramovu podmínku. Snadno to ukážeme z Ampérova zákona:

$$\mathbf{j} \parallel \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j} \sim \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{B} \sim \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} = 0. \quad (3.76)$$

Magnetické pole v bezsilové konfiguraci je proto vždy helikální.

Zachování magnetické helicity

Nyní ukážeme, že integrální magnetická helicity se zachovává za těchto předpokladů:

1. *Plazma má nekonečnou vodivost* (tzv. ideální plazma). V rovnici pro časový vývoj magnetického pole tedy dominuje jen člen zamrznání

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (3.77)$$

Ohmův zákon (3.7) v limitě nekonečné vodivosti získá tvar

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (3.78)$$

Člen zamrznání způsobí provázanost magnetických indukčních čar s proudnicemi a na základě rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$ můžeme požadovat nestlačitelnost plazmatu, tj.

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (3.79)$$

2. *Normálová složka magnetického pole na povrchu systému je nulová*. Tento předpoklad znamená uzavřené indukční čáry. Na povrchu systému platí vztah

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.80)$$

kde \mathbf{n} je vektor normály k ploše povrchu. Aby tento předpoklad byl pravdivý, musíme vzít za systém celou magnetickou trubici nebo musí být systém velmi rozsáhlý.

Integrální helicity pro vektorový potenciál magnetického pole je definována jako

$$K = \int \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dV = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3 \mathbf{x}. \quad (3.81)$$

Úplná časová derivace vede na výraz

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \right] d^3 \mathbf{x},$$

První člen budeme derivovat jako součin, druhý upravíme do tvaru divergence (využijeme nestlačitelnost $\text{div } \mathbf{u} = 0$)

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3 \mathbf{x} + \int_V \text{div} [\mathbf{u} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})] d^3 \mathbf{x},$$

s využitím Gaussovy věty pro poslední člen dostaneme

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} \right) d^3 \mathbf{x} + \int_V \left(\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3 \mathbf{x} + \int_{S=\partial V} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.82)$$

Nejprve upravíme prostřední člen získané rovnice. Za časový vývoj magnetického pole dosadíme člen zamrznání a upravíme ho pomocí vztahu (A.18):

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d^3 \mathbf{x} &= \int_V \mathbf{A} \cdot \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) d^3 \mathbf{x} = - \int_V \text{div}[\mathbf{A} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] d^3 \mathbf{x} + \int_V (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \text{rot} \mathbf{A} d^3 \mathbf{x} = \\ &= - \int_V \text{div}[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{u} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})\mathbf{B}] d^3 \mathbf{x} + \int_V (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} d^3 \mathbf{x} = \\ &= - \int_V \text{div}[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{u} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})\mathbf{B}] d^3 \mathbf{x} = \\ &= - \int_S [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})] dS = \\ &= - \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Pravý člen na předposledním řádku je nulový, protože na hranici systému je nulová – dle předpokladu (2) – normálová složka magnetického pole $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$. Zbýlý nenulový člen se vyruší s posledním členem v rovnici (3.82), ze které proto zůstane:

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} d^3 \mathbf{x}. \quad (3.83)$$

Časovou derivaci vektorového potenciálu určíme z rovnice pro elektrické pole

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.84)$$

a následně dosadíme do rovnice (3.83):

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= - \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \nabla\phi \cdot \mathbf{B}) d^3 \mathbf{x} = - \int_V [(-\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} + \text{div}(\phi \mathbf{B})] d^3 \mathbf{x} = \\ &= - \int_S \phi(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Integrální helicity se tedy za výše zmíněných předpokladů zachovává.

Stav s minimální magnetickou energií

Uvažujme nyní magnetickou trubici vyplněnou dokonale vodivým plazmatem. Na povrchu plazmatu je normálová složka pole nulová. Difúzní procesy jsou zanedbatelné, zachovává se magnetická helicity K . Hledejme proto extrém magnetické energie s vazbou danou zachováním magnetické helicity. Použijeme standardní metodu Lagrangeových multiplikátorů pro extrém s vazbou. Nutná podmínka extrémnosti je:

$$\begin{aligned} \delta(W_M + \lambda K) = 0 & \Rightarrow \\ \delta \int \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \lambda \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) d^3\mathbf{x} = 0 & \Rightarrow \\ \int \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B} + \lambda \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \lambda \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{B} \right) d^3\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Variace pole $\delta \mathbf{B}$ je provázána s variací magnetického potenciálu $\delta \mathbf{A}$. Vzhledem k tomu, že $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, platí $\delta \mathbf{B} = \text{rot } \delta \mathbf{A}$ (derivace a variace jsou záměnné, viz [1])

$$\int \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \text{rot } \delta \mathbf{A} + \lambda \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \lambda \mathbf{A} \cdot \text{rot } \delta \mathbf{A} \right) d^3\mathbf{x} = 0.$$

Členy s rotací převedeme na divergence za pomoci vztahu (A.18):

$$\int \left(-\frac{1}{\mu_0} \text{div}(\mathbf{B} \times \delta \mathbf{A}) + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{A} + \lambda \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \lambda \text{div}(\mathbf{A} \times \delta \mathbf{A}) + \lambda \text{rot } \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{A} \right) d^3\mathbf{x} = 0.$$

Nyní za pomoci Gaussovy věty převedeme integrály přes divergence na integrály přes povrch magnetické trubice, zbylé integrály ponecháme a dosadíme $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$:

$$-\int_{\partial V} \left[\left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \lambda \mathbf{A} \right) \times \delta \mathbf{A} \right] \cdot d\mathbf{S} + \int_V \left[\left(\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} \right) \cdot \delta \mathbf{A} \right] d^3\mathbf{x} = 0.$$

Variace vektorového potenciálu musí být na hranici oblasti nulová, a proto první integrál vymizí:

$$\int_V \left[\left(\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} \right) \cdot \delta \mathbf{A} \right] d^3\mathbf{x} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že tento výsledek platí pro jakoukoli oblast a variace vektorového potenciálu δA_k jsou nezávislé, musí být nulový („skoro všude“) samotný integrand:

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} = 0.$$

Odtud ale okamžitě plyne nutná podmínka extremálnosti magnetické energie ve tvaru

$$\text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}. \quad (3.86)$$

Ve stavu s minimální energií, za podmínky zachování magnetické helicity, je tedy magnetické pole Beltramovým polem. Proudová hustota míří ve směru pole, jde o bezsilovou konfiguraci, ve které tečou proudy podél magnetických indukčních čar (tzv. Birkelandovy proudy). Stav s minimální magnetickou energií je nutně helikální. Magnetické pole splňuje Helmholtzovu rovnici, kterou získáme aplikováním operace rotace na rovnici (3.86):

$$\left(\nabla^2 + \alpha^2 \right) \mathbf{B} = 0. \quad (3.87)$$

Je třeba ovšem poznamenat, že ne všechna řešení rovnice (3.87) jsou řešeními rovnice (3.86), neboť derivováním jsme zvýšili řád rovnice. Helmholtzova rovnice (3.87) již tedy není nutnou podmínkou extrémnosti magnetické energie. Pokud má plazma konečnou vodivost, dochází k disipaci energie a přepojování magnetických indukčních čar. Plazma se snaží zaujmout stav s co možná nejnižší magnetickou energií a dospět do stavu bezsilové konfigurace. Při těchto procesech se ovšem helicity mění.

Disipace magnetické helicity

Má-li systém uzavřené magnetické indukční čáry (nulovou normálovou složku magnetického pole na povrchu), jsou jedinou cestou jak změnit helicity pole disipativní procesy a přepojení indukčních čar. Odhadněme úlohu difúzního členu v rovnici (3.13). Pokud provedeme krok za krokem odvození uvedené výše s nezanedbaným difúzním členem, dostaneme jednoduchý vztah

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{\sigma} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \, d^3\mathbf{x}. \quad (3.88)$$

Energie magnetického pole je dána vztahem

$$W_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, d^3\mathbf{x}. \quad (3.89)$$

Časová změna energie je dána Jouleovou disipací

$$\frac{dW_M}{dt} = -\frac{1}{\sigma} \int_V j^2 \, d^3\mathbf{x}. \quad (3.90)$$

K dalšímu výpočtu využijeme Schwartzovu nerovnost [2] na prostoru L^2 :

$$|\langle \mathbf{j} | \mathbf{B} \rangle| \leq \|\mathbf{j}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \Rightarrow \quad \left| \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \, d^3\mathbf{x} \right| \leq \sqrt{\int j^2 \, d^3\mathbf{x}} \sqrt{\int B^2 \, d^3\mathbf{x}}.$$

Okamžitě tak získáme odhad

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| \leq \left(\frac{2\mu_0}{\sigma} W_M \left| \frac{dW_M}{dt} \right| \right)^{1/2}. \quad (3.91)$$

Vztah ještě upravíme pomocí dvou dalších rozměrových odhadů: Podíl magnetické energie a helicity je nepřímo úměrný rozměrům systému

$$\frac{W_M}{|K|} \sim \frac{(B^2/2\mu_0)\Delta V}{|AB|\Delta V} \sim \frac{B^2/2\mu_0}{BL \cdot B} = \frac{1}{2\mu_0 L} \quad \Rightarrow \quad W_M \sim \frac{|K|}{2\mu_0 L}. \quad (3.92)$$

Druhým odhadem je charakteristická doba difúze magnetického pole (tzv. rezistivní čas):

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad B / \tau_R \approx \frac{1}{\sigma \mu_0} B / L^2 \quad \Rightarrow \quad \tau_R \sim L^2 \sigma \mu_0. \quad (3.93)$$

Odhad (3.91) nyní můžeme upravit do používaného tvaru

$$\left| \frac{\Delta K}{\Delta t} \right| \lesssim \left(\frac{2\mu_0}{\sigma} \frac{|K|}{2\mu_0 L} \frac{|K|}{2\mu_0 L \Delta t} \right)^{1/2} = \left(\frac{K^2}{2\sigma\mu_0 L^2 \Delta t} \right)^{1/2} = \left(\frac{K^2}{2\tau_R \Delta t} \right)^{1/2}$$

a pro relativní změnu helicity platí řádový odhad

$$\left| \frac{\Delta K}{K} \right| < \left(\frac{\Delta t}{\tau_R} \right)^{1/2}. \quad (3.94)$$

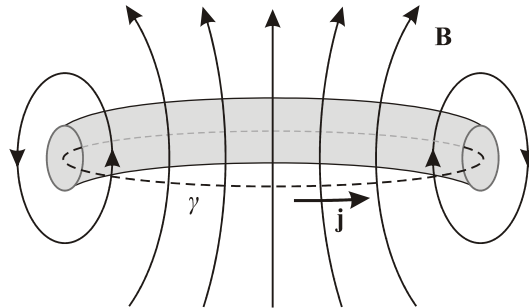
Pro rychlé děje ($\Delta t \ll \tau_R$) je změna helicity ΔK zanedbatelná. Například sluneční koronální erupce s dobou rekonekce $\Delta t \sim 1\,000$ s, lineárními rozměry $L \sim 5\,000$ km a koeficientem magnetické difúze $\eta_M \sim 10^{-6} \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$ dají charakteristický rezistivní čas $\tau_R \sim 10^{13}$ s a relativní změnu helicity $\Delta K/K < 10^{-5}$. Opačná situace je v plazmatu tokamaku. Rezistivní čas je v řádu jednotek sekund a doba udržení v desítkách sekund. Změna helicity je zde podstatná.

3.2.4 Tekutinové dynamo

Velmi důležitou částí magnetohydrodynamiky je problematika generování magnetických polí v nitru Slunce a planet. Současná teorie tekutinového dynamu nedokáže vysvětlit vznik těchto polí, ale úspěšně popisuje jejich udržování, zesilování a překlápění mezi dipólovou a azimutální složkou.

Cowlingův anti-dynamo teorém

Anglický astronom Thomas George Cowling (1906–1990) ukázal v roce 1934, že *stacionární osově symetrické magnetické pole nemůže vznikat osově symetrickým prouděním plazmatu*. Představme si jednoduché osově symetrické pole podle obrázku.



Obr. 55: Anti-dynamo teorém.

Elektrický proud generující pole teče v proudové trubici podél neutrální linie, kde je rotace pole nenulová a samotné pole nulové. Na obrázku je neutrální linie vyznačena čárkovaně. Integrujme proudovou hustotu podél této neutrální linie s využitím Ohmova zákona (3.7):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma} \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

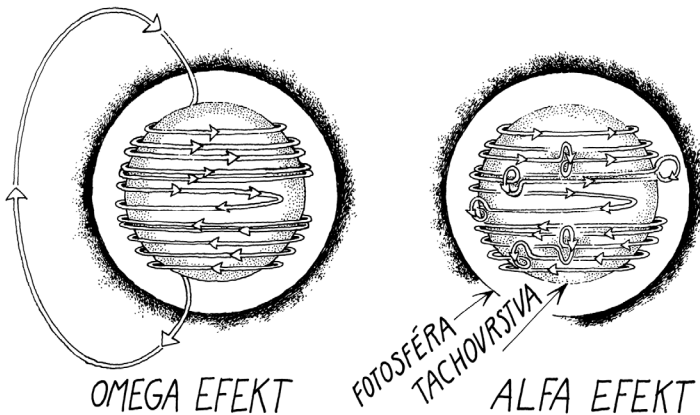
Magnetické pole je podél neutrální linie nulové, a proto je nulový i druhý člen integrace. První člen převedeme na plošný integrál ze Stokesovy věty a upravíme ho pomocí Maxwellových rovnic. Ze stacionarity plyne poté i nulovost prvního členu:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \sigma \int_S (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \sigma \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Dostali jsme se tak do sporu s předpokladem, že stacionární osově symetrické pole bylo generováno nenulovým proudem tekoucím podél neutrální linie. Generování magnetického pole je složitější záležitostí, dochází k přelévání mezi dipólovou a azimutální složkou.

Parkerův model tekutinového dynama

Současnou teorii tekutinového dynama v rotujícím tělese rozpracoval americký astrofyzik Eugene Parker (1927). K teorii dynama ovšem přispěla i řada dalších fyziků, například významný sovětský teoretik Yakov Borisovich Zeldovich (1914–1987) nebo skotský astrofyzik Henry Keith Moffatt (1935). Pokud těleso rotuje s diferenciální rotací, jsou původně dipólové magnetické indukční čáry vytažovány v místech rychlejší rotace (u Slunce v okolí rovníku) v azimutálním směru. Tím dochází k natahování magnetické indukční čáry, tj. zvětšování její délky. Tomuto jevu říkáme *omega efekt* (podle písmene omega, kterým se zpravidla značí úhlová frekvence rotujícího tělesa, ale i podle tvaru vychlípené indukční čáry). Při omega efektu se mění dipólová složka v azimutální složku. U Slunce k tomuto jevu dochází nejvýrazněji v blízkosti tzv. tachovrstvy, což je oblast přechodu mezi radiačním a konvektivním přenosem energie. Nachází se přibližně 220 000 km pod slunečním povrchem. Navinutí magnetické indukční čáry kolem dokola Slunce trvá přibližně 8 měsíců. U Země dochází k obdobnému jevu ve vodivém plastickém prostředí na hranici jádra a pláště.



Obr. 56: Sluneční dynamo.

Druhým významným jevem je *alfa efekt*. Dochází při něm k vychýlení magnetické trubice vlivem Coriolisovy síly, k její následné deformaci a překlopení do dipólové složky. Jev je nazván podle tvaru vychlípené indukční čáry, která připomíná písmeno alfa řecké abecedy. Tyto jevy umožňují vzájemnou transformaci obou složek pole a udr-

žování pole tekutinovým dynamem. Vždy je jedna složka postupně zesilována na úkor druhé a poté naopak. Magnetický dipól generovaný tímto mechanismem se proto pravidelně překlápí. Například pro Slunce trvá celý cyklus (doba, za kterou je severní pól zpět na svém místě) 22 let. V období překlápění dipólu má pole výrazné vyšší momenty (kvadrupólový a oktapólový), pole připomíná *vlasatou kouli*, na jejímž povrchu se střídá více oblastí vystupujících a vstupujících indukčních čar.

Při odvození omega a alfa efektu je podstatná jednak diferenciální rotace tělesa a jednak fluktuace magnetického a rychlostního pole. Rozložme obě pole na část středovanou přes *krátkodobé fluktuace* a na flukтуаční část:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \langle \mathbf{u} \rangle + \delta \mathbf{u}; \\ \mathbf{B} &= \langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B}.\end{aligned}\quad (3.95)$$

Střední hodnoty flukтуаčních částí jsou zjevně nulové:

$$\begin{aligned}\langle \delta \mathbf{u} \rangle &= 0; \\ \langle \delta \mathbf{B} \rangle &= 0.\end{aligned}\quad (3.96)$$

Dosaďme nyní rozklad (3.95) do rovnice pro magnetické pole (3.13):

$$\frac{\partial [\langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B}]}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 [\langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B}] + \text{rot} [\langle \mathbf{u} \rangle + \delta \mathbf{u} \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B})]. \quad (3.97)$$

Středováním této rovnice zmizí členy lineární ve flukтуаčích a získáme tak rovnici pro střední hodnotu magnetického pole:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle + \text{rot} [\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle] + \text{rot} \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle. \quad (3.98)$$

Odečteme-li nyní od (3.97) rovnici pro střední hodnoty (3.98), získáme rovnici pro fluktuace magnetického pole:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta \mathbf{B}) = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 (\delta \mathbf{B}) + \text{rot} [\langle \mathbf{u} \rangle \times \delta \mathbf{B} + \delta \mathbf{u} \times \langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} - \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle]. \quad (3.99)$$

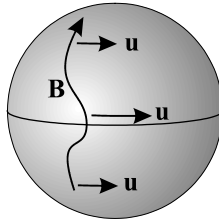
Chceme-li zjistit časovou změnu magnetického pole, musíme nalézt řešení rovnice (3.98), do které dosadíme řešení flukтуаací magnetického pole z rovnice (3.99). Střední hodnota rychlostního pole je zpravidla dána dynamikou systému (například otáčením Slunce), fluktuace rychlostního pole je možné hledat z rovnice pro rychlostní pole (3.50) nebo jsou známy experimentálně (například z měřených turbulencí slunečního plazmatu). První člen na pravé straně rovnice (3.98) pro časový vývoj magnetického pole popisuje standardní difúzi pole, druhý člen je zodpovědný za Ω efekt a třetí za α efekt, který má původ ve flukтуаčích rychlostního a magnetického pole.

Omega efekt

Pro Ω efekt je podstatný druhý člen rovnice (3.98):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \text{rot} [\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle]. \quad (3.100)$$

Střední hodnota magnetického pole je zamrznutá do střední hodnoty rychlostního pole, tj. magnetické pole sleduje pohyby plazmatu. Pokud těleso rotuje konstantní úhlovou rychlostí, tvar dipólového pole se nemění. Například Slunce ale rotuje diferenciální rotací, na rovníku je úhlová rychlost o třetinu větší než na pólech. Výsledkem diferenciální rotace je vznik azimutální složky magnetického pole. Pro úplnost uvedme, že na Slunci je v blízkosti tachovrstvy nenulová diferenciální rotace i v radiálním směru.



Obr. 57: Omega efekt.

Alfa efekt

Pro α efekt je podstatný třetí člen rovnice (3.98):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \text{rot} \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle. \quad (3.101)$$

Alfa efekt zajišťuje transformaci toroidální složky pole zpět na poloidální. Celá reže alfa efektu je čistě ve fluktuacích rychlostního a magnetického pole. Z hlediska statistické fyziky představuje výraz

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle; \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{klm} \langle \delta u_l \delta B_m \rangle. \quad (3.102)$$

korelační funkci $\langle ab \rangle$ mezi složkami fluktuací rychlosti a magnetického pole. Pokud by byl výraz nulový, neexistovala by žádná korelace mezi rychlostním a magnetickým polem, to ale není případ námi popisované vodivé tekutiny. Pokud jsou fluktuace rychlostního pole helikální, stane se ve vodivém plazmatu automaticky helikálním i magnetické pole, u kterého se objeví složka kolmá na původní směr. Podstatnou podmínkou je vznik rychlostních fluktuací, které mají nenulovou střední hodnotu hustoty helicity:

$$\mathcal{H} = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \text{rot} \delta \mathbf{u} \rangle = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} \rangle \neq 0. \quad (3.103)$$

Veličina $\delta \boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot} \delta \mathbf{u}$ je vířivost fluktuace rychlostního pole. Ke vzniku helikálních fluktuací může dojít jen v plazmatu s nenulovým odporem (když se helicity nezachovává). Za nenulovou helicitu rychlostních fluktuací je zodpovědná Coriolisova síla. Na jedné straně od rovníku vznikají fluktuace rychlostního pole s kladnou hodnotou hustoty helicity $\mathcal{H} > 0$ a na druhé straně se zápornou hodnotou hustoty helicity $\mathcal{H} < 0$. Další oblastí je tachovrstva na spodní části konvektivní zóny, kde se obracejí sestupné proudy na vzestupné a helicity turbulentních fluktuací je opět nenulová.

● **Příklad 12:** Představme si, že se v plazmatu vytvoří kruhově polarizovaná vlna šířící se ve směru osy z (lokálně, může jít i o azimutální směr):

$$\delta \mathbf{u} = (u_0 \cos(kz - \omega t), u_0 \sin(kz - \omega t), 0).$$

Výsledkem takové poruchy je nenulová vířivost

$$\delta \boldsymbol{\omega} = \text{rot } \delta \mathbf{u} = -k \delta \mathbf{u}.$$

Uvažovaná fluktuace rychlostního pole je Beltramovým polem a má hustotu helicity

$$\mathcal{H} = \delta \mathbf{u} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} = -ku_0^2.$$

Takový tok okamžitě povede k deformaci magnetického pole do helikální struktury. ■

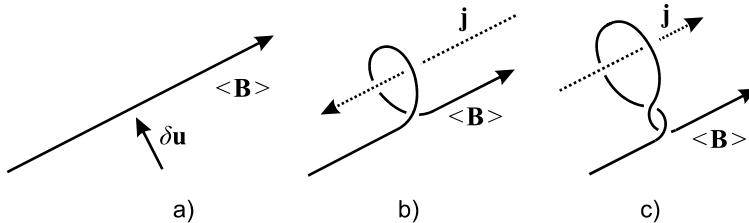
Výpočet korelační funkce (3.102) může být velmi komplikovaný, často se provádí jen numerickým řešením rovnice pro fluktuace magnetického pole (3.99). Jak uvidíme v následujícím příkladu, při výpočtu korelační funkce se objeví několik členů, z nichž jeden je *úměrný střední hodnotě magnetického pole*, tj.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle. \quad (3.104)$$

Právě tento člen je zodpovědný za α efekt, který je pojmenován podle koeficientu úměrnosti α . Dosaďme korelační funkci do rovnice pro α efekt (3.101):

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \alpha \text{rot} \langle \mathbf{B} \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{B} \rangle_{t+\Delta t} \approx \langle \mathbf{B} \rangle_t + \alpha \text{rot} \langle \mathbf{B} \rangle_t \Delta t. \quad (3.105)$$

Rotace střední hodnoty magnetického pole je úměrná proudové hustotě, a proto má nově vznikající pole složku ve směru tekoucího proudu. Magnetické pole tak díky fluktuacím získává komponentu ve směru proudové hustoty a nově vznikající (a postupně sílicí) část pole je nutně helikální (jde o Beltramovo pole). Tím se vytváří složka pole kolmá na pole původní. Pokud jsou rychlostní fluktuace periodické, jako v příkladu s kruhově polarizovanou vlnou, mění se periodicky i směr indukovaného proudu a magnetické pole vytvoří překroucenou smyčku [9]:



Obr. 58: Překroucení smyčky.

Uveďme na závěr, že alfa efekt sám postačí k překlápění jak toroidální složky v poloidální, tak i poloidální v toroidální. Modelu postavenému jen na α efektu se říká $\alpha\alpha$ model. Mnohem účinnější mechanismus, který jsme popsali již dříve, je tzv. Parkerův neboli $\alpha\Omega$ model.

■ **Příklad 13:** Odhadněme korelační funkci pro plazma s vysokou hodnotou Reynoldsova magnetického čísla. Taková situace je jak na Slunci, tak ve fúzním plazmatu.

Řešení: V rovnici (3.99) pro fluktuaci magnetického pole bude na pravé straně dominovat třetí člen, neboť magnetické fluktuace jsou způsobeny především fluktuacemi rychlostního pole. První člen je vzhledem k předpokladu vysokého Reynoldsova čísla zanedbatelný, členy s kvadráty fluktuací jsou vyššího řádu. Proto v našem přiblížení máme pro fluktuaci pole

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B}) \approx \text{rot}[\delta\mathbf{u} \times \langle \mathbf{B} \rangle] \Rightarrow$$

$$\delta B_k \approx \int_0^t \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mno} \partial_l \delta u_n(t') \langle B_o \rangle(t') dt',$$

kde jsme provedli integraci fluktuace podle času a rozepsali dvojný vektorový součin. V zápisu vynecháváme zjevné prostorové závislosti. Nyní upravíme dvojný vektorový součin:

$$\delta B_k \approx \int_0^t \partial_n \delta u_k(t') \langle B_n \rangle(t') dt' - \int_0^t \partial_n \delta u_n(t') \langle B_k \rangle(t') dt'.$$

V dalším kroku provedeme naznačené derivace součinu a budeme předpokládat, že plazma se chová jako nestlačitelná kapalina (divergence obou polí jsou nulové):

$$\delta B_k \approx \int_0^t \delta u_{k,n}(t') \langle B_n \rangle(t') dt' - \int_0^t \delta u_n(t') \langle B_{k,n} \rangle(t') dt'.$$

Parciální derivace píšeme ve zkratce za čárku v indexu. Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu korelační funkce (3.102), která je zodpovědná za α efekt:

$$\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{ijk} \langle \delta u_j \delta B_k \rangle =$$

$$= \left\langle \int_0^t \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_{k,n}(t') \langle B_n \rangle(t') dt' \right\rangle - \left\langle \int_0^t \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_n(t') \langle B_{k,n} \rangle(t') dt' \right\rangle.$$

Výsledek lze napsat přehledně takto:

$$\varepsilon_i = \left\langle \int_0^t \alpha_{in}(t, t') \langle B_n \rangle(t') dt' \right\rangle - \left\langle \int_0^t \eta_{ikn}(t, t') \langle B_{k,n} \rangle(t') dt' \right\rangle;$$

$$\alpha_{in}(t, t') \equiv \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_{k,n}(t'), \quad (3.106)$$

$$\eta_{ikn}(t, t') \equiv \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_n(t').$$

Lze předpokládat, že korelační koeficienty jsou funkcí časové odlehlosti, tj.

$$\alpha_{in}(t, t') \equiv \alpha_{in}(t - t'), \quad (3.107)$$

$$\eta_{ikn}(t, t') \equiv \eta_{ikn}(t - t')$$

a do minulosti rychle konvergují k nule. Pomalu se měnící střední hodnotu pole a jeho derivaci lze z integrace (3.106) potom vytknout:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(t) &= \tilde{\alpha}_{in}(t) \langle B_n \rangle(t) - \tilde{\eta}_{ikn}(t) \langle B_{k,n} \rangle(t); \\ \tilde{\alpha}_{in}(t) &\equiv \left\langle \int_0^t \alpha_{in}(t-t') dt' \right\rangle, \\ \tilde{\eta}_{ikn}(t) &\equiv \left\langle \int_0^t \eta_{ikn}(t-t') dt' \right\rangle.\end{aligned}\quad (3.108)$$

Fluktuace magnetického pole je tedy v našem přiblížení úměrná střední hodnotě pole samotného a jeho derivacím. Koeficienty úměrnosti jsou dány integrály z fluktuací rychlostního pole. Pokud budeme pro jednoduchost předpokládat izotropii plazmatu (to ale nemusí platit vždy), musí platit

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{in} &\sim \delta_{in}, \\ \tilde{\eta}_{ikn} &\sim \varepsilon_{ikn}.\end{aligned}\quad (3.109)$$

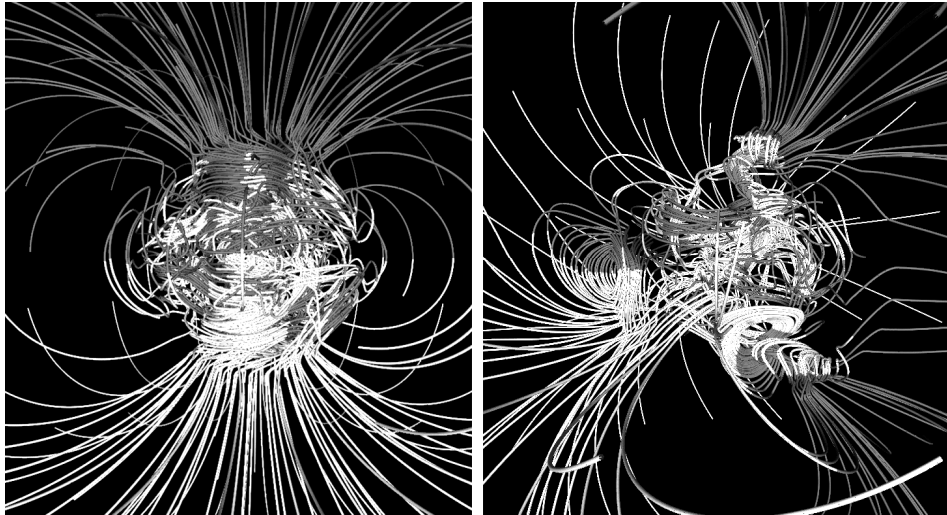
Za našich zjednodušujících předpokladů tedy pro korelační funkci (3.102) platí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \eta \mathbf{J} \quad (3.110)$$

a skutečně má část úměrnou střední hodnotě pole.

■

V obecném případě jsou k určení složek pole potřebné numerické simulace výchozích rovnic alfa a omega efektu, které jsou mimořádně náročné. Na obrázku jsou výsledky takových simulací pro zemské dynamo v superpočítačovém centru v San Diegu.



Obr. 59: Počítačová simulace tekutinového dynama uvnitř Země. Odstínem jsou odlišeny vstupující a vystupující indukční čáry. Nalevo je převážně dipólové pole, napravo stav při přepólování, kdy má Země několik pólů severních i jižních. San Diego Supercomputer Centrum, 1999. Gary Glatzmaier, Paul Roberts.

3.2.5 Přepojení magnetických indukčních čar

V přírodě je velmi časté, že magnetická pole různých zdrojů se vzájemně propojují a vytvářejí tak jakousi pavučinovou síť magnetických polí. Například pole střelky kompasu má jak uzavřené indukční čáry, které se vrací do druhého pólu, tak i otevřené indukční čáry vyvěrající z oblasti pólů střelky, které se nikdy nevrátí zpět. Napojují se totiž na indukční čáry pole Země. Právě proto střelka kompasu míří k severu.

V přírodě také dochází k přepojování magnetických indukčních čar, tzv. *rekonekci*. Magnetické pole (většinou velmi rychle) přejde do stavu s nižší energií tím, že změní topologii svých indukčních čar. Indukční čáry se uspořádají do jiné, energeticky výhodnější konfigurace. Uvolněná energie zahřeje okolní plazma. K přepojení dochází nejčastěji v oblastech, kde magnetické indukční čáry míří opačným směrem. Tak tomu je například ve smyčkách magnetického pole ve sluneční koróně, na čelní straně magnetosféry Země nebo v magnetickém ohonu Země.

K popisu přepojení magnetických indukčních čar již nelze použít ideální magnetohydrodynamiku, ve které má plazma nulový elektrický odpor, resp. nekonečnou vodivost. V takovém prostředí má rovnice pro časový vývoj jen člen zamrzání a plazma je dokonale provázané s magnetickým polem. Budeme předpokládat, že se plazma chová jako nestlačitelná kapalina, tj. $\text{div } \mathbf{u} = 0$, což koresponduje s rovnicí $\text{div } \mathbf{B} = 0$ a je jistým vyjádřením provázanosti rychlostního a magnetického pole. V ideální magnetohydrodynamice není možné proudění plazmatu napříč magnetických indukčních čar, neexistuje disipace energie, magnetický tok libovolnou uzavřenou plochou je konstantní, magnetická helicity magnetické trubice se zachovává a dvě částice ležící na jedné indukční čáře budou na této čáře neustále. Jakákoli změna topologie indukčních čar je v rámci ideální magnetohydrodynamiky nemožná.

Pro popis přepojení magnetických indukčních čar v rámci tekutinových modelů je proto nutné použít tzv. *rezistivní magnetohydrodynamiku*, ve které má plazma nenulový odpor. Energie nahromaděná v magnetickém poli se při přechodu do jiné topologie indukčních čar musí uvolnit, a to je možné jedině v plazmatu s nenulovým odporem.

Pro rezistivní magnetohydrodynamiku je velmi významný *rezistivní čas* (3.93) odvozený rozměrovou analýzou z rovnice difúze. Jde o charakteristickou časovou konstantu magnetické difúze, za kterou je odpovědný nenulový odpor plazmatu.

Většina pohybů v plazmatu s magnetickým polem je charakterizována Alfvénovou rychlostí (3.68). Doba, za kterou rozruch projde touto rychlostí plazmatem, se nazývá *Alfvénův čas*. Oba charakteristické časy jsou dány relacemi

$$\tau_R \sim L^2 \sigma \mu_0; \quad \tau_A \sim \frac{L}{v_A} = \frac{L \sqrt{\mu_0 \rho}}{B_0}. \quad (3.111)$$

Z experimentů je známo, že typická doba rekonekce leží mezi oběma časy a je rovna přibližně geometrickému průměru těchto časů:

$$\tau_{\text{REC}} = \sqrt{\tau_R \tau_A}. \quad (3.112)$$

Důležitou charakteristikou plazmatu je *Lundquistovo číslo* $\#_{\text{Lu}}$ (někdy se značí S), které je poměrem rezistivního a Alfvénova času:

$$\#_{\text{Lu}} \equiv S \equiv \frac{\tau_{\text{R}}}{\tau_{\text{A}}} = L\sigma B_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = L\sigma\mu_0 v_{\text{A}}. \quad (3.113)$$

Lundquistovo číslo je shodné s Reynoldsovým magnetickým číslem, pokud za rychlost plazmatu dosadíme Alfvénovu rychlost. Pro různá plazmata přibližně platí [27]:

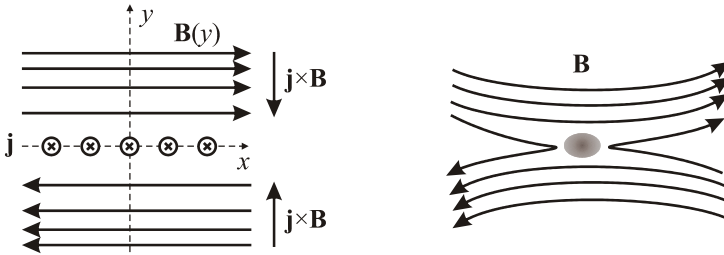
Plazma	L (m)	τ_{R} (s)	τ_{A} (s)	$\#_{\text{Lu}}$
oblouk	10^{-1}	10^{-3}	10^{-3}	1
tokamak	1	1	10^{-8}	10^8
jádro Země	10^6	10^{12}	10^5	10^7
sluneční skvrna	10^7	10^{14}	10^5	10^9
sluneční koróna	10^9	10^{18}	10^6	10^{12}

Vidíme, že s výjimkou obloukového plazmatu je Reynoldsovo (Lundquistovo) číslo velmi vysoké a jak pro fúzní, tak pro astrofyzikální plazma dominuje v rovnici pro časový vývoj člen zamrznání. Ve většině plazmatu lze proto použít ideální magnetohydrodynamiku. Oblasti přepojení indukčních čar, kde jsou podstatné difúzní procesy, jsou prostorově omezené a nacházejí se jen v místech slabého nebo nulového magnetického pole. Těmto oblastem říkáme *difúzní region*. V něm musíme použít rovnice rezistivní magnetohydrodynamiky a na jeho hranicích navázat řešení na řešení ideální magnetohydrodynamiky. Základní sada rezistivní magnetohydrodynamiky má například tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(p \bar{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{B^2}{2\mu_0} \bar{\mathbf{1}} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} + e \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho u^2}{2} \mathbf{u} + e \mathbf{u} + \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{q} \right) &= 0, \\ e &= \frac{p}{\gamma - 1}; \quad \mathbf{q} = -\kappa \nabla T; \quad \mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{\text{rot} \mathbf{B}}{\sigma \mu_0}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Vzhledem k disipaci energie je nutné uvažovat i rovnici pro energii a soustavu uzavřít nějakým vztahem pro tepelný tok \mathbf{q} , například Fourieovým zákonem. Hustota vnitřní energie e je vyjádřena za pomoci tlaku ze vztahu (2.51), elektrické pole je určeno z Ohmova zákona.

Samovolná 2D rekonekce v magnetické vrstvě



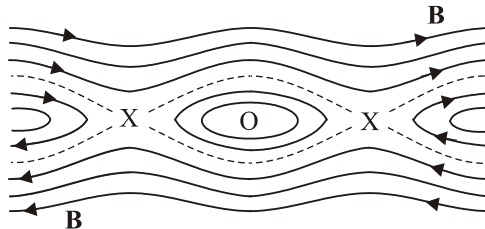
Obr. 60: Princip přepojení magnetických indukčních čar.

Nejjednodušší možná situace je zakreslena na obrázku. Ve směru osy y magnetické pole postupně slábne až na nulovou hodnotu pro $y = 0$. Zde pole obrací směr a opět roste. V oblasti nulového pole musí téct elektrický proud (rotace pole je nenulová). V rovině (xz) se vytváří tzv. *neutrální vrstva*, kde proud míří v ose z . Na plazma působí Lorentzova síla $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ a stlačuje ho směrem k neutrální vrstvě. V plazmatu s nulovým odporem se vytvoří rovnováha mezi hustotou Lorentzovy síly a gradientem tlaku plazmatu, veškerý makroskopický pohyb ustane.

Má-li plazma ovšem nenulový, libovolně malý odpor, nejsou již magnetické indukční čáry vmrzuté do plazmatu a plazma se může pohybovat (driftovat) napříč indukčním čarám. Rychlost tohoto pohybu je dána obecným vztahem pro driftovou rychlost (viz první kapitolu nebo [1]):

$$\mathbf{u}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \approx \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{\sigma B^2} = \frac{\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{\sigma \mu_0 B^2}. \quad (3.115)$$

Vzájemný pohyb plazmatu a indukčních čar v prostředí s nenulovým odporem způsobuje jejich přetrhávání a napojování na jiné indukční čáry. Uvolněná magnetická energie Jouleovskými zahřeje plazma. Podle tvaru indukčních čar se bod, ve kterém došlo k přepojení, nazývá X bod. Často je takových bodů v neutrální vrstvě celá řada a mezi nimi vznikají tzv. magnetické ostrovy (plazmoidy), v jejichž střezech jsou tzv. O body:



Obr. 61: Body X a O vznikající při přepojení indukčních čar.

Čárkovanou čarou je označena *separatrix*, křivka oddělující různé topologie magnetického pole. V horní části míří indukční čáry magnetického pole jedním směrem, v dolní míří směrem opačným. V oblasti kolem neutrální vrstvy se vytvořily magnetické ostrovy.

Pro posouzení rychlosti rekonekce se používá tzv. *index rekonekce* (Machovo-Alfvénovo číslo). Index rekonekce je definován jako poměr rychlosti plazmatu vstupujícího do oblasti rekonekce a Alfvénovy rychlosti, kterou je plazma samovolně vytlačováno z oblasti rekonekce ven. Pro samovolnou (spontánní) 2D rekonekci máme

$$\#_{sp} = \frac{u_{in}}{u_{out}} \approx \frac{u_d}{v_A} \approx \frac{1/L\sigma\mu_0}{v_A} = \frac{1}{L\sigma\mu_0 v_A} = \frac{1}{\#_{Lu}},$$

tedy platí

$$\#_{sp} \approx \frac{1}{\#_{Lu}}. \tag{3.116}$$

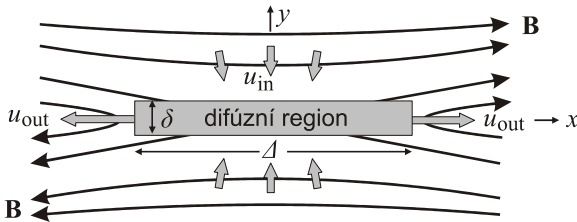
Pro samovolnou 2D rekonekci je index rekonekce převrácenou hodnotou Lundquistova čísla, pro fúzní i astrofyzikální plazma je velmi malý, což znamená, že spontánní rekonekce probíhá velmi pomalu. V kapitole 3.3.2 ukážeme, že v dostatečně „tlustém“ plazmovém vlákně se neutrální vrstva nulového pole vytvoří samovolně. Na opačných stranách vrstvy má pole opačnou polaritu a dochází zde k samovolné 2D rekonekci.

Řízená 2D rekonekce (Sweetův–Parkerův model)

K přepojení indukčních čar nemusí docházet samovolně, jako v minulém případě, kdy se v plazmatu vytvořila neutrální vrstva (nulová vrstva, vrstva nulového pole, proudová vrstva) a plazma samotné se díky relaxačním procesům začalo pohybovat k neutrální vrstvě.

V malé oblasti plazmatu v okolí neutrální vrstvy často dochází k značnému zvýšení odporu plazmatu. Mechanizmy, které k tomu vedou, nejsou dosud zcela jasné. Oblast se zvýšeným odporem plazmatu se nazývá *difúzní region*. Plazma je do difúzního regionu hnáno difúzí magnetického pole. Podél indukčních čar plazma z difúzního regionu volně vytéká ven Alfvénovou rychlostí (plazma vytlačuje magnetický tlak). Typickým příkladem takové rekonekce jsou procesy ve sluneční koróně a následná erupce jako projev uvolněné energie.

Jednoduchý model řízené rekonekce navrhl anglický astronom Peter Alan Sweet (1921–2005) v roce 1958 a nezávisle americký astrofyzik Eugene Parker (1927) v roce 1957. Model předpokládá, že oblasti plazmatu s opačně orientovanými indukčními čarami jsou difúzí (magnetického pole) vtačovány do difúzního regionu k neutrální vrstvě rychlostí u_{in} . V této oblasti probíhá rekonekce indukčních čar. Na bocích oblasti musí být plazma vytlačováno ven z difúzního regionu rychlostí u_{out} , často v podobě plazmových výstřiků. Sweetův–Parkerův model předpokládá, že pro rozměry regionu platí $\Delta \gg \delta$, tj. difúzní region je rozsáhlý, ale velmi tenký. Elektrický proud teče opět v rovině x - z ve směru osy z .



Obr. 62: Difúzní region

Sweetův-Parkerův model se opírá o tři tvrzení:

- 1) Vtékající plazma sleduje difundující indukční čáry magnetického pole, tj. rychlost pohybu plazmatu je dána rezistivním časem τ_R , viz (3.93)

$$u_{\text{in}} \approx \frac{\delta}{\tau_R} = \frac{\delta}{\delta^2 \sigma \mu_0} = \frac{1}{\delta \sigma \mu_0}. \quad (3.117)$$

- 2) Vytékající plazma se pohybuje volně (tedy je vytlačováno magnetickým tlakem), proto má Alfvénovu rychlost

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \approx \frac{1}{2} \rho u_{\text{out}}^2 \quad \Rightarrow \quad u_{\text{out}} \approx v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}. \quad (3.118)$$

- 3) Vztah mezi oběma rychlostmi je dán zachováním hmotnosti (rovnici kontinuity ve tvaru $uS = \text{const}$)

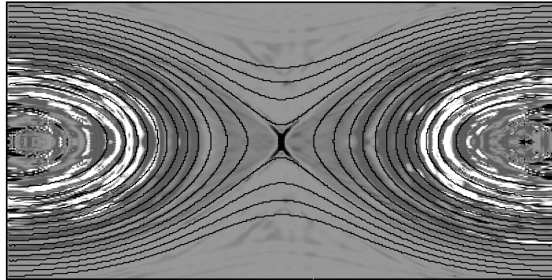
$$u_{\text{in}} \Delta = u_{\text{out}} \delta. \quad (3.119)$$

Určeme na závěr ještě index řízené rekonekce, který je roven Machovu-Alfvénovu číslu. Vyjdeme z rovnice kontinuity (3.119) a ze vztahu (3.117) pro u_{in} :

$$\#_{\text{dr}}^2 = \frac{u_{\text{in}}}{u_{\text{out}}} \cdot \frac{u_{\text{in}}}{u_{\text{out}}} \approx \frac{\delta}{\Delta} \cdot \frac{1/\delta \sigma \mu_0}{v_A} = \frac{1}{\Delta \sigma \mu_0 v_A} \approx \frac{1}{\#_{\text{Lu}}}.$$

Po odmocnění máme

$$\#_{\text{dr}} \approx \frac{1}{\sqrt{\#_{\text{Lu}}}}. \quad (3.120)$$



Obr. 63: MHD simulace rekonekce s difúzním regionem. Stupněm šedi je značena proudová hustota. J. Birn.

Rychlá 2D rekonekce (Petschekův model)

Index řízené rekonekce je větší než index samovolné rekonekce, řízená rekonekce proto probíhá rychleji. Nicméně některé děje, jako například koronální výrony hmoty, jsou ještě rychlejší, než by odpovídalo Sweetovu–Parkerovu modelu. Za rychlou rekonekci považujeme děje s indexem rekonekce srovnatelným nebo vyšším než 0,1. Často se používá model, který odvodil americký fyzik a inženýr Harry Petschek v roce 1964.

K rekonekci dochází jen ve velmi malé oblasti ($\Delta \approx \delta$) a je způsobena rozvojem *ostrůvkové* (tearing) nestability vznikající z MHD vln. V blízkosti difúzního regionu se ještě vytváří rázová vlna, která proces rekonekce urychlí. Rychlost vtékání i vytékání plazmatu není při tomto mechanismu příliš odlišná. V takovém modelu vychází pro index rekonekce

$$\#_p \approx \frac{1}{\ln(\#_{Lu})}. \quad (3.121)$$

Petschekův model je vynikající pro popis rychlé rekonekce. Jeho hlavním problémem je to, že nijak neřeší vznik malého regionu se zvýšenou rezistivitou a není tedy vnitřně konzistentní. Zcela selhává pro plazma s homogenním průběhem rezistivity. Navíc rezistivita daná Spitzerovým vztahem je jen přiblížení platné pro malé hodnoty elektrického pole, při rekonekci lze očekávat genezi silných elektrických polí a anomální průběh rezistivity. Správné předpovědi někdy nedává ani v astrofyzikálním plazmatu, kde difúzní region není „malý“. Přes všechny nedostatky jde o první model založený na rozvoji ostrůvkové nestability, který dobře postihuje základní fyzikální mechanismus.

Rychlá 2D rekonekce s Halloým jevem

Pro difúzní regiony menší než Larmorův poloměr iontů je třeba započítat Hallův jev (vznik elektrického a magnetického pole kolmého na tekoucí proud). Zobecněný Ohmův zákon má tvar

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma}{Qn}(\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega_p^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (3.122)$$

Prostřední člen s výrazem $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ odpovídá Hallovu jevu. Hallův jev zásadně ovlivňuje strukturu polí na vzdálenostech menších než je Larmorův poloměr iontů a vede při nenulové rezistivitě k rychlé rekonekci Petschekova typu (Shay, 1999). Uvažujeme-li Hallův jev, není k rekonekci zapotřebí srážkového plazmatu. Tuto obdobu Petschekova modelu lze odvodit i čistě kinematically a bezsrážkově. Model je, na rozdíl od Petschekova modelu, vnitřně konzistentní. Vzniklé MHD vlny patří do skupiny hvízdů (viz kapitola 4.4.4) a jejich frekvence je úměrná kvadrátu vlnového vektoru, viz (4.105)

$$\omega \sim k^2, \quad (3.123)$$

vlny s malými rozměry získávají vysoké rychlosti (4.12), které předávají plazmatu

$$u_{\text{out}} \sim \frac{d\omega}{dk} \sim k \sim \frac{1}{\delta}. \quad (3.124)$$

Index rekonekce s Halloým jevem není závislý na Lunquistovu číslu a je roven přibližně 0,1.

Příkladem rekonekce Hallova typu je rekonekce v magnetickém ohonu Země. Tloušťka nulové vrstvy protékané proudem je za normálních okolností 5 000 km. Při magnetických bouřích dojde k jejímu ztenčení až na 200 km, což odpovídá Larmorovu poloměru iontů v magnetickém ohonu. V tu chvíli začne bouřlivě probíhat rekonekce Hallova typu.

Turbulentní 2D rekonekce (GS 95 model)

Procesy rekonekce může dále urychlit či ovlivnit přítomnost vln a turbulencí v plazmatu. V roce 1995 byl například vytvořen turbulentní model GS 95 (pojmenovaný podle autorů Petera Goldreicha a S. Sridhara), ve kterém je index rekonekce dokonce roven

$$\#_{GS} \approx \#_{Lu}^{1/4}. \quad (3.125)$$

Rekonekce v tomto modelu tedy probíhá mimořádně rychle. Charakter difúzního regionu je fraktální, struktury se na menších vzdálenostech opakují až do Larmorova poloměru iontů. V difúzním regionu se vytváří velké množství magnetických ostrovů nejrozličnějších velikostí, které připomínají saponátovou pěnu. Turbulentní rekonekce může ve vesmíru urychlovat částice kosmického záření za pomoci Fermiho mechanismu, v oblasti silnějšího pole vznikají magnetická zrcadla. Také vzniklé magnetické ostrovy, jež se pohybují a mění svou velikost, mohou nabitým částicím předávat energii. Turbulentní rekonekce může ovlivnit i proces vzniku hvězd, přepojování indukčních čar efektivně zeslabí původní pole; pokud by bylo pole jen „zamrzlé“, hvězda by získala při prosté kontrakci ze zárodečné mlhoviny extrémně silně magnetické pole.

3D rekonekce a další otevřené otázky

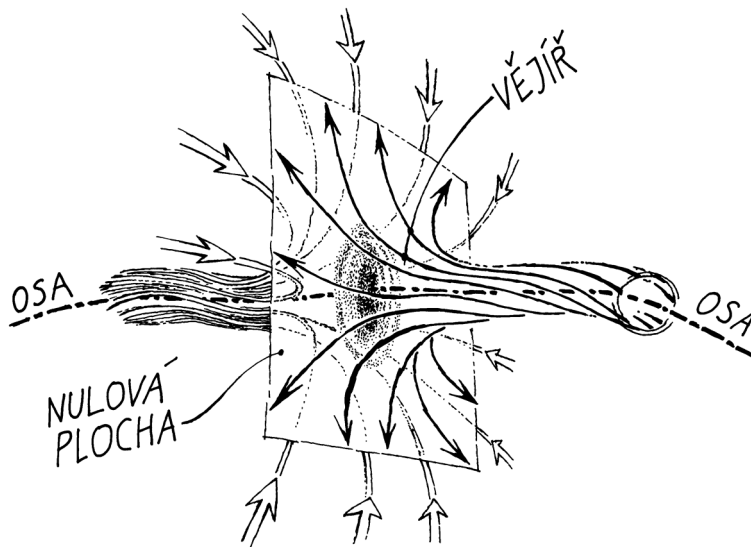
Pokud má magnetické pole i výraznou složku kolmou na neutrální vrstvu, hovoříme o 3D rekonekci. Situace může vypadat obdobně jako na obrázku 64, oproti obrázku může být vějíř indukčních čar v reálné situaci ještě stočen do spirály v rovině (xy). Mechanismy 3D rekonekce jsou prozkoumány zatím jen velmi málo.

2D modely popisující rekonekci jsou většinou jen stacionární, rekonekce má ovšem v mnoha případech eruptivní charakter, který tyto modely nemohou postihnout. Na rekonekci magnetických indukčních čar mohou mít zásadní vliv i různé další jevy, například separace elektronů a iontů, anomální rezistivita nebo urychlování nabitých částic. K rekonekci magnetických indukčních čar může dojít i v bezsrážkovém plazmatu. Popis takových dějů se neopírá o magnetohydrodynamiku (ta je srážkově dominantní), ale o statistické modely plazmatu. Úplný popis rekonekce není v tuto chvíli k dispozici, je pravděpodobné, že k rekonekci vede celá řada mechanismů, které se většinou zkoumají za pomoci numerických simulací.

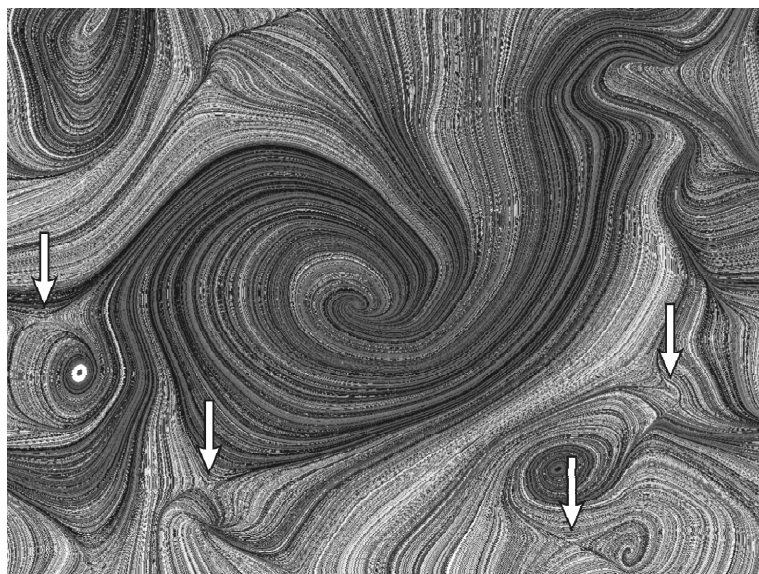
Pro rozsáhlé difúzní regiony dobře funguje Sweetův-Parkerův model, který byl v roce 2007 zobecněn na asymetrický případ (Paul Cassak, Michael Shay). Pro oblasti menší, než je Larmorův poloměr iontů, je třeba započítat Hallův jev, který s sebou nese katastrofické chování a rychlou rekonekci Petschekova typu s indexem rekonekce $\sim 0,1$. Existuje řada otevřených otázek: Je index rychlé rekonekce vždy 0,1? Proč? Může existovat stacionární rekonekce a nebo jde vždy o eruptivní jev? Jak z mikroskopických rekonekci vznikají makroskopické jevy (sluneční erupce, magnetické bouře, koronální výrony hmoty)? Jaká je role turbulencí při rekonekci? Jak probíhá třírozměrná rekonekce?

Připomeňme na závěr, že počátky chápání rekonekce spadají do roku 1946, kdy australský astronom Ronald Gordon Giovanelli (1915–1984) navrhl, že zdrojem ohřevu plazmatu a urychlení částic mohou být nulové body magnetického pole ve tvaru písmene X. Označení *magnetické přepojení* (anglicky *magnetic reconnection*) zavedl anglický fyzik a astronom James Dungey, který v roce 1953 objevil, že změna topologie magnetických indukčních čar je možná jedině v plazmatu s nenulovým odporem. V roce

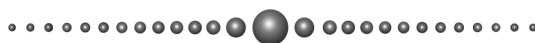
1961 Dungey navrhl, že magnetické přepojení je mechanismus odpovědný za transport energie slunečního větru do magnetosféry Země.



Obr. 64: Třírozměrné přepojení magnetických indukčních čar.



Obr. 65: Oblasti rekonekce magnetických indukčních čar z PIC simulací autora.



3.3 Některé rovnovážné konfigurace v plazmatu

3.3.1 Rovnováha v plazmatu

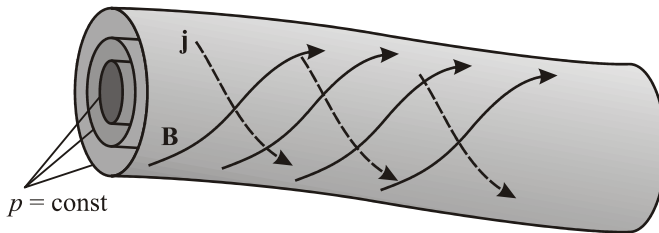
V ustáleném stavu, kdy je plazma v rovnováze a nepohybuje se, musí být pravá strana pohybové rovnice (3.49) nulová.

$$\blacktriangleright \quad -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0. \quad (3.126)$$

Viskózní procesy se v rovnováze neuplatňují, neboť se plazma nepohybuje. V rovnováze je gradient tlaku látky roven hustotě Lorentzovy síly. Uděláme-li skalární součin rovnice rovnováhy (3.126) s proudovou hustotou nebo magnetickým polem, okamžitě dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \nabla p &= 0, \\ \mathbf{B} \cdot \nabla p &= 0. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Vzhledem k tomu, že gradient je kolmý na plochy konstantního tlaku, je zřejmé, že elektrické proudy v rovnováze tečou podél ploch konstantního tlaku. Stejně tak sledují plochy konstantního tlaku i magnetické indukční čáry. Proudové trubice jsou tak totožné s magnetickými trubnicemi, i když směr vektorů \mathbf{j} , \mathbf{B} obecně není totožný.



Obr. 66: Rovnováha v plazmatu.

Magnetický povrch

Předpokládejme, že existuje funkce $\psi(\mathbf{x})$ taková, že povrch magnetické trubice je dán rovnicí

$$\psi(\mathbf{x}) = \text{const}. \quad (3.128)$$

Gradient hledané funkce bude kolmý na povrch magnetické trubice, a proto musí platit

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0. \quad (3.129)$$

Magnetické pole můžeme ve válcových souřadnicích (r, φ, z) snadno vyjádřit za pomoci vektorového potenciálu ze vztahů

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}; \quad B_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}. \quad (3.130)$$

Rovnici (3.129) splníme ve válcových souřadnicích pro jednotlivé symetrie úlohy snadno následujícími volbami:

Translační symetrie ($\partial/\partial z = 0$):

$$\psi(r, \varphi) = A_z(r, \varphi). \quad (3.131)$$

Osová symetrie ($\partial/\partial \varphi = 0$):

$$\psi(r, z) = r A_\varphi(r, z). \quad (3.132)$$

Helikální symetrie se stoupáním α :

$$\psi(r, \varphi - \alpha z) = A_z(r, \varphi - \alpha z) + \alpha r A_\varphi(r, \varphi - \alpha z). \quad (3.133)$$

Funkce, která charakterizuje povrch magnetické trubice, je v uvedených symetriích dána vhodnými kombinacemi složek vektorového potenciálu.

Rovnováha v osově symetrii

Předpokládejme osovou symetrii (proměnné nezávisí na toroidálním úhlu φ , viz obr 67). Funkci, která určuje tvar magnetických povrchů, určíme ze vztahu (3.132)

$$\psi(r, z) = r A_\varphi(r, z).$$

Radiální a osovou složku pole máme okamžitě z (3.130):

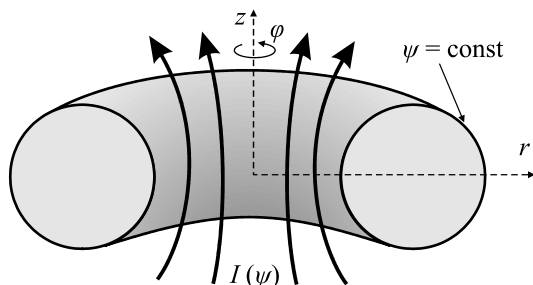
$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (3.134)$$

$$B_z = +\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Poslední komponentu určíme z Ampérova zákona:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I(\psi)}{2\pi r}, \quad (3.135)$$

kde $I(\psi)$ je elektrický proud tekoucí v poloidálním směru skrze kruh ohraničený magnetickým povrchem, viz obrázek 67:



Obr. 67: Osově symetrická rovnováha v plazmatu.

Zapišme nyní pro tuto symetrii radiální složku podmínky rovnováhy (3.126), ve které za proudovou hustotu dosadíme z příslušné Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p(\psi)}{\partial r} + j_\phi B_z - j_z B_\phi &= 0; \\ -\frac{\partial p(\psi)}{\partial r} + \frac{1}{\mu_0} [\text{rot } \mathbf{B}]_\phi B_z - \frac{1}{\mu_0} [\text{rot } \mathbf{B}]_z B_\phi &= 0; \\ -\frac{\partial p(\psi)}{\partial r} + \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right] B_z - \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \right] B_\phi &= 0. \end{aligned}$$

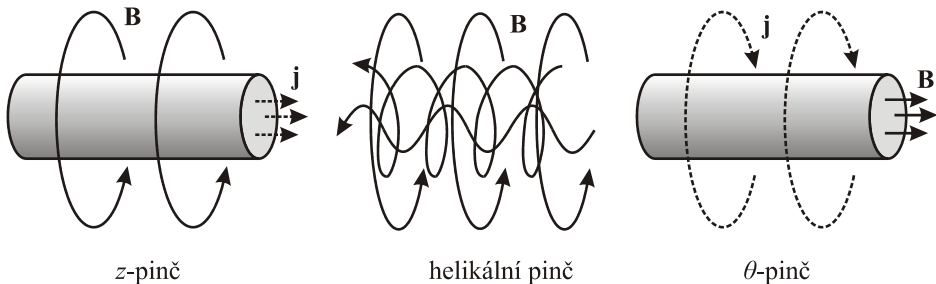
Nyní dosadíme za magnetické pole ze vztahů (3.134) a (3.135) a vyjádříme derivaci tlaku a proudu jako derivaci složené funkce $\partial f(\psi)/\partial r = \partial f/\partial \psi \cdot \partial \psi/\partial r$. Po přímočarých úpravách dostaneme rovnici pro ψ :

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} \frac{\partial I^2}{\partial \psi} + \mu_0 r^2 \frac{\partial p}{\partial \psi} = 0. \quad (3.136)$$

Jde o *Gradovu-Šafranovovu rovnici* pro rovnováhu plazmatu za předpokladu osové symetrie. Vztah poprvé odvodili H. Grad a H. Rubin v roce 1958 a nezávisle v tehdejší Sovětském Svazu V. D. Šafranov v roce 1959. Šafranovova práce byla publikována v západním světě až v roce 1966.

3.3.2 Proudové vlákno (pinč)

Proudová vlákna neboli *pinče* či filameny patří snad k nejběžnějším útvarům v plazmatu. V nejjednodušší situaci teče proud v ose pinče (axiální směr) a kolem pinče vytváří magnetické pole (azimutální směr), které působí Lorentzovou silou na proudové vlákno a snaží se ho smrštít. Po čase se ustaví rovnováha mezi gradientem tlaku plazmatu, který se snaží plyn rozepnout a Lorentzovou silou, která pinč komprimuje. Takový útvar se nazývá *z-pinč*, písmeno *z* naznačuje, že proud teče v ose *z* pinče. Slovo *pinč* pochází z anglického *pinch* (stisknout).



Obr. 68: Různé druhy proudových vláken.

V kapitole 5.2.3 uvidíme, že rovnováha je nestabilní a pinč tohoto typu se rychle rozpadá. Stačí však, aby magnetické indukční čáry byly zkroucené do magnetického provazce, a pinč se stává relativně stabilním útvarem. Proudová hustota i magnetické pole mají axiální i azimutální složky. Axiální složka proudu generuje azimutální pole

a azimutální složka proudu generuje axiální pole. V tomto případě hovoříme o *heliakálním (šroubovicovém) pinči*. V laboratořích jsou významné ještě další konfigurace. Známy je θ -pinč, ve kterém proud teče v elektrodě po povrchu pinče v azimutálním směru. Vytvořené magnetické pole je axiální. Další konfigurací je *toroidální pinč* – plazma držené v toroidální geometrii v *tokamacích*. Jde vlastně o stočený pinč do tvaru toroidu. Místo axiálního pole zde bývá zvykem hovořit o poli *toroidálním* a místo azimutálního pole o poli *poloidálním*.

Bennettova rovnováha

Nalezneme nyní rovnováhu z -pinče za předpokladu homogenně rozloženého elektrického proudu a zanedbatelných radiačních procesů. Podmínky rovnováhy z -pinče za výše uvedených předpokladů poprvé řešil finský vědec a vynálezce Willard Harrison Bennett (1903–1987) již v roce 1934.

Nejprve nalezneme v pinči o poloměru R azimutální magnetické pole $B(r)$ z Ampérova zákona přeepsaného do válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \Rightarrow \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB) &= \mu_0 j \Rightarrow \\ B(r) &= \frac{\mu_0 j}{2} r + \frac{C}{r}. \end{aligned}$$

Je zjevné, že první člen popisuje chování pole uvnitř pinče (druhý by v centru pinče divergoval, a proto je $C = 0$). Naopak vně pinče je proudová hustota nulová a tím i první člen. Obě řešení navážeme na hranici pinče a dosadíme $j = I/\pi R^2$:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r, & r \leq R; \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (3.137)$$

Nyní použijeme k výpočtu tlaku rovnici rovnováhy (3.126):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -jB \Rightarrow \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{I}{\pi R^2} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \Rightarrow \\ p(r) &= -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4} r^2 + p_0. \end{aligned}$$

Integraci jsme prováděli uvnitř pinče, proto bylo použito vnitřní řešení pro magnetické pole. Význam integrační konstanty p_0 je zřejmý. Jde o tlak v centru pinče. Tlak v pinči by měl klesat až k povrchu, kde je nulový, tj. $p(R) = 0$. Z této podmínky určíme integrační konstantu p_0 a celkové řešení:

$$\blacktriangleright \quad p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right); \quad p_0 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2}. \quad (3.138)$$

Jde o známé Bennettovo řešení s parabolickým průběhem tlaku. Tlak v centrální části pinče je úměrný kvadrátu celkového proudu. Pokud dosadíme za tlak elektronů a iontů ze stavové rovnice a budeme uvažovat teplotu obou komponent plazmatu shodnou

$$p_0 = n_e k_B T_e + n_i k_B T_i \approx n_e k_B (T_e + T_i/Z), \quad (3.139)$$

získáme důležitý vztah mezi teplotou centrální části a celkovým tekoucím proudem:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{N}_e k_B (T_e + T_i/Z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2; \quad \mathcal{N}_e \equiv \frac{N_e}{l} = n_e \pi R^2. \quad (3.140)$$

Veličina \mathcal{N}_e představuje počet elektronů na jednotku délky pinče na centrální linii.

Bezsilová helikální konfigurace pinče, reverzní pinč

Předpokládejme, že se po dostatečně dlouhé době dostane helikální pinč do stavu s minimem energie v magnetickém poli. Potom je magnetické pole nutně helikální a splňuje Beltramovu podmínku $\text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$. Ve válcové geometrii bude radiální složka pole nulová a azimutální i axiální složka bude záviset jen na proměnné r . Beltramovu podmínku rozepíšeme ve válcových souřadnicích po složkách:

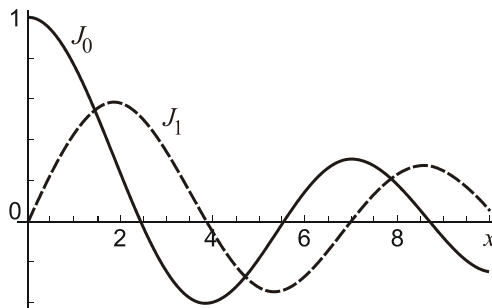
$$\begin{aligned} 0 &= \alpha B_r, \\ \text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}; \quad \Rightarrow \quad -\frac{dB_z}{dr} &= \alpha B_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) &= \alpha B_z. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Po dosazení za pole B_φ z druhé do třetí rovnice dostaneme rovnici

$$\frac{d^2 B_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} + \alpha^2 B_z = 0. \quad (3.142)$$

Jde o Besselovu rovnici, která má řešení

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad B_z(r) &= B_0 J_0(\alpha r), \\ B_\varphi(r) &= B_0 J_1(\alpha r). \end{aligned} \quad (3.143)$$



Obr. 69: Průběh Besselových funkcí J_0 a J_1 .

Funkce J_0 a J_1 jsou Besselovy funkce prvního druhu, ve válcových souřadnicích nahrazují funkce kosinus a sinus známé z kartézských souřadnic. Obdobně jako derivace kosinu je minus sinus, je i derivace J_0 rovna minus J_1 . Besselova funkce J_0 mění znaménko v argumentu 2,4. Pokud má pinč dosti velký poloměr, nutně dojde pro $r > 2,4/\alpha$ k obrácení směru pole B_z . Vzniklý útvar nazýváme reverzní pinč. Na polooměru


$$a = \frac{2,4}{\alpha} \quad (3.144)$$

vzniká neutrální vrstva, na jejíž opačných stranách má pole opačný směr, tedy situace vhodná pro rekonekci magnetických indukčních čar a pro rozvoj ostrůvkové (tearing) nestability.



Obr. 70: Nejznámějším plazmovým vláknom je kanál blesku.
Zdroj: prof. Harry M. Jol, University of Wisconsin.

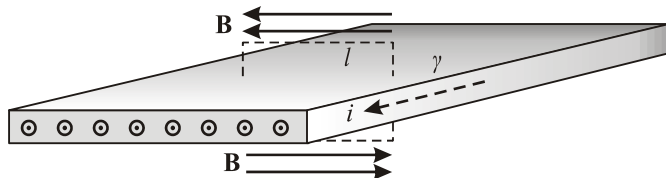
Krátce z rané historie výzkumu pinčů

1790	Holandský vědec Martin van Marun (1750–1837) vybil 100 Leydenských lahví přes drátek, který explodoval. Vytvořil tak první zdokumentovaný (i když nevysvětlený) pinč.	
1905	Australští vědci J. A. Pollock a S. Barraclough pozorují v blízkosti Sydney v Austrálii trvalou deformaci dutého hromosvodu (fotografie napravo) po průchodu blesku a správně deformaci vysvětlili jako důsledek tlaku způsobeného magnetickým polem.	
1934	Willard Harrison Bennett (1903–1987) našel řešení průběhu tlaku pro stacionární z-pinč s konstantní proudovou hustotou.	
1946	George Thompson a Moses Blackman z Imperial College v Londýně patentují fúzní zařízení založené na toroidálním pinči.	
1946	George Thompson a Peter Thonemann provádějí rozsáhlé experimenty s toroidálním pinčem.	
1954	Martin David Kruskal (1925–2006) a Martin Schwarzschild (1912–1997) vytvářejí první teorii nestabilit pinče, zejména řeší korálkovou a smyčkovou nestabilitu.	
1956	Rendel Sebastian Pease (1922–2004) a Stanislav Iosivovich Braginskij nacházejí řešení v podobě elektromagnetického kolapsu, kdy ztráta energie zářením způsobí nekontrolovatelný kolaps pinče k ose.	
1957	V anglickém Harwellu bylo zkonstruováno první velké toroidální zařízení ZETA o průměru 3 metry s proudem 900 000 A.	
1958	Na toroidálním pinči SCYLLA v Los Alamos byly detekovány první fúzní neutrony.	

Nestabilitami plazmového vlákna se budeme zabývat v kapitole 5.2.3.

3.3.3 Proudová stěna

Proudová stěna je dvojrozměrnou analogií proudového vlákna. Proud tekoucí v ploše generuje na obou stranách magnetické pole, které tlačí na stěnu magnetickým tlakem.



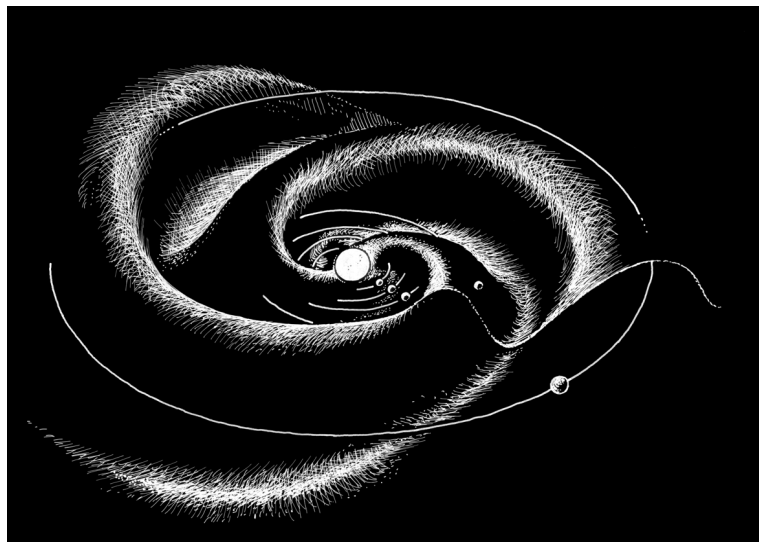
Obr. 71: Plazmová stěna.

Použijeme-li na křivku naznačenou na obrázku Ampérův zákon v integrálním tvaru, získáme

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad 2Bl = \mu_0 I \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 i, \quad (3.145)$$

kde i je elektrický proud vztážený na jednotku příčné délky. Proudové stěny bývají velmi tenké vzhledem ke své šířce (tloušťka a šířka se liší o mnoho řádů). Největší proudovou stěnou ve sluneční soustavě je neutrální vrstva heliosféry, jde o rozvlněnou oblast nulového magnetického pole Slunce, která se nazývá Parkerova plocha. Její tloušťka je v našem okolí cca 1 000 km. Na opačných stranách Parkerovy plochy má sluneční magnetické pole různou polaritu.



Obr. 72: Parkerova plocha.

Planety procházejí střídavě nad a pod touto plochou, při průchodu se mění polarita slunečního magnetického pole. Jiná proudová stěna vzniká v magnetickém ohonu Země. Právě v blízkosti proudových stěn, kde je magnetické pole na různých stranách stěny opačně orientované, dochází často k přepojení magnetických indukčních čar a rozvoji ostrůvkové (tearing) nestability.

3.3.4 Dvojvrstva

Dvojvrstvou nazýváme skok elektrického potenciálu v plazmatu. V literatuře se většinou označuje symbolem DL z anglického „Double Layer“. Dvojvrstvy se vyskytují v hojném množství v plazmatu všude tam, kde teče elektrický proud způsobený elektrony a ionty pohybujícími se proti sobě. Při tomto vstřícném pohybu se může projevit tzv. dvousvazková nestabilita, která vede ke vzniku skoku elektrického potenciálu ϕ . Situace je obdobná vodě tekoucí v šikmém kanálu. Samovolně se na jejím povrchu vytvoří tu a tam výškové schody. Obdobně se v plazmatickém prostředí se spádem elektrického potenciálu samovolně vytvoří tu a tam schody v potenciálu. Stejný typ dvojvrstvy vzniká i z náhodné fluktuace koncentrace iontů nebo při pohybu nabitých částic podél indukčních čar magnetického pole.

Jinou možností vzniku dvojvrstvy je rozhraní dvou plazmatických prostředí s různou teplotou nebo koncentrací elektronů. Elektrony začnou vlivem gradientu teploty či koncentrace difundovat do druhého prostředí, ve kterém se proto objeví zvýšený záporný náboj. Vznikne elektrické pole a s ním související schod v potenciálu. Skrze takové dvojvrstvy trvale neteče elektrický proud.

Základem vzniku elektrické dvojvrstvy je vždy existence pohybu elektronů vůči okolí a následné narušení kvazineutrality vedoucí na vznik elektrického pole a tím skoku potenciálu.

Pro posouzení výraznosti dvojvrstvy slouží tzv. parametr dvojvrstvy, který je definován jako podíl energie schodu potenciálu a tepelné energie elektronů:

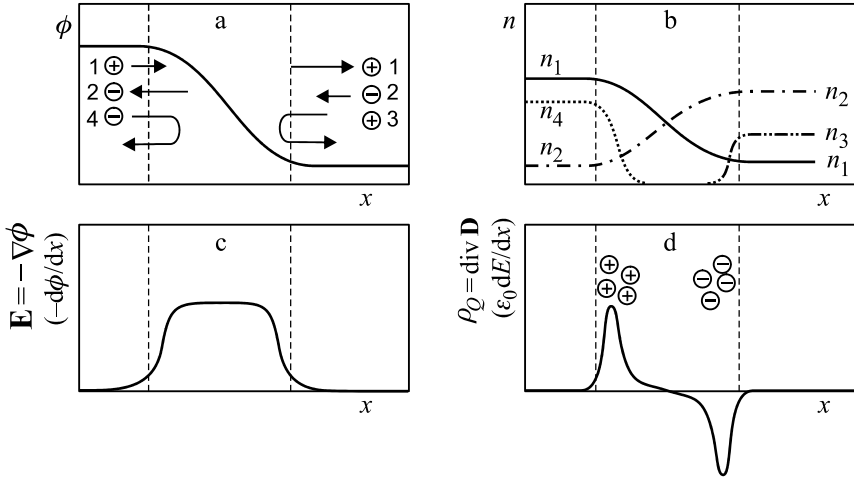
$$\#_{DL} \equiv \frac{e \Delta \phi}{k_B T_e}. \quad (3.146)$$

Dvojvrstvy vznikající na hranici dvou prostředí s různou teplotou mají tento parametr přibližně rovný jedné. Dvojvrstvy vznikající při velkých spádech potenciálu jsou velmi výrazné a mají $\#_{DL} > 1$. Pro takové dvojvrstvy se částice se rozdělí do čtyř skupin znázorněných na obrázku 73:

- 1) ionty urychlované ve směru poklesu potenciálu,
- 2) elektrony urychlované ve směru nárůstu potenciálu,
- 3) ionty zachycené na nižší straně potenciálu,
- 4) elektrony zachycené na vyšší straně potenciálu.

Průběh koncentrací n těchto čtyř druhů částic je na obrázku *b*, tečkovaně jsou vykresleny koncentrace záporných částic a plnou čarou kladných. Odpovídající celková hustota náboje ρ_Q je zobrazena na obrázku *d*. Výsledkem je vrstva kladného náboje na vyšší straně potenciálu a vrstva záporného náboje na nižší straně potenciálu. Tato konfigurace dala dvojvrstvě její jméno. Před a za schodem potenciálu je celkový prostorový náboj

nulový, kladné a záporné náboje se přesně vyruší. Elektrické pole E dvojrstvy je znázorněné na obrázku *c*, mezi oběma vrstvami je zvýšené a odpovídá záporně vzaté derivaci potenciálu. Dvojrstvy mohou (ale nemusí) být dlouhodobě stabilními útvary, ve kterých schod potenciálu vede na vznik výše zmíněných čtyř skupin částic a jejich elektrické pole zpětně napomáhá udržení skoku v potenciálu.



Obr. 73: Dvojrstva.

Dvojrstvy jsou útvary, na kterých dochází k urychlování nabitých částic. Jde o jakési přirozené urychlovače v laboratoři i ve vesmíru. Vzhledem k separaci kladného a záporného náboje se také chovají jako přirozené kondenzátory. Právě energie těchto „kondenzátorů“ se transformuje na kinetickou energii urychlených částic. Výkon uvolňovaný na dvojrstvě je dán součinem skoku potenciálu a elektrického proudu tekoucího dvojrstvou:

$$P = \Delta\phi I. \quad (3.147)$$

Ke vzniku relativistických částic může na dvojrstvě dojít tehdy, pokud je energie schodu potenciálu větší než klidová energie částice, tedy relativistický parametr dvojrstvy

$$\#_{DL, rel} \equiv \frac{Q \Delta\phi}{m_0 c^2} \quad (3.148)$$

je větší než jedna, $\#_{DL, rel} > 1$.

Dvojrstvy zpravidla vytvářejí různě zprohýbané plochy malé tloušťky. Tloušťka dvojrstvy je dána narušením kvazineutrálnosti náboje, která v plazmatu nemůže být vyšší než několiknásobek Debyeovy vzdálenosti. Nejtlustší dvojrstvy mají příčný rozměr cca deset Debyeových poloměrů. V laboratorním plazmatu jde o milimetry, v ionosféře o centimetry, v meziplanetárním prostředí o desítky metrů a v mezigalaktickém prostředí o desítky kilometrů.

Dvojrstvy mohou plazmatickým prostředím driftovat, mohou prudce zvýšit svou tloušťku a rozpadnout se nebo zaniknout difúzními jevy pokojnou cestou. Normální

dvojvrstvy jsou kolmé na magnetické pole, podél kterého se pohybují částice, a vzniklé elektrické pole je rovnoběžné s polem magnetickým. Existují ale i šikmé dvojvrstvy.

Na dvojvrstvách mohou být urychleny elektrony a ionty na značné rychlosti a magnetická energie elektrického obvodu se zde může přeměnit na kinetickou energii částic. Dvojvrstvy se vyskytují všude tam, kde tečou plazmatem elektrické proudy. Nacházíme je v magnetosférách planet, například na několiknásobku zemského polo- měru vznikají ve dvojvrstvách energetické ionty urychlené ve směru indukčních čar zemského pole. Skok potenciálu je zde $10^2 \div 10^4$ V. Dvojvrstvy pravděpodobně vznikají ve slunečních filamentech protékáných proudem. Zde se odhaduje skok potenciálu až na $10^9 \div 10^{11}$ V a energie protonů urychlených ve dvojvrstvě na několik desítek gigaelektronvoltů. Pokud vznikají dvojvrstvy v plazmových vláknech v blízkosti jader galaxií, mohl by být skok potenciálu až 10^{17} V a uvolňovaný výkon řádově 10^{37} J/s.

Velmi zajímavou aplikací dvojvrstev jsou iontové motory. V Australské národní univerzitě vyvinuli v roce 2003 Christine Charles a Rod Boswell iontový motor, ve kterém se vytvoří dvojvrstva na hranici mezi vysoce koncentrovaným plazmatem zdroje a plazmatem s nízkou koncentrací ve výstupní trysce. Dvojvrstva urychlí ionty na vysoké energie a významně přispěje k tahu motoru. Takový motor může významně zefektivnit meziplanetární lety.

Dvojvrstva vytvořená pouhou změnou koncentrace elektronů

Předpokládejme, že v plazmatu dojde z nějakých důvodů, například fluktuací, ke změně koncentrace elektronů. Hledáme, zda v tomto případě existuje stacionární řešení pro proud elektronů. Budeme hledat nejjednodušší řešení v jedné dimenzi bez magnetického pole a tlaku elektronů. Z rovnice kontinuity máme

$$\frac{\partial}{\partial x}(n_e u_e) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že x je jedinou proměnnou, můžeme psát

$$n_e u_e = \text{const} \quad \Rightarrow \quad n_e u_e = -\frac{j_e}{e} \quad \Rightarrow$$

$$u_e(x) = -\frac{j_e}{en_e(x)}. \quad (3.149)$$

Tedy elektrický proud elektronů je konstantní a rychlost elektronů se v oblasti se změněnou koncentrací mění tak, aby zůstala v platnosti rovnice kontinuity. Napišme nyní pohybovou rovnici pro elektrony pro ustálený stav

$$n_e m_e u_e \frac{\partial}{\partial x} u_e = -n_e e E.$$

Z této pohybové rovnice spočteme elektrické pole, které se vytvořilo změnou rychlosti pohybu elektronů:

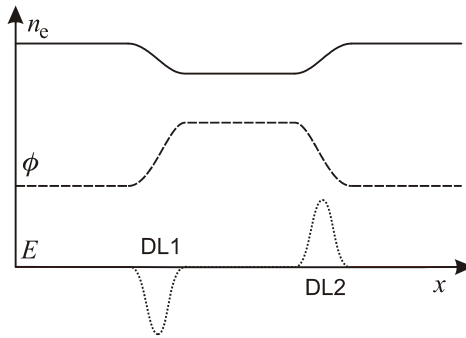
$$E = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{m_e u_e^2}{2e}.$$

Po dosazení za rychlost z (3.149) máme pro vzniklé elektrické pole vztah

$$E(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{m_e j_e^2}{2e^3 n_e^2(x)}. \quad (3.150)$$

Změna koncentrace elektronů tedy s sebou přináší vznik elektrického pole. V oblastech konstantní koncentrace je elektrické pole nulové, nenulové je jen v oblastech, kde se koncentrace mění. Ze souvislosti elektrického pole s elektrickým potenciálem můžeme psát

$$\phi(x) = \frac{m_e j_e^2}{2e^3 n_e^2(x)}. \quad (3.151)$$



Obr. 74: Dvojrvtva vytvořená gradientem koncentrace.

V oblasti změny koncentrace elektronů se mění i elektrický potenciál a tedy vzniká elektrická dvojrvtva. Vzniklo-li lokální snížení koncentrace elektronů, vytvoří se na obou stranách schod v potenciálu a vznikne dvojitá dvojrvtva. Dodejme pro úplnost, že toto řešení našli švédští fyzikové Hannes Alfvén (1908–1995) a Per Carlqvist (1938) v roce 1968.

Řešení potenciálu uvnitř dvojrvtvy udržované dvěma svazky

Hledejme nyní řešení pro potenciál uvnitř dvojrvtvy, který klesá z hodnoty ϕ_{DL} na nulu. Obecný výpočet musí proběhnout pro všechny 4 populace částic, tedy pro urychlované svazky elektronů a iontů a pro zachycené tepelné elektrony a ionty. V tomto odvození budeme uvažovat jen svazkové populace, tj. zanedbáme tepelné jevy. Předpokládejme svazek elektronů letící s konstantní rychlostí ze strany nižšího potenciálu a svazek iontů ze strany vyššího potenciálu. Oba dva svazky budou na dvojrvtvě urychleny. Výchozími rovnicemi budou: zákon zachování energie, rovnice kontinuity a Poissonova rovnice pro potenciál.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_e u_e^2 - e\phi &= \text{const} = \frac{1}{2} m_e u_{e0}^2 ; \\ \frac{1}{2} m_i u_i^2 + Ze\phi &= \text{const} = \frac{1}{2} m_i u_{i0}^2 + Ze\phi_{DL} . \end{aligned} \quad (3.152)$$

$$n_e u_e = \text{const} = -\frac{j_e}{e}; \quad (3.153)$$

$$n_i u_i = \text{const} = \frac{j_i}{Ze};$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{en_e}{\epsilon_0} - \frac{Zen_i}{\epsilon_0}. \quad (3.154)$$

Konstantu v zákoně zachování energie počítáme na té straně schodu, ze které daná částice přilétá z nekonečna. Všechny proměnné (u_α , n_α , ϕ) jsou funkcemi polohy x v dvojrstvě. V Poissonově rovnici (3.154) dosadíme za koncentraci z rovnice kontinuity (3.153) a za rychlosti ze zákona zachování energie (3.152). Výsledkem je finální rovnice pro potenciál

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{j_e/\epsilon_0}{\sqrt{u_{e0}^2 + \frac{2e}{m_e} \phi}} - \frac{j_i/\epsilon_0}{\sqrt{u_{i0}^2 + \frac{2Ze}{m_i} (\phi_{DL} - \phi)}}. \quad (3.155)$$

Jde o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro funkci $\phi(x)$, kterou je sice možné řešit analyticky (vede na eliptické integrály), ale zpravidla se řeší numericky. Integrační konstanty jsou dány okrajovými podmínkami – na obou krajích dvojrstvy je nulové elektrické pole, tj. nulová derivace potenciálu a samotný potenciál je na jedné straně nulový a na druhé má hodnotu ϕ_{DL} . Výsledkem je Langmuirova-Childova relace mezi celkovou proudovou hustotou j tekoucí dvojrstvou, tloušťkou dvojrstvy d a spádem potenciálu ϕ_{DL} na dvojrstvě:

$$jd^2 = A\phi_{DL}^{3/2}; \quad A \approx 0,20724 \left(1 + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\right) \sqrt{\frac{2e}{m_e}}; \quad j = j_e + j_i. \quad (3.156)$$

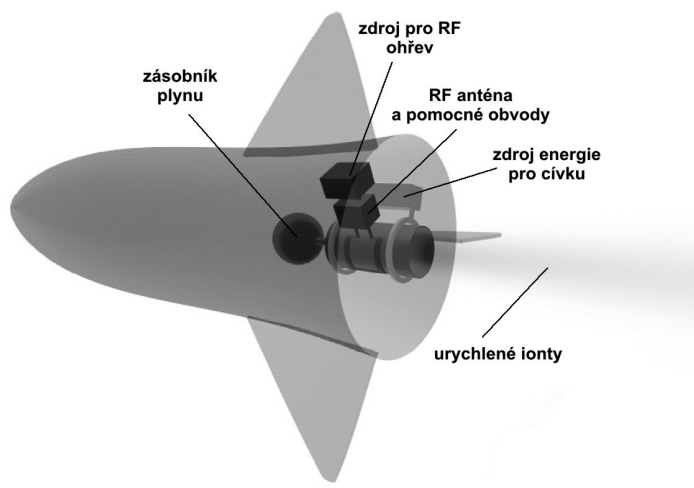
V obecném případě musíme vzít v úvahu i populace zachycených tepelných částic, jejichž koncentrace je dána Boltzmannovým rozdělením (tj. připustíme nenulovou teplotu) a na pravé straně Poissonovy rovnice přibudou ještě dva členy ve tvaru

$$n_\alpha = n_{0\alpha} e^{-\frac{Q_\alpha \phi}{k_B T_\alpha}}; \quad \alpha = e, i.$$

Krátce z historie výzkumu dvojrstev

1929	Americký plazmový chemik a fyzik Irving Langmuir (1881–1957) detekuje dvojrstvy v laboratorním plazmatu.
1958	Švédský plazmový fyzik Hannes Alfvén (1908–1995) navrhuje, že elektrony zodpovědné za polární záře jsou urychlovány směrem k Zemi dvojrstvami v magnetosféře Země.
1967	Švédští plazmoví fyzikové Hannes Alfvén a Per Carlqvist (1938) navrhnou teorii slunečních erupcí, ve které hrají významnou roli dvojrstvy.

1987	Švédská družice Viking detekuje výrazné dvojrstvy v magnetosféře Země. Družice pracovala na polární dráze v letech 1986 až 1987. Čtyři ramena se senzory elektrického pole byla dlouhá 40 metrů.
1992	Americký plazmový fyzik Noah Hershkowitz nalézá v laboratorním plazmatu násobné dvojrstvy se schodovitým průběhem potenciálu.
2003	Australští fyzikové Christine Charles a Rod Boswell vyvinuli nový iontový motor pro kosmické lodě, který využívá k urychlení iontů dvojrstvu. Evropská kosmická agentura provedla první laboratorní testy motoru v roce 2005.



Obr 75: Iontový motor ESA.

Evropská kosmická agentura vyvíjí nový iontový pohon pro meziplanetární lety. Plazma vzniká radiofrekvenčním ohřevem a je udržováno cívkami magnetického pole. Na výstupu z komory se vytvoří stabilní dvojrstva, která urychlí ionty na vysokou energii. Tím vzniká tah tohoto nového typu motoru.

3.3.5 Rázové vlny

V plazmatu se často vytvářejí oblasti, ve kterých se prudce mění některé parametry, například rychlost, koncentrace, teplota nebo magnetické pole. Takové oblasti nazýváme rázovými vlnami, některé z nich se mohou plazmatem pohybovat. Typickým příkladem je rázová vlna vznikající interakcí slunečního větru s magnetosférou Země. Na „návětrné“ straně se vytvoří obloukovitá rázová vlna obdobná rázové vlně vzniklé před přídílí lodi pohybující se po moři. Rázové vlny vznikají i tam, kde se proudění mění z nadzvukového na podzvukové a jsou typickými rysy laboratorního i astrofyzikálního plazmatu. Na rázových vlnách může dojít k významnému urychlení částic. Dvojrstva probíraná v minulé kapitole je vlastně speciálním případem rázové vlny.

Rázové vlny v klasické hydrodynamice studovali skotský inženýr William John Macquorn Rankine (1820–1872) a francouzský inženýr Pierre Henri Hugoniot (1851–1887). Podmínky, které musí jednotlivé veličiny splňovat na rázové vlně, nazýváme Rankinovy-Hugoniotovy podmínky. Pokud pro nějakou aditivní veličinu A platí rovnice kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A = 0, \quad (3.157)$$

je vyjádřením zákona zachování této veličiny v soustavě spojené s rázovou vlnou podmínka platící pro obě strany skoku

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_1 = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_2 \Rightarrow (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_2 - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_1 = 0 \Rightarrow [\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}]_1^2 = 0. \quad (3.158)$$

Význam hranaté závorky je stejný jako u určitého integrálu. Index označuje strany rázové vlny a \mathbf{n} je normálový vektor. Ze zákona zachování hmotnosti a hybnosti získáme okamžitě podmínky

$$\blacktriangleright [\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_1^2 = 0, \quad (3.159)$$

$$\blacktriangleright \left[\rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{n} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})\mathbf{B}}{\mu_0} \right]_1^2 = 0, \quad (3.160)$$

Pro energii je situace nepatrně složitější

$$\left[\left(e + \frac{\rho u^2}{2} + p \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \right]_1^2 = 0.$$

Vnitřní energii pro polytropní plazma s koeficientem γ vyjádříme ze vztahu (2.51)

$$e = \frac{p}{\gamma - 1}.$$

Pro skoková řešení využíváme ideální magnetohydrodynamiku (difúzní členy způsobí konečnou tloušťku rázové vlny) a za elektrické pole proto dosadíme

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}.$$

Nyní již snadno získáme relaci

$$\blacktriangleright \left[\left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{\mu_0} \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})}{\mu_0} \right]_1^2 = 0. \quad (3.161)$$

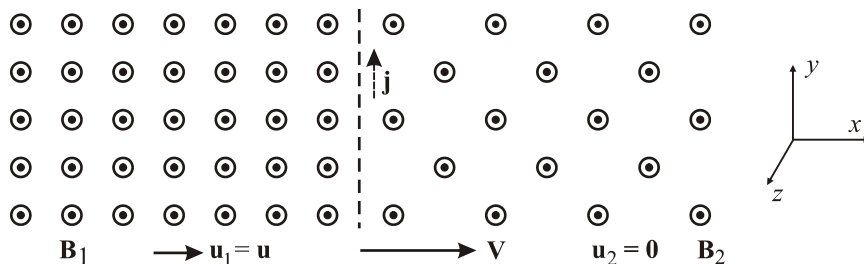
Tyto podmínky musíme doplnit spojitostí normálových složek magnetického pole ($\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$) a tečných složek elektrického pole ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$). Využijeme opět fakt, že v ideální magnetohydrodynamice je $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$:

$$\blacktriangleright [\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}]_1^2 = 0, \quad (3.162)$$

$$\triangleright \quad [\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]_1^2 = 0. \quad (3.163)$$

Podmínky (3.159) až (3.163) nazýváme Rankinovy-Hugoniotovy podmínky.

● **Příklad 14:** pohybující se rázová vlna. Předpokládejme, že se klidným plazmatem pohybuje rychlostí V rázová vlna tvořená skokem magnetického pole rovnoběžného s touto rázovou vlnou:



Obr. 76: Pohybující se rázová vlna.

Před čelem vlny je rychlost plazmatu nulová, za vlnou je plazma strháváno rychlostí u . Určete tuto rychlost u ze známých hodnot magnetického pole na obou stranách rázové vlny.

Řešení: V soustavě souřadnicové spojené s rázovou vlnou se pro nerelativistické rychlosti podle transformace (D.1) magnetické pole nezmění. Z podmínky (3.163) potom v této souřadnicové soustavě plyne

$$B_1(u - V) = B_2(-V). \quad (3.164)$$

Nyní již snadno určíme rychlost u prostředím za rázovou vlnou:

$$u = \left(1 - \frac{B_2}{B_1}\right)V. \quad (3.165)$$

■

3.4 Diferenční schémata v magnetohydrodynamice

Magnetohydrodynamika je založena na parciálních diferenciálních rovnicích. Analytická řešení je možné nacházet jen v ojedinelých případech, většinou jsme odkázáni na numerické metody, kterých existuje veliké množství. Řešení je možné rozvíjet do řad, hledat na základě variačních metod, za pomoci konvoluce počátečních a okrajových podmínek s Greenovou funkcí, metodou charakteristik, metodou konečných prvků atd. Velmi často se parciální diferenciální rovnice řeší za pomoci diferenčních schémat na pravoúhlé či jiné síti, podobně jako jsme řešili obyčejné diferenciální rovnice v kapitole

1.5. Na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic musíme v magnetohydrodynamice provádět diskretizaci nejen v čase, ale i v prostoru. V každém časovém okamžiku t_n je prostor nahrazen diskretní sítí a hodnoty hledané veličiny zjišťujeme jen ve vrcholech sítě. Tato kniha není v žádném případě učebnicí numerických metod, a proto čtenáře seznámíme jen se základy tvorby diferenčních schémat. Cílem je, aby si hloubavější čtenář mohl vyzkoušet nalezení jednoduchých řešení na počítači.

3.4.1 Parciální diferenciální rovnice

Dělení rovnic

Ve fyzice plazmatu se nejčastěji setkáme s parciálními diferenciálními rovnicemi druhého řádu. Předpokládejme obecnou rovnici ve tvaru

$$F\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_l}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \psi, x_k\right) = 0; \quad k, l = 1, 2, \dots, N, \quad (3.166)$$

neznámou je funkce N proměnných, zpravidla jde o jednu časovou a tři prostorové proměnné. Rovnici nazveme *kvazilineární*, pokud je lineární vzhledem k druhým derivacím, tj. má tvar

$$\sum_{k,l} A_{kl}(\mathbf{x}, \psi, \nabla \psi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_l} + B(\mathbf{x}, \psi, \nabla \psi) = 0, \quad (3.167)$$

kde koeficienty A_{kl} a B závisí na $x_k, \psi, \partial_k \psi$. Rovnici nazveme *lineární*, pokud má tvar

$$\sum_{k,l} A_{kl}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_k B_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + C(\mathbf{x}) \psi = f(\mathbf{x}). \quad (3.168)$$

Funkci $f(\mathbf{x})$ nazýváme pravou stranou rovnice. Pokud je $f = 0$, hovoříme o tzv. *homogenní* rovnici. Rovnici nazveme *lineární s konstantními koeficienty*, pokud jsou koeficienty A_{kl}, B_k a C konstantní.

Vhodnou transformací proměnných lze rovnici (3.167) převést na jednodušší tvar. Lineární rovnice dělíme do tří skupin podle tvaru koeficientů u druhých derivací. Řekneme, že rovnice je *eliptická* v bodě \mathbf{x}_0 , pokud existuje transformace, která ji v tomto bodě převede na tvar

$$\sum_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} + \sum_k B_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + C(\mathbf{x}) \psi = f(\mathbf{x}). \quad (3.169)$$

Příkladem eliptické rovnice je Laplaceova nebo Poissonova rovnice. Řekneme, že rovnice je *hyperbolická* v bodě \mathbf{x}_0 , pokud existuje transformace, která ji v tomto bodě převede na tvar

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_N^2} + \sum_k B_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + C(\mathbf{x}) \psi = f(\mathbf{x}). \quad (3.170)$$

Jedna z druhých derivací má tedy opačné znaménko než ostatní. Takovou rovnicí je například vlnová rovnice. Pokud se znaménka minus a plus vyskytnou u druhých derivací více než jednou, hovoříme o *ultrahyperbolické* rovnici. Řekneme, že rovnice je *parabolická* v bodě \mathbf{x}_0 , pokud existuje transformace, která ji v tomto bodě převede na

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} + \sum_k B_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + C(\mathbf{x})\psi + D(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.171)$$

tj. jedna z druhých derivací (zpravidla časová) se v rovnici nevyskytuje. Příkladem může být rovnice vedení tepla, rovnice difúze magnetického pole nebo Schrödingerova časová rovnice. Pokud „schází“ více druhých derivací, hovoříme o *parabolické rovnici v širším smyslu*.

Rovnice je většinou parabolická, hyperbolická nebo eliptická na nějaké oblasti v R^N , tedy nemusí nutně jít jen o vlastnost v jednom jediném bodě.

■ **Příklad 15:** V následující tabulce jsou ukázky některých typických rovnic

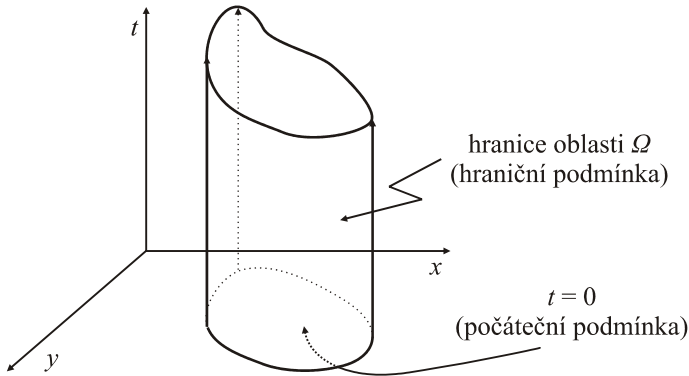
rovnice	název	typ
$\nabla^2 \phi = 0$	Laplaceova rovnice	eliptická
$\nabla^2 \phi = f(\mathbf{x})$	Poissonova rovnice	eliptická
$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$	vlnová rovnice	hyperbolická
$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$	vedení tepla	parabolická
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} = 0$		ultrahyperbolická
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$		parabolická v širším smyslu
$y \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$		$y = 0$ parabolická, $y > 0$ hyperbolická, $y < 0$ eliptická

Počáteční a okrajové podmínky

Obdobně jako u obyčejných diferenciálních rovnic musíme zadat počáteční podmínky, je třeba pro řešení parciálních diferenciálních rovnic obsahujících čas znát hodnotu hledané funkce na počátku (tzv. počáteční podmínku). Tyto počáteční podmínky ale k úspěšnému nalezení řešení nestačí. Úlohu řešíme na nějaké prostorové oblasti Ω a bez znalosti chování hledané funkce na hranici oblasti nelze řešení nalézt. Budeme-li třeba

hledat kmity kruhové membrány, záleží řešení na tom, zda je na okraji membrána volná (může volně „plandat“) nebo zda je k něčemu připevněná.

Je tedy zřejmé, že před řešením parciální diferenciální rovnice nebo soustav parciálních diferenciálních rovnic musíme správně formulovat počáteční a okrajové podmínky kladené na rovnici (rovnice).



Obr 77: Počáteční a okrajové (hraniční) podmínky úlohy.

Předpokládejme, že hledáme funkci $\psi(t, \mathbf{x})$, která je řešením parciální diferenciální rovnice. Ve většině případů musíme k jednoznačnému řešení znát počáteční podmínku

$$\psi(0, \mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}), \quad (3.172)$$

a okrajovou podmínku – k nejčastějším patří:

Dirichletova okrajová podmínka – na hranici oblasti zadáváme hodnotu hledané funkce:

$$\psi(t, \mathbf{x}_0) = G_0(t, \mathbf{x}_0) \quad \text{pro } \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega. \quad (3.173)$$

Symbol $\partial\Omega$ označuje hranici oblasti Ω . Dirichletovu okrajovou podmínku využijeme například v rovnici pro vedení tepla, pokud je okraj tyče či oblasti udržován na konstantní teplotě, u Laplaceovy rovnice, pokud má okraj oblasti zadáný potenciál nebo u vlnové rovnice, pokud je okraj vlnící se oblastí pevně uchyten.

Neumannova okrajová podmínka – na hranici oblasti (například volný konec vlnící se membrány) zadáváme normálovou derivaci hledané funkce:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla)\psi(t, \mathbf{x}_0) = G_1(t, \mathbf{x}_0) \quad \text{pro } \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega. \quad (3.174)$$

Směšená okrajová podmínka – na hranici oblasti zadáváme lineární kombinaci funkce a jejích derivací:

$$\alpha\psi(t, \mathbf{x}_0) + \sum_k \beta_k \partial_k \psi(t, \mathbf{x}_0) = G_2(t, \mathbf{x}_0) \quad \text{pro } \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega. \quad (3.175)$$

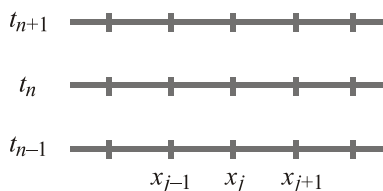
Cauchyova úloha – u parciální diferenciální rovnice N -tého řádu zadáváme počáteční podmínky pro prvních $N-1$ derivací hledané funkce, na hranici nezadáváme žádné podmínky.

3.4.2 Tvorba diferenčních schémat

U hledané funkce provedeme časovou i prostorovou diskretizaci, tj. hodnoty budeme znát jen v časech t_n a ve vrcholech prostorové sítě x_j, y_k, z_l :

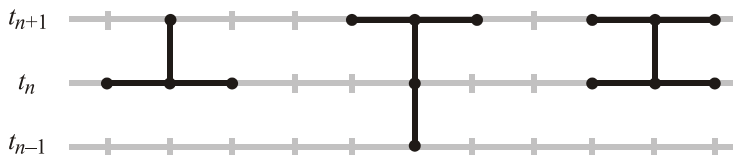
$$\begin{aligned}\psi_{j,k,l}^n &= \psi(t_n, x_j, y_k, z_l); & n &= 0, 1, 2, \dots; & j, k, l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ t_n &= t_0 + n\Delta t, \\ x_j &= j\Delta x, \\ y_k &= k\Delta y, \\ z_l &= l\Delta z.\end{aligned}\tag{3.176}$$

Horní index bude tedy představovat diskretní čas a dolní indexy diskretní prostorovou závislost. Základní princip tvorby diferenčního schématu si ukážeme nejprve v jedné prostorové dimenzi.



Obr. 78: Časoprostorová diskretizace.

Ze znalosti prostorových hodnot v časové vrstvě t_n , případně t_{n-1} , je třeba určit prostorové hodnoty na nové časové vrstvě t_{n+1} . Obdobně jako u obyčejných diferenčních rovnic mohou být schémata explicitní nebo implicitní.



Obr. 79: Různá diferenční schémata.

Na obrázku 79 je nalevo znázorněno explicitní schéma. Hodnotu na nové časové hladině předpovídáme ze tří známých hodnot z aktuální časové hladiny. Uprostřed je implicitní schéma. Z hodnot na dvou předchozích časových hladinách získáme vztah mezi třemi hodnotami na nové hladině. U implicitního schématu se nevyhneme řešení soustavy algebraických rovnic pro hodnoty na nové hladině. Napravo je implicitní schéma, ve kterém získáme provázanou informaci o třech hodnotách na nové hladině ze tří hodnot na aktuální časové hladině. Explicitní schémata jsou snadná pro výpočet, ale oblast jejich stability je obecně výrazně menší než u schémat implicitních. Pojdme se nyní seznámit s tvorbou schémat. Zavedme prostorové difference

$$\begin{aligned}
 D^+ \psi &= \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\Delta x}, & D^- \psi &= \frac{\psi_j - \psi_{j-1}}{\Delta x}, \\
 D^c \psi &= \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2\Delta x}, & D^0 \psi &= \frac{\psi_{j+1/2} - \psi_{j-1/2}}{\Delta x}.
 \end{aligned}
 \tag{3.177}$$

Všemi čtyřmi výrazy můžeme nahradit $\partial\psi/\partial x$ v parciální diferenciální rovnici. Postupně jde o tzv. dopřednou diferenci, zpětnou diferenci, centrovanou diferenci a dvoubodovou centrovanou diferenci. V některých případech je možné použít i složitější tříbodovou náhradu prostorové derivace, například typu

$$D\psi = \frac{(\alpha+1)\psi_{j+1} - 2\alpha\psi_j + (\alpha-1)\psi_{j-1}}{2\Delta x}.
 \tag{3.178}$$

Pro $\alpha = -1$ dostaneme výraz D^- , pro $\alpha = 0$ dostaneme D^c a pro $\alpha = +1$ získáme D^+ . Druhé derivace můžeme nahradit různým skládáním těchto diferencí, například

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &\rightarrow D^+ D^- \psi = D^+ \frac{\psi_j - \psi_{j-1}}{\Delta x} = \\
 &= \frac{(\psi_{j+1} - \psi_j) - (\psi_j - \psi_{j-1})}{(\Delta x)^2} = \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{(\Delta x)^2}.
 \end{aligned}$$

Zcela stejný výsledek získáme za pomoci dvou centrovaných diferencí:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \rightarrow D^+ D^- \psi = D^c D^c \psi = \dots = \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{(\Delta x)^2}.
 \tag{3.179}$$

Využitím jiných kombinací z (3.177) získáme další náhrady druhé derivace, nicméně výraz (3.179) se používá nejvíce. Zbývá nám nalézt diference časových derivací, postup je stejný jako u obyčejných diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial t} &\rightarrow \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}; \\
 \frac{\partial \psi}{\partial t} &\rightarrow \frac{f_j^n - f_j^{n-1}}{\Delta t}.
 \end{aligned}
 \tag{3.180}$$

První varianta vede na explicitní schéma, druhá na implicitní schéma. U sestaveného schématu je samozřejmě nutné zjistit řád přesnosti, podmínky konvergence ke skutečnému řešení a podmínky stability navrženého schématu (aby získané veličiny například neoscillovaly nebo se exponenciálně nevzdalovaly od skutečného řešení). Uveďme nyní některá často využívaná schémata.

Jednoduché explicitní schéma pro rovnici difúze

Uvažujme rovnici difúze ve tvaru

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.
 \tag{3.181}$$

Proveďme nyní diskretizaci vedoucí na explicitní schéma

$$\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} = \eta \frac{\psi_{j-1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad (3.182)$$

odkud plyne

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n + \eta \frac{\psi_{j-1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \Delta t. \quad (3.183)$$

Ze znalosti hodnot v časové vrstvě t_n můžeme určit hodnoty ve vrstvě t_{n+1} , pokud známe okrajové podmínky pro výpočet hodnot v krajních bodech. Na obrázku 79 odpovídá tomuto schématu grafický symbol nalevo. Schéma je velmi rychlé a pohodlné, nicméně je stabilní jen, pokud je splněna podmínka (viz příklad 16 dále)

$$\eta \Delta t \leq \frac{1}{2}. \quad (3.184)$$

Du Fortovo-Frankelovo schéma pro rovnici difúze

Jednoduchým trikem můžeme zařídit, aby diferenční schéma pro rovnici difúze (3.181) bylo bezpodmínečně stabilní. Volme diskretizaci ve tvaru analogickém k (3.182)

$$\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^{n-1}}{2\Delta t} = \eta \frac{\psi_{j-1}^n - (\psi_j^n + \psi_j^{n+1}) + \psi_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad (3.185)$$

Nalevo je nyní centrální časová diference a prostřední člen u prostorové derivace byl nahrazen aritmetickým průměrem aktuální a nové hodnoty. Takovéto schéma je implicitní (nová hodnota je na levé i pravé straně) v prostorové hodnotě x_j . V tomto případě nejde ale o žádnou numerickou komplikaci, neboť můžeme ze vztahu (3.185) hledané hodnoty na nové časové hladině snadno vypočítat:

$$\psi_j^{n+1} = \left(\frac{1-K}{1+K} \right) \psi_j^{n-1} + \left(\frac{K}{1+K} \right) \psi_{j-1}^n + \left(\frac{K}{1+K} \right) \psi_{j+1}^n; \quad K \equiv \frac{2\eta\Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (3.186)$$

Uvedené schéma se nazývá Du Fortovo-Frankelovo a je bezpodmínečně stabilní. Lze ho dokonce využít i pro rovnici difúze doplněnou o konvektivní člen (proudění)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + C \frac{\partial \psi}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (3.187)$$

Při tvorbě schématu postupujeme stejně, první derivaci podle x v druhém členu nahradíme centrální diferencí $D^c\psi$ a poté opět vypočteme hledanou hodnotu na nové časové hladině.

Laxovo-Wendroffovo schéma

Řešme nyní numericky průběh toků nějakých veličin. Předpokládejme, že příslušné rovnice máme zapsány v konzervativním tvaru

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (3.188)$$

Veličiny popisující tok představují uspořádané n -tice

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_N \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix}. \quad (3.189)$$

Řešme nejprve prostorovou diskretizaci posledního členu na levé straně:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial H}{\partial x} &\rightarrow D^0 A D^0 H = D^0 A_j \left(\frac{H_{j+1/2} - H_{j-1/2}}{\Delta x} \right) = \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[A_{j+1/2} (H_{j+1} - H_j) - A_{j-1/2} (H_j - H_{j-1}) \right]. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $A = A(F)$, jsou hodnoty v polovičních argumentech dány vztahy

$$\begin{aligned} A_{j+1/2} &\equiv A \left(\frac{F_{j+1} + F_j}{2} \right); \\ A_{j-1/2} &\equiv A \left(\frac{F_j + F_{j-1}}{2} \right). \end{aligned}$$

Relativně kvalitním explicitním schématem k rovnicím (3.188) je

$$\begin{aligned} &\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{G_{j+1}^n - G_{j-1}^n}{2\Delta x} + \\ &+ \frac{A_{j+1/2}^n (H_{j+1}^n - H_j^n) - A_{j-1/2}^n (H_j^n - H_{j-1}^n)}{(\Delta x)^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.190)$$

Z výrazu již snadno určíme hodnoty F_j na nové časové vrstvě. Laxovo-Wendrofovo schéma lze zobecnit i na případ dvou nebo tří prostorových dimenzí.

Crankovo-Nicolsonové schéma

Velmi stabilním schématem je implicitní schéma, ve kterém za prostorové derivace využíváme aritmetický průměr z aktuální a nové časové vrstvy (pro rovnici difúze je schéma bezpodmínečně stabilní):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &\rightarrow \frac{1}{2} \frac{\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{1}{2} \frac{\psi_{j-1}^{n+1} - 2\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} \frac{\psi_{j-1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \quad (3.191)$$

Na obrázku 79 odpovídá tomuto schématu situace zcela napravo.

Richtmyerovo-Mortonovo schéma

Dalším oblíbeným schématem je implicitní schéma se standardním vyjádřením prostorových derivací a vyjádřením časové derivace za pomoci volitelného parametru:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} &\rightarrow \frac{\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{\psi_{j-1}^{n+1} - 2\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &\rightarrow \frac{(\alpha+1)\psi^{n+1} - 2\alpha\psi^n + (\alpha-1)\psi^{n-1}}{2\Delta t}.\end{aligned}\quad (3.192)$$

Pro $\alpha = 2$ získáme pro časovou derivaci často používaný asymetrický vztah

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \rightarrow \frac{3\psi^{n+1} - 4\psi^n + \psi^{n-1}}{2\Delta t}.\quad (3.193)$$

Více prostorových dimenzí

Ve více prostorových dimenzích tvoříme diferenční schémata obdobně. Někdy je výhodné predikovat řešení prováděním diferenčních operací jen v jednom určitém prostorovém směru a získaný odhad pak korigovat pomocí diferenčních operací v dalším směru a tyto směry predikcí a korekcí cyklicky měnit. Algoritmus se nazývá ADI (Alternating Direction Implicit method, metoda střídavých směrů) a jeho popis nalezneme v čtenář ve specializované literatuře.

Tridiagonální matice

U implicitních schémat se často setkáme s rovnicemi typu

$$-A_j\psi_{j+1}^{n+1} + B_j\psi_j^{n+1} - C_j\psi_{j-1}^{n+1} = D_j^n.\quad (3.194)$$

Nové hodnoty v sousedních bodech jsou po trojicích provázány obdobně jako na obrázku 79 uprostřed. K jejich nalezení je třeba řešit soustavu mnoha rovnic s řídkou tridiagonální maticí:

$$\begin{pmatrix} B_1 & -A_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_2 & B_2 & -A_2 & 0 & 0 \\ 0 & -C_3 & B_3 & -A_3 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1^{n+1} \\ \psi_2^{n+1} \\ \vdots \\ \psi_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix}.\quad (3.195)$$

Krajní hodnoty ψ_1 a ψ_N známe v libovolném čase z okrajových podmínek. Řešení budeme hledat ve tvaru

$$\psi_j^{n+1} = E_j\psi_{j-1}^{n+1} + F_j.\quad (3.196)$$

Po dosazení tohoto vyjádření do (3.194) získáme vztahy

$$\begin{aligned}
 E_j &= \frac{C_j}{B_j - A_j E_{j+1}}, \\
 F_j &= \frac{D_j + A_j F_{j+1}}{B_j - A_j E_{j+1}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.197}$$

Dosaďme do výrazu (3.196) poslední bod sítě $j = N$, ve kterém je hodnota hledané funkce dána ve všech časech pravou okrajovou podmínkou:

$$\psi_N = E_N \psi_{N-1}^{n+1} + F_N.$$

Pravá okrajová podmínka je předem dána a nemůže být funkcí hledaného řešení, proto je $E_N = 0$. Konstanta F_N musí být rovna ψ_N , tj.

$$\begin{aligned}
 E_N &= 0, \\
 F_N &= \psi_N.
 \end{aligned}
 \tag{3.198}$$

V tuto chvíli známe hodnoty obou konstant E a F na pravém okraji a můžeme odstartovat výpočet. Z rovnic (3.197) postupně určíme

$$E_N, F_N \rightarrow E_{N-1}, F_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow E_1, F_1. \tag{3.199}$$

Nyní známe všechny konstanty E_j, F_j a z rovnic (3.196) postupně určíme hledané řešení

$$\psi_1 \rightarrow \psi_2^{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow \psi_{N-1}^{n+1}. \tag{3.200}$$

Od pravé okrajové podmínky tedy postupně proběhneme síť zprava doleva a určíme koeficienty E a F . Od levé okrajové podmínky poté proběhneme síť opačným směrem (zleva doprava) a určíme hledané řešení.

3.4.3 Posuzování stability schématu

Popišme si nakonec John von Neumannovu metodu posuzování stability numerického schématu. Pro jednoduchost ji opět odvodíme v jedné časové a jedné prostorové dimenzi. Zobecnění je přímočaré. Při numerickém výpočtu se vždy nacházíme na konečné síti, byť jakkoli veliké. Pokud označíme vlnový vektor $\mathbf{\kappa}$, můžeme provést Fourierův rozklad hledaného řešení do parciálních vln

$$\psi_{\mathbf{\kappa}}(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{\kappa}) e^{i\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{x}}. \tag{3.201}$$

V jedné dimenzi máme

$$\psi_{\kappa}(x) \equiv F(\kappa) e^{i\kappa x}. \tag{3.202}$$

Na konečné mříži bude diskrétní jak prostor, tak vlnový vektor (ten bude násobky základní prostorové „frekvence“ $\kappa_0 = \partial\phi/\partial x = 2\pi/\Delta x$):

$$x_j = j\Delta x; \quad \kappa_k = k \frac{2\pi}{\Delta x}; \quad j, k = 1, 2, \dots \tag{3.203}$$

Číslo j indexuje prostorovou mříž, číslo k vlnový vektor a číslo n časové hladiny. Parciální vlna, ze které budeme superponovat řešení tedy je

$$\blacktriangleright \quad \psi_k(x_j) \equiv F_k e^{i2\pi k j}; \quad (3.204)$$

a celkové složené řešení

$$\psi(x_j) = \sum_k F_k e^{i2\pi k j}. \quad (3.205)$$

Zvolené diferenční schéma je stabilní, pokud jednotlivé parciální vlny s časem nenarůstají, tj. platí

$$\blacktriangleright \quad |g| \leq 1; \quad g \equiv \frac{F_k^{n+1}}{F_k^n}. \quad (3.206)$$

Tato podmínka se nazývá *John von Neumannova podmínka stability*. Ve skutečnosti ke stabilitě schématu postačí méně silná podmínka ve tvaru

$$|g| \leq 1 + \mathcal{O}(\Delta t). \quad (3.207)$$

A jak zjistíme, zda je námi navržené schéma stabilní? Postup je velmi jednoduchý. Do schématu dosadíme jednu konkrétní parciální vlnu (3.204), nalezneme g faktor a zjistíme, za jakých podmínek je v absolutní hodnotě menší nebo roven jedné.

■ Příklad 16: Prozkoumejte stabilitu schématu (3.183) pro řešení rovnice difúze.

Řešení: Posuzované diferenční schéma má tvar

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n + \eta \frac{\psi_{j-1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \Delta t.$$

Do schématu dosadíme parciální vlnu (3.204):

$$F_k^{n+1} e^{i2\pi k j} = F_k^n e^{i2\pi k j} + \eta \frac{F_k^n e^{i2\pi k(j-1)} - 2F_k^n e^{i2\pi k j} + F_k^n e^{i2\pi k(j+1)}}{(\Delta x)^2} \Delta t \quad \Rightarrow$$

$$F_k^{n+1} e^{i2\pi k j} = F_k^n \left[e^{i2\pi k j} + \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(e^{i2\pi k(j-1)} - 2e^{i2\pi k j} + e^{i2\pi k(j+1)} \right) \right] \quad \Rightarrow$$

$$g_k \equiv \frac{F_k^{n+1}}{F_k^n} = \left[1 + \frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(e^{-i2\pi k} - 2 + e^{+i2\pi k} \right) \right] \quad \Rightarrow$$

$$g_k = 1 + \frac{2\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} [\cos(2\pi k) - 1].$$

Nejmenší možná hodnota funkce cosinus je -1 a největší $+1$, odsud plyne

$$g_k \in \left\langle 1 - 4\eta \Delta t / (\Delta x)^2, 1 \right\rangle.$$

Podmínka (3.206) je v pravé části intervalu zjevně splněna, v levé nesmí hodnota „podtécť“ pod -1 , tj.

$$1 - 4\eta\Delta t / (\Delta x)^2 \geq -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2},$$

což je kritérium (3.184). ▀

▀ **Příklad 17:** Prozkoumejte stabilitu explicitního schématu z centrálních diferencí pro vlnovou rovnici.

Řešení: Uvažujme vlnovou rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Odpovídající diferenční schéma bude

$$\frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\psi_j^{n+1} - 2\psi_j^n + \psi_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = 0.$$

Schéma je druhého řádu přesnosti v Δx i Δt a je zjevně explicitní (hodnota ψ na nové časové hladině se vyskytuje jen jednou). Po dosazení parciální vlny dostaneme pro g faktor rovnici

$$\begin{aligned} g - 2 + g^{-1} &= -4c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(\pi k) \quad \Rightarrow \\ \left(g^{1/2} - g^{-1/2} \right)^2 &= -4c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(\pi k) \quad \Rightarrow \\ g^{1/2} - g^{-1/2} &= \pm 2ic \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\pi k) \quad \Rightarrow \\ g \mp 2ic \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\pi k) g^{1/2} - 1 &= 0, \end{aligned}$$

což je kvadratická rovnice pro $g^{1/2}$. Snadno nalezneme řešení

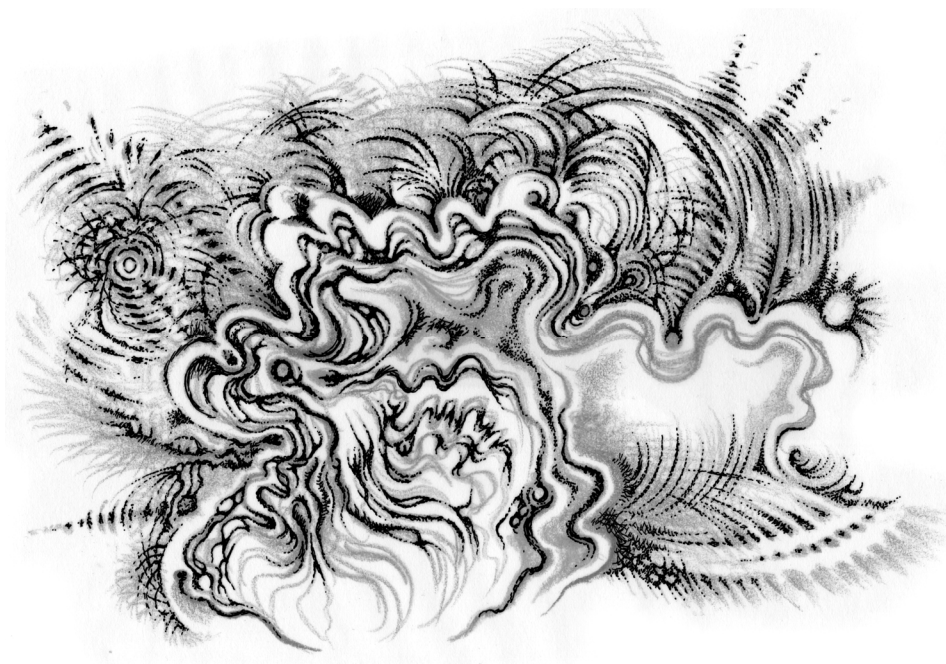
$$g^{1/2} = \pm ic \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\pi k) \pm \sqrt{1 - c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(\pi k)}.$$

Je zřejmé, že $|g|$ resp. $|g^{1/2}|$ bude omezena jednotkou, pokud platí tzv. *CFL podmínka* (Courantova-Friedrichsova-Levyho):

►
$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (3.208)$$

Jde o obecnou podmínku pro explicitní schémata, která vyjadřuje, že rychlost šíření informace daná diskretizací musí být vyšší než všechny fyzikální rychlosti sledované schématem, v tomto případě $\Delta x / \Delta t \geq c$. ▀

4. Lineární vlny v plazmatu



4.1 Základní pojmy

4.1.1 Vlnění

Označme veličinu, jejíž hodnoty se mění v čase a prostoru $\psi(t, \mathbf{x})$ nebo $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$, podle toho, zda jde o skalární či vektorovou veličinu. Může jít o tlak, hustotu prostředí, teplotu, rychlostní, elektrické či magnetické pole, výšku mořské hladiny a podobně. Uveďme si nejprve některé pojmy, které se používají v teorii vln.

Vlnová funkce

Veličina $\psi(t, \mathbf{x})$ resp. $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ popisuje vlnění v čase a v prostoru. Položíme-li $t = \text{const}$, pozorujeme časový snímek vlnění. Můžete si představit, že vyfotografujeme například vlnící se mořskou hladinu a prohlížíme si vzniklou fotografii. Položíme-li $\mathbf{x} = \text{const}$, pozorujeme časový průběh sledované veličiny v jednom určitém místě. Vlnění většinou popisujeme komplexní vlnovou funkcí, použití komplexních čísel významně zjednoduší některé výpočty. Fyzikální význam má ale zpravidla jen reálná část vlnové funkce. Tak jako každou komplexní funkci, můžeme vlnovou funkci zapsat pomocí dvou reálných funkcí, amplitudy A a fáze φ :

$$\blacktriangleright \quad \psi(t, \mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}; \quad \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}. \quad (4.1)$$

Vlnoplocha

Plocha spojující místa s konstantní hodnotou fáze φ vlnové funkce se nazývá vlnoplocha. Na vlnoploše je vlnění ve stejné fázi (například vlnoplocha spojující místa, v nichž má tlak 75 % maximální hodnoty).

Úhlová frekvence

Úhlovou frekvencí chápeme změnu fáze vlnění s časem, budeme ji definovat vztahem

$$\blacktriangleright \quad \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Minus v definici není podstatné, zajišťuje jen, aby se rovinná vlna pohybovala ve směru vlnového vektoru. Úhlová frekvence se může měnit jak s časem, tak od místa k místu. Je-li úhlová frekvence neproměnná, lze ji zapsat pomocí periody T jako $\omega = 2\pi/T$.

Vlnový vektor

Vlnovým vektorem chápeme změnu fáze vlnění se všemi prostorovými proměnnými,

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \varphi. \quad (4.3)$$

Vlnový vektor jakožto gradient míří kolmo na vlnoplochu, tj. ve směru šíření vln. Jeho velikost i směr se může měnit s časem i od místa k místu. Je-li vlnový vektor neproměnný, lze jeho velikost zapsat pomocí vlnové délky λ jako $k = 2\pi/\lambda$.

Disperzní relace

Vlnění je v každém místě popsáno čtyřmi čísly (ω, \mathbf{k}) , která tvoří relativistický čtyřvektor. Tato čísla jsou závislá. Vztah mezi nimi lze odvodit z rovnic popisujících daný typ vlnění. Většinou má závislost obecný tvar

$$\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (4.4)$$

a nazývá se *disperzní relace*. V některých případech je možné z disperzní relace explicitně vypočítat úhlovou frekvenci v závislosti na vlnovém vektoru

$$\omega = \omega(\mathbf{k}). \quad (4.5)$$

Tam, kde to explicitně možné není, můžeme použít větu o implicitní funkci a disperzní relaci ve tvaru $\omega(\mathbf{k})$ určit alespoň lokálně.

Rovinná (monochromatická) vlna

Jde o nejjednodušší typ vlny s konstantní amplitudou a fází, která je lineární funkcí času a prostoru:

$$\begin{aligned} A(t, \mathbf{x}) &= A; \\ \varphi(t, \mathbf{x}) &= c_0 t + c_1 x + c_2 y + c_3 z = -\omega t + k_x x + k_y y + k_z z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Význam koeficientů c_k je zřejmý z definice úhlové frekvence a vlnového vektoru. Termín monochromatická v názvu vlny znamená, že ve vlně je zastoupena jediná frekvence neboli barva (chromos). Rovinná (monochromatická) vlna má tedy tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]}. \quad (4.7)$$

Na první pohled je zřejmé, že plochy konstantní fáze $\varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$ představují rovnice přesouvajících se rovin:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{x}) &= \text{const} \quad \Rightarrow \\ k_x x + k_y y + k_z z - \omega t &= \text{const} \quad \Rightarrow \\ ax + by + cz + d(t) &= 0. \end{aligned}$$

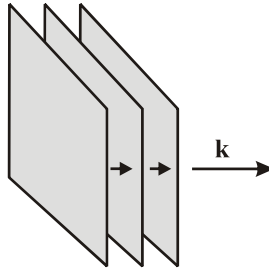
Přesun roviny budeme chápat jako kolmý k této rovině (šikmé přesuny rovin lze tak jako tak nahradit kolmým přesunem s rychlostí rovnou projekci rychlosti do kolmého směru). Směr přesunu určíme jako gradient rovnice roviny:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \quad \Rightarrow \quad \nabla \varphi = \mathbf{k}.$$

Vlnový vektor proto míří ve směru šíření vlnění.

Fázová rychlost

Fázová rychlost je rychlost přesunu roviny konstantní fáze. Zvolme souřadnicový systém tak, aby se roviny přesouvaly ve směru první osy, tj. $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$



Obr. 80: Rovinné vlnoplochy.

Diferencováním rovnice plochy konstantní fáze získáme rychlost přesunu plochy (fázovou rychlost)

$$kx - \omega t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad k dx - \omega dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Pro obecnou volbu souřadnicového systému platí

$$\blacktriangleright \quad v_f = \frac{\omega}{k}; \quad \mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k}. \quad (4.8)$$

První výraz určuje jen velikost fázové rychlosti, druhý výraz ukazuje, že vektor fázové rychlosti míří ve směru vlnového vektoru. Fázová rychlost souvisí jen s přesunem místa, které má stejnou fázi vlnění, nesouvisí se skutečným makroskopickým přesunem hmoty (kola šířící se na vodní hladině mají zcela jinou rychlost než voda samotná). Fázová rychlost může být, a v mnoha případech je, nadsvětelná. Tvar disperzní relace určuje hodnotu fázové rychlosti pro různé frekvence. Jev, kdy se vlny různých frekvencí šíří různou rychlostí se nazývá *disperze*.

Obecná vlna

S rovinnými vlnami se velmi snadno pracuje a můžeme z nich poskládat vlnu obecnějšího tvaru:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d^3 \mathbf{k}. \quad (4.9)$$

Jde vlastně o Fourierovu transformaci $\psi(t, \mathbf{x}) \leftrightarrow a(\omega, \mathbf{k})$. Amplitudy vln jsou Fourierovým obrazem vlnové funkce. Integrace se provádí jen přes složky vlnového vektoru. Úhlová frekvence je na vlnovém vektoru závislá prostřednictvím disperzní relace (4.5), a proto se přes ni neintegruje. Formálně můžeme integraci zapsat čtyřrozměrně pomocí Diracovy distribuce:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \delta[\omega - \omega(\mathbf{k})] d\omega d^3 \mathbf{k}. \quad (4.10)$$

Grupová rychlost

Zkoumejme nyní rychlost přesunu vlnového balíku – klubka vln podobných frekvencí a vlnových vektorů. Pro jednoduchost budeme uvažovat balík šířící se ve směru osy x (tak zvolíme souřadnicový systém):

$$\psi(t, x) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(\omega, k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (4.11)$$

Amplituda vln je nenulová jen v intervalu $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ a nahradíme ji konstantní amplitudou:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega t)} dk.$$

V dalším kroku vytkneme z integrálu prostřední vlnu

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]} dk.$$

Nesmíme zapomenout, že $\omega = \omega(k)$ a integrace se „skrytě“ provádí i přes ω . Další úpravy jsou zřejmé:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) \left(x - \frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} t \right) \right] dk.$$

Zlomek v argumentu exponenciály lze nahradit derivací (pro $\Delta k \rightarrow 0$)

$$\frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} \approx \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} = v_g(k_0).$$

Veličina v_g má zatím význam jen označení pro výše definovanou parciální derivaci. Vlnový balík má nyní tvar:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) (x - v_g t) \right] dk.$$

Je zřejmé, že po integraci přes vlnový vektor bude výsledek integrálu nějakou funkcí argumentu $x - v_g t$:

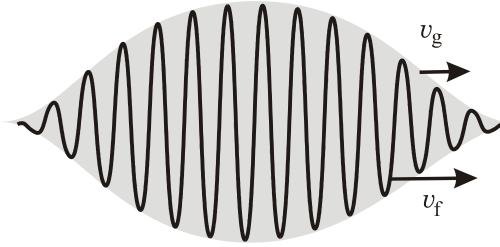
$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} F(x - v_g t) = A(x - v_g t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Balík má tedy obálku šířící se rychlostí v_g . Pro obecně mířící vlnový vektor je

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right). \quad (4.12)$$

Obdobný vztah ve sférické souřadnicové soustavě (k, θ, φ) má tvar (gradient v \mathbf{k} prostoru)

$$\mathbf{v}_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}, \frac{1}{k \sin \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right). \quad (4.13)$$



Obr. 81: Vlnový balík.

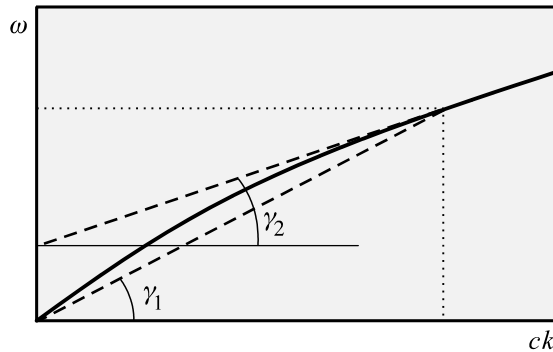
Rychlost šíření vlnového balíku jako celku se nazývá *grupová rychlost*. Je to rychlost šíření informace o tvaru balíku a rychlost přenosu energie balíku. Nutně musí být podsvětelná. S využitím de Broglieho vztahů a Hamiltonových kanonických rovnic $\dot{q}_k = \partial H / \partial p_k$ snadno ukážeme, že jde o mechanickou rychlost částice kvantově spojené s vlnovým balíkem:

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \hbar \omega}{\partial \hbar \mathbf{k}} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\text{mech}}.$$

Grafický význam fázové a grupové rychlosti

Grafický význam fázové a grupové rychlosti vidíme na obrázku. Fázová rychlost je dána tangentsou úhlu, který svírá spojnice bodu na křivce disperzní relace s počátkem (vzhledem k vodorovné ose), grupová rychlost je dána směrnici tečny (jde o derivaci):

$$v_f = c \operatorname{tg} \gamma_1; \quad v_g = c \operatorname{tg} \gamma_2. \quad (4.14)$$



Obr. 82: Geometrická interpretace fázové a grupové rychlosti.

4.1.2 Rozměrová analýza (vlny na hluboké vodě)

I bez znalosti teorie a bez znalosti fyzikálních procesů probíhajících v dané situaci je někdy možné odvodit disperzní relaci. Tvar fyzikálních zákonů je mnohdy natolik omezen rozměry veličin, že zbývá jen několik málo variant. V těchto případech postačí „jen“ rozměrová analýza problému. Typickou ukázkou je problematika vln na hluboké vodě. Na mělké závisí vlastnosti vln samozřejmě na hloubce vody a takové vlny mo-

hou být velmi komplikované. Jsme-li ale na hluboké vodě a vlny dosahují rozměrů od milimetrů po několik desítek metrů, nemůže jejich tvar ovlivnit hloubka oceánu. Takové vlně je jedno, zda je dno 500 m pod hladinou nebo 5 km pod hladinou. Tím se problematika značně zjednodušuje. Úlohu rozdělíme na dvě části – vlny dlouhé a vlny krátké.

Dlouhé vlny na hluboké vodě

Pokusíme se určit disperzní relaci z rozměrové analýzy problému. Na čem může záviset frekvence vln? Z úvodu již víme, že frekvence nebude záviset na hloubce oceánu. Vlastnosti dlouhých vln také nebudou záviset na povrchovém napětí. To ovlivňuje prohnutí hladiny malých rozměrů, tedy vlny krátké. Vzpomeňte si na školní experiment s jehlou ležící na hladině vody. Jehlu na hladině drží právě povrchové napětí a průhyb hladiny je patrný na milimetrové vzdálenosti od jehly. Zbývá tak závislost na hustotě kapaliny, na tíhovém zrychlení a samozřejmě na vlnovém vektoru (jde o disperzní relaci, tj. vztah mezi ω a k):

$$\omega = \omega(\rho, g, k).$$

Předpokládejme nejjednodušší možnou závislost, tj. mocninou

$$\omega = \rho^\alpha g^\beta k^\gamma.$$

Na první pohled se zdá nemožné z jedné rovnice určit tři neznámé exponenty α , β , γ . Fyzikální veličiny se ale skládají z hodnoty a rozměru. Právě rozměry jsou zde podstatné. Zapišme rozměr veličin hledaného vztahu:

$$\text{s}^{-1} = \text{kg}^\alpha \text{m}^{-3\alpha} \cdot \text{m}^\beta \text{s}^{-2\beta} \cdot \text{m}^{-\gamma}.$$

Disperzní relace musí platit pro širokou škálu parametrů. To je možné jen tehdy, jestliže exponenty rozměrů budou souhlasit u všech základních jednotek SI:

$$\begin{aligned} \text{m:} \quad & 0 = -3\alpha + \beta - \gamma, \\ \text{kg:} \quad & 0 = \alpha, \\ \text{s:} \quad & -1 = -2\beta. \end{aligned}$$

Tyto tři rovnice mají jediné řešení:

$$\alpha = 0; \quad \beta = 1/2; \quad \gamma = 1/2$$

a hledaná disperzní relace má tvar

$$\omega = \sqrt{gk}. \quad (4.15)$$

Disperzní relaci jsme odvodili z rozměrové analýzy bez znalosti procesů probíhajících ve vlně. Je třeba přiznat, že výsledný vztah je sice jednoznačný, ale až na násobící bezrozměrný koeficient: $\omega = \text{const} (gk)^{1/2}$. Ten je nutné určit experimentálně a v tomto případě je roven jedné. Ze vztahů (4.8) a (4.12) určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}, \\ v_g &= \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = \frac{1}{2} v_f. \end{aligned}$$

U dlouhých vln na hluboké vodě dochází k disperzi (závislosti rychlosti vln na vlnové délce). Dlouhé vlny se šíří vyšší rychlostí. Grupová rychlost je rovna polovině fázové rychlosti. Tou se šíří balík dlouhých vln (například za lodí).

Krátké vlny na hluboké vodě

Krátké vlny jsou dominantně ovlivněny povrchovým napětím σ , naopak zanedbatelný je vliv tíhového pole (to ovlivňuje především velké vlny). Obdobnou rozměrovou analýzou můžeme získat vztah

$$\omega = \sqrt{\sigma k^3 / \rho}. \quad (4.16)$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}},$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} = \frac{3}{2} v_f.$$

U krátkých vln je situace opačná než u dlouhých. Kratší vlny se šíří rychleji a grupová rychlost je větší než fázová ($v_g = 1,5 v_f$).

Obecné vlny na hluboké vodě

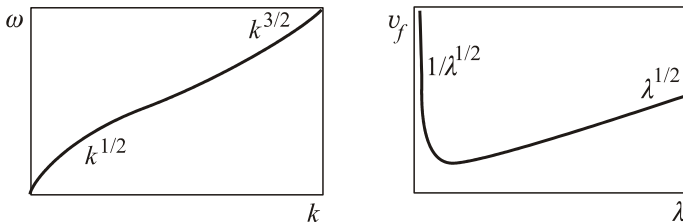
Předchozí dva limitní vztahy pro dlouhé a krátké vlny lze spojit do disperzní relace pro vlny libovolné vlnové délky:

$$\omega = \sqrt{\sigma k^3 / \rho + g k}. \quad (4.17)$$

Pro fázovou a grupovou rychlost standardně nalezneme

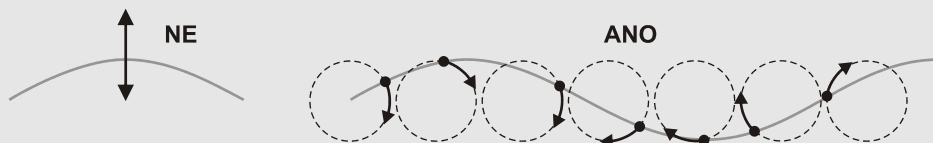
$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi}},$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\frac{3}{2} \frac{\sigma k}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{g}{k}}{\sqrt{\frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k}}} = \frac{\frac{6\pi\sigma}{2\rho\lambda} + \frac{g\lambda}{4\pi}}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi}}}.$$



Obr. 83: Disperzní relace vln na hluboké vodě.

Poznámka 1: Vztahy jsme odvodili bez znalosti fyzikálních zákonitostí. Sama teorie šíření vln na hluboké vodě není jednoduchá. Vlnění není příčné, jak by se na první pohled mohlo zdát. Částice vody se nepohybují v hřebeni nahoru a dolů (na-levo). Je tomu tak proto, že voda je nestlačitelná a jde-li hřeben dolů, musí se voda roztékat do strany. Výsledkem je pohyb vodních částic po kružnici. Vlny na vodě nejsou příčné (nejsou ani podélné, jde o směsici příčného a podélného vlnění).

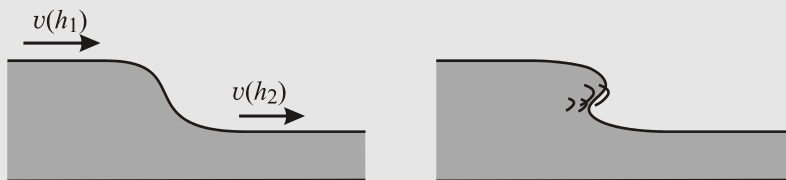


Obr. 84: Vlny na vodě jsou směsicí podélného a příčného vlnění.

Poznámka 2: Na mělčině závisí disperzní relace na hloubce vody. Tak se i fázová rychlost stává závislou na hloubce. Přibližně platí

$$v_f \sim \sqrt{gh} \quad (4.18)$$

Vznikne-li na vodní hladině schodovitý útvar, šíří se horní část vyšší rychlostí a vlna známým způsobem přepadává.



Obr. 85: Na mělčině závisí rychlost vln na hloubce.

4.1.3 Lineární teorie (elektromagnetické vlny)

Máme-li ke sledovanému jevu nějaký teoretický model, nejlépe uspořádaný do přehledné soustavy rovnic, je napůl vyhráno. Je-li navíc teorie lineární, tj. všechny neznámé se vyskytují v prvních mocninách, je další postup přímočarý:

1. Můžeme se pokusit některé proměnné ze soustavy vyloučit a snížit tak počet proměnných. Ideálem je samozřejmě získat jedinou rovnici pro jedinou neznámou. Popisuje-li model vlnění, bude výsledná rovnice nějakým druhem vlnové rovnice. Vylučování proměnných ze soustavy výchozích rovnic vůbec nemusí být jednoduché. Zpravidla jde o soustavu parciálních diferenciálních rovnic a ne každý umí s těmito rovnicemi zacházet. Naštěstí můžeme výpočet kdykoli přerušit a přejít ke kroku 2. Dokonce se o snížení počtu proměnných vůbec pokoušet nemusíme a můžeme rovnou přistoupit ke kroku 2.
2. Zcela obecné řešení (vlnu) můžeme složit z rovinných vln podle vztahu (4.11). Vzhledem k tomu, že výchozí soustava rovnic (nebo jen rovnice jediná, podařilo-li se nám snížit počet proměnných na jednu) je lineární, můžeme dosadit do soustavy

jednu konkrétní rovinnou vlnu a zkoumat chování soustavy pro tuto parciální vlnu. Kdykoli později můžeme úplné řešení z takovýchto rovinných vln složit. S rovinnými vlnami se mimořádně snadno zachází. Zkusme rovinnou vlnu derivovat podle časové a prostorové proměnné:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\partial}{\partial t} A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = -i\omega A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = -i\omega \psi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \psi = \frac{\partial}{\partial x_l} A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = +ik_l A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = +ik_l \psi.$$

Vidíme, že parciální derivace pro rovinnou vlnu přecházejí na algebraické výrazy. Jakékoli kombinace parciálních derivací lze nahradit algebraickými výrazy plynoucími z obou uvedených relací. Sestavme je do přehledné tabulky:

Výraz	Příklad
$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$	$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f$
$\frac{\partial}{\partial x_l} \rightarrow +ik_l$	$\frac{\partial f}{\partial x_l} = +ik_l f$
$\nabla \rightarrow +i\mathbf{k}$	$\nabla f = +i\mathbf{k} f$
$\text{div} \rightarrow i\mathbf{k} \cdot$	$\text{div} \mathbf{V} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$
$\text{rot} \rightarrow i\mathbf{k} \times$	$\text{rot} \mathbf{V} = i\mathbf{k} \times \mathbf{V}$
$\nabla^2 \rightarrow -k^2$	$\nabla^2 f = -k^2 f$

Podle těchto pravidel převedeme výchozí soustavu na algebraickou soustavu rovnic, se kterou se snáze zachází. Tento krok je ekvivalentní provedení Fourierovy transformace.

- Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení, musí být determinant soustavy nulový (předpokládáme, že výsledná soustava nemá pravou stranu a většinou tomu tak skutečně je). Z této podmínky získáme vztah mezi ω a \mathbf{k} , tedy disperzní relaci. Často je výhodné eliminací snížit počet proměnných soustavy a tím řád počítaného determinantu. Snižování počtu proměnných můžeme provádět před použitím pravidel Fourierovy transformace (pro parciální diferenciální rovnice, viz krok 1) i po něm v algebraické soustavě.
- Je-li disperzní relace komplexní, je vhodné řešit případnou stabilitu či nestabilitu nalezeného řešení. Komplexní úhlová frekvence nebo vlnový vektor znamená ve výrazu $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ přítomnost exponenciálních neoscilujících členů, které mohou vést k útlumu nebo exponenciálnímu narůstání řešení (nestabilitě).
- Z disperzní relace se pokusíme určit úhlovou frekvenci a ze vztahů (4.8) a (4.12) nalezneme fázovou a grupovou rychlost vln.
- Vrátíme se k původní soustavě rovnic a zkoumáme vztahy mezi jednotlivými veličinami, vzájemné směry různých vektorů, zda je vlnění příčné či podélné atd.

Jako jednoduchý příklad na uvedený postup řešíme elektromagnetické vlny ve vakuu. Za výchozí soustavu rovnic poslouží Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ve vakuu je $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ a platí jednoduché materiálové vztahy $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Jako základní ponecháme v soustavě vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Výsledkem je soustava Maxwellových rovnic ve vakuu. První dvě skalární rovnice jsou počátečními podmínkami druhých dvou vektorových rovnic, které tvoří výchozí soustavu rovnic. Ukážeme dva postupy řešení. V prvním se pokusíme eliminovat proměnné ještě před provedením Fourierovy transformace (FT), v druhém až po provedení FT.

Postup 1

Z Maxwellových rovnic se pokusíme vyloučit magnetickou indukci a získat rovnici pro elektrické pole. Na čtvrtou rovnici zapůsobíme operací rotace a na pravé straně za rot \mathbf{B} dosadíme z třetí rovnice:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ &(\operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2) \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, získáváme výslednou rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.21)$$

Jde o známou vlnovou rovnici pro elektrické pole. Obdobně bychom eliminací elektrického pole mohli z Maxwellových rovnic získat stejnou rovnici pro magnetické pole. Nyní provedeme FT podle pravidel uvedených v této kapitole:

$$(-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Parciální diferenciální rovnici jsme převedli na algebraickou rovnici bez pravé strany. Nenulové řešení bude existovat pouze tehdy, když

$$-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k.$$

Z podmínky nenulovosti řešení jsme odvodili disperzní relaci. Fázová rychlost šíření (rychlost světla) je

$$c \equiv v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (4.22)$$

Nalezená disperzní relace tvaru $\omega = ck$ je nejjednodušší možná (přímková), fázová i grupová rychlost je stejná a vlnění nejví disperzi (fázová rychlost není závislá na vlnové délce resp. vlnovém vektoru).

Postup 2

Budeme předpokládat, že se nám nepodařilo ze soustavy Maxwellových rovnic eliminovat rovnici pro elektrické či magnetické pole. Provedme proto FT již v původní soustavě rovnic (4.20):

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= +\omega \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Eliminaci proměnných lze provést nyní. Dosadíme \mathbf{B} z poslední rovnice do předposlední:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} &= -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}. \end{aligned}$$

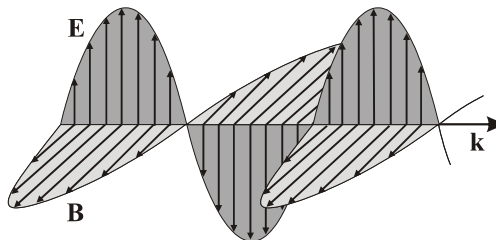
První výraz je podle první rovnice z (4.23) nulový a rovnice pro elektrické pole proto je

$$(k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Podmínkou nenulovosti elektrického pole je opět disperzní relace

$$k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k = ck.$$

Z původní soustavy (4.23) snadno zjistíme, že vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{k} jsou navzájem kolmé a vlnění je proto příčné.



Obr. 86: Základní vektory v elektromagnetické vlně.

Poznámka: Vidíme, že není důležité, v které fázi výpočtu provedeme FT, oba postupy vedou ke stejnému výsledku. Pokud neumíme zacházet s parciálními diferenciálními rovnicemi, je výhodné provést FT co nejdříve. Nepodaří-li se nám provést eliminaci proměnných ani před, ani po FT, bude podmínkou nenulovosti řešení nulovost determinantu celé soustavy.

4.1.4 Nelineární teorie (zvukové vlny)

Je-li výchozí model nelineární, může jít o značný problém. Rovnice jsou řešitelné jen někdy a žádné obecné postupy neexistují. Rovnice je možné linearizovat, ale tím ztrácíme mnoho z vlastností skutečných řešení. Lineární aproximace je ospravedlnitelná jen pro vlny malých amplitud, které chápeme jako malé poruchy nějakého známého (nejlépe stacionárního) řešení výchozí soustavy rovnic. Někdy je linearizace jedinou možností, jak se o řešení vůbec něco dozvědět. Z chování malých poruch můžeme obdobnými postupy jako v teoretické mechanice řešit problém stability řešení. Linearizace probíhá ve dvou krocích. Nejprve nalezneme „klidové“ řešení výchozí soustavy rovnic bez přítomnosti vln. V homogenním neomezeném prostředí jde zpravidla o konstantní řešení, u omezeného prostředí (například válcové vlákno) je situace složitější. V dalším kroku chápeme vlnu jako malou poruchu nalezeného řešení. „Malá porucha“ znamená, že relativní poruchy (vydělené nějakou charakteristickou hodnotou) se chovají jako malý bezrozměrný parametr, jehož mocniny vyšší než první zanedbáváme. V praxi řešení s přidanou poruchou dosadíme do výchozí soustavy rovnic a zanedbáme druhé a vyšší mocniny všech poruch. Výsledkem je lineární soustava rovnic pro poruchy, na kterou aplikujeme postup z minulých kapitol.

U nelineární soustavy rovnic můžeme tedy použít postup založený na linearizaci, který je obdobný vyšetřování stability u soustav obyčejných diferenciálních rovnic [1]. I zde zkoumáme chování malých poruch, které mohou být utlumeny (stabilita), exponenciálně narůstat (nestabilita) nebo mít vlnový charakter. Shrňme nyní základní kroky řešení nelineární soustavy metodou linearizace (metodou perturbací, malých poruch):

1. Nalezení nějakého (nejlépe stacionárního) řešení.
2. Linearizace pomocí malých poruch.
3. Možná eliminace proměnných.
4. Fourierova transformace.
5. Možná eliminace proměnných (algebraická).
6. Nalezení disperzní relace (determinant soustavy = 0).
7. Vyšetření stability řešení.
8. Nalezení fázové a grupové rychlosti.
9. Nalezení vzájemných směrů mezi vektory.

V kapitole 4.1.2 (rozměrová analýza bez znalosti teorie) začínal výpočet až krokem 6, nalezená disperzní relace byla reálná a tak odpadlo vyšetřování stability (krok 7). U lineárních soustav začíná výpočet krokem 3 (kapitola 4.1.3). U nelineárních soustav musí proběhnout celý uvedený postup. Celý výpočet si ukážeme na zvukových vlnách šířících se v homogenním izotropním plynném prostředí.

Zvukové vlny v plynech

Za výchozí model budeme považovat soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p, \\ p &= p(\rho) = K \rho^\gamma.\end{aligned}\tag{4.24}$$

První rovnice je rovnicí kontinuity pro hustotní pole ρ , druhá rovnice je pohybovou rovnicí pro rychlostní pole \mathbf{u} a soustava je uzavřena polytropní tlakovou závislostí. V soustavě je celkem pět neznámých (ρ , \mathbf{u} , p) a soustava je nelineární, vystupují zde součiny hledaných funkcí. Proto provedeme celý postup (body 1 až 9):

1. *Stacionární řešení:* Řešením (například nepohyblivý plyn v místnosti) je

$$\rho = \rho_0, \quad \mathbf{u}_0 = 0, \quad p = p_0.$$

2. *Linearizace:* Předpokládejme přítomnost malé poruchy stacionárního řešení

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}, \quad p = p_0 + \delta p.$$

Tuto poruchu dosadíme do soustavy (4.24):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \operatorname{div}[(\rho_0 + \delta\rho)(\delta\mathbf{u})] &= 0, \\ (\rho_0 + \delta\rho) \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial t} + \rho(\delta\mathbf{u} \cdot \nabla)(\delta\mathbf{u}) &= -\nabla(p_0 + \delta p), \\ \delta p &= \alpha(\rho_0) \delta\rho; \quad \alpha \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}.\end{aligned}$$

V soustavě ponecháme jen poruchy prvního řádu, poruchy vyšších řádů zanedbáme. Derivace konstant jsou nulové. Ze soustavy po linearizaci proto zůstane:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) + \operatorname{div}[\rho_0(\delta\mathbf{u})] &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial t} &= -\nabla(\delta p), \\ \delta p &= \alpha(\rho_0) \delta\rho.\end{aligned}\tag{4.25}$$

3. *Eliminace proměnných:* Soustava (4.25) je již lineární soustavou pro neznámé $\delta\rho$, $\delta\mathbf{u}$, δp . V principu můžeme nyní eliminovat ze soustavy poruchu tlaku δp dosazením z poslední rovnice. Tento krok ale také můžeme provést později.
4. *Fourierova transformace:* Soustavu převedeme na algebraickou pomocí Fourierovy transformace. Naše soustava je již lineární a tak je tento krok ekvivalentní dosazení rovinné vlny do soustavy. Výsledkem je

$$\begin{aligned}
 -i\omega\delta\rho + i\rho_0(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u}) &= 0, \\
 -i\omega\rho_0\delta\mathbf{u} &= -i\mathbf{k}\delta p, \\
 \delta p &= \alpha\delta\rho.
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

5. *Eliminace proměnných:* Získaná soustava je pro pět neznámých a determinant by se počítal z matice 5×5 . Pomocí poslední rovnice eliminujeme tlak:

$$\begin{aligned}
 -\omega\delta\rho + \rho_0(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u}) &= 0, \\
 \mathbf{k}\alpha\delta\rho - \omega\rho_0\delta\mathbf{u} &= 0.
 \end{aligned}$$

Nyní máme jen čtyři rovnice (jednu skalární a jednu vektorovou) pro čtyři neznámé $\delta\rho, \delta\mathbf{u}$ a determinant by se počítal z matice 4×4 . Z druhé (vektorové) rovnice můžeme ještě spočítat poruchu rychlosti a dosadit do první rovnice:

$$(-\omega^2 + \alpha k^2)\delta\rho = 0.$$

Výsledkem je jedna jediná rovnice pro jednu jedinou neznámou $\delta\rho$. Ne vždy lze provést eliminaci proměnných až do konce.

6. *Disperzní relace:* Podmínkou nenulovosti řešení je nulovost kulaté závorky před $\delta\rho$ (jde o determinant matice 1×1):

$$-\omega^2 + \alpha(\rho_0)k^2 = 0. \tag{4.27}$$

Nalezenou disperzní relaci lze snadno řešit vzhledem k ω , za α dosadíme z (4.25):

$$\omega = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} k. \tag{4.28}$$

7. *Stabilita řešení:* Disperzní relace vyšla reálná, reálnému vlnovému vektoru odpovídá reálná úhlová frekvence a řešením jsou vlny. V systému nedochází ani k útlumu ani k nestabilitě.
8. *Fázová a grupová rychlost:* Výsledná disperzní relace je lineární, fázová a grupová rychlost mají stejnou hodnotu, zvuk se šíří rychlostí

$$c_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}. \tag{4.29}$$

Speciálně pro polytropní děje $p = K\rho^\gamma$ vychází (m_0 je hmotnost jednoho atomu)

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m_0}}. \tag{4.30}$$

9. *Vztahy vektorů:* Z druhé rovnice (4.26) je zřejmé, že porucha rychlostního pole míří ve směru šíření vln (vlnového vektoru) a jde tak o *vlnění podélné*.

Za pomoci rychlosti zvuku lze disperzní relaci zvukových vln zapsat v často používaném tvaru



$$\omega = c_s k. \tag{4.31}$$

Zvukové vlny v pohyblivém prostředí

Připusťme nyní nenulovou rychlost ve stacionárním řešení (to odpovídá šíření zvuku v pohybujícím se prostředí) a požadujeme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \delta\rho, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}, \\ p &= p_0 + \delta p.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Co všechno se změní? Výpočet probíhá zcela analogicky, nyní ale při linearizaci přispěje i konvektivní člen v pohybové rovnici. Po snadném výpočtu získáme disperzní relaci

$$\begin{aligned}[\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0]^2 - \alpha(\rho_0)k^2 &= 0; \\ \alpha &= \frac{\partial p}{\partial \rho}\end{aligned}\tag{4.33}$$

a z ní pozorovanou úhlovou frekvenci

$$\omega = c_s k + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 = c_s k + k u_0 \cos \varphi = c_s k \left(1 + \frac{u_0}{c_s} \cos \varphi \right).\tag{4.34}$$

Ve výrazu jsme φ označili úhel mezi vlnovým vektorem \mathbf{k} a rychlostí prostředí \mathbf{u}_0 . Označíme-li ještě frekvenci zvuku v nepohyblivém prostředí $\omega_0 = c_s k$, máme výsledný vztah

$$\blacktriangleright \quad \omega = \omega_0 \left(1 + \frac{u_0}{c_s} \cos \varphi \right),\tag{4.35}$$

který není nic jiného než Dopplerův vzorec pro změnu frekvence vlivem pohybu zdroje vlnění. U pohybujících se tekutin se tedy v disperzní relaci objeví místo úhlové frekvence ω kombinace $\Omega = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0$.

4.1.5 Další příklady (Jeansovo kritérium, různé vlnové rovnice)

Jeansovo kritérium

Popišme nyní vlny v oblaku plynu a prachu, který je ovládán gravitačním polem (mlhovinu). Zejména se budeme zajímat o to, za jakých podmínek je zvuková vlna nestabilní a může dojít k zhroucení části mlhoviny a vzniku globule – zhuštění, která je předchůdcem budoucí hvězdy.

V následující tabulce jsou porovnány veličiny popisující elektrostatické a gravitační pole. Správný koeficient u Laplaceovy-Poissonovy rovnice pro gravitační potenciál získáte porovnáním vztahů pro potenciální energii bodového zdroje elektrostatického a gravitačního pole.

Veličina	Elektrostatické pole	Gravitační pole
potenciál bodového zdroje	$\phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\phi_G = -G \frac{M}{r}$
potenciální energie	$V_E = q \phi_E$	$V_G = m \phi_G$
rovnice pro potenciál	$\nabla^2 \phi_E = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}$	$\nabla^2 \phi_G = 4\pi G \rho_M$
síla vyjádřená z energie	$\mathbf{F} = -\nabla V_E$	$\mathbf{F} = -\nabla V_G$
síla vyjádřená z potenciálu	$\mathbf{F} = -q \nabla \phi_E$	$\mathbf{F} = -m \nabla \phi_G$
hustota síly	$\mathbf{f} = -\rho_Q \nabla \phi_E$	$\mathbf{f} = -\rho_M \nabla \phi_G$

Za výchozí sadu rovnic budeme považovat soustavu (4.24) doplněnou o hustotu gravitační síly a rovnici pro gravitační potenciál:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p - \rho \nabla \phi, \\ \nabla^2 \phi &= 4\pi G \rho, \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Vzhledem k tomu, že jde o gravitační problém bez přítomnosti elektrických polí, a nemůže proto dojít k záměně hustot ani potenciálů, vynecháváme index G . Celkem máme 6 rovnic pro 6 neznámých ρ , \mathbf{u} , ϕ , p . Řešení budeme hledat v perturbovaném tvaru

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}, \quad \phi = \phi_0 + \delta\phi, \quad p = p_0 + \delta p.$$

Veličiny nultého řádu musí splňovat rovnici $\Delta\phi_0 = 4\pi G\rho_0$, ze které plyne, že by mělo platit $\nabla\phi_0 \neq 0$. To je ale v rozporu s klidovým řešením pohybové rovnice pro $p_0 = \text{const}$. Tato nekonzistence vzniká nahrazením konečné mlhoviny nekonečným prostorem vyplněným látkou s konstantní hustotou, tlakem a teplotou. V přiblížení rozsáhlé mlhoviny můžeme zanedbat okrajové jevy a v perturbační analýze nadále požadovat $\nabla\phi_0 = 0$. Tato „nekonzistence“ byla obsažena již i v původním Jeansově řešení. Obdobným postupem nalezneme disperzní relaci zvukových vln ovlivněných gravitačním polem

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0; \quad c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (4.37)$$

Oproti relaci (4.31) je zde navíc druhý člen na pravé straně. Řešení vzhledem k frekvenci ω je jednoduché:

$$\omega = \pm \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0}. \quad (4.38)$$

Na první pohled vidíme, že úhlová frekvence nemusí být reálnou veličinou. Pro

$$c_s^2 k^2 < 4\pi G \rho_0 \quad (4.39)$$

je úhlová frekvence ryze imaginární, $\omega = \pm i b$ a v rovinné vlně se objeví členy

$$e^{i\omega t} = e^{\mp b t}.$$

Některé typy poruch proto mohou exponenciálně narůstat a mlhovina se stává nestabilní. Právě v takovém prostředí mohou vznikat hvězdy jako původně malé poruchy narostlé do makroskopických rozměrů. Prozkoumejme proto podmínku (4.39) podrobněji:

$$c_s^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} < 4\pi G \rho_0 \Rightarrow$$

$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} c_s = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m_0}}.$$

Při odvození jsme použili pro rychlost zvuku vztah (4.30), m_0 je hmotnost jednoho atomu či molekuly mlhoviny. Poruchy s vlnovou délkou větší než určitá mez jsou gravitačně nestabilní. Aby se v mlhovině mohly tvořit hvězdy, musí mít rozměry větší než tato kritická mez. Uvedené tvrzení se nazývá Jeansovo kritérium a bylo odvozeno v roce 1902:

►
$$L > \sqrt{\frac{\pi \gamma k_B T}{G \rho_0 m_0}}. \quad (4.40)$$

Z disperzní relace (4.38) není samozřejmě problém dopočítat fázovou a grupovou rychlost šíření poruch mlhovinou. V ionizovaném prostředí za přítomnosti magnetických polí mohou hvězdy vznikat, aniž by splňovaly Jeansovo kritérium.

Je-li splněno Jeansovo kritérium a v mlhovině vzniká kulový objekt, je třeba ještě řešit podmínky rovnováhy tohoto objektu. Gravitační síla působící na nějakou vrstvu uvnitř vznikající hvězdy má tvar

$$F_{\text{grav}} \sim \frac{1}{R^2}.$$

Tlaková síla na tuto vrstvu je úměrná součinu tlaku $p \sim \rho^\gamma$ a povrchu $S \sim R^2$, tj

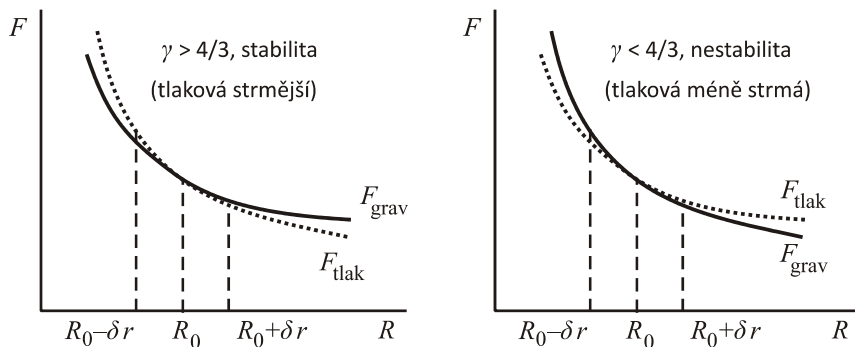
$$F_{\text{tlak}} \sim \rho^\gamma R^2 \sim R^{-3\gamma} R^2 \sim \frac{1}{R^{3\gamma-2}}.$$

Obě síly za normálních okolností klesají s rostoucími rozměry hvězdy. Rovnováha se ustaví při rovnosti obou sil. Styl poklesu obou sil je stejný pro koeficient

$$\gamma = \frac{4}{3}.$$

Diskutujme dva případy. Nejprve $\gamma > 4/3$. Tlaková křivka je strmější než gravitační. Jestliže hvězda zcela náhodně zvětší své rozměry, převládne gravitační síla a hvězdu opět smrští. Zmenší-li hvězda své rozměry, převládne tlaková síla a nafoukne hvězdu na původní rozměr. Hvězda je stabilní a výkyvy v jejích rozměrech neohrozí její existenci.

V případě $\gamma < 4/3$ je tomu jinak. Jestliže hvězda zcela náhodně zvětší své rozměry, převládne tlaková síla a bude hvězdu nadále nutit zvětšovat rozměry. Hvězda bude nestabilní a minimálně odhodí obálku. Zmenší-li hvězda své rozměry, převládne gravitační síla a bude nutit hvězdu ke kolapsu.



Obr. 87: Rovnováha polytropní hvězdy.

Poznámka: Materiál bílých trpaslíků má polytropní koeficient blízký $4/3$. Polytropní koeficient se poněkud mění s hmotností trpaslíka. Při hmotnosti přibližně 1,4 hmotnosti Slunce má polytropní koeficient právě hodnotu $4/3$ a pro vyšší hmotnosti je bílý trpaslík nestabilní. Této hranici se říká Chandrasekharova mez.

Vlnová rovnice

Na klasickou vlnovou rovnici narazíme v mnoha vědních odvětvích. Odpovídá jednoduchým vlnám bez disperze.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0.$$

Rovnice je lineární a každé její „rozumné“ řešení je možné zapsat pomocí Fourierovy transformace jako superpozici rovinných vln. Po dosazení rovinné vlny do vlnové rovnice získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2.$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c.$$

Fázová i grupová rychlost je stejná a nezávisí na vlnové délce parciální vlny, což je charakteristické pro lineární disperzní relace typu $\omega = ck$.

Kleinova-Gordonova rovnice

Kleinova-Gordonova rovnice je správnou relativistickou rovnicí pro volnou částici se spinem rovným nule

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2 \right) \psi = 0; \quad \mu^2 \equiv \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}.$$

Jde o vlnovou rovnici s konstantním členem, která limitně přechází v nerelativistickou Schrödingerovu rovnici [2]. Rovnice je lineární, její řešení opět budeme chápat jako superpozici rovinných vln. Po provedení Fourierovy transformace Kleinovy-Gordonovy rovnice získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 + c^2 \mu^2 .$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k^2}} = c \sqrt{1 + \frac{\mu^2 \lambda^2}{4\pi^2}} ,$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2 \lambda^2}{4\pi^2}}} .$$

Na první pohled je zřejmé, že grupová rychlost je vždy podsvětelná. Oproti tomu fázová rychlost je nadsvětelná a nemá význam přenosu informace. Mezi oběma rychlostmi je jednoduchý vztah $v_f v_g = c^2$. Obě rychlosti závisí na vlnové délce parciální vlny (tzv. disperze). Obdobné chování budou mít plazmové vlny diskutované v příští kapitole.

Telegrafní rovnice

Nalezneme vlnovou rovnici pro elektromagnetickou vlnu šířící se v kovu. V Maxwellových rovnicích dosadíme za proudovou hustotu $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q ,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 ,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} .$$

Pokud aplikujeme na třetí rovnici operaci divergence a za $\operatorname{div} \mathbf{D}$ dosadíme z první rovnice, dostaneme

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_Q \approx \rho_0 \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right] .$$

Prostorová hustota náboje ve vodiči exponenciálně vymizí a nemusíme ji proto uvažovat. Za výchozí sadu Maxwellových rovnic pro vlny ve vodiči můžeme použít

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 ,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 ,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} .$$

Aplikací operace rotace na třetí rovnici můžeme eliminovat elektrické pole

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \sigma \mu \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} &= -\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}$$

Obdobně můžeme získat i rovnici pro pole elektrické. Ve vodiči splňují elektromagnetické vlny tzv. telegrafní rovnici:

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.41)$$

Po dosazení rovinné vlny (FT) získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 - i c^2 \sigma \mu \omega.$$

Je-li vodivost nulová ($\sigma = 0$), přejde tato disperzní relace ve známou disperzní relaci vln v nevodivém prostředí. Ve vodiči je disperzní relace komplexní, což obecně znamená útlum.

Útlum v prostoru: Hledejme nejprve prostorový útlum (řešení v k):

$$c^2 k^2 = \omega^2 + i c^2 \sigma \mu \omega \approx i c^2 \sigma \mu \omega.$$

Vzhledem k vysoké vodivosti kovů jsme první člen na pravé straně zanedbali. Tento výraz již snadno odmocníme. Nezapomeňte, že $i^{1/2} = (1+i)/2^{1/2}$. Proto

$$k = k_1 + i k_2; \quad k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega}{2}}.$$

Reálná i imaginární část vlnového vektoru je stejně veliká (to je pro kovy typické). V prostoru tedy bude mít vlna charakter $\exp[ik_1 x - k_2 x]$. Vlna je tlumená s charakteristickou vzdáleností útlumu

►
$$\delta = \frac{1}{k_2} = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}.$$

Tuto vzdálenost (do které vlna pronikne) nazýváme *skinová hloubka*.

Útlum v čase: Hledejme nyní útlum v čase (řešení v ω). Disperzní relace je kvadratická rovnice pro ω s řešením

$$\omega_{1,2} = \frac{-i c^2 \sigma \mu \pm \sqrt{-c^4 \sigma^2 \mu^2 + 4 c^2 k^2}}{2}.$$

Uvědomíme-li si, že v diskriminantu je vodivostní člen dominantní (kov), zbývá jediné nenulové řešení

$$\omega \cong -i c^2 \sigma \mu .$$

Řešení ve frekvenci je ryze imaginární

$$\omega = \omega_1 + i \omega_2 ; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -c^2 \sigma \mu$$

a má charakter útlumu

$$e^{-i \omega t} = e^{\omega_2 t} = e^{-c^2 \sigma \mu t}$$

s charakteristickou dobou útlumu

$$\tau = \left| \frac{1}{\omega_2} \right| = \frac{1}{c^2 \sigma \mu} .$$

Povšimněte si, že při důsledném dodržení znaménkové konvence (prostor +, čas -) ve vlnění typu $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ vyšel správně v čase i v prostoru útlum.

4.2 Plazmové oscilace a vlny

Oblast vyplněná plazmatem je schopna na základě různých vnějších podnětů přenášet mnoho druhů vlnění. V této kapitole se budeme zabývat nejjednoduššími plazmovými oscilacemi a vlnami, které probíhají *bez přítomnosti magnetického pole*. Hybnou silou je pouze pole elektrické, které tvoří vratnou sílu a umožňuje periodický pohyb. Počáteční porucha způsobí rozkmitání elektronové a iontové tekutiny na dvou charakteristických frekvencích a současně vznik globálního elektrického pole. Elektronová tekutina je schopna oscilací na podstatně vyšších frekvencích než iontová tekutina. Proto za výchozí soustavu rovnic nemůžeme využít jednotekutinový model, ale dvoutekutinový model. Viskózní členy zanedbáme. Pro tento typ vlnění platí Maxwellova rovnice $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ (i při nulovém magnetickém poli je možná vlna elektrického pole), ze které bezprostředně plyne $\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E} = 0$. Proto platí $\delta \mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ a vlnění je podélné.

4.2.1 Odvození disperzní relace

Za výchozí soustavu rovnic budeme volit sadu

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{u}_e) &= 0, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i \mathbf{u}_i) &= 0, \\ m_e n_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + m_e n_e (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e &= -\nabla p_e - e n_e \mathbf{E}, \\ m_i n_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + m_i n_i (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i &= -\nabla p_i + Z e n_i \mathbf{E}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} (Zn_i \mathbf{u}_i - en_e \mathbf{u}_e),$$

$$p_e = n_e k_B T_e = C_e n_e^{\gamma_e}; \quad p_i = n_i k_B T_i = C_i n_i^{\gamma_i}.$$

Jde o rovnice kontinuity pro elektrony a ionty, pohybové rovnice s tlakovým a elektrickým členem, rovnici pro elektrické pole a polytropní stavové rovnice. Rovnice pro elektrické pole je odvozena z Maxwellovy rovnice $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$, ve které je magnetické pole nulové a proudová hustota je vyjádřena ze vztahu (3.4). Budeme předpokládat Z -násobnou ionizaci plazmatu. Uvedené rovnice budeme linearizovat, tj. provedeme perturbaci klidového řešení:

$$\begin{aligned} n_e &= n_{e0} + \delta n_e; & n_i &= n_{i0} + \delta n_i; & \mathbf{u}_e &= \delta \mathbf{u}_e; & \mathbf{u}_i &= \delta \mathbf{u}_i; \\ \mathbf{E} &= \delta \mathbf{E}; & p_e &= p_{e0} + \delta p_e; & p_i &= p_{i0} + \delta p_i. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Po dosazení do původní sady a zanedbání členů vyšších řádů získáme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + \text{div}(n_{e0} \delta \mathbf{u}_e) &= 0, \\ \frac{\partial \delta n_i}{\partial t} + \text{div}(n_{i0} \delta \mathbf{u}_i) &= 0, \\ m_e n_{e0} \frac{\partial \delta \mathbf{u}_e}{\partial t} &= -\nabla \delta p_e - en_{e0} \delta \mathbf{E}, \\ m_i n_{i0} \frac{\partial \delta \mathbf{u}_i}{\partial t} &= -\nabla \delta p_i + Zen_{i0} \delta \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{e}{\varepsilon_0} (Zn_{i0} \delta \mathbf{u}_i - n_{e0} \delta \mathbf{u}_e), \\ \delta p_e &= m_e c_e^2 \delta n_e; & c_e^2 &\equiv \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_e}, \\ \delta p_i &= m_i c_i^2 \delta n_i; & c_i^2 &\equiv \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i}. \end{aligned}$$

Další postup je přímočarý. Snížíme řád dosazením posledních dvou rovnic do předchozích a provedeme Fourierovu transformaci:

$$\begin{aligned} -\omega \delta n_e + n_{e0} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_e) &= 0, \\ -\omega \delta n_i + n_{i0} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_i) &= 0, \\ i\omega m_e n_{e0} \delta \mathbf{u}_e &= i\mathbf{k} m_e c_e^2 \delta n_e + en_{e0} \delta \mathbf{E}, \\ i\omega m_i n_{i0} \delta \mathbf{u}_i &= i\mathbf{k} m_i c_i^2 \delta n_i - Zen_{i0} \delta \mathbf{E}, \\ i\omega \delta \mathbf{E} &= \frac{e}{\varepsilon_0} (Zn_{i0} \delta \mathbf{u}_i - n_{e0} \delta \mathbf{u}_e). \end{aligned}$$

Jde o soustavu 11 algebraických rovnic pro jedenáct neznámých δn_e , δn_i , $\delta \mathbf{u}_e$, $\delta \mathbf{u}_i$, $\delta \mathbf{E}$. Pokusíme se snížit řád soustavy. Z třetí a čtvrté rovnice vypočteme $\delta \mathbf{u}_e$, $\delta \mathbf{u}_i$ a dosadíme do zbývajících. Potom z poslední rovnice vypočteme $\delta \mathbf{E}$ (bude se vyskytovat na obou stranách rovnice) a dosadíme do zbývajících dvou. Získáme výsledek

$$\begin{aligned} & \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_e^2 k^2) - \omega_{pe}^2 c_e^2 k^2 \right] \delta n_e + \left[Z \omega_{pe}^2 c_i^2 k^2 \right] \delta n_i = 0, \\ & \left[\frac{1}{Z} \omega_{pi}^2 c_e^2 k^2 \right] \delta n_e + \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pi}^2 c_i^2 k^2 \right] \delta n_i = 0, \end{aligned}$$

kde jsme vzniklé kombinace veličin označili jako rychlost zvuku (u elektronů jde o formální označení, lidské ucho zvuk nesený elektrony neslyší) a plazmovou frekvenci:

$$c_e^2 \equiv \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_e}; \quad c_i^2 \equiv \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i}, \quad (4.44)$$

$$\omega_{pe}^2 \equiv \frac{n_{e0} e^2}{m_e \epsilon_0}; \quad \omega_{pi}^2 \equiv \frac{n_{i0} Z^2 e^2}{m_i \epsilon_0}, \quad (4.45)$$

Má-li mít vzniklá soustava nenulové řešení, musí být její determinant nulový.

$$\left(\begin{array}{c} \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_e^2 k^2) - \omega_{pe}^2 c_e^2 k^2 \right] \times \\ \times \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pi}^2 c_i^2 k^2 \right] \end{array} \right) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 c_e^2 c_i^2 k^4 = 0.$$

Vhodným přeskupením členů (MATHEMATICA, MATLAB) získáme disperzní relaci

$$\left(\begin{array}{c} \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] \times \\ \times \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] \end{array} \right) = 0,$$

kteřá má dvě základní větve, první nezávisí na vlnovém vektoru (tzv. plazmové oscilace – viz kapitola 4.2.2), druhá závisí (plazmové vlny – viz kapitola 4.2.3 a iontové vlny – viz kapitola 4.2.4):

$$\blacktriangleright \quad \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] = 0, \quad (4.46)$$

$$\blacktriangleright \quad \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] = 0. \quad (4.47)$$

4.2.2 Plazmové oscilace

Po roznásobení rovnice (4.46) získáme nenulové řešení

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2.$$

Kvadrát plazmové frekvence elektronů je o tři řády vyšší než iontů. Druhý člen na pravé straně představuje jen nepatrnou korekci na hmotnost iontů a většinou se vůbec neuvažuje. Upravme pravou stranu (z důvodu kvazineutality je $n_{i0} = n_{e0}/Z$):

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} \right) = \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{n_{i0} Z^2 e^2}{m_i \epsilon_0} \frac{m_e \epsilon_0}{n_{e0} e^2} \right) = \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{Z m_e}{m_i} \right) \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{Z m_e}{m_i} \right). \quad (4.48)$$

Kdyby měly ionty nekonečnou hmotnost, oscilace by probíhaly přesně na plazmové frekvenci elektronů a ionty by se vůbec nepohybovaly. Můžeme si představit, že tekutina elektronů osciluje na nehybném pozadí iontů. Druhý člen v závorce je malou korekcí na konečnou hmotnost iontů. Plazmová frekvence elektronů je jednou z nejdůležitějších charakteristik plazmatu. Plazma často reaguje na vnější podněty oscilacemi nebo vlnami na plazmové frekvenci elektronů, která se pro většinu druhů plazmatu pohybuje v radiové oblasti.

4.2.3 Plazmové vlny

Věnujme se druhé větvi (4.47) disperzní relace. Realizujme nerovnost $m_e \ll m_i$ limitním přechodem $m_i \rightarrow \infty$. Tím budeme sledovat vysokofrekvenční část vln, při kterých se ionty nestíhají pohybovat a efektivně mají nekonečnou hmotnost. Limitní přechod dává

$$\omega_{pi}^2 \rightarrow 0; \quad c_i^2 \rightarrow 0.$$

Z disperzní relace (4.47) zůstane jen vztah

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2 = 0,$$

ze kterého plyne disperzní relace *plazmových vln*

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2; \quad \text{resp.} \quad \omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2}. \quad (4.49)$$

Limita dlouhých vln (k malé)

Druhý člen v disperzní relaci je zanedbatelný a jde o oscilace na plazmové frekvenci elektronů

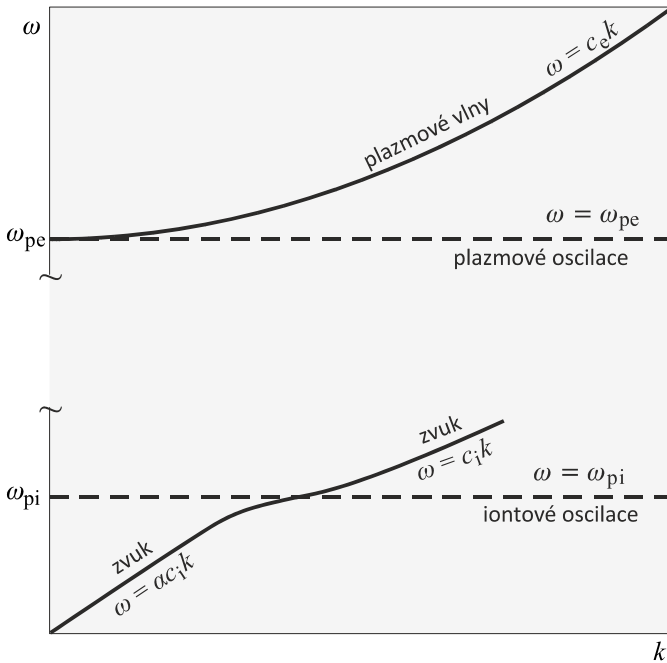
$$\omega = \omega_{pe}.$$

Limita krátkých vln (k velké)

První člen v disperzní relaci je zanedbatelný a jde o lineární závislost

$$\omega = c_e k.$$

Směrnici závislosti je rychlost „zvuku“ elektronů (přibližně tepelná rychlost elektronů). Skutečný zvuk je samozřejmě nesen těžkými částicemi (ionty a neutrály) a má mnohem nižší frekvenci.



Obr. 88: Disperzní relace plazmových oscilací a vln.

Poznámka 1: Plazmové vlny jsou nejtypičtějším vysokofrekvenčním rozvlněním plazmatu (zpravidla v oboru radiových frekvencí). Disperzní relace (4.49) připouští jen řešení

$$\omega > \omega_{pe} . \quad (4.50)$$

Při nižších frekvencích se vlna nešíří. Je to patrné z disperzní relace přímo i z přiloženého obrázku. Pro nižší frekvence, než je plazmová, poskytuje disperzní relace komplexní řešení a vlna je tlumená.

Poznámka 2: Co znamená malé či velké k ? Jde o to, který ze dvou členů ve výrazu (4.49) převládne. Vzhledem k tomu, že $\omega_{pe}^2/c^2k^2 = \lambda^2/4\pi^2\gamma\lambda_D^2$, můžeme limitu malých k chápat jako dlouhovlnnou oblast $\lambda \gg \lambda_D$ a limitu velkých k jako krátkovlnnou oblast s $\lambda \ll \lambda_D$, kde λ_D je Debyeova vzdálenost.

Poznámka 3: Druhý člen v disperzní relaci (4.49) je dán tepelným pohybem elektronů. Kdyby neexistoval tepelný pohyb, vlny by se nešířily, šlo by jen o oscilace.

Poznámka 4: Z disperzní relace (4.49) snadno spočteme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c_e \sqrt{1 + \frac{\omega_{pe}^2 \lambda^2}{4\pi^2 c_e^2}} ; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_e / \sqrt{1 + \frac{\omega_{pe}^2 \lambda^2}{4\pi^2 c_e^2}} . \quad (4.51)$$

Snadno nahlédneme, že pro fázovou a grupovou rychlost platí vztahy:

$$v_f > c_e ; \quad v_g < c_e ; \quad v_f v_g = c_e^2 . \quad (4.52)$$

Poznámka 5: V přítomnosti magnetických polí přejde vysokofrekvenční větev na složitější komplex elektromagnetických vln v plazmatu. Naopak nízkofrekvenční větev popsaná v následující kapitole přejde v přítomnosti magnetických polí na komplex magnetoakustických vln.

4.2.4 Iontové vlny

Realizujeme nyní nerovnost $m_e \ll m_i$ limitním přechodem $m_e \rightarrow 0$. Elektronky s nulovou hmotností se stanou jakýmsi všudypřítomným záporným oblakem. Ionty mají nyní konečnou, i když velkou hmotnost. Budou oscilovat s velmi nízkými frekvencemi na pozadí elektronů. Limitní přechod znamená

$$\begin{aligned} \omega_{pe}^2 &\rightarrow \infty ; \\ c_e^2 &\rightarrow \infty . \end{aligned}$$

V disperzní relaci (4.47) zůstanou podstatné členy

$$(-\omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 = 0 .$$

Relaci snadno vyřešíme vzhledem ω :

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 + c_i^2 k^2 - \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2}$$

a po jednoduché úpravě dostaneme

$$\blacktriangleright \quad \omega^2 = \omega_{pi}^2 \left[1 - \frac{1}{1 + c_e^2 k^2 / \omega_{pe}^2} \right] + c_i^2 k^2 . \quad (4.53)$$

Mezi rychlostí zvuku (4.44), plazmovou frekvencí (4.45) a Debyeovou stínící vzdáleností (2.87) platí jednoduchý vztah

$$c_\alpha^2 / \omega_{p\alpha}^2 = \gamma_\alpha \lambda_\alpha^2 ,$$

pomocí kterého se disperzní relace iontových vln někdy upravuje do tvaru:

$$\blacktriangleright \quad \omega^2 = \omega_{pi}^2 \left[1 - \frac{1}{1 + \gamma_e \lambda_{De}^2 k^2} + \gamma_i \lambda_{Di}^2 k^2 \right] . \quad (4.54)$$

Limita dlouhých vln (k malé)

V limitě dlouhých vln upravíme disperzní relaci (4.53) takto

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_{\text{pi}}^2 \left[1 - \frac{1}{1 + c_e^2 k^2 / \omega_{\text{pe}}^2} \right] + c_i^2 k^2 \approx \\ &\approx \omega_{\text{pi}}^2 \left[1 - \left(1 - c_e^2 k^2 / \omega_{\text{pe}}^2 \right) \right] + c_i^2 k^2 \Rightarrow \\ \omega^2 &= c_i^2 k^2 \left[1 + \frac{\omega_{\text{pi}}^2 c_e^2}{\omega_{\text{pe}}^2 c_i^2} \right].\end{aligned}$$

Využijeme-li definice rychlostí zvuku (4.44), plazmové frekvence (4.45) a kvazineutralitu $n_{i0} = n_{e0}/Z$, dostaneme

$$\omega^2 = c_i^2 k^2 \left(1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i} \right); \quad \text{resp.} \quad \omega = c_i k \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i}}.$$

Jde o zvukové vlny šířící se rychlostí

$$c_s = c_i \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i}}.$$

Limita krátkých vln (k velké)

Z disperzní relace (4.53) zbude pro krátké vlny jediný člen

$$\omega^2 \approx c_i^2 k^2; \quad \text{resp.} \quad \omega = c_i k.$$

Jde opět o zvukové vlny šířící se rychlostí

$$c_s = c_i.$$

Nízkofrekvenční řešení jsou zvukové vlny s malou závislostí rychlosti na vlnové délce.

4.2.5 Další vlivy

Pohyb prostředí

Plazmové oscilace a vlny ovlivňuje samozřejmě celá řada dalších faktorů zde neprobíraných. Pohybuje-li se prostředí, v němž je generována vlna, rychlostí \mathbf{u}_0 , změní se disperzní relace (4.47) na relaci

$$\left[(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)^2 - \omega_{\text{pe}}^2 - c_e^2 k^2 \right] \cdot \left[(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)^2 - \omega_{\text{pi}}^2 - c_i^2 k^2 \right] - \omega_{\text{pe}}^2 \omega_{\text{pi}}^2 = 0,$$

kteřá v sobě přirozeným způsobem zahrnuje Dopplerův posun frekvence.

Srážky

V plazmatu mohou probíhat srážky, které by se projevíly srážkovým členem na pravé straně pohybové rovnice. Srážkový člen je úměrný rychlosti a srážkové frekvenci ν . Vzhledem k tomu, že plazmové oscilace elektronů jsou podélné, lze učinit odhad vlivu srážek na oscilace jen v jedné dimenzi a bez nepodstatných členů (tlak, atd.):

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_e u_e) &= 0, \\ m_e n_e \frac{\partial u_e}{\partial t} &= -e n_e E - n_e m_e \nu u_e, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0} e n_e u_e.\end{aligned}$$

Po provedení perturbací a Fourierovy transformace získáme disperzní relaci. Bez srážkového členu má tvar (jde asi o nejrychlejší způsob jak odvodit hodnotu plazmové frekvence)

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2; \quad \omega_{pe}^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}$$

Se srážkovým členem dostaneme z podmínky na nulovost determinantu

$$\omega^2 + i\omega\nu - \omega_{pe}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = -i\frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\omega_{pe}^2 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2}.$$

Srážky způsobují útlum plazmových oscilací s koeficientem útlumu $\delta = \nu/2$.

Magnetické pole

Přítomnost magnetického pole ovlivní zásadně charakter vln. Vysokofrekvenční větev přejde v *komplex anizotropních elektromagnetických vln* (viz kapitola 4.4) a nízkofrekvenční větev v *komplex anizotropních magnetoakustických vln*. (viz kapitola 4.3).



4.3 Magnetoakustické vlny

V této kapitole si povšimneme nízkofrekvenčních vln generovaných pohybem iontů v přítomnosti magnetického pole. Samo magnetické pole vnáší do hry zcela nový prvek – anizotropii. Dalšími činiteli ovlivňujícími charakter vln jsou samozřejmě elektrický náboj iontů a vodivost prostředí.

4.3.1 Odvození disperzní relace

Za výchozí sadu rovnic budeme uvažovat klasickou jednotekutinovou magnetohydrodynamiku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Difúzní člen v rovnici pro magnetické pole je zodpovědný za útlum magnetoakustických vln. V případě vysoce vodivého plazmatu $\sigma \rightarrow \infty$ je možné tento člen zanedbat a magnetoakustické vlny nebudou tlumené. Kdybychom tento člen v soustavě ponechali, poskytovala by disperzní relace komplexní řešení pro frekvenci i vlnový vektor a rovinná vlna by tak byla exponenciálně tlumena. Celá výchozí soustava je opět algebraicky uzavřena stavovou rovnicí.

Postupujme nyní obdobně jako v minulém případě, tj. provedeme perturbace klidového řešení

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho; \quad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}; \quad p = p_0 + \delta p. \quad (4.56)$$

Hledané řešení (4.56) dosadíme do soustavy (4.55), zanedbáme druhé a vyšší mocniny poruch a budeme předpokládat poruchu ve tvaru rovinné vlny. Výsledná linearizovaná algebraická soustava rovnic je:

$$\begin{aligned} -\omega \delta\rho + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{k} \delta p - \rho_0 \omega \delta\mathbf{u} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \delta\mathbf{B}) \mathbf{k} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \delta\mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{B}_0 \times \delta\mathbf{u}) - \omega \delta\mathbf{B} &= 0, \\ \delta p - c_s^2 \delta\rho &= 0; \quad c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Jde o soustavu osmi rovnic (2 skalární a 2 vektorové) bez pravých stran. Postupnou eliminací proměnných je možné nalézt jen rovnici pro rychlost (druhá rovnice). Nejprve dosadíme za $\delta\rho$ z poslední rovnice. Poté za $\delta\rho$ z první rovnice a nakonec za $\delta\mathbf{B}$ ze třetí rovnice (upravíme dvojný vektorový součin). Získáme tak soustavu rovnic pro perturbace rychlostního pole

$$\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (4.58)$$

Složky symetrické matice \mathbf{M} mají tvar

$$M_{kl} = \left[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \delta_{kl} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) (k_k v_l^{(A)} + k_l v_k^{(A)}) - (v_A^2 + c_s^2) k_k k_l.$$

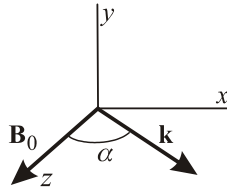
Tuto matici můžeme také zapsat v invariantním tvaru

$$\mathbf{M} = \left[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \mathbf{I} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) [\mathbf{k} \otimes \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_A \otimes \mathbf{k}] - (v_A^2 + c_s^2) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}.$$

Veličina \mathbf{v}_A se nazývá Alfvénova rychlost a je definována jako

$$\mathbf{v}_A \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}. \quad (4.59)$$

Pro dopočet disperzní relace můžeme zvolit souřadnicový systém. Osu z volme ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 (ve směru Alfvénovy rychlosti). Kolem této osy otočíme souřadnicový systém tak, aby vlnový vektor \mathbf{k} byl v rovině (x, z) . V takto zvoleném souřadnicovém systému platí $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$, $\mathbf{v}_A = (0, 0, v_A)$ a pro vlnový vektor máme výraz $\mathbf{k} = (k \sin \alpha, 0, k \cos \alpha)$. Úhel mezi vektory \mathbf{B}_0 a \mathbf{k} je α .



Obr. 89: Volba souřadnic.

Pro tuto volbu má matice \mathbf{M} jednoduchý tvar:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega^2 - k^2 v_A^2 - c_s^2 k^2 \sin^2 \alpha & 0 & -c_s^2 k^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & \omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2 \alpha & 0 \\ -c_s^2 k^2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \omega^2 - c_s^2 k^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení soustavy (4.58), musí být determinant matice \mathbf{M} nulový. Z této podmínky získáme disperzní relaci magnetoakustických vln, a to dokonce ve tvaru nezávislém na souřadnicové soustavě

$$\left[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \cdot \left[\omega^4 - k^2 (v_A^2 + c_s^2) \omega^2 + c_s^2 k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] = 0. \quad (4.60)$$

Alfvénova rychlost míří ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 . Již na první pohled je vidět, že magnetoakustické vlny jsou mnohem složitější než obyčejný zvuk. Bude-li výraz v první hranaté závorce nulový, získáme jeden z módů, tzv. *Alfvénovu vlnu* (A). Bude-li nulový výraz v druhé hranaté závorce, získáme snadno řešitelnou bikvadratickou rovnici pro úhlovou frekvenci. Její řešení poskytuje další dva módy magnetoakustických vln, tzv. *pomalou vlnu* (S, Slow) a *rychlou vlnu* (F, Fast). Disperzní relace jednotlivých módů zřejmě jsou (α je úhel mezi vlnovým vektorem a magnetickým polem resp. Alfvénovou rychlostí):

$$\begin{aligned} \omega^2 &= v_A^2 k^2 \cos^2 \alpha, \\ \blacktriangleright \quad \omega^2 &= \frac{1}{2} k^2 (c_s^2 + v_A^2) - \frac{1}{2} k^2 \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}, \\ \omega^2 &= \frac{1}{2} k^2 (c_s^2 + v_A^2) + \frac{1}{2} k^2 \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Poznamenejme, že v některé literatuře se Alfvénovými vlnami nazývají všechny tři zde zavedené módy magnetoakustických vln. V klasické zvukové vlně dochází k přelévání hustoty energie mezi chaotickou (tlakovou, p) částí energie a uspořádanou (kinetickou, $\rho v^2/2$) částí energie. V magnetoakustické vlně je rovnocenným partnerem ještě hustota energie magnetického pole (magnetický tlak, $p_M = B^2/2\mu_0$). Položíme-li sobě rovny hustotu kinetické energie a magnetický tlak, získáme hodnotu Alfvénovy rychlosti:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad v = v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}.$$

4.3.2 Vlnoplochy magnetoakustických vln

Z disperzních relací (4.61) snadno určíme fázové rychlosti šíření jednotlivých módů:

$$\begin{aligned} v_{Af}^2 &= v_A^2 \cos^2 \alpha, \\ v_{Sf}^2 &= \frac{1}{2} (c_s^2 + v_A^2) - \frac{1}{2} \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}, \\ v_{Ff}^2 &= \frac{1}{2} (c_s^2 + v_A^2) + \frac{1}{2} \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Nalezněme nyní tyto rychlosti ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 ($\alpha = 0$) a ve směru kolmém na toto pole ($\alpha = \pi/2$). Výsledek je v následující tabulce:

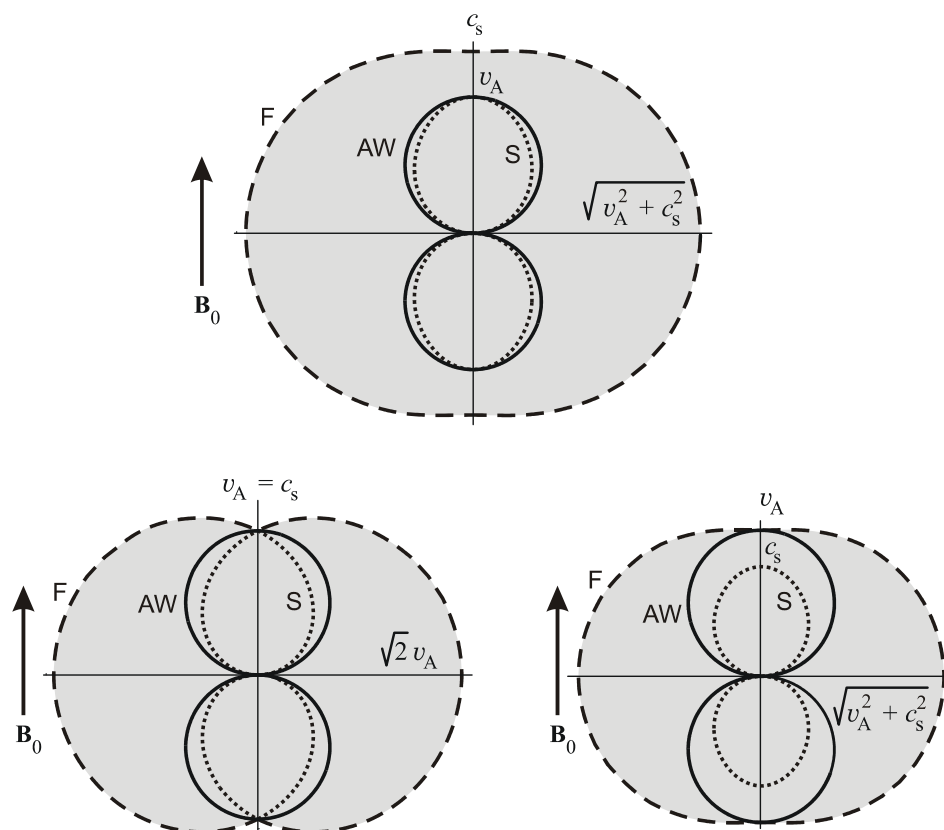
mód	A	S	F
$\alpha = 0$	v_A	$\min(v_A, c_s)$	$\max(v_A, c_s)$
$\alpha = \pi/2$	0	0	$\sqrt{v_A^2 + c_s^2}$

(4.63)

(4.64)

Ve směru pole je fázová rychlost Alfvénovy vlny rovna Alfvénově rychlosti, pomalá vlna získá menší z obou základních rychlostí (rychlosti zvuku a Alfvénovy rychlosti) a rychlá vlna se bude šířit větší z obou rychlostí. Ve směru kolmém na původní magnetické pole má nenulovou rychlost šíření jen rychlá vlna, pomalá a Alfvénova mají nulové rychlosti.

Situace je dobře patrná na polárním diagramu závislosti fázové rychlosti všech tří módů. Takový diagram můžeme interpretovat jako tvary jednotlivých vlnoploch. Při zmenšujícím se magnetickém poli se vlnoplochy Alfvénovy vlny a pomalé magnetoakustické vlny zmenšují a vlnoplocha rychlé magnetoakustické vlny se stává „obyčejnou“ zvukovou vlnoplochou. Magnetické pole vnáší do šíření zvuku anizotropii. Chování vlnoploch při různých hodnotách pole si můžete vyzkoušet v apletech na serveru aldebaran.cz. Tvar vlnoploch resp. polární diagram fázové rychlosti pro různé hodnoty magnetických polí si prohlédněte na obrázcích.



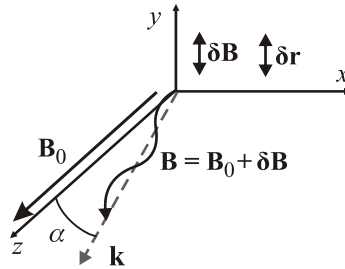
Obr. 90: Na horním obrázku je znázorněna situace pro slabé pole ($v_A < c_s$). Rychlá vlna (F) reprezentuje „normální“ zvukovou vlnu. Na levém dolním obrázku je vyrovnán vliv magnetického a dynamického tlaku ($v_A = c_s$). Na pravém dolním obrázku dominuje magnetické pole ($v_A > c_s$).

4.3.3 Směry vektorů v magnetoakustických vlnách

Chceme-li zkoumat směry jednotlivých poruch u konkrétního módu, musíme dosadit příslušnou disperzní relaci do původní linearizované soustavy (4.57). Volba souřadnicového systému zůstává zachována. Ze soustavy rovnic (4.57) nalezneme vzájemné směry jednotlivých vektorů. Ukazuje se, že magnetoakustické vlny jsou směsicí podélných i příčných vln. Z rovnice $\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ plyne $-\omega \delta \mathbf{B} = \mathbf{k} \times (\delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)$, tj. porucha magnetického pole je vždy kolmá na směr šíření vlny. Povšimněme si nyní alespoň tři zajímavých situací.

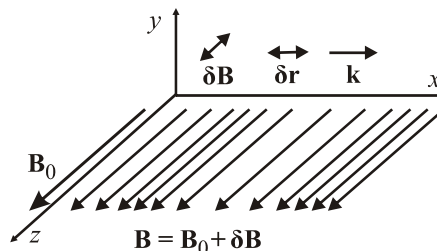
Alfvénova vlna

Alfvénův mód je nejjednodušší ze tří nalezených disperzních relací. Ze soustavy rovnic (4.57) snadno určíme, že plazma kmitá napříč magnetickému poli i směru šíření a jde tedy o vlnu příčnou. Porucha magnetického pole je kolmá na původní magnetické pole. To způsobuje rozvlnění magnetických indukčních čar podle obrázku. Je-li pole orientováno ve směru třetí osy, má disperzní relace tvar $\omega = v_A k \cos \alpha = v_A k_3$ a grupová rychlost je rovna $\mathbf{v} = (0, 0, v_A)$. Energie se v Alfvénově vlně šíří jen podél magnetického pole \mathbf{B}_0 a to Alfvénovou rychlostí.



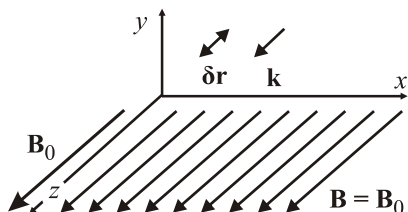
Kompresní vlna

V rychlé magnetoakustické vlně je při směru šíření kolmém na magnetické pole ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) porucha pole rovnoběžná s polem původním. Tím vzniká vlna hustších a řidších oblastí magnetických indukčních čar, kterou nazýváme kompresní vlna. Plazma kmitá podél směru šíření vln \mathbf{k} (kolmo na pole \mathbf{B}_0). Jde proto o *podélnou vlnu*. Vlnění je velmi podobné „obyčejnému“ zvuku. Roli pružného prostředí však přebírá nejenom hydrostatický tlak p , ale i magnetický tlak $p_M = B^2/2\mu_0$. Rychlost vln je dána oběma vlivy a má hodnotu $v_f = (c_s^2 + v_A^2)^{1/2}$. Kompresní vlna se někdy nazývá *kompresní Alfvénova podélná vlna*.



Klasická zvuková vlna

Ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 se buď rychlá nebo pomalá vlna šíří rychlostí zvuku c_s (podle velikosti magnetického pole). Plazma kmitá podél směru šíření a není ovlivněno přítomností magnetického pole. Porucha magnetického pole je nulová.

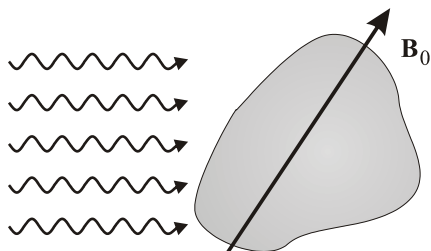


4.4 Elektromagnetické vlny

Elektromagnetické vlny šířící se plazmatem interagují především s málo hmotnými elektrony. Ionty nemohou vysokofrekvenční děje sledovat. V elektromagnetické vlně bude vždy platit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \Rightarrow \delta \mathbf{B} \perp \mathbf{k}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \Rightarrow \delta \mathbf{B} \perp \delta \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Konstantní magnetické pole \mathbf{B}_0 způsobuje anizotropii v šíření vln, vlny se šíří jinak podél pole \mathbf{B}_0 a jinak kolmo na pole \mathbf{B}_0 . Podobně jako u krystalů nalezneme v plazmatu *řádnou* a *mimořádnou* vlnu, budeme-li vlny sledovat kolmo na směr pole. Tytéž vlny se ale podél pole budou jevit jako směsice *levotočivých* a *pravotočivých* módů. K projevům plazmatu patří také několik sekund trvající nízkofrekvenční záblesky vznikající jako doprovodné efekty blesků a šířící se podél zemského magnetického pole, tzv. *hvizdy*. Velmi zajímavá je také otázka reakce materiálu na vysokofrekvenční vlny a výpočet *permitivity plazmatu*.



Obr. 94: Při interakci elektromagnetické vlny s plazmatem lze vybudit celou řadu módů.

4.4.1 Disperzní relace elektromagnetického komplexu

Za výchozí rovnice budeme volit rovnici kontinuity pro elektrony, pohybovou rovnici pro elektrony a Maxwellovy rovnice pro časový vývoj elektrického a magnetického pole. Maxwellův posuvný proud nelze vzhledem k frekvenci dějů zanedbat. Všude uvažujeme limitu $m_i \rightarrow \infty$; $p \rightarrow 0$, tj. pro šíření elektromagnetických vln plazmatem zanedbáváme pohyb iontů a tepelné děje v plazmatu (omezíme se na chladné elektronové plazma):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{u}_e) &= 0, \\ m_e n_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + m_e n_e (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e &= -en_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}; \quad \mathbf{j} = -en_e \mathbf{u}_e. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Standardním postupem provedeme linearizaci

$$n_e = n_0 + \delta n_e, \quad \mathbf{u}_e = \delta \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} = \delta \mathbf{E} \quad (4.67)$$

a Fourierovu transformaci soustavy (4.66). Perturbace koncentrace se nikde nevyskytuje, a proto je možné rovnici kontinuity vynechat. Za proudovou hustotu všude dosadíme z poslední rovnice:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_e &= -i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{E} - i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_0, \\ \delta \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}, \\ \delta \mathbf{E} &= -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{B} + i \frac{en_0}{\varepsilon_0 \omega} \delta \mathbf{u}_e. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Zavedme standardní označení

$$c^2 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}; \quad \omega_p^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}; \quad \omega_c \equiv \frac{e B_0}{m_e} \quad (4.69)$$

pro rychlost světla, plazmovou frekvenci a cyklotronní frekvenci a dále zavedme jednotkový vektor ve směru magnetického pole

$$\mathbf{e}_B \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}. \quad (4.70)$$

V soustavě (4.68) budeme eliminovat proměnné, z druhé rovnice dosadíme za $\delta \mathbf{B}$ do ostatních rovnic:

$$\delta \mathbf{u}_e = -i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{E} - i \frac{\omega_c}{\omega} \delta \mathbf{u}_e \times \mathbf{e}_B,$$

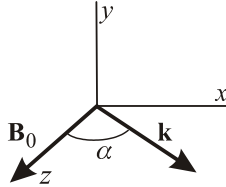
$$\delta \mathbf{E} = -\frac{c^2}{\omega^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}) + i \frac{en_0}{\varepsilon_0 \omega} \delta \mathbf{u}_e.$$

V dalším kroku vypočteme z druhé rovnice poruchu rychlostního pole a dosadíme do rovnice první (vyjádříme dvojné vektorové součiny). Získáme tak samostatnou rovnici pro poruchu elektrického pole:

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) \delta \mathbf{E} + i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2) \delta \mathbf{E} \times \mathbf{e}_B +$$

$$+ c^2 (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}) \mathbf{k} + i \frac{\omega_c}{\omega} c^2 (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}) \mathbf{k} \times \mathbf{e}_B = 0.$$

Souřadnicový systém zvolíme stejně jako v minulé kapitole, tj. osa z bude mířit ve směru pole $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ a vektor \mathbf{k} bude v rovině (x, y) , tj. $\mathbf{k} = (k \sin \alpha, 0, k \cos \alpha)$:



Rovnice pro poruchu elektrického pole získá v této souřadnicové soustavě tvar

$$\mathbf{M}_E \cdot \delta \mathbf{E} = 0; \quad (4.71)$$

$$\mathbf{M}_E = \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha, & i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2), & c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha, \\ -i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha), & \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2, & -i \frac{\omega_c}{\omega} c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha, \\ c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha, & 0, & \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \sin^2 \alpha. \end{pmatrix}.$$

Pro netriviální řešení musí být determinant matice \mathbf{M}_E nulový, což vede na relaci

$$-\left[c^4 k^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right] \cdot \left[(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 (\omega^2 - c^2 k^2) \right] +$$

$$+ \left[\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \sin^2 \alpha \right] \cdot \left[(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha) (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \right. \quad (4.72)$$

$$\left. - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 (\omega^2 - c^2 k^2) (\omega^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha) \right] = 0.$$

U elektromagnetických vln je velmi často důležitý index lomu daný vztahem

$$N = \frac{c}{v_f} = \frac{c}{\omega/k} = \frac{ck}{\omega}. \quad (4.73)$$

Disperzní relaci bývá proto někdy výhodné řešit vzhledem k ck resp. ck/ω . Výsledný index lomu je potom funkcí úhlové frekvence

$$N(\omega) \equiv \frac{ck(\omega)}{\omega}. \quad (4.74)$$

Index lomu závisí samozřejmě i na koncentraci (prostřednictvím plazmové frekvence) a na magnetickém poli (prostřednictvím cyklotronní frekvence). Zajímavé jsou limitní situace, kdy index lomu je nekonečný (tzv. *rezonance*) nebo nulový (tzv. *cut-off*, mezní frekvence za kterou se vlna nešíří):

$$\text{rezonance:} \quad N \rightarrow \infty \quad (v_f \rightarrow 0); \quad (4.75)$$

$$\text{mezní frekvence:} \quad N \rightarrow 0 \quad (v_f \rightarrow \infty). \quad (4.76)$$

► Vlny šířící se podél pole \mathbf{B}_0 ($\alpha = 0$)

Podél pole platí $\alpha = 0$ z disperzní relace zůstane relativně jednoduchý výraz

$$\left[\omega^2 - \omega_p^2 \right] \cdot \left[\left(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \right)^2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \left(\omega^2 - c^2 k^2 \right)^2 \right] = 0. \quad (4.77)$$

Řešení vzhledem k ω má tři základní módy. První mód získáme vynulováním levé závorky, jde o plazmové oscilace elektronů na plazmové frekvenci. Tentokrát se ve výrazu neobjevila oprava na hmotnost iontů, protože je považujeme za nekonečně hmotné. Vynulováním pravé závorky získáme další dva módy, tzv. R a L vlny.

R a L vlny

Disperzní relaci získáme z rovnosti

$$\left(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \right)^2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \left(\omega^2 - c^2 k^2 \right)^2 = 0,$$

ze které nejprve vypočteme kombinaci $\omega^2 - c^2 k^2$ (vyskytuje se v obou závorkách). Z ní poté určíme $c^2 k^2$ (řešení disperzní relace vzhledem ke k je jednodušší):

$$\blacktriangleright \quad c^2 k^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 \mp \omega_c/\omega}; \quad \omega_c = |\omega_{ce}|. \quad (4.78)$$

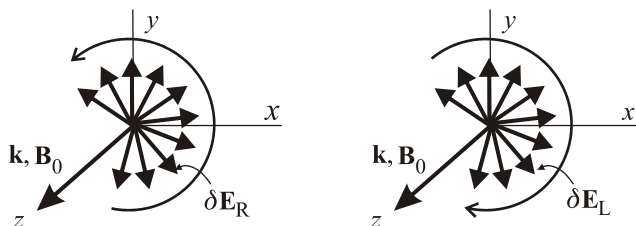
Pro index lomu máme

$$\blacktriangleright \quad N_{R,L}^2 = 1 - \frac{(\omega_p/\omega)^2}{1 \mp \omega_c/\omega}. \quad (4.79)$$

Po dosazení $c^2 k^2$ z disperzní relace (4.78) do linearizované rovnice (4.71) pro elektrické pole zjistíme, že

$$\delta E_y = \pm i \delta E_x; \quad \delta E_z = 0. \quad (4.80)$$

Imaginární jednotka znamená vzájemný fázový posun složek E_x a E_y o $\pi/2$, tj. (podobně jako u skládání dvou fázově posunutých kolmých kmitů). Jde o pravotočivě a levotočivě polarizovanou kruhovou vlnu, tzv. R vlnu (Right, horní znaménko) a L vlnu. (Left, dolní znaménko). Porucha elektrického pole je kolmá na základní magnetické pole, $\delta\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$. Pro vlnu $\delta E_x = A \exp(ikz - i\omega t)$ je reálná část časové složky rovna $\text{Re}(\delta E_x) \sim A \cos \omega t$ a podle vztahu (4.80) je $\text{Re}(\delta E_y) \sim \pm A \sin \omega t$. Směr stáčení proto odpovídá následujícímu obrázku:



Obr. 96: Pravotočivá a levotočivá vlna.

Pravotočivost a levotočivost posuzujeme podle vektoru elektrického pole při pohledu ve směru magnetického pole B_0 . Určeme nyní rezonanční a mezní frekvence:

Cyklotronní rezonance. Situace $N \rightarrow \infty$ nastane jen pro R vlnu při frekvenci

$$\omega = \omega_c . \quad (4.81)$$

Vlna je absorbována na frekvenci Larmorova pohybu elektronů. L vlna rezonanci s elektrony nepodléhá (elektrický vektor se otáčí opačně, než je přirozený pohyb elektronů kolem magnetického pole).

Mezní frekvence (pravá a levá). Situace $N \rightarrow 0$ odpovídá odrazu vln, respektive hranici šíření vln a nastává pro tzv. levou a pravou mezní frekvenci:

$$\omega = \omega_{R,L} \equiv \pm \frac{1}{2} \omega_c + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} . \quad (4.82)$$

Při řešení kvadratické rovnice bylo použito před diskriminantem jen znaménko “+”, aby výsledná frekvence byla kladná. Veškeré možné kombinace jsou zastoupeny a žádné řešení se neztratí. Možnosti šíření R a L vln jsou na obrázku 97.

► Vlny šířící se kolmo na pole \mathbf{B}_0 ($\alpha = \pi/2$)

Pro $\alpha = \pi/2$ z disperzní relace (4.72) máme

$$\left[\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \right] \cdot \left[(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \omega_c^2 (\omega^2 - c^2 k^2) \right] = 0 . \quad (4.83)$$

Řádná vlna (O)

Anulováním první závorky získáme *řádnou vlnu* (O vlnu – Ordinary Wave), jejíž disperzní relace má obdobný tvar jako disperzní relace plazmových vln:

$$\blacktriangleright \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (4.84)$$

Pro index lomu řádné vlny z této disperzní relace odvodíme

$$\blacktriangleright \quad N_O^2 \equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 = 1 - \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2}. \quad (4.85)$$

Index lomu je frekvenčně závislý, různé frekvence elektromagnetické vlny se šíří různou rychlostí. Na vztahu (4.85) pro index lomu jsou založeny různé diagnostické metody pro plazma, například *šlířová fotografie*, při které se zobrazují příčné gradienty indexu lomu. V experimentální fyzice se často využívá zjednodušený vztah (platí pro $\omega \gg \omega_p$), který získáme jako první člen Taylorova rozvoje

$$N_O = \sqrt{1 - \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2}} \approx 1 - \frac{n_0 e^2}{2 m_e \epsilon_0 \omega^2}. \quad (4.86)$$

Rovnice (4.84) resp. (4.85) je základní disperzní relací pro šíření elektromagnetické vlny plazmatem. Úhlová frekvence a vlnový vektor budou reálná čísla pro $\omega > \omega_p$. Pro $\omega < \omega_p$ dochází k útlumu vlnění (komplexní k , ω), vlna se nešíří. Dochází k rozkmitání elektronů a absorpci vlnění. Oblasti šíření O vlny jsou patrné z obrázku 97.

Rezonance. Pro řádnou vlnu nedochází k žádným rezonancím ($N \rightarrow \infty$), index lomu je vždy konečný.

Mezní frekvence (plazmová). Mezní frekvencí ($N \rightarrow 0$) je plazmová frekvence elektronů ω_p .

- Šíření řádné vlny není ovlivněno magnetickým polem. Vlna se šíří, jakoby magnetické pole neexistovalo.
- Řádná vlna má kmitající poruchu elektrického pole rovnoběžnou s původním magnetickým polem, $\delta \mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$.
- Pro frekvence vyšší než plazmová frekvence je plazma pro elektromagnetické vlny „průhledné“.

Mimořádná vlna (X)

Anulováním druhé závorky v (4.83) získáme disperzní relaci mimořádné vlny (X vlny – extraordinary Wave).

$$\left(\omega^2 - \omega_p^2 \right) \left(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \right) - \omega_c^2 \left(\omega^2 - c^2 k^2 \right) = 0. \quad (4.87)$$

Po vypočtení kombinace $\omega^2 - c^2 k^2$ určíme $c^2 k^2$ a následně index lomu mimořádné vlny:

$$\blacktriangleright \quad N_X^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2}, \quad \text{resp.}$$

$$N_X^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{1 - (\omega_p/\omega)^2}{1 - (\omega_p/\omega)^2 - (\omega_c/\omega)^2}. \quad (4.88)$$

Standardní limitní situace nastávají pro

$$N \rightarrow \infty \quad (v_f \rightarrow 0) \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_h \equiv \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}. \quad (4.89)$$

$$N \rightarrow 0 \quad (v_f \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_{L,R} \equiv \mp \frac{1}{2} \omega_c + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}. \quad (4.90)$$

Odvození mezních frekvencí (4.90) přímým výpočtem je obtížné (vede na odmocnění výrazu, který již obsahuje odmocninu). Výhodnější je dokázat (přímým dosazením do obou stran rovnosti), že mezi indexy lomu platí velmi užitečný vztah (označte si například $\omega_p/\omega = \mathcal{P}$, $\omega_c/\omega = \mathcal{C}$)

$$N_X^2 = \frac{2N_R^2 N_L^2}{N_R^2 + N_L^2}, \quad (4.91)$$

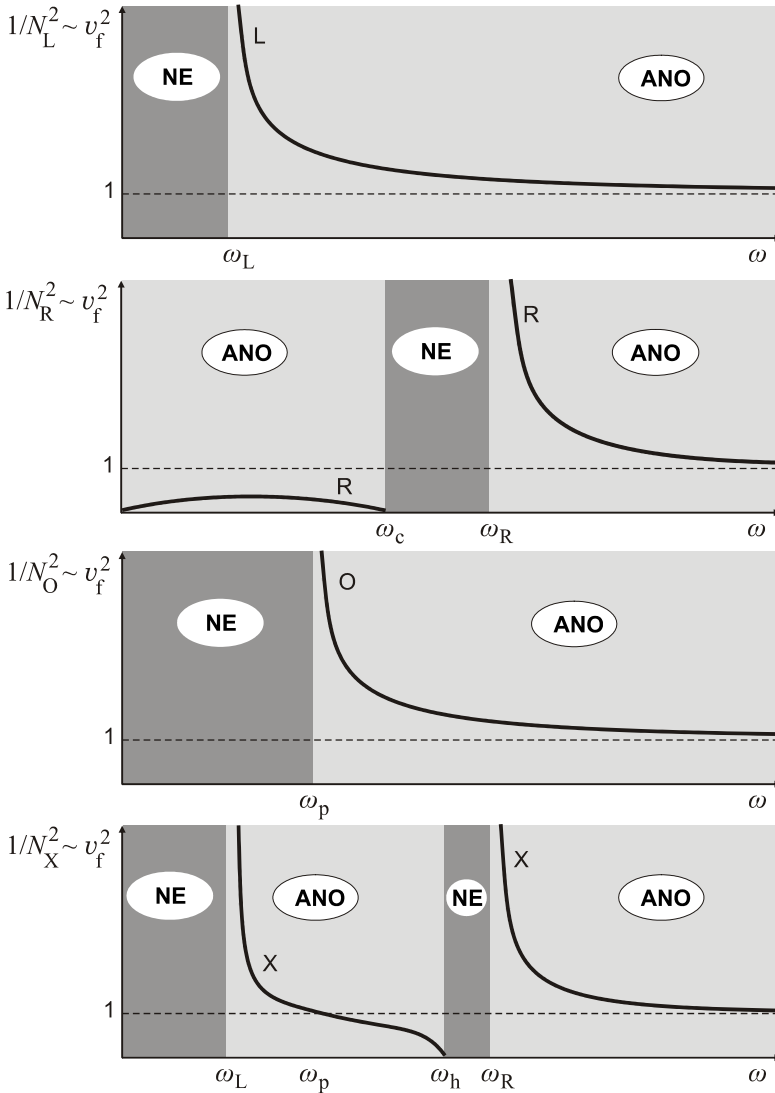
ze kterého plyne, že $N_X = 0$ pro $N_R = 0$ nebo $N_L = 0$, tj. pro levou a pravou mezní frekvenci.

Horní hybridní rezonance. K rezonanci dochází pro tzv. horní hybridní frekvenci ω_h , při které vlna nepostupuje, porucha magnetického pole je nulová a jde o čistě elektrostatické oscilace elektronů na horní hybridní frekvenci ($v_g = 0$). Jde o zobecnění plazmových oscilací, které jsou vyvolány elektromagnetickou vlnou. Vratnou silou je kromě Coulombovy síly ještě Lorentzova síla (Larmorova gyrace kolem \mathbf{B}_0), proto je frekvence vyšší než u čistých plazmových oscilací bez magnetického pole. Při nenulové teplotě elektronů (započtení tlakového členu) se tyto oscilace začnou šířit jako vlny.

Mezní frekvence (pravá a levá). Hranice šíření X vlny je dána mezní pravou a levou frekvencí $\omega_{R,L}$. Mimořádná vlna se šíří v intervalu frekvencí $\omega \in (\omega_L, \omega_h) \cup (\omega_R, \infty)$. Jednotlivé oblasti jsou patrné na obrázku 97.

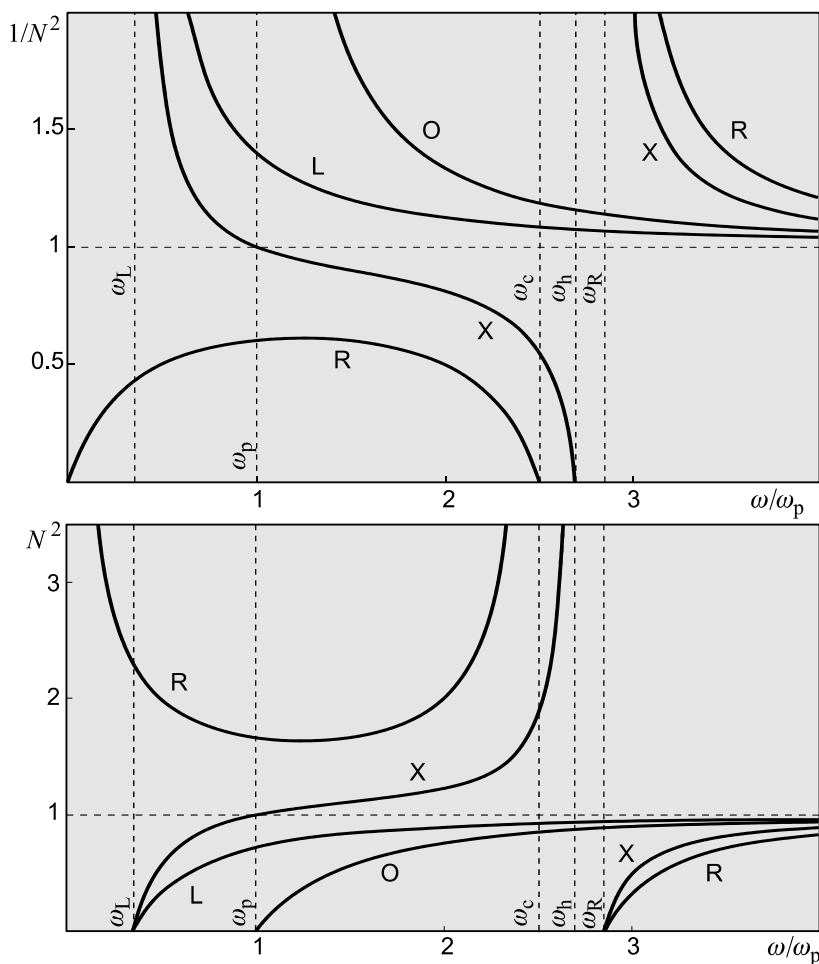
- X vlna se nešíří v oblastech $(0, \omega_L) \cup (\omega_h, \omega_R)$.
- X vlna je dominantně ovlivněna přítomností magnetického pole \mathbf{B}_0 .
- V X vlně je kmitající porucha elektrického pole kolmá na původním magnetickým polem $\delta\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$, elektrony oscilují podél elektrického pole a současně gyrují kolem magnetických siločar.

V případě obecného směru vlny vzhledem k magnetickému poli \mathbf{B}_0 je šíření elektromagnetické vlny popsáno obecnou disperzní relací (4.72). Poznamenejme, že na rezonančních frekvencích je elektromagnetická vlna pohlcována, což vede k ohřevu plazmatu. Takový dodatečný ohřev elektromagnetickými vlnami vhodných frekvencí je využíván u tokamaků. Vzhledem k tomu, že jsme dosud neuvažovali pohyb iontů, nevyšla nám cyklotronní iontová rezonance pro L vlnu a dolní hybridní rezonance pro X vlnu.



Obr. 97. Disperzní relace L, R, O a X vlny. Vlny se šíří jen ve světlých páslech.

Na následujícím obrázku jsou disperzní relace elektromagnetických vln pro chladné elektronové plazma. Křivky jsou vykresleny pro $\omega_c = 2,5 \omega_p$. V grafech není uvažován ani vliv iontů ani vliv tlakového členu (tepelných dějů) – v takovém případě by byly disperzní relace složitější. Na horním grafu snadno detekujeme rezonance (daná větev disperzní relace se dotkne x -ové osy). Jediným módem elektromagnetické vlny, který se může šířit i při ultranízkých frekvencích je R vlna, jde o tzv. hvizdy. Z dolního grafu je patrné, že elektromagnetická vlna má v plazmatu index lomu větší než jedna pro R vlnu v oblasti $\omega < \omega_c$ a X vlnu v oblasti $\omega \in (\omega_p, \omega_h)$. Grafy byly vykresleny v programovém balíku MATHEMATICA.



Obr. 98: Disperzní relace elektromagnetických vln pro chladné elektronové plazma.

4.4.2 Stixovy koeficienty, CMA diagram

Obecná disperzní relace $\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0$ se buď řeší vzhledem k frekvenci ω , nebo vzhledem k vlnovému vektoru \mathbf{k} . Někdy je také užitečné z disperzní relace vypočítat index lomu $N \equiv ck/\omega$. Výhody jsou zřejmé: index lomu je bezrozměrné číslo a disperzní relace v tomto tvaru nezávisí na volbě jednotek; rezonanční a mezní frekvence lze snadno najít jako limity $N \rightarrow \infty$, resp. $N \rightarrow 0$. Pro kvadráty indexů lomu se často používá označení

$$\begin{aligned}
 R \equiv N_R^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - \omega_c/\omega}; & L \equiv N_L^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + \omega_c/\omega}; \\
 P \equiv N_O^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; & X \equiv N_X^2 &= \frac{2RL}{R+L}.
 \end{aligned}
 \tag{4.92}$$

Poslední výraz je jen přepsáním vztahu (4.91). Pro více tekutin se sčítá přes všechny komponenty plazmatu (v našem případě bylo $\omega_{c\alpha} = \omega_{ce} = -eB/m$).

$$N_R^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 / \omega^2}{1 + \omega_{c\alpha} / \omega};$$

$$N_L^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 / \omega^2}{1 - \omega_{c\alpha} / \omega}; \quad (4.93)$$

$$N_O^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}.$$

Je také výhodné zavést symetrickou a antisymetrickou část kvadrátů indexů N_R a N_L :

$$S \equiv \frac{1}{2}(R + L);$$

$$D \equiv \frac{1}{2}(R - L). \quad (4.94)$$

Veličinu X lze pak jednoduše zapsat ve tvaru

$$X = RL/S. \quad (4.95)$$

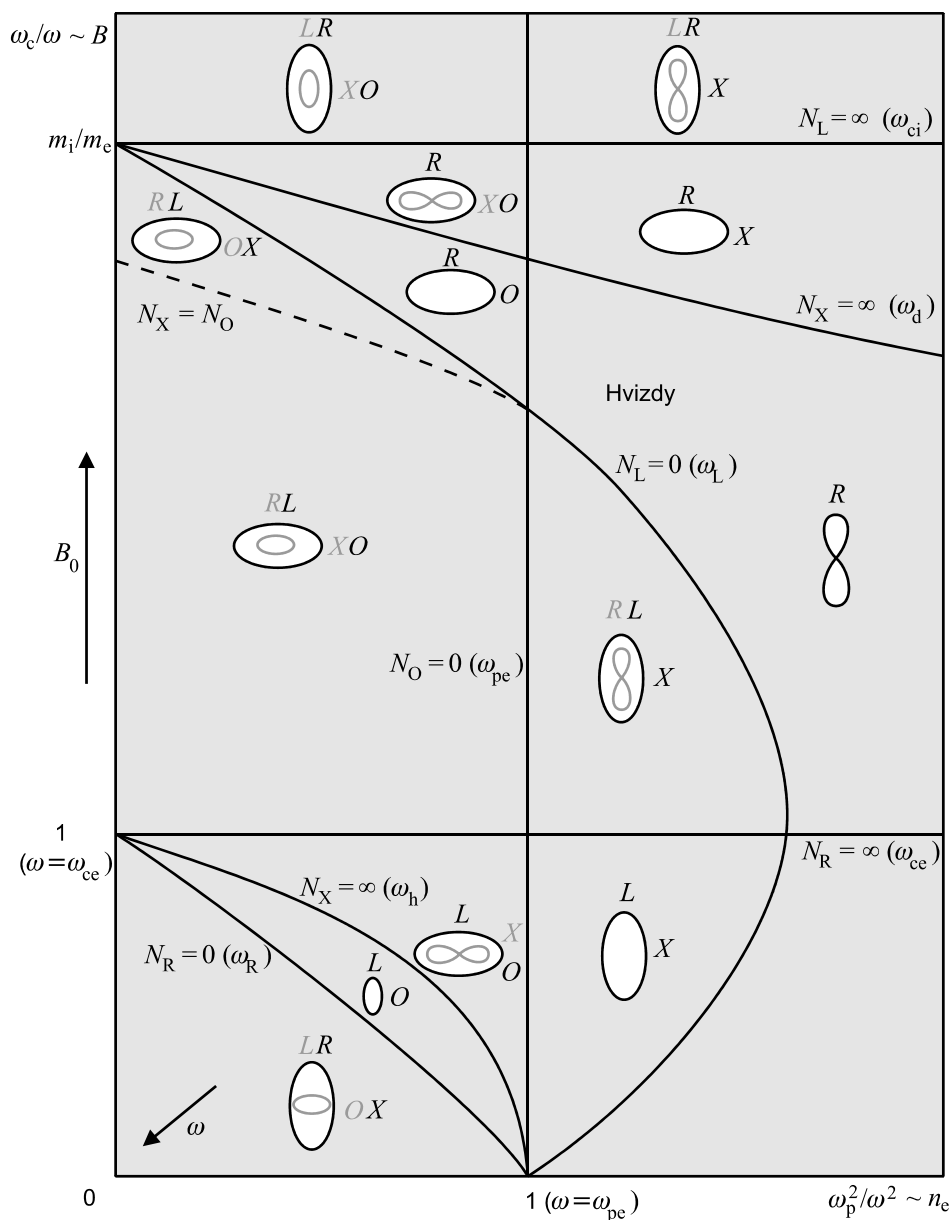
Koeficienty S , D , P a X se nazývají Stixovy koeficienty. Jsou pojmenované podle amerického plazmového fyzika Thomase Howarda Stixe (1924–2001), který je zavedl v roce 1962. Na grafech disperzních relací z předchozí kapitoly je na svislé ose vždy převrácená hodnota příslušného Stixova koeficientu, která je úměrná kvadrátu fázové rychlosti. Obecnou disperzní relaci (4.72) lze vyřešit vzhledem k indexu lomu

$$N^2 = 1 - \frac{\mathcal{P}^2}{1 - \frac{\frac{1}{2}\mathcal{E}^2 \sin^2 \alpha}{1 - \mathcal{P}^2} \pm \frac{1}{1 - \mathcal{P}^2} \sqrt{\frac{1}{4}\mathcal{E}^4 \sin^4 \alpha + \mathcal{E}^2 [1 - \mathcal{P}^2]^2 \cos^2 \alpha}}; \quad (4.96)$$

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\omega_c}{\omega}; \quad \mathcal{P} \equiv \frac{\omega_p}{\omega}.$$

Získaná formule se nazývá Appletonova-Hartreeho formule podle anglického fyzika Edwarda Victora Appletona (1892–1965) a anglického matematika a fyzika Douglase Reynera Hartreeho (1897–1958). Nezávisle na nich odvodil vztah již dříve německý radioinženýr H. K. Lassen, jeho práce ale nebyla v anglicky mluvících zemích známa. Pro vlnu šířící se podél vnějšího magnetického pole se relace větví (znaménko \pm ve jmenovateli) na R a L mód, pro vlnu šířící se kolmo na pole na O a X mód.

Pokud se budeme zabývat dvoutekutinovým plazmatem (tekutinou elektronů a iontů), získáme ještě dvě rezonanční frekvence: cyklotronní rezonanci iontů pro L vlnu (ionty mají Larmorovu rotaci ve vnějším magnetickém poli shodnou s otáčením poruchy elektrického pole v L vlně) a dolní hybridní rezonanci pro X vlnu. Tvary vlnoploch naleznete na následujícím diagramu (tzv. CMA diagramu) a všechny rezonanční a mezní frekvence jsou přehledně shrnuty v následujících tabulkách.



Obr. 99: CMA Diagram. Tvary vlnoploch (polární diagramy fázové rychlosti) se zakreslují do CMA diagramu, který je pojmenován podle počátečních písmen autorů (P. Clemmow & R. Mullaly – 1955, W. Allis – 1959). Na osách diagramu je magnetické pole a koncentrace plazmatu. Vlnoplochy se skokem mění na hranicích oblastí, kde je index lomu různých vln (L, R, O, X) nulový nebo nekonečný. Na obrázku je CMA diagram pro chladné dvoutekutivé plazma složené z elektronů a iontů. Pověšměte si, že v pravé polovině diagramu ($\omega < \omega_{pe}$) neexistuje řádná vlna (O). Oblast hvizdů, kde se šíří pouze R vlna (a žádná jiná), je omezena zleva podmínkou $\omega < \omega_{pe}$ a zdola podmínkou $\omega < \omega_{ce}$.

Rezonanční frekvence

$N_L \rightarrow \infty$	cyklotronní iontová rezonance	$\omega = \omega_{ci} = \frac{ZeB_0}{m_i}$
$N_R \rightarrow \infty$	cyklotronní elektronová rezonance	$\omega = \omega_{ce} = \frac{eB_0}{m_e}$
$N_O \rightarrow \infty$	–	–
$N_X \rightarrow \infty$	horní hybridní rezonance	$\omega = \omega_h = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}$
	dolní hybridní rezonance	$\omega = \omega_d = \sqrt{ \omega_{ci}\omega_{ce} }$

Mezní frekvence

$N_L = 0$	mezní frekvence L vln	$\omega = \omega_L = -\frac{1}{2}\omega_{ce} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2}$
$N_R = 0$	mezní frekvence R vln	$\omega = \omega_R = +\frac{1}{2}\omega_{ce} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2}$
$N_O = 0$	mezní frekvence O vln	$\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2} \approx \omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$
$N_X = 0$	mezní frekvence L vln	$\omega = \omega_L = -\frac{1}{2}\omega_{ce} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2}$
	mezní frekvence R vln	$\omega = \omega_R = +\frac{1}{2}\omega_{ce} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2}$

Tabulky rezonančních a mezních frekvencí.

4.4.3 Faradayova rotace

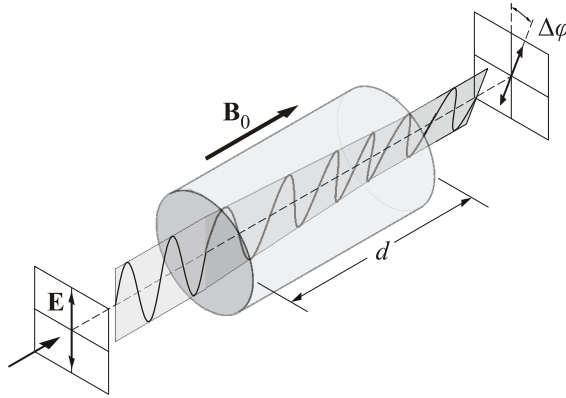
Uvažujme lineárně polarizovanou vlnu šířící se chladným plazmatem ve směru magnetického pole. Lineárně polarizovanou vlnu můžeme vytvořit složením pravotočivé a levotočivé vlny se stejnou amplitudou. V geometrii používané v této kapitole (magnetické pole míří v ose z) pro kruhově polarizované vlny máme:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R &= E_0 e^{i(k_R z - \omega t)} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y); \\ \mathbf{E}_L &= E_0 e^{i(k_L z - \omega t)} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Složku E_y jsme zapsali ve shodě se vztahem (4.80) (zkuste si oddělit E_x a E_y). Nyní budeme zkoumat pohyb lineárně polarizované vlny ve směru pole. Každou lineárně polarizovanou vlnu můžeme zapsat jako superpozici kruhově polarizovaných vln:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_L + \mathbf{E}_R) = \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} \left[\left(e^{ik_L z} + e^{ik_R z} \right) \mathbf{e}_x - i \left(e^{ik_L z} - e^{ik_R z} \right) \mathbf{e}_y \right]. \quad (4.98)$$

Pokud by oba vlnové vektory k_R, k_L byly stejné, y -ové složky se vyruší a zůstane lineárně polarizovaná vlna v rovině (zx) . V plazmatu se ovšem vlnový vektor levotočivé a pravotočivé vlny nepatrně liší, což vede ke stáčení polarizace elektromagnetické vlny. Tento jev se nazývá *Faradayova rotace* a byl objeven významným anglickým fyzikem a chemikem Michaelem Faradayem (1791–1867) v roce 1845.



Obr. 100: Faradayova rotace.

Pro vlnové vektory podle (4.78) máme

$$k_{R,L} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 \mp \omega_c/\omega}}.$$

V limitě vysokých frekvencí $\omega \gg \omega_c, \omega_p$ lze psát

$$k_{R,L} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2/\omega^2}{(1 \mp \omega_c/\omega)} + \dots \right) \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \mp \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^3} + \dots \right),$$

neboli

$$\begin{aligned} k_{R,L} &= k \mp \Delta k; \\ k &\equiv \frac{k_L + k_R}{2} \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right); \\ \Delta k &\equiv \frac{k_L - k_R}{2} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega_c}{c}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Po dosazení (4.99) do (4.98) máme

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L) = \frac{E_0}{2} e^{i(kz - \omega t)} \left[\left(e^{+i\Delta k z} + e^{-i\Delta k z} \right) \mathbf{e}_x - i \left(e^{+i\Delta k z} - e^{-i\Delta k z} \right) \mathbf{e}_y \right],$$

neboli

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \left[\cos(\Delta k z) \mathbf{e}_x + \sin(\Delta k z) \mathbf{e}_y \right].$$

Je zřejmé, že odlišnost obou vektorů bude způsobovat stočení polarizační roviny na jednotku vzdálenosti dz

$$\frac{d\varphi}{dz} = \Delta k.$$

Po integraci máme pro stočení na celkové vzdálenosti d

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{e^3}{2\varepsilon_0 c m_e^2} \frac{1}{\omega^2} \int_0^d n_e(z) B_0(z) dz. \quad (4.100)$$

Pro konstantní koncentraci i pole máme jednoduchý vztah

$$\blacktriangleright \quad \Delta\varphi = \frac{e^3}{2\varepsilon_0 c m_e^2} \frac{1}{\omega^2} n_e B_0 d. \quad (4.101)$$

V astronomii jsou typickým zdrojem radiových emisí s vysoce polarizovaným světlem pulzary objevené v roce 1967. Z měření změny úhlu polarizace pulzaru se známou frekvencí a rovinou polarizace lze určit integrál ze součinu koncentrace elektronů a podélného galaktického magnetického pole podél úsečky spojující pulzar a Zemi.

Obdobný jev také probíhá v průhledných dielektrikách (včetně kapalných) v silném magnetickém poli. V diamagnetickém materiálu platí experimentální vztah

$$\blacktriangleright \quad \Delta\varphi = \mathcal{V} B_0 d, \quad (4.102)$$

kde \mathcal{V} je tzv. Verdetova konstanta, jejíž hodnota závisí na konkrétním materiálu. Kladná hodnota znamená stáčení proti směru hodinových ručiček (při pohledu podél magnetického pole), záporná ve směru hodinových ručiček. Krystaly terbium galiového granátu (TGG) využívaného jako optický izolátor mají Verdetovu konstantu s hodnotou až $\mathcal{V} \sim -40 \text{ rad T}^{-1} \text{m}^{-1}$.

4.4.4 Hvizdy (whistlers)

Hvizdy vznikají jako doprovodné efekty blesků v dolních vrstvách atmosféry a vyskytují se také v magnetosférickém plazmatu. Jde o elektromagnetické vlny s frekvencemi v rozsahu 300 Hz až 30 kHz, jejichž energie se šíří přibližně ve směru indukčních čar zemského magnetického pole. Hvizdy byly objeveny německým fyzikem H. Barkhausenem v roce 1919 a podrobně popsány až L. R. O. Storeyem v roce 1953. Jde o modifikaci R vln s nenulovým úhlem mezi směrem magnetického pole Země a šíření. Disperzní relace hvizdů je obdobná relaci R vln a získáme ji z Appletonovy-Hatreeho formule (4.96) pro malé úhly ($\sin \alpha \approx 0$):

$$N^2 = 1 - \frac{(\omega_p/\omega)^2}{1 - (\omega_c/\omega) \cos \alpha}; \quad N \equiv \frac{ck}{\omega}. \quad (4.103)$$

Pro většinu hvizdů je frekvence vln podstatně nižší než cyklotronní frekvence ($\omega \ll \omega_c$) a lze použít jednodušší aproximaci (zanedbáme jednotku ve jmenovateli):

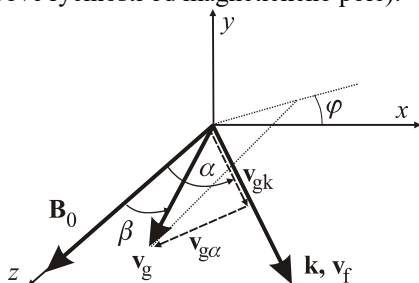
$$\omega^2 = c^2 k^2 - \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega_c \cos \alpha}. \quad (4.104)$$

Pro velmi nízké frekvence lze zanedbat i kvadrát frekvence na levé straně a získat ještě jednodušší aproximaci pro nízkofrekvenční hvězdy:

$$\omega(k, \alpha) \cong \frac{c^2 k^2}{\omega_p^2} \omega_c \cos \alpha. \quad (4.105)$$

Fázová a grupová rychlost

Uřeme nyní fázovou a grupovou rychlost (úhel α je odklon \mathbf{k} vektoru od magnetického pole, úhel β odklon grupové rychlosti od magnetického pole):



Pro fázovou rychlost máme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f &= v_f \mathbf{e}_k; \\ v_f &\cong \frac{\omega}{k} = \frac{c^2 k}{\omega_p^2} \omega_c \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Složky grupové rychlosti určíme ze vztahu pro gradient v \mathbf{k} prostoru ve sférických souřadnicích

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{e}_k + \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{k \sin \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (4.107)$$

Po derivování máme pro jednotlivé složky

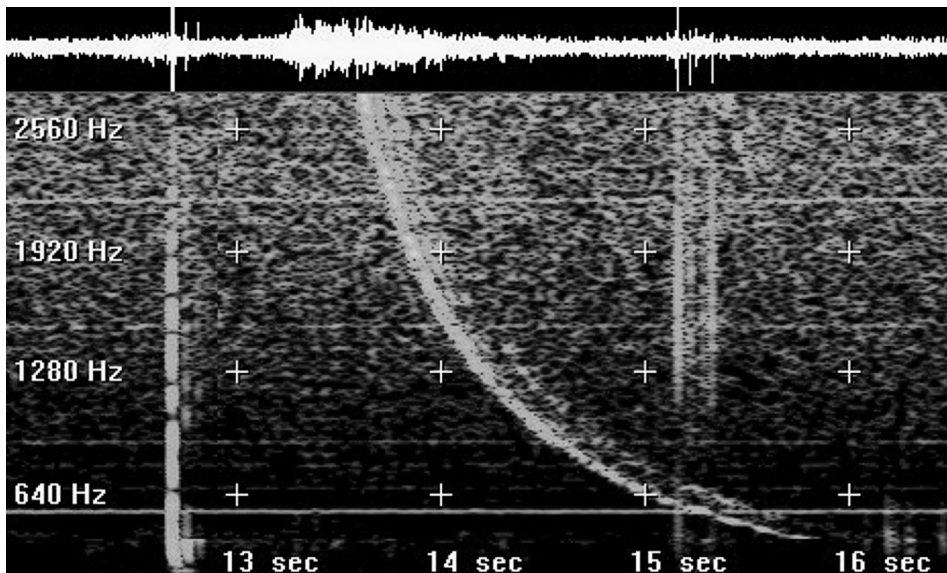
$$\begin{aligned} v_{gk} &= 2 \frac{c^2 k}{\omega_p^2} \omega_c \cos \alpha, \\ v_{g\alpha} &= -\frac{c^2 k}{\omega_p^2} \omega_c \sin \alpha, \\ v_{g\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (4.108)$$

I z rozkladu na obrázku je patrné, že složka α míří proti směru rostoucího úhlu α a je záporná. Tato složka je mnohem menší než složka ve směru \mathbf{k} , která je zcela dominantní. Z poslední rovnice (4.108) je zřejmé, že \mathbf{v}_g leží v rovině $(\mathbf{e}_z, \mathbf{k})$.

Nalezněme nyní rychlost šíření energie v závislosti na frekvenci. Do vztahů (4.108) dosadíme za vlnový vektor z disperzní relace (4.105):

$$\blacktriangleright \quad v_{gk} = \frac{2c}{\omega_p} \sqrt{\omega_c \cos \alpha} \omega^{1/2}; \quad v_{g\alpha} = -\frac{c}{\omega_p} \sqrt{\frac{\omega_c}{\cos \alpha}} \sin \alpha \omega^{1/2}. \quad (4.109)$$

Obě složky jsou úměrné $\omega^{1/2}$. Vzhledem k malému úhlu šíření je $v_{g\alpha} \ll v_{gk}$. Hvizd se od místa úderu blesku šíří podél magnetické indukční čáry zemského pole. Vyšší frekvence se šíří vyšší rychlostí a proto k pozorovateli dolétnou dříve. Hvizd trvá řádově sekundy a postupně k místu pozorování přicházejí nižší a nižší frekvence. Vzhledem k nízké frekvenci je možné zaznamenané změny elektrického pole přivést na reproduktor a slyšet jako zvukovou nahrávku. Hvizdy se podél indukčních čar zemského pole šíří od pólu k pólu a několikrát se i odrazí. Za bouřkové činnosti jsou pravděpodobně zodpovědné za urychlení elektronů na relativistické rychlosti.



Obr. 102: Typický hvizd s postupně se snižující frekvencí. NASA, 2001.

Maximální odklon šíření hvizdů od magnetického pole

Pro odklon grupové rychlosti od fázové je z obrázku zřejmé, že platí

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{v_{g\alpha}}{v_{gk}}, \text{ tj.}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Druhá relace plyne dosazením z (4.108) do první relace. Z této rovnice určíme úhel β odklonu grupové rychlosti od magnetického pole

$$2 \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow .$$

$$2 \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin 2\alpha}{3 + \cos 2\alpha} \right).$$

Najdeme nyní maximální hodnotu β (stačí položit derivaci argumentu podle α rovnou nule, vyjde $\cos 2\alpha = -1/3$, $\sin 2\alpha = (8/9)^{1/2}$

►
$$\beta_{\max} = \operatorname{arctg} \left[2^{-3/2} \right] = 19^\circ 29'. \quad (4.110)$$

Maximální odklon šíření energie nízkofrekvenčních hvízdů od směru magnetického pole Země je $19^\circ 29'$ (tzv. Storeyův úhel). Směr šíření vln je při tomto největším odklonu $\alpha = 54^\circ 44'$ ($2\alpha = 109^\circ 28'$).

4.4.5 Tenzor permitivity pro elektromagnetické vlny v plazmatu

Při vysokých frekvencích a v přítomnosti magnetického pole se plazma chová zcela jinak než běžné vodivé prostředí. Proto určíme tenzor permitivity pro náš případ chladného elektronového plazmatu s polem \mathbf{B}_0 . Určíme nyní indukci elektrického pole v plazmatu reagujícím na vysokofrekvenční vlnu:

$$\delta \mathbf{D} = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} + \delta \mathbf{P} = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} - en_e \delta \mathbf{x}_e = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} + \frac{en_e}{i\omega} \delta \mathbf{u}_e. \quad (4.111)$$

K převodu poloh na rychlostní pole jsme využili integraci příslušné rovinné Fourierovy komponenty. Perturbaci rychlostního pole musíme určit z pohybové rovnice pro elektrony, nejlépe v perturbovaném tvaru po Fourierově transformaci (4.68):

$$\delta \mathbf{u}_e = -i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{E} - i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_0.$$

Rovnici zapíšeme ve složkách a vypočteme poruchu rychlostního pole elektronů:

$$\delta u_k = -\frac{ie}{m_e \omega} \delta E_k - \frac{ie}{m_e \omega} \varepsilon_{klm} \delta u_l B_{0m} \Rightarrow$$

$$\left(\delta_{kl} + i \frac{\omega_c}{\omega} \varepsilon_{klm} \beta_m \right) \delta u_l = -\frac{ie}{m_e \omega} \delta E_k.$$

Rovnice pro rychlost má jednoduchý maticový tvar

$$\mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{u} = -\frac{ie}{m_e \omega} \delta \mathbf{E}; \quad (4.112)$$

$$\mathbf{M} \equiv \begin{pmatrix} 1 & i\omega_c/\omega & 0 \\ -i\omega_c/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

K určení poruchy rychlostního pole postačí najít inverzní matici k matici \mathbf{M} . Porucha indukce elektrického pole potom podle (4.111) bude

$$\delta\mathbf{D} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \frac{en_e}{i\omega}\delta\mathbf{u}_e = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \frac{en_e}{i\omega}\left(-\frac{ie}{m_e\omega}\mathbf{M}^{-1}\delta\mathbf{E}\right) = \varepsilon_0\left(\mathbf{1} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}\right)\delta\mathbf{E}.$$

Hledaný tenzor permitivity proto je

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0\left(\mathbf{1} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}\right). \quad (4.113)$$

Posledním krokem tedy bude určení inverzní matice k matici \mathbf{M} . Můžeme použít jakoukoli standardní metodu – výpočet přes subdeterminanty, Gaussovu eliminaci nebo spektrální rozvoj (matice je hermitovská a má reálná vlastní čísla 1 , $1 - \omega_c/\omega$, $1 + \omega_c/\omega$). Výsledek je

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{1 - (\omega_c/\omega)^2} \begin{pmatrix} 1; & -i(\omega_c/\omega); & 0; \\ i(\omega_c/\omega); & 1; & 0; \\ 0; & 0; & 1 - (\omega_c/\omega)^2 \end{pmatrix}.$$

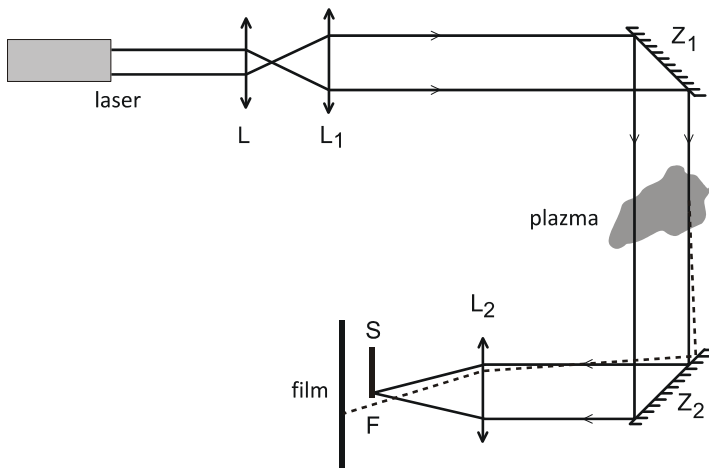
Po dosazení do (4.113) získáme tenzor permitivity

$$\blacktriangleright \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (4.114)$$

Tenzor permitivity je zjevně anizotropní, má nediagonální prvky a prvek na diagonále odpovídající směru magnetického pole (P) je jiný než ve zbývajících směrech (S). Tenzor permitivity je navíc komplexní.

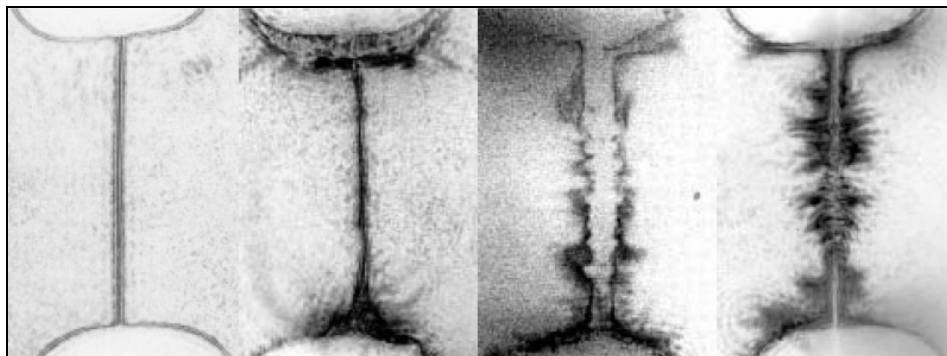
4.4.6 Šlírová fotografie

Šíření elektromagnetických vln v plazmatu se také využívá v různých zobrazovacích technikách. K neznámějším patří tzv. *šlírová fotografie*. Jako zdroj světla slouží kolimovaný (nerozbíhavý) svazek, například z laseru. Laserový paprsek se plazmatem šíří zpravidla jako rádná vlna s indexem lomu (4.86). Příčný gradient koncentrace plazmatu způsobí změnu indexu lomu a odklon paprsku od původního směru. Břit S v ohnisku F (viz obrázek 103) zacloní neodkloněné paprsky a na stínítku (filmu, CCD) se zobrazí jen paprsky ovlivněné plazmatem. Vzniklá fotografie je obrazem příčných gradientů koncentrace plazmatu. Slovo šlírová pochází z německého *schliere* (šmouha). Postup lze využít u jakýchkoli nehomogenit vedoucích ke změně indexu lomu, tedy i pro fotografování turbulencí a rázových vln v obyčejných plynech.



Obr. 103: Princip šlírové fotografie.

Na šlírové fotografii nevidíme samotné plazma, ale oblasti s nenulovým gradientem indexu lomu (neboli koncentrace). Zvýrazněny jsou tak hranice veškerých struktur v plazmatu.



Obr. 104: Šlírová fotografie explodujícího vlákna (uhlík, průměr 120 μm , délka 7 mm). Expozice 3 ns. Pavel Kubeš a kol., FEL ČVUT.



4.5 Numerické hledání kořenů polynomiální rovnice

Při hledání vlastností disperzní relace jsme často postaveni před úlohu nalézt kořeny polynomiální rovnice v komplexním oboru

$$P(z) \equiv \sum_{k=0}^N c_k z^k = 0. \quad (4.115)$$

Koeficienty polynomu c_k jsou reálné. Existuje řada vhodných algoritmů, v tomto stručném přehledu zmíníme tři z nich, které stojí za vyzkoušení.

4.5.1 Weylův algoritmus

Tento účinný numerický algoritmus je čistě geometrický a jeho autorem je německý matematik Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955). V komplexní rovině nejprve zkonstruujeme tak velký čtverec, aby obsahoval všechny kořeny rovnice (4.115). Poté čtverec rozdělíme na čtyři menší čtverce a z množiny čtverců vyřadíme ty, v jejichž blízkosti žádný kořen není. „Podezřelé“ čtverce dále dělíme a nadále vynecháváme ty, v jejichž okolí žádný kořen není. Po dostatečně dlouhé době víme, že kořeny se nacházejí v blízkosti zbylých čtverců. Celý algoritmus je možné rozdělit do čtyř kroků:

1. Vstup

Zadáme stupeň polynomu, koeficienty polynomu a přesnost ε , se kterou chceme nalézt kořeny rovnice (4.115).

2. Přeskálování polynomu

Kořeny z_k polynomiální rovnice (4.115) jsou obecně komplexní, maximální absolutní velikost všech kořenů nepřesáhne hodnotu, kterou explicitně odhadl americký odborník na numerické výpočty Donald Erwin Knuth (1938) výrazem

$$\blacktriangleright \quad A_{\max} = 2 \cdot \max_k \{ |c_k / c_N| \}. \quad (4.116)$$

Jiným podobným odhadem je

$$\blacktriangleright \quad A_{\max} = 1 + \max_k \{ |c_k / c_N| \}. \quad (4.117)$$

Polynom $P(A_{\max}z)$ má kořeny z_k/A_{\max} . Proto přeskálujeme původní polynom na

$$Q(\bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^N \bar{c}_k \bar{z}^k; \quad \bar{z} \equiv \frac{z}{A_{\max}}, \quad \bar{c}_k \equiv c_k A_{\max}^k. \quad (4.118)$$

Pro kořeny nového polynomu platí

$$Q(\bar{z}_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\bar{z}_k| < 1, \quad (4.119)$$

tj. všechny kořeny leží v komplexní rovině uvnitř jednotkového kruhu. Po jejich nalezení se budeme muset vrátit k původním proměnným.

3. Generování a testování soustavy čtverců

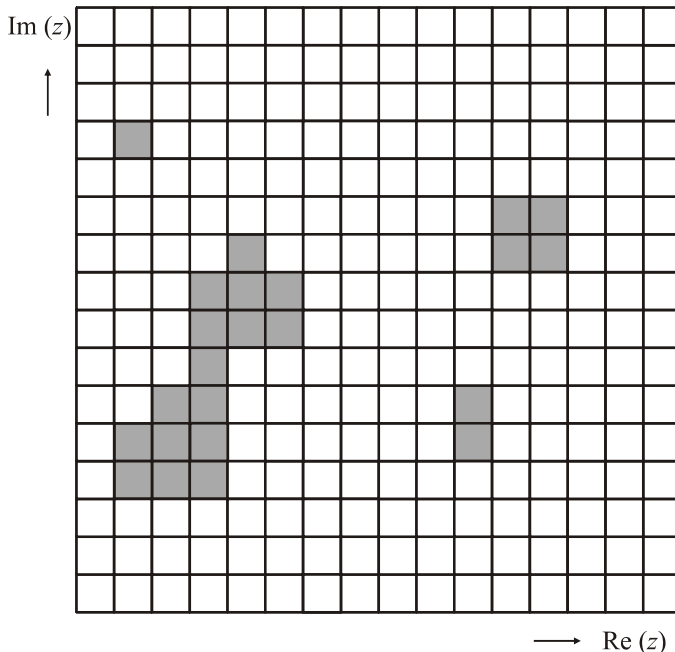
Nyní zkonstruujeme soustavu „podezřelých“ čtverců. V prvním kroku jde o jediný čtverec centrovaný v počátku s hranou $a = 2$. Jeho rohy mají souřadnice $(+1,+i)$, $(+1,-i)$, $(-1,-i)$, $(-1,+i)$ a z (4.119) máme zaručeno, že všechny hledané kořeny leží uvnitř tohoto čtverce. V dalším kroku každý existující čtverec rozdělíme na čtyři menší čtverce a testujeme, zda nějaký kořen leží uvnitř opsané kružnice (koeficienty c_k přepočteme vzhledem ke středu čtverce). Ponecháme jen čtverce splňující test

$$\triangleright \quad |\bar{c}_0| < \sum_{k=1}^N |\bar{c}_k| r^k, \quad (4.120)$$

kde r je poloměr kružnice opsané čtverci o hraně a , tj.

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (4.121)$$

Jen u prvního čtverce máme zajištěno, že všechny kořeny jsou uvnitř. U dalších čtverců víme z testu (4.120) jen to, že kořen je buď uvnitř podezřelého čtverce, nebo v jeho těsné blízkosti. Z počátku počet čtverců exponenciálně roste, později lineárně klesá.



Obr. 105: Weylův algoritmus po čtyřech krocích. Podezřelé čtverce jsou šedivé, v jejich blízkosti se nacházejí kořeny polynomiální rovnice. Oblast vlevo dole se po dalším zjemnění pravděpodobně rozpadne na dvě.

4. Odhad kořenů

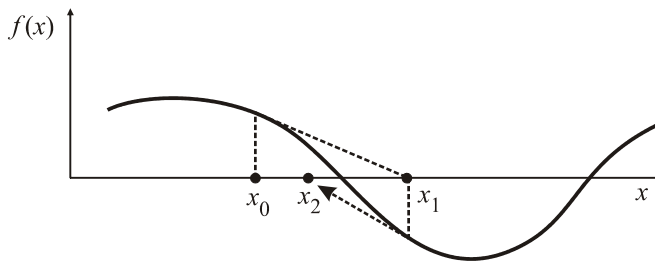
Soustavu čtverců rozdělíme do skupin. Skupinu tvoří každá množina vzájemně se dotýkajících čtverců. U každé skupiny nalezneme její střed \bar{z}_k (můžeme například nalézt těžiště skupiny). Tento střed je odhadem kořenu přeškálované polynomiální rovnice. Nepřeškálovaný kořen bude mít hodnotu

$$z_k = A_{\max} \bar{z}_k. \quad (4.122)$$

Kroky 3 a 4 neustále opakujeme až do získání požadované přesnosti. Výpočet můžeme například ukončit, pokud rozměr čtverce (nebo největší skupiny) dosáhne předem zadané hodnoty ε . Popsaným algoritmem nezjistíme násobnosti nalezených kořenů, nicméně existují jednoduché metody, jak násobnost kořenu odhadnout.

4.5.2 Newtonův algoritmus

Newtonův algoritmus je nejjednodušším algoritmem pro nalezení řešení rovnice $f(x) = 0$. Začneme dle obrázku 106 z libovolného bodu x_0 na ose x . Další bod v řadě získáme jako průsečík tečny grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$ s osou x . Pokud byl počáteční bod vhodně zvolen, posloupnost takto konstruovaných bodů konverguje k průsečíku grafu funkce s osou x , tj. k řešení rovnice $f(x) = 0$.



Obr. 106: Newtonův algoritmus.

Matematický předpis algoritmu je velmi jednoduchý. Napišme rovnici tečny v bodě x_n :

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \quad (4.123)$$

Nový bod je průsečíkem s osou x , proto pro něho platí

$$x = x_{n+1}; \quad y = 0. \quad (4.124)$$

Dosazením podmínky (4.124) do rovnice tečny (4.123) máme ihned základní předpis Newtonova algoritmu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (4.125)$$

Zcela obdobně můžeme hledat komplexní i reálné kořeny polynomiální rovnice (4.115):

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}. \quad (4.126)$$

Newtonův algoritmus je sice rychlý, ale má jeden základní nedostatek – volbu počátečního bodu. Z různých počátečních oblastí metoda konverguje k různým kořenům polynomiální rovnice, existují ale i oblasti, ze kterých metoda nekonverguje k žádnému kořenu. Můžeme samozřejmě náhodně zkoušet různé počáteční body a zjišťovat, zda konvergují k některému z kořenů, nicméně u polynomiálních rovnic vysokého stupně je tato metoda zdlouhavá a nezaručuje nám objevení všech kořenů. Pokud se rozhodneme využít Newtonův algoritmus, je klíčové umět zvolit určitou sadu počátečních bodů tak, aby posloupnosti z nich generované konvergovaly ke všem kořenům dané polynomiální rovnice.

4.5.3 Zobecněný Newtonův algoritmus

John Hubbard, Dierk Schleicher a Scott Sutherland [42] doplnili Newtonovu metodu o účinný algoritmus volby počáteční sítě bodů, který zajišťuje konvergenci Newtonovy metody ke všem řešením polynomiální rovnice (k některým řešením bude konvergovat více bodů sítě, ale žádné řešení neztratíme). Základní algoritmus má pět kroků:

1. Vstup

Zadáme stupeň polynomu, koeficienty polynomu a přesnost ε , se kterou chceme nalézt kořeny rovnice (4.115).

2. Přeskálování polynomu

Pro úspěšnost metody je třeba zajistit, aby všechny kořeny ležely uvnitř jednotkového kruhu. Provedeme proto přeskálování stejně jako ve Weylově algoritmu, tj. nalezneme

$$\blacktriangleright \quad A_{\max} = 1 + \max_k \{|c_k / c_N|\} \quad (4.127)$$

a budeme pracovat s polynomem

$$Q(\bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^N \bar{c}_k \bar{z}^k; \quad \bar{z} \equiv \frac{z}{A_{\max}}, \quad \bar{c}_k \equiv c_k A_{\max}^k, \quad (4.128)$$

jehož kořeny leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině.

3. Volba počáteční sítě bodů

Počáteční síť bodů zajistí, že se v síti naleznou body, které konvergují ke všem kořenům polynomu při výpočtu Newtonovou metodou. Odvození volby této sítě je v [42]. Nejprve určíme síť vhodných poloměrů a úhlů počátečních bodů v komplexní rovině:

$$r_l \equiv (1 + \sqrt{2}) \left(\frac{N-1}{N} \right)^{\frac{2l-1}{4L}}; \quad l = 1, \dots, L; \quad L \equiv \lceil 0,26632 \ln N \rceil, \quad (4.129)$$

$$\varphi_m \equiv \frac{2\pi m}{M}; \quad m = 0, \dots, M-1; \quad M \equiv \lceil 8,32547 N \ln N \rceil. \quad (4.130)$$

Hledaná počáteční síť bodů potom je

$$\bar{z}_{lm} = r_l \exp(i\varphi_m); \quad l = 1, \dots, L; \quad m = 0, \dots, M-1. \quad (4.131)$$

Počáteční síť má LM bodů. Závorka $\lceil x \rceil$ označuje nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x , v programovacích jazycích se tato funkce označuje CEILING nebo CEIL.

4. Iterace

Iterace, která zajistí, že K -tý člen iterační posloupnosti řeší rovnici $Q(z) = 0$ s přesností $|Q(\bar{z}_K)| < \varepsilon$ se provádí pomocí Newtonova schématu pro každý bod sítě (4.131), který považujeme za počáteční bod generované posloupnosti, tj $z_0 = z_{lm}$,

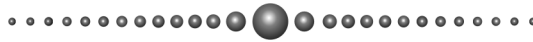
$$\bar{z}_{k+1} = \bar{z}_k - \frac{Q(\bar{z}_k)}{Q'(\bar{z}_k)}; \quad k = 1 \dots K; \quad K \equiv \left\lceil \frac{\ln(1 + \sqrt{2}) - \ln \varepsilon}{\ln N - \ln(N-1)} \right\rceil. \quad (4.132)$$

Metoda zajišťuje, že uvedené přesnosti bude dosaženo dříve než po K krocích. Z počáteční sítě bude mnoho kořenů získáváno duplicitně, nicméně žádný nebude vynechán. Některé iterace nepovedou k cíli, ty poznáme podle toho, že poslední člen iterace nesplňuje relaci $|Q(\bar{z}_K)| < \varepsilon$.

5. Kořeny

Aproximace hledaného kořenu je po zpětném škálování

$$z_k = A_{\max} \bar{z}_k. \quad (4.133)$$



5. Nestability v plazmatu



5.1 Neomezené chladné plazma

5.1.1 Základní pojmy

Ve většině případů získáme disperzní relaci v implicitním tvaru

$$\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (5.1)$$

a zajímá nás, kdy je řešení $\omega(\mathbf{k})$ nebo $\mathbf{k}(\omega)$ komplexní, neboť komplexní úhlová frekvence či vlnový vektor znamenají, že kmitavá exponenciála $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)]$ se stane rostoucí nebo tlumenou exponenciálou v čase nebo v některé prostorové proměnné.

Řešení v ω (vývoj v čase)

Předpokládejme, že je vlnový vektor reálný a že jsme disperzní relaci vyřešili vzhledem k úhlové frekvenci ω :

$$\omega = \omega(\mathbf{k}); \quad \text{resp. } \omega = \omega_1(\mathbf{k}) + i\omega_2(\mathbf{k}). \quad (5.2)$$

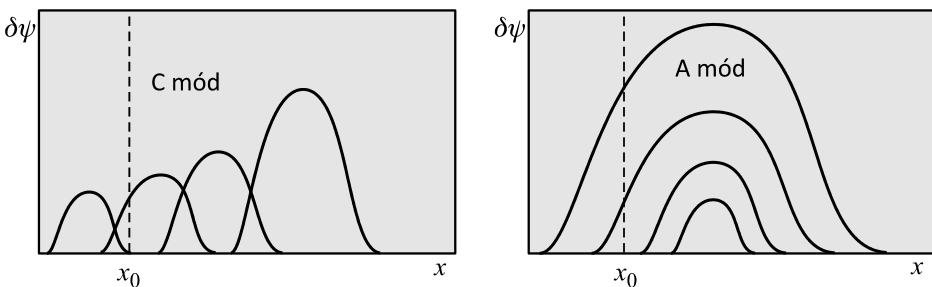
Řešení v čase může být podle znaménka ω_2 rostoucí nebo tlumené. V rostoucím případě můžeme zavést *koefficient nárůstu nestability* typu $\exp[\gamma t]$ vztahem

$$\gamma \equiv \omega_2 = \text{Im}(\omega). \quad (5.3)$$

Vzhledem k vývoji v čase rozlišujeme dva módy nestabilit:

C nestabilní mód (konvektivní mód): V kterémkoli fixním bodě bude po určité době amplituda poruchy s časem klesat. Nestabilita „odtekla“ do jiného místa.

A nestabilní mód (absolutně nestabilní mód): V kterémkoli fixním bodě bude amplituda poruchy narůstat.



Obr. 107: Různé způsoby narůstání nestability.

Rozdělení na A mód a C mód může (ale nemusí) záviset na volbě souřadnicového systému. Nacházíme-li se například u C módu v souřadnicové soustavě spojené s pohybující se poruchou, bude se pozorovateli jevit jako A mód.

Řešení v k (vývoj v prostoru)

Předpokládejme, že úhlová frekvence je reálná a že jsme disperzní relaci vyřešili vzhledem k vlnovému vektoru \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega); \quad \text{resp. } \mathbf{k} = \mathbf{k}_1(\omega) + i\mathbf{k}_2(\omega). \quad (5.4)$$

Řešení poruchy může být v některém směru od zdroje exponenciálně klesající – potom hovoříme o *evanescentním módu*, nebo rostoucí – potom hovoříme o *zesilujícím módu*.

Nesvázané módy disperzní relace

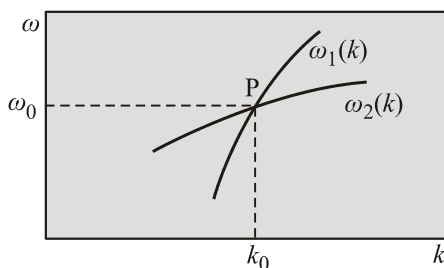
Někdy je možné disperzní relaci rozložit na jednotlivé módy

$$[\omega - \omega_1(\mathbf{k})] \cdot [\omega - \omega_2(\mathbf{k})] \cdots [\omega - \omega_N(\mathbf{k})] = 0. \quad (5.5)$$

Každá z hranatých závorek může být vynulována zvlášť a přispěje jednou větví k celkové disperzní relaci. Předpokládejme pro jednoduchost jen existenci dvou větví v jediné prostorové dimenzi

$$[\omega - \omega_1(k)] \cdot [\omega - \omega_2(k)] = 0, \quad (5.6)$$

které se protínají v bodě $P = (\omega_0, k_0)$:



Obr. 108: Dva módy disperzní relace.

V okolí místa křížení můžeme oba módy nahradit přímkovou závislostí

$$\begin{aligned} \omega_1(k) &\cong \omega_0 + \frac{\partial \omega_1}{\partial k}(k - k_0) = \omega_0 + v_1(k - k_0); \\ \omega_2(k) &\cong \omega_0 + \frac{\partial \omega_2}{\partial k}(k - k_0) = \omega_0 + v_2(k - k_0), \end{aligned} \quad (5.7)$$

kde v_1, v_2 jsou grupové rychlosti obou větví disperzní relace.

Svázané módy disperzní relace

Pokud se v plazmatu objeví dvě vlny se stejnou vlnovou délkou a frekvencí (obecně způsobené různými mechanismy), budou se samozřejmě vzájemně ovlivňovat a energie jednoho módu bude pumpována do druhého a naopak. Nejjednodušší způsob, jak oba módy provázat, je zavést nenulovou konstantu na pravé straně disperzní relace (5.6):

$$[\omega - \omega_1(k)] \cdot [\omega - \omega_2(k)] = \varepsilon. \quad (5.8)$$

Pro malé ε v porovnání s členy na levé straně hovoříme o tzv. *slabé vazbě*. Konstantu ε nazýváme *vazebnou konstantou*. Ukažme, že její nenulová hodnota zcela změní portrét křížení obou větví disperzní relace. Využijme v rovnici (5.8) lineární aproximace (5.7):

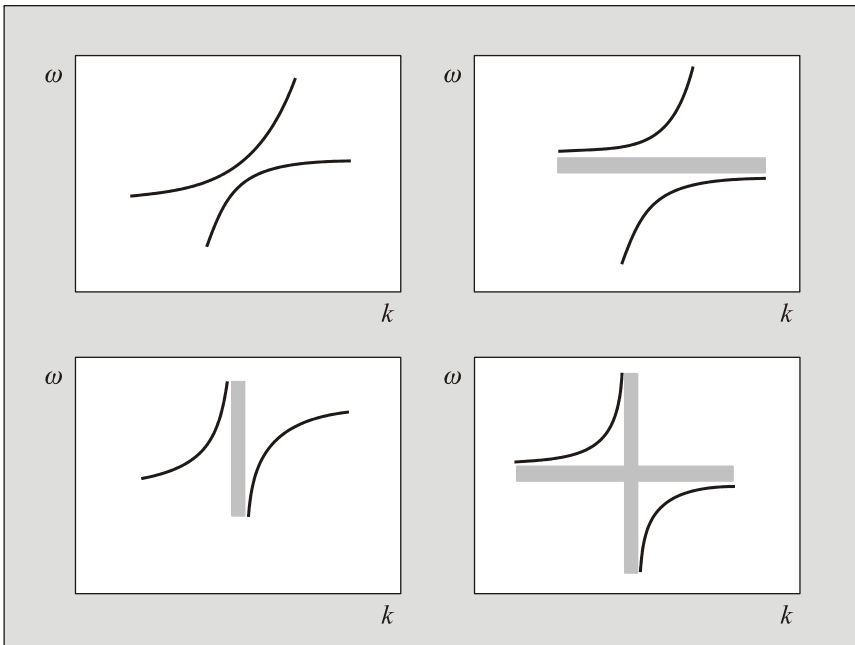
$$[\omega - \omega_0 - v_1(k - k_0)] \cdot [\omega - \omega_0 - v_2(k - k_0)] = \varepsilon.$$

Díky vazebné konstantě již nemůžeme každý z módů položit roven nule, konstantou jsou vzájemně svázané. V lineární aproximaci je poslední rovnice kvadratickou rovnicí jak pro ω , tak pro k . Vyřešme rovnici v obou proměnných. Pro ω najdeme kombinaci $\zeta \equiv \omega - \omega_0$, v diskriminantu využijeme, že $(v_1 + v_2)^2 - 4v_1v_2 = (v_1 - v_2)^2$. Analogicky postupujeme pro vlnový vektor. Oba výsledky jsou:

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2} \left[(v_1 + v_2)(k - k_0) \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2 (k - k_0)^2 + 4\varepsilon} \right]; \quad (5.9)$$

$$k = k_0 + \frac{1}{2v_1v_2} \left[(v_1 + v_2)(\omega - \omega_0) \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2 (\omega - \omega_0)^2 + 4\varepsilon v_1v_2} \right]. \quad (5.10)$$

Je zřejmé, že již nebude docházet ke křížení módů a pro některá znaménka veličin ε a v_1v_2 nebudou existovat reálná řešení pro úhlovou frekvenci nebo pro vlnový vektor. Celkem mohou nastat čtyři případy znázorněné na obrázku. Oblasti neexistujících reálných řešení jsou označeny šedými pásy.



Obr. 109: Disperzní relace při vazbě módů.

5.1.2 Vícesvazková nestabilita

Uvažujme plazma složené z různých se pohybujících tekutin několika druhů α . Při odvození disperzní relace využijeme následujících předpokladů:

1. *Plazma je neomezené.* V plazmatu nejsou žádné hranice. Na nich by se řešení muselo navazovat a takovou situaci se budeme zabývat v příští kapitole.
2. *Plazma je chladné.* V pohybové rovnici nebudeme uvažovat gradient tlaku. Tento předpoklad zjednoduší výpočet a umožní zjistit podmínky nástupu nestability. Při jejím následném rozvoji dochází k termalizaci plazmatu a předpoklad již neplatí. K popisu horkého plazmatu je nevhodnější využít statistické metody, viz kapitola 5.4.
3. *Nestabilita je řízena elektrickým polem.* Zanedbáváme magnetické pole, což podle rovnice $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ vede na $\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E} = 0$, tedy poruchy jsou způsobené podélným elektrickým polem. V nepřítomnosti vzájemného přelévání poruch magnetického a elektrického pole není nutné uvažovat rovnici pro časový vývoj elektrického pole, postačí jen počáteční podmínka $\text{div } \mathbf{D} = \rho_Q$.

Za výchozí soustavu rovnic budeme uvažovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \text{div } n_\alpha \mathbf{u}_\alpha &= 0, \\ m_\alpha n_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + m_\alpha n_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha &= Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_\alpha n_\alpha Q_\alpha. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Poruchy budeme předpokládat ve tvaru

$$n_\alpha = n_{0\alpha} + \delta n_\alpha; \quad \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}_{0\alpha} + \delta \mathbf{u}_\alpha; \quad \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}.$$

Po provedení standardní perturbační analýzy a Fourierovy transformace získáme v prvním řádu linearizovanou soustavu pro poruchy:

$$\begin{aligned} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{0\alpha}) \delta n_\alpha - n_{0\alpha} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_\alpha) &= 0, \\ i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{0\alpha}) \delta \mathbf{u}_\alpha &= -\frac{Q_\alpha}{m_\alpha} \delta \mathbf{E}, \\ i\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_\alpha Q_\alpha \delta n_\alpha. \end{aligned}$$

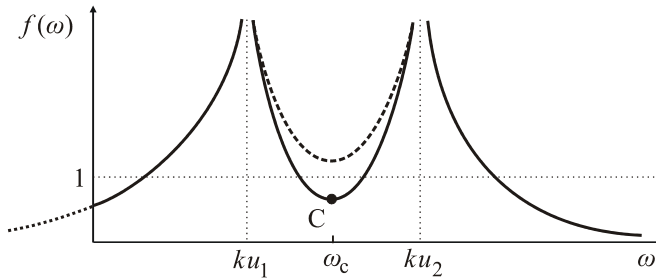
Z prostřední rovnice vypočteme poruchu $\delta \mathbf{u}_\alpha$ a dosadíme do první rovnice. Z ní určíme poruchu δn_α a dosadíme do poslední rovnice. Výsledkem je disperzní relace

$$\blacktriangleright \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{0\alpha})^2} = 1; \quad \omega_{p\alpha}^2 \equiv \frac{n_{0\alpha} Q_\alpha^2}{m_\alpha \epsilon_0}. \quad (5.12)$$

Uvažujme jednoduchou situaci dvou svazků pohybujících se v jednom směru (*Bunemanova nestabilita*; pro různé směry svazků v rychlostním prostoru hovoříme o *Weibelově nestabilitě*). V téže směru se objeví porucha elektrického pole a vlna šířící se podél tohoto pole. Disperzní relace bude

$$f(\omega) = \frac{\omega_{p1}^2}{(\omega - ku_1)^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega - ku_2)^2} = 1. \quad (5.13)$$

U neporušených rychlostí jsme pro jednoduchost vynechali index 0. Funkci $f(\omega)$ na levé straně můžeme snadno vykreslit do grafu:



Obr. 110: Levá strana disperzní relace.

Řešení nalezneme jako průsečíky funkce $f(\omega)$ s jednotkou, $f(\omega) = 1$. Charakter řešení bude záviset na poloze bodu C, kde má funkce f lokální minimum. Pokud bude $y_C < 1$, existují čtyři reálná řešení. V případě, že $y_C > 1$ (čárkovaná křivka), budou existovat jen dvě reálná řešení. Vzhledem k tomu, že disperzní relace je čtvrtého řádu v ω , budou v tomto případě dvě řešení komplexní a rozvine se nestabilita. Kritický bod nalezneme z podmínky

$$\frac{df}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\omega_C = \frac{u_2 \omega_{p1}^{2/3} + u_1 \omega_{p2}^{2/3}}{\omega_{p1}^{2/3} + \omega_{p2}^{2/3}} k. \quad (5.14)$$

Podmínku stability odvodíme ze vztahu $f(\omega_C) \leq 1$:

$$\blacktriangleright \quad k^2 \geq \frac{[\omega_{p1}^{2/3} + \omega_{p2}^{2/3}]^3}{(u_2 - u_1)^2}. \quad (5.15)$$

Vztah odvodil Oscar Buneman (1914–1993) v roce 1959. Pro dostatečně krátké vlnové délky je v chladném plazmatu situace stabilní. Nestabilita vznikne vždy pro dosti dlouhé vlnové délky. V horkém plazmatu tomu tak ale nemusí být, situaci je vhodnější analyzovat metodami statistické fyziky, viz kapitola 5.4. Svazky se budou brzdít, ale nikoli srážkami. Vznikne silné elektrické pole s vlnovou délkou $\lambda > \lambda_c$, které způsobí jejich postupnou termalizaci.

5.1.3 Dva symetrické svazky

Uvažujme nyní dva stejné svazky pohybující se symetricky proti sobě. Disperzní relace má jednoduchý jednodimenzionální tvar

$$\omega_p^2 \frac{\omega^2}{(\omega - ku_0)^2} + \frac{\omega_p^2}{(\omega + ku_0)^2} = 1. \tag{5.16}$$

Po roznásobení získáme bikvadratickou rovnici pro úhlovou frekvenci, která má řešení

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 u_0^2 \pm \omega_p \sqrt{\omega_p^2 + 4k^2 u_0^2}. \tag{5.17}$$

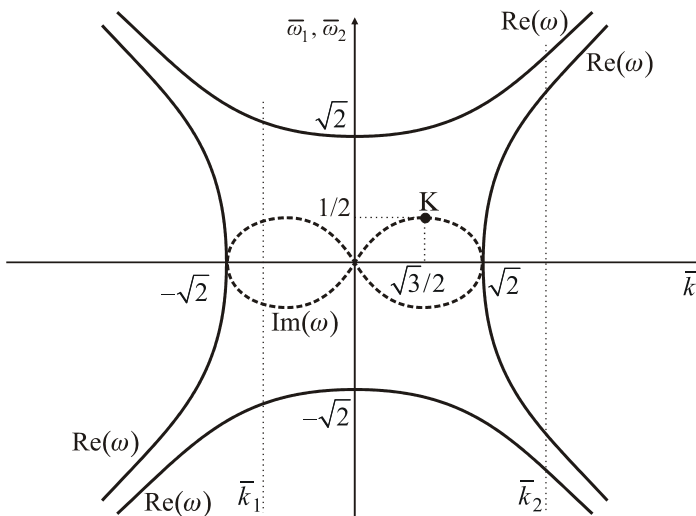
Je zřejmé, že po prvním odmocnění jsou všechna řešení reálná. Oblast reálných řešení (a tedy stability) získáme buď přímo z relace (5.17) nebo z již připravené Bunemanovy podmínky stability (5.15):

$$k^2 \geq 2 \frac{\omega_p^2}{u_0^2} \Rightarrow \bar{k} \equiv \frac{ku_0}{\omega_p} \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty). \tag{5.18}$$

Disperzní relaci (5.17) je výhodné přepsat do bezrozměrného tvaru

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^2 &= 1 + \bar{k}^2 \pm \sqrt{1 + 4\bar{k}^2}; \\ \bar{\omega} &\equiv \frac{\omega}{\omega_p}; \quad \bar{k} \equiv \frac{ku_0}{\omega_p}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Po odmocnění dostaneme čtyři řešení, obecně komplexní ve tvaru $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + i\bar{\omega}_2$. Reálné i imaginární části disperzní relace jsou vykresleny v následujícím grafu:



Obr. 111: Reálné a imaginární větve disperzní relace.

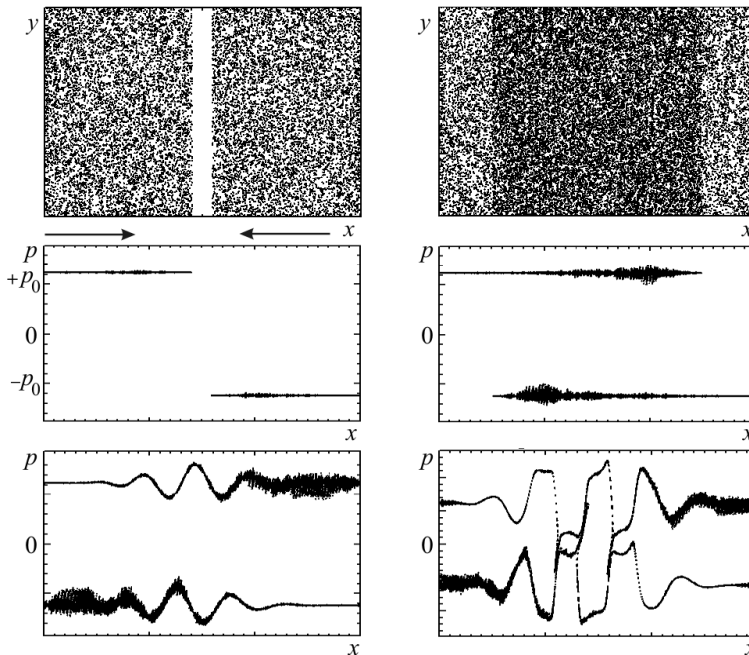
Povšimněte si, že pro velké vlnové vektory (na obrázku k_2) jsou 4 reálná řešení v ω . Pro malé vlnové vektory (bezrozměrné) z intervalu $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ existují jen dvě reálná řešení a dvě komplexní (na obrázku vektor k_1). Pro nestabilitu je klíčový bod K na obrázku, ve kterém je největší hodnota imaginární části úhlové frekvence a tím i největší koeficient nárůstu nestability. Jeho vodorovnou souřadnici nalezneme jako lokální maximum disperzní relace (5.19). Derivaci pravé strany položíme rovnu nule a získáme hodnotu $\bar{k} = \sqrt{3}/2$. V tomto bodě dává disperzní relace (5.19) čtyři řešení

$$\bar{\omega} = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}; \quad \bar{\omega} = \pm \frac{i}{2}.$$

Z hlediska nestability nás zajímá imaginární řešení, souřadnice bodu K jsou $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ a koeficient maximálního růstu nestability

$$\gamma = \text{Im}(\omega) = \text{Im}(\bar{\omega}) \omega_p = \frac{\omega_p}{2}. \quad (5.20)$$

Pro dva různé svazky lze provést obdobný rozbor, jen disperzní relace již nebude symetrická jako v našem případě. Nástup dvousvazkové nestability znamená rozvoj vln a následnou termalizaci obou svazků. Jejich energie se tedy nakonec promění v energii tepelnou. Tam již ale naše přiblížení chladného plazmatu neplatí. Nestabilita dvou symetrických svazků se často používá k testování různých simulačních algoritmů pro pohyby nabitých částic. Elegantní analytické řešení a oblast nástupu nestability je v numerické simulaci snadno ověřitelná.



Obr. 112: Numerická simulace dvousvazkové nestability (O. Hastings, E. Liang, Rice University) pro dva svazky prolínajících se pozitronů. Na spodních čtyřech obrázcích je časový vývoj nestability ve fázovém prostoru (x, p) . Na počátku byla hybnost svazků $\pm p_0$.

5.1.4 Nestabilita typu svazek-plazma

Věnujme nyní pozornost svazku, který interaguje s klidným plazmatem. Z obecné disperzní relace (5.12) máme

$$\frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - ku_b)^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1, \quad (5.21)$$

kde jsme označili ω_p plazmovou frekvencí plazmatu, ω_{pb} plazmovou frekvencí svazku a u_b jeho rychlost. Podmínku stability (5.15) snadno přepíšeme do tvaru

$$k \geq \frac{\omega_p}{u_b} \left[1 + \left(\frac{\omega_{pb}}{\omega_p} \right)^{2/3} \right]^{3/2}. \quad (5.22)$$

V limitě slabého svazku (tak se nazývá situace, kdy platí $\omega_{pb} \ll \omega_p$, například pro ionty pronikající do elektronového plazmatu) přibližně platí $k \geq \omega_p/u_b$. Disperzní relaci (5.21) lze snadno přepsat do jiného elegantního tvaru:

$$\left[\omega^2 - \omega_p^2 \right] \cdot \left[(\omega - ku_b)^2 - \omega_{pb}^2 \right] = \omega_{pb}^2 \omega_p^2. \quad (5.23)$$

Jde o tvar analogický (5.8), v našem případě jsou čtyři vlnové módy svázané vazbou. Někdy se hovoří o *čtyřvlnné interakci*. Limita slabého svazku je současně limitou slabé vazby, tj. malé konstanty na pravé straně.

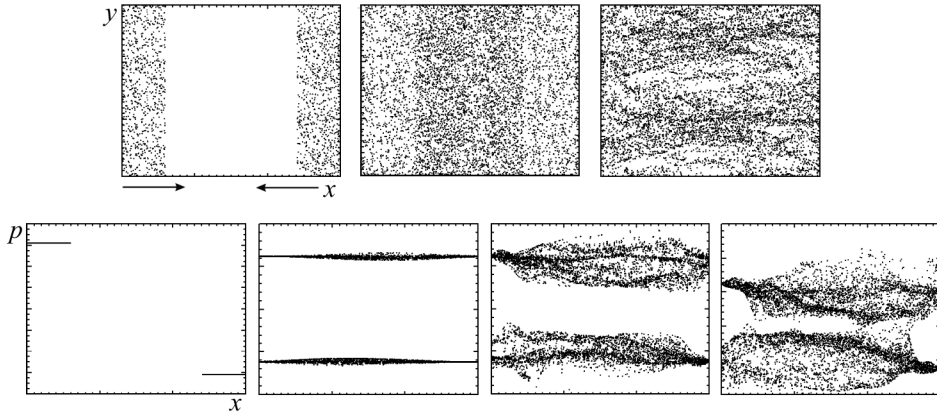
Nestabilita typu svazek-plazma je velmi častá. Objevuje se ve slunečním větru poblíž rázových vln planet, při prostupu různých plazmových výtrysků okolním prostředím. Výsledkem je termalizace svazku. Té lze využívat i při ohřevu plazmatu pomocí svazků nabitých částic.

5.1.5 Další nestability (driftová, Weibelova)

Další situace, kdy se v plazmatu pohybují dvě tekutiny opačným směrem, nastává v přítomnosti driftových pohybů. U většiny driftů se elektrony a ionty pohybují opačným směrem, a proto může dojít k rozvoji nestability. Podmínka *stability* (5.15) dává

$$k \geq \frac{\omega_{pe}}{|v_{Di} - v_{De}|} \left[1 + \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} \right]^{3/2}. \quad (5.24)$$

Nestability vzniklé vzájemným prolínáním dvou nebo více prostředí s různými rychlostmi obecně nazýváme *vicesvazkové nestability*. Není to název příliš šťastný, neboť ne vždy musí jít o svazky. V 1D případě (rychlosti všech prostředí, elektrické pole a vlnový vektor mají stejný směr) hovoříme o *Bunemanově nestabilitě*. V případě anizotropie v rychlostním prostoru (2D a 3D případ) hovoříme o tzv. *Weibelově nestabilitě* (E. S. Weibel, 1959).



Obr. 113: Weibelova nestabilita. První řádek je v (x, y) prostoru, druhý v (x, p) prostoru. O. P. Hastings, E. Liang, Rice University, PIC simulace, 2007.

5.2 Plazma s hranicí a výměnné nestability

5.2.1 Základní vztahy, vektor posunutí

Budeme uvažovat plazmatické prostředí s rozhraním v rámci ideální magnetohydrodynamiky. Tedy zanedbáme difúzní člen, posuvný proud (vysokofrekvenční děje) a samozřejmě předpokládáme, že vlnová délka dějů je větší než střední volná dráha všech částic (jinak by nebylo možné použít teorii kontinua).

Přítomnost hranice značně komplikuje řešení úlohy. Musíme nalézt řešení na obou stranách hranice a tato řešení na hranici navázat. Tato úloha vyžaduje znalost průběhu perturbované hranice a budeme se jí zabývat v této kapitole. Další komplikací je, že základní neperturované řešení již zpravidla není konstantní, ale závisí na některých proměnných, například na vzdálenosti od hranice. V takových proměnných již není možné hledat periodickou poruchu jako dříve. Uvažujme nejprve rovinné rozhraní a poté válcové rozhraní (plazmové vlákno).

Rovinné rozhraní

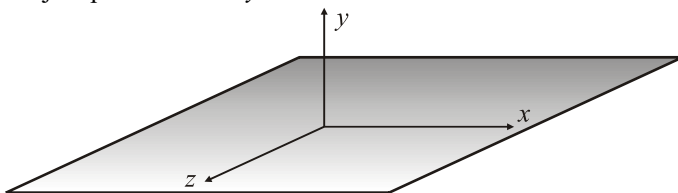
Předpokládejme rozhraní v rovině (xz) . Klidové řešení může být funkcí vzdálenosti, tedy funkcí y . Perturbace klidového řešení proto bude mít tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_0(y) + \delta\psi; \quad \delta\psi = \psi_1(y) e^{ik_x x + ik_z z - i\omega t}. \quad (5.25)$$

Porucha se nyní skládá ze dvou částí: neperiodické, kterou označujeme ψ_1 a periodické, která je obsažena v kmitavé exponenciále. Periodická část povede na algebraické vztahy jako dříve, neperiodická na diferenciální rovnice, které bude třeba řešit. Index 1 u neperiodické části označuje, že se nacházíme v prvním řádu poruchové teorie. V proměnných, kde to je možné, provedeme opět rozklad na parciální vlny, což povede na sadu pravidel pro příslušnou Fourierovu transformaci:

$$\blacktriangleright \quad \partial_t \rightarrow -i\omega; \quad \partial_x \rightarrow ik_x; \quad \partial_y \rightarrow d/dy; \quad \partial_z \rightarrow ik_z. \quad (5.26)$$

Jedinou změnou je tedy to, že v proměnné y , která nemůže být díky hranici periodická, derivace zůstane. Stane se však obyčejnou derivací, protože po aplikaci pravidel již ve výrazech žádná jiná proměnná než y nezůstane.



Obr. 114: Rovinné rozhraní dvou prostředí.

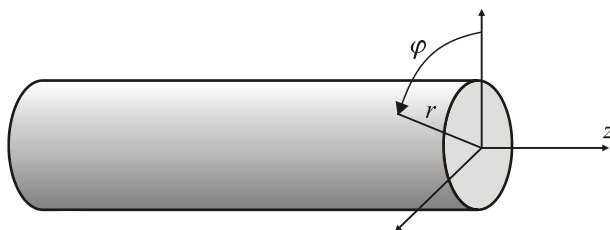
Válcové rozhraní

Předpokládejme nyní válcové rozhraní plazmového vlákna neboli pinče. Klidové řešení (například Bennettovo řešení) bude funkcí radiální vzdálenosti od osy vlákna. Perturbace klidového řešení proto bude mít ve válcových souřadnicích tvar

$$\psi(t, r, \varphi, z) = \psi_0(r) + \psi_1(r) e^{ik_\varphi \varphi + ik_z z - i\omega t}. \quad (5.27)$$

Porucha $\delta\psi$ se opět bude skládat z neperiodické části $\psi_1(r)$ a kmitavé exponenciály. Řešení musí splňovat periodicitu v polárním úhlu φ :

$$\psi(t, r, \varphi + 2\pi, z) = \psi(t, r, \varphi, z). \quad (5.28)$$



Obr. 115: Válcové rozhraní dvou prostředí.

Tuto podmínku splníme, pokud platí

$$e^{ik_\varphi \varphi} = e^{ik_\varphi (\varphi + 2\pi)} \quad \Rightarrow \quad e^{2\pi i k_\varphi} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_\varphi = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

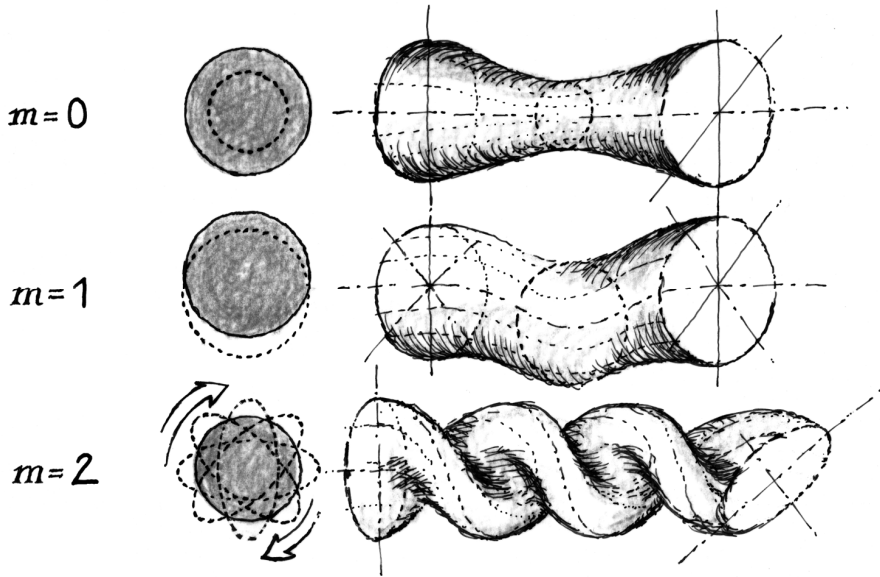
Číslo m nazýváme řád (mód) poruchy resp. nestability a výraz (5.27) získá tvar

$$\psi(t, r, \varphi, z) = \psi_0(r) + \psi_1(r) e^{im\varphi + ik_z z - i\omega t}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.29)$$

Odpovídající pravidla pro rozklad do parciálních vln jsou

$$\blacktriangleright \quad \partial_t \rightarrow -i\omega; \quad \partial_r \rightarrow d/dr; \quad \partial_\varphi \rightarrow im; \quad \partial_z \rightarrow ik_z. \quad (5.30)$$

Proměnná r je neperiodická a v rovnicích zůstane včetně svých derivací. První tři módy poruchy jsou znázorněny na následujícím obrázku



Obr. 116: První tři módy poruch.

Poznámka 1: Pokud bychom ztotožnili levý a pravý okraj vlákna (jde o jednoduché přiblížení toroidální geometrie), musí platit $\psi(t, r, \varphi, z) = \psi(t, r, \varphi, z+L)$, kde L je délka vlákna, což vede na podmínku

$$k_z = \frac{2\pi}{L} n; \quad \delta\psi = \psi_1(r) \exp\left[im\varphi + i\frac{2\pi}{L}nz - i\omega t\right]; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

Poznámka 2: Obecná hranice vede na poruchu

$$\psi(t, \mathbf{q}_n, \mathbf{q}_p) = \psi_0(\mathbf{q}_n) + \psi_1(\mathbf{q}_n) e^{i\mathbf{q}_p \cdot \mathbf{k}_p - i\omega t}, \quad (5.32)$$

kde \mathbf{q}_n jsou neperiodické proměnné a \mathbf{q}_p periodické proměnné.

Vektor posunutí

U problému s hranicí nás většinou nezajímá rychlostní pole, ale vektor posunutí zvolené oblasti plazmatu definovaný vztahem

$$\blacktriangleright \quad \delta\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}) = \int_{t_0}^t \delta\mathbf{u}(t', \mathbf{x}) dt'. \quad (5.33)$$

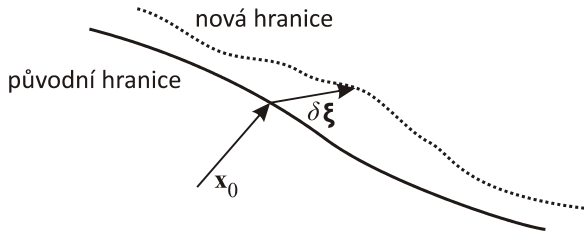
Opačná relace má tvar

$$\delta \mathbf{u} = \frac{\partial \delta \boldsymbol{\xi}}{\partial t}. \quad (5.34)$$

V počátečním čase je vektor posunutí nulový. Tato vlastnost ale již neplatí pro jeho parciální Fourierovy komponenty, ze kterých se výsledný vektor složí. Opět budou mít periodickou (\mathbf{q}_p) i neperiodickou (\mathbf{q}_n) část:

$$\delta \boldsymbol{\xi}_\omega = \boldsymbol{\xi}_{1\omega}(\mathbf{q}_n) e^{i\mathbf{q}_p \cdot \mathbf{k}_p - i\omega t}; \quad \delta \boldsymbol{\xi} = \int \delta \boldsymbol{\xi}_\omega d\omega. \quad (5.35)$$

U parciálních vln se index ω zpravidla píše jen tehdy, mohlo-li by dojít k záměně. Vektor posunutí vyjadřuje posunutí každého vnitřního elementu plazmatu v průběhu poruchy. Právě přes tento vektor bude definován i tvar nové, narušené hranice.



Obr. 117: K definici vektoru posunutí.

Základní rovnice pro vektor posunutí

Vyděme ze standardní soustavy ideální magnetohydrodynamiky pro jednosložkové plazma s polytropní stavovou rovnicí (3.56), k pohybové rovnici přidáme člen s tíhovým zrychlením:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Nyní provedeme linearizaci:

$$\rho = \rho_0(\mathbf{q}_n) + \delta \rho; \quad \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}; \quad p = p_0(\mathbf{q}_n) + \delta p; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{q}_n) + \delta \mathbf{B}. \quad (5.37)$$

Základní řešení je ovšem funkcí některých prostorových proměnných, proto již nebudeme moci přesouvat toto řešení před prostorové derivace a nebo pokládat jeho derivaci rovnou nule. Výsledkem linearizace bude soustava (vypisujeme jen členy 1. řádu)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \delta \mathbf{u}) &= 0, \\
\rho_0 \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla \delta p + \mathbf{g} \delta \rho + \frac{\operatorname{rot} \delta \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}_0}{\mu_0} \times \delta \mathbf{B}, \\
\frac{\partial \delta p}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \delta \mathbf{u} &= 0, \\
\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0).
\end{aligned} \tag{5.38}$$

V dalším kroku dosadíme za poruchu rychlostního pole $\delta \mathbf{u} = \partial \delta \boldsymbol{\xi} / \partial t$. Využijeme, že v linearizované soustavě jsou jediné časové závislosti v perturbovaných členech typu $\delta \psi$. Veličiny typu ψ_0 jsou jen prostorově závislé. S výjimkou druhé rovnice bude možné všechny integrovat v čase (od nuly do času t). Integrační konstanty v určitých integrálech nebudou, v dolní mezi jsou poruchy nulové:

$$\begin{aligned}
\delta \rho + \operatorname{div}(\rho_0 \delta \boldsymbol{\xi}) &= 0, \\
\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} &= -\nabla \delta p + \mathbf{g} \delta \rho + \frac{\operatorname{rot} \delta \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}_0}{\mu_0} \times \delta \mathbf{B}, \\
\delta p + (\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \delta \boldsymbol{\xi} &= 0, \\
\delta \mathbf{B} &= \operatorname{rot}(\delta \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0).
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Druhá rovnice (pohybová rovnice) je rovnicí pro vektor posunutí. Z posledních dvou rovnic do ní dosadíme za δp a $\delta \mathbf{B}$, z první rovnice za $\delta \rho$. Výsledek je

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} &= \nabla(\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) p_0 + \nabla(\gamma p_0 \operatorname{div} \delta \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{g} \operatorname{div}(\rho_0 \delta \boldsymbol{\xi}) + \\
&+ \frac{\operatorname{rot} \delta \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}_0}{\mu_0} \times \delta \mathbf{B}; \quad \text{kde} \\
\delta \mathbf{B} &\equiv \operatorname{rot}(\delta \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Pravá strana je lineárním diferenciálním operátorem působícím na poruchu vektoru posunutí

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \hat{\mathcal{L}} \delta \boldsymbol{\xi}. \tag{5.41}$$

V celém odvození nebyl proveden Fourierův rozklad na parciální vlny. Budeme-li předpokládat časový průběh ve tvaru $\exp[-i\omega t]$, máme

$$\hat{\mathcal{L}} \delta \boldsymbol{\xi} = -\rho_0 \omega^2 \delta \boldsymbol{\xi}. \tag{5.42}$$

Jde o problém vlastních hodnot operátoru $\hat{\mathcal{L}}$ vlastní číslo je funkcí úhlové frekvence. Na navazování řešení na hranici závisí, zda bude mít operátor diskrétní spektrum, a tím

poruchy diskrétní módy s frekvencemi ω_n , a nebo bude mít spojité spektrum a frekvence poruch ω bude libovolná. Celkové řešení potom složime obvyklým způsobem

$$\delta \boldsymbol{\xi} = \sum_n \mathbf{a}_n e^{-i\omega_n t}; \quad \text{resp.} \quad \delta \boldsymbol{\xi} = \int_{\omega} \mathbf{a}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.43)$$

Lze ukázat, že v ideální magnetohydrodynamice (nestlačitelná dokonale vodivá tekutina) je operátor $\hat{\mathcal{L}}$ hermitovský ve smyslu skalárního součinu

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle \equiv \int \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \int f_l^*(\mathbf{x}) g_l(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad (5.44)$$

tedy působí v obou částech skalárního součinu stejně:

$$\langle \mathbf{f} | \hat{\mathcal{L}} \mathbf{g} \rangle = \langle \hat{\mathcal{L}} \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle. \quad (5.45)$$

Prvky prostoru považujeme za komplexní, neboť k popisu vlnění využíváme komplexní vlnové funkce. Operátor má proto reálná vlastní čísla a mohou nastat jen případy $\omega^2 > 0$ (stabilní řešení) nebo $\omega^2 < 0$ (frekvence je ryze imaginární a řešení nestabilní). V ryze imaginárním případě obsahuje řešení jak exponenciálně rostoucí módy, tak exponenciálně tlumené (evanescentní) módy, nezůstane však přítomna kmitavá část. V neideální magnetohydrodynamice s disipací magnetického pole může mít úhlová frekvence reálnou i imaginární část a řešení jak exponenciální, tak kmitavou část.

Z rovnice (5.41) je zřejmé, že výraz $\mathbf{f} \equiv \hat{\mathcal{L}} \delta \boldsymbol{\xi}$ představuje hustotu síly působící na plazma. Napíšeme-li potenciální energii jako záporně vzatou práci, máme

$$\delta W = - \int \delta \boldsymbol{\xi}^* \cdot \hat{\mathcal{L}} \delta \boldsymbol{\xi} d^3 \mathbf{x} = - \int \delta \xi_i^* \hat{\mathcal{L}} \delta \xi_i d^3 \mathbf{x} = - \langle \delta \boldsymbol{\xi} | \hat{\mathcal{L}} \delta \boldsymbol{\xi} \rangle. \quad (5.46)$$

Pokud se potenciální energie přesunem plazmatu o $\delta \boldsymbol{\xi}$ zmenší oproti předchozímu stavu, plazma může (ale nemusí) přejít do nové energeticky výhodnější konfigurace. Pokud by se ale potenciální energie měla pohybem plazmatu zvýšit, samovolně k tomu nikdy nedojde. Postačující podmínkou pro *stabilitu* plazmatu tedy je

$$\langle \delta \boldsymbol{\xi} | \hat{\mathcal{L}} \delta \boldsymbol{\xi} \rangle < 0. \quad (5.47)$$

5.2.2 Navazování vektorových a skalárních polí na hranici

Je-li bod původní hranice \mathbf{x}_0 , je bodem nové hranice v prvním řádu poruchové teorie

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}_0). \quad (5.48)$$

Po dosazení řešení za vektor posunutí pro konkrétní situaci máme rovnici nové hranice, ke které standardním postupem (zapišeme hranici v implicitním tvaru a najdeme gradient) odvodíme normálový vektor, který bude mít část nultého i prvního řádu:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta \mathbf{n}. \quad (5.49)$$

Známe-li rovnici hranice a normálový vektor k ní, můžeme již na hranici navazovat vektorová i skalární pole.

Spojitosť normálovej složky vektorového pole

Přepokládejme, že normálová složka pole je spojitá (například magnetická indukce), potom na hranici platí

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{n} = \text{const}, \quad (5.50)$$

což v prvním řádu poruchové teorie dá podmínku pro navázání řešení na obou stranách

$$\mathbf{K}_0 \cdot \delta \mathbf{n} + \delta \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}_0 = \text{const}. \quad (5.51)$$

Dosadíme-li za poruchy parciální vlny a na obou stranách rovnosti zkrátíme periodické části, máme finální podmínku pro navázání

►
$$\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{n}_0 = \text{const}. \quad (5.52)$$

Spojitosť tečné složky vektorového pole

Přepokládejme, že tečná složka pole je spojitá (například intenzita elektrického pole), potom na hranici platí

$$\mathbf{K} \times \mathbf{n} = \text{const} \quad (5.53)$$

a obdobným způsobem jako v minulém případě dostaneme podmínku navázání

►
$$\mathbf{K}_0 \times \mathbf{n}_1 + \mathbf{K}_1 \times \mathbf{n}_0 = \text{const}. \quad (5.54)$$

Spojitosť skalárního pole

Uvažujme jakékoli skalární pole, které má být na hranici dvou prostředí spojitě (například celkový tlak):

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x}) + \delta\psi(t, \mathbf{x}). \quad (5.55)$$

Na nové hranici bude mít pole hodnotu

$$\begin{aligned} \psi(t, \mathbf{x}_0 + \delta \boldsymbol{\xi}) &= \psi_0(\mathbf{x}_0 + \delta \boldsymbol{\xi}) + \delta\psi(t, \mathbf{x}_0 + \delta \boldsymbol{\xi}) = \\ &= \psi_0 + (\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \psi_0 + \delta\psi + (\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \delta\psi, \end{aligned}$$

na pravé straně jsme provedli Taylorův rozvoj obou členů do prvního řádu (všechny členy bereme v argumentu \mathbf{x}_0). Předpokládejme, že v nultém řádu je naše skalární pole spojitě, potom stačí řešit spojitost v prvním řádu poruchové teorie, což dá

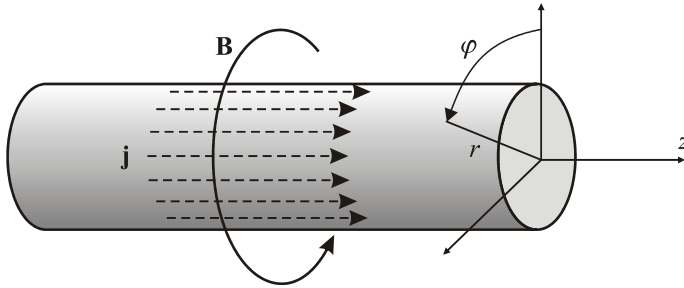
$$(\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \psi_0 + \delta\psi = \text{const}.$$

Dosadíme-li za poruchy opět parciální vlny a na obou stranách rovnosti zkrátíme periodické části, máme finální podmínku pro navázání skalárního pole

►
$$(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \psi_0 + \psi_1 = \text{const}. \quad (5.56)$$

5.2.3 Nestability plazmového vlákna

Uvažujme nejjednodušší možné plazmové vlákno s válcovou symetrií, ve kterém teče elektrický proud jen po povrchu. (Druhým nejjednodušším případem by byl Bennettův pinč s konstantní proudovou hustotou v celém průřezu a parabolickým průběhem tlaku.) Jedinou neperiodickou proměnnou bude radiální vzdálenost, tedy každé řešení bude mít tvar (5.29).



Obr 118: Volba souřadnic u válcového vlákna.

Řešení uvnitř

V tomto jednoduchém případě plyne z Maxwellovy rovnice $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$, že rovnovážné magnetické pole uvnitř je nulové a z rovnice rovnováhy $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla p$, že tlak je konstantní. Celkově tedy pro rovnovážné řešení uvnitř máme všechny veličiny konstantní (to by neplatilo u Bennettova pinče):

$$\rho_0 = \text{const}; \quad p_0 = \text{const}; \quad (5.57)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{B}_0 = 0.$$

Z rovnice pro vektor posunutí (5.40) v tomto případě zbude jen

$$-\rho_0 \omega^2 \delta \boldsymbol{\xi} = \gamma p_0 \nabla \text{div } \delta \boldsymbol{\xi}; \quad \delta \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1(r) e^{im\varphi + ik_z z}. \quad (5.58)$$

V principu můžeme vektor posunutí určit z této rovnice. Jedinou neperiodickou proměnnou je radiální souřadnice a tak jde o tři vzájemně provázané obyčejné diferenciální rovnice pro komponenty ξ_{1r} , $\xi_{1\varphi}$, ξ_{1z} . V takto triviálním případě by ale tento postup byl zbytečně složitý. Přimo z rovnic (5.39) po dosazení rovnovážného řešení máme

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho_0 \delta \boldsymbol{\xi} &= \nabla \delta p, \\ \delta p + \gamma p_0 \text{div } \delta \boldsymbol{\xi} &= 0, \\ \delta \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Z poslední rovnice okamžitě vidíme, že porucha magnetického pole uvnitř vlákna je nulová a proto je nulová i neperiodická část

$$\mathbf{B}_1 = 0. \quad (5.60)$$

První dvě rovnice v (5.59) tvoří soustavu rovnic pro vektor posunutí $\delta\boldsymbol{\xi}$ a pro poruchu tlaku δp . Vyloučíme-li z rovnic poruchu tlaku, získáme rovnici (5.58) pro vektor posunutí. Pokud naopak dosadíme za $\delta\boldsymbol{\xi}$ z první rovnice do druhé rovnice, získáme skalární rovnici pro poruchu tlaku a po jejím vyřešení již snadno dopočteme vektor posunutí z první rovnice. Tento postup zvolíme:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c_s^2}\right)\delta p = 0; \quad c_s^2 \equiv \frac{\gamma p_0}{\rho_0}. \quad (5.61)$$

Nyní vyjádříme Laplaceův operátor ve válcových souřadnicích podle (C.9):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \delta p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_s^2} \delta p = 0.$$

Po aplikaci pravidel (5.30) nebo přímém dosazení $\delta p = p_1(r) \exp[im\varphi + ikz]$ a zkrácení kmitající části řešení máme rovnici

$$r^2 \frac{d^2 p_1}{dr^2} + r \frac{dp_1}{dr} - \left[m^2 + \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) r^2 \right] p_1 = 0. \quad (5.62)$$

Označme

$$q^2 \equiv k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}; \quad x \equiv qr. \quad (5.63)$$

Veličina q může být obecně komplexní, ale pro $\gamma \rightarrow \infty$, což odpovídá isochorickému ději a tedy nestlačitelné tekutině, je $q^2 > 0$. S tímto označením získá rovnice tvar modifikované Besselovy rovnice

$$x^2 \frac{d^2 p_1}{dx^2} + x \frac{dp_1}{dx} - [m^2 + x^2] p_1 = 0, \quad (5.64)$$

jejíž obecné řešení je (viz dodatek A4)

$$p_1(r) = AI_m(qr) + BK_m(qr). \quad (5.65)$$

Vzhledem k tomu, že pro $r \rightarrow 0$ funkce K_m diverguje, je konstanta B nulová a řešení tedy je

$$p_1(r) = AI_m(qr). \quad (5.66)$$

Jako poslední krok nalezneme vektor posunutí z první rovnice (5.59):

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \nabla \delta p = \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) AI_m(qr) e^{im\varphi + ikz - i\omega t} = \\ &= \left(\frac{Aq}{\omega^2 \rho_0} I_m', \frac{imA}{\omega^2 \rho_0 r} I_m, \frac{ikA}{\omega^2 \rho_0} I_m \right) e^{[im\varphi + ikz - i\omega t]}. \end{aligned}$$

Pro neperiodickou část vektoru posunutí platí

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(\frac{Aq}{\omega^2 \rho_0} I'_m, \frac{imA}{\omega^2 \rho_0 r} I_m, \frac{ikA}{\omega^2 \rho_0} I_m \right). \quad (5.67)$$

Celkově tedy pro neperiodické části poruch máme uvnitř plazmového vlákna ve válcových souřadnicích (r, φ, z) řešení

$\mathbf{B}_0 = (0, 0, 0),$	$\mathbf{B}_1 = (0, 0, 0),$	(5.68)
$p_0 = \text{const},$	$p_1 = AI_m(qr),$	
$\boldsymbol{\xi}_0 = (0, 0, 0),$	$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(\frac{Aq}{\omega^2 \rho_0} I'_m(qr), \frac{imA}{\omega^2 \rho_0 r} I_m(qr), \frac{ikA}{\omega^2 \rho_0} I_m(qr) \right).$	

Řešení vně

Vně plazmového vlákna rovnovážné magnetické pole ubývá podle Ampérova zákona jako $1/r$ a lze pro něho psát

$$\mathbf{B}_0 = B_0(r_0) \frac{r_0}{r} \mathbf{e}_\varphi, \quad (5.69)$$

kde r_0 je poloměr vlákna. Vně není plazma a tak jsou poruchy p_1 i $\boldsymbol{\xi}_1$ nulové. Jedině nenulová bude porucha magnetického pole, pro kterou vně vlákna platí Maxwelllova rovnice $\text{rot } \delta \mathbf{B} = 0$. Porucha magnetického pole je tedy nevírová a musí existovat skalární potenciál:

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \delta \phi. \quad (5.70)$$

Divergence magnetického pole musí být nulová, tj. $\text{div}(\mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}) = 0$. Vzhledem k tomu, že pro rovnovážné řešení platí $\text{div } \mathbf{B}_0 = 0$, musí platit i $\text{div } \delta \mathbf{B} = 0$. Kombinací s (5.70) máme pro potenciál poruchy rovnici

$$\nabla^2 \delta \phi = 0. \quad (5.71)$$

Rozepíšeme-li Laplaceův operátor do válcových souřadnic, dostaneme pro jeho neperiodickou část rovnici

$$r^2 \frac{d^2 \phi_1}{dr^2} + r \frac{d\phi_1}{dr} - [m^2 + k^2 r^2] \phi_1 = 0. \quad (5.72)$$

Za vnitřní proměnnou tentokrát zvolíme

$$x = kr, \quad (5.73)$$

a dostaneme opět modifikovanou Besselovu rovnici

$$x^2 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + x \frac{d\phi_1}{dx} - [m^2 + x^2] \phi_1 = 0 \quad (5.74)$$

s řešením

$$\phi_1(r) = CI_m(kr) + DK_m(kr). \quad (5.75)$$

Vně vlákna pro $r \rightarrow \infty$ diverguje funkce I_m , takže řešení je

$$\phi_1(r) = DK_m(kr). \quad (5.76)$$

Nyní již snadno nalezneme poruchu magnetického pole z rovnice (5.70), neboli

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \delta \phi = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi_1 e^{im\varphi + ikz - i\omega t} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) DK_m(kr) e^{im\varphi + ikz - i\omega t}.$$

Po provedení derivací a oddělení kmitající části máme výsledek

$$\mathbf{B}_1 = \left(DkK'_m, \frac{iDm}{r} K_m, ikDK_m \right). \quad (5.77)$$

Shrňme tedy výsledky vně vlákna:

$\mathbf{B}_0 = \left(0, B_0(r_0) \frac{r_0}{r}, 0 \right),$	$\mathbf{B}_1 = \left(DkK'_m(kr), \frac{iDm}{r} K_m(kr), ikDK_m(kr) \right),$	(5.78)
$\xi_0 = (0, 0, 0),$	$\xi_1 = (0, 0, 0),$	
$p_0 = 0,$	$p_1 = 0.$	

Navázání řešení

Nejprve nalezneme vektor normály k hranici proudového vlákna, pro kterou platí

$$r = r_0 + \xi_{1r}(r_0) e^{im\varphi + ikz - i\omega t}. \quad (5.79)$$

Hranici zapíšeme v implicitním tvaru

$$F(t, r, \varphi, z) = -r + r_0 + \xi_{1r}(r_0) e^{im\varphi + ikz - i\omega t} = 0 \quad (5.80)$$

a vektor normály určíme jako gradient

$$\mathbf{n} = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \left(-1, \frac{im\xi_{1r}}{r} e^{im\varphi + ikz - i\omega t}, ik\xi_{1r} e^{im\varphi + ikz - i\omega t} \right). \quad (5.81)$$

Vektor normály můžeme rozdělit na původní a perturbovanou část $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta \mathbf{n}$ a poté z perturbované části oddělit neperiodickou část:

$$\mathbf{n}_0 = (-1, 0, 0), \quad (5.82)$$

$$\delta \mathbf{n} = \left(0, \frac{im\xi_{1r}}{r}, ik\xi_{1r} \right) e^{im\varphi + ikz - i\omega t}, \quad (5.83)$$

$$\mathbf{n}_1 = \left(0, \frac{im\xi_{1r}}{r}, ik\xi_{1r} \right). \quad (5.84)$$

To je vše co potřebujeme pro úspěšné navázání: řešení uvnitř (5.68), řešení vně (5.78) a části vektoru normály \mathbf{n}_0 a \mathbf{n}_1 . Jako první navažme normálovou složku magnetického pole $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ podle vztahu (5.52):

$$[\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_0]_{\text{uvnitř}}^{\text{vně}} = 0. \quad (5.85)$$

Uvnitř vlákna je výraz nulový a venku dá $B_{0\varphi} n_{1\varphi} + B_{1r} n_{0r} = 0$. Vzhledem k tomu, že hranice je společná, musíme za vektor posunutí ξ_{1r} dosadit z vnitřního řešení. Ve všech výrazech provedeme limitu $r \rightarrow r_0$:

$$\blacktriangleright A \left[\frac{i m B_0(r_0) q}{\omega^2 \rho_0 r_0} I'_m(qr_0) \right] - D [k K'_m(kr_0)] = 0. \quad (5.86)$$

Zbývá navázat celkový tlak $\psi = p + B^2/2\mu_0$ podle vztahu (5.56):

$$\left[\xi_{1r} \frac{d}{dr} \frac{B_0^2}{2\mu_0} + p_1 + \frac{B_{0\varphi} B_{1\varphi}}{\mu_0} \right]_{\text{uvnitř}}^{\text{vně}} = 0.$$

Opět dosadíme nalezená řešení uvnitř i vně, hranice je společná (tedy dosazujeme vnitřní), provedeme derivaci a poté ve všech výrazech limitu $r \rightarrow r_0$:

$$\blacktriangleright A \left[I_m(qr_0) + \frac{B_0^2 q}{\omega^2 \rho_0 \mu_0 r_0} I'_m(qr_0) \right] - D \left[\frac{i m B_0}{\mu_0 r_0} K_m(kr_0) \right] = 0. \quad (5.87)$$

Rovnice (5.86) a (5.87) jsou soustavou rovnic pro hledané integrační konstanty A a D . Netriviální řešení bude existovat jen tehdy, pokud bude determinant soustavy roven nule:

$$-\frac{i m B_0(r_0) q}{\omega^2 \rho_0 r_0} I'_m(qr_0) \left[\frac{i m B_0}{\mu_0 r_0} K_m(kr_0) \right] + k K'_m(kr_0) \left[I_m(qr_0) + \frac{B_0^2 q}{\omega^2 \rho_0 \mu_0 r_0} I'_m(qr_0) \right] = 0.$$

Poslední dva výrazy roznásobíme a z rovnice vypočteme ω^2 :

$$\blacktriangleright \omega^2 = -\frac{v_A^2 q}{r_0} \frac{I'_m(qr_0)}{I_m(qr_0)} \left[1 + \frac{m^2}{kr_0} \frac{K_m(kr_0)}{K'_m(kr_0)} \right]; \quad v_A^2 \equiv \frac{B_0^2(r_0)}{\rho_0 \mu_0}. \quad (5.88)$$

Získali jsme tak disperzní relaci v našem jednoduchém případě a současně vlastní čísla problému (5.42).

Rozbor řešení

Získaná disperzní relace je skutečně taková, jak jsme již avizovali u rovnice pro vektor posunutí – mohou nastat jen případy $\omega^2 > 0$ (stabilní řešení) a $\omega^2 < 0$ (frekvence je ryze imaginární a řešení nestabilní). Základní *podmínka stability* je

$$\frac{v_A^2}{r_0} q \frac{I'_m(qr_0)}{I_m(qr_0)} \left[1 + \frac{m^2}{kr_0} \frac{K_m(kr_0)}{K'_m(kr_0)} \right] < 0.$$

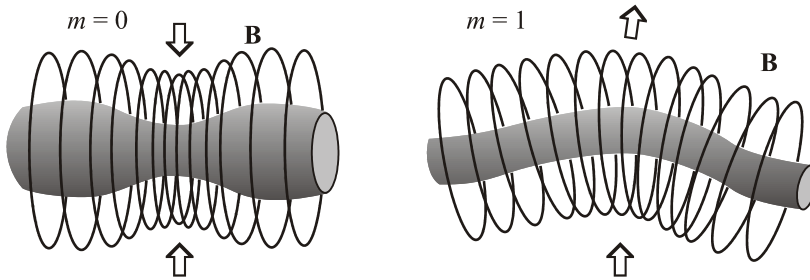
Uvědomíme-li si (dodatek A4), že funkce I_m je vždy kladná a stejně tak její derivace I'_m , veličina q^2 je v režimu blízkém nestlačitelnému (ideální magnetohydrodynamika, γ velké) také kladná, získáme finální tvar tzv. *Kruskalovy-Šafranovy podmínky stability*.

$$\triangleright 1 + \frac{m^2}{kr_0} \frac{K_m(kr_0)}{K'_m(kr_0)} < 0 . \tag{5.89}$$

Povšimněte si, že jediná veličina obsahující materiálové vlastnosti plazmatu q ve finálním vztahu není. Označíme-li $x \equiv kr_0$, můžeme podmínku přepsat do tvaru (K_m je kladné, K'_m záporné):

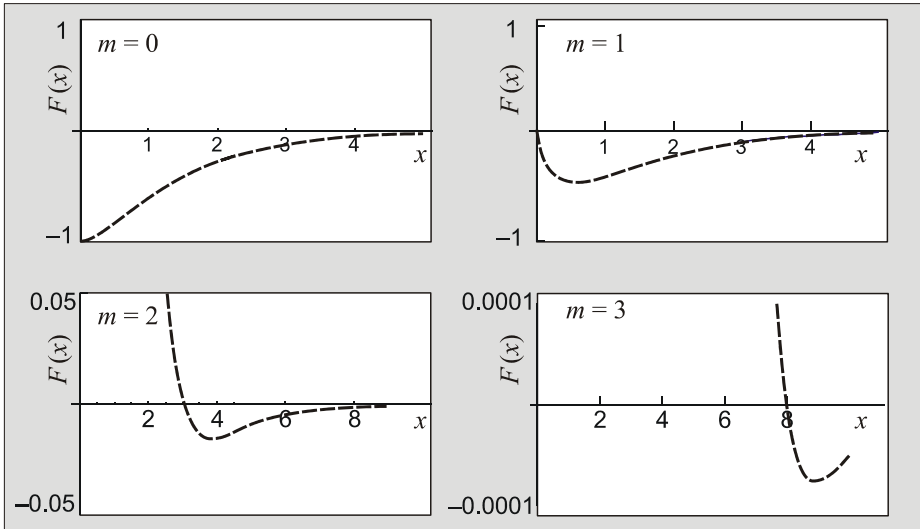
$$F(x) \equiv xK'_m(x) + m^2K_m(x) > 0 . \tag{5.90}$$

Podmínka stability v tomto tvaru je vhodná pro grafické řešení (vykreslíme levou stranu vztahu a sledujeme, zda je výsledek kladný). Z obou posledních vztahů je okamžitě vidět, že pro $m = 0$ neexistuje řešení a vlákno bude vždy nestabilní vůči poruchám módu 0. Totéž lze ukázat pro mód $m = 1$.



Obr. 119: Nultý a první mód poruchy vlákna.

Nestabilitu $m = 0$ nazýváme *korálková nestabilita* (sausage instability), nestabilitu $m = 1$ *smyčková nestabilita* (kink instability). V obou případech se objeví silnější pole (hustší magnetické indukční čáry) na „nesprávném“ místě a tlak magnetického pole počáteční deformaci nadále prohlubuje.



Obr. 120: K výpočtu stability vlákna.

Na grafech v obrázku 120 je vykreslena levá strana nerovnosti (5.90). První dva módy nemají žádné nulové řešení a jsou vždy nestabilní. Všechny další módy jsou *stabilní* pro $x < x_0$, které je pro prvních pět módů v následující tabulce:

mód m	0	1	2	3	4	5
$x_0 = kr_0$	–	–	3,04	8,02	15,01	24,01

Tabulka: Argumenty, pro které prochází grafy nulou

Pro x_0 platí přibližná formule

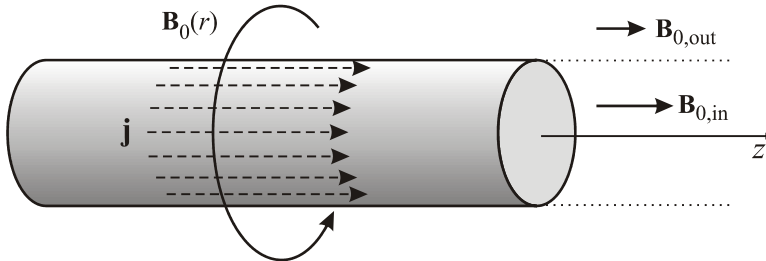
$$x_0 \approx m^2 - 1. \quad (5.91)$$

Od módu 2 je řešení stabilní pro $kr_0 < x_0$, tedy pro vlnové délky

$$\lambda > \frac{2\pi r_0}{m^2 - 1}; \quad m = 2, 3, \dots \quad (5.92)$$

Řešení pro nenulové osové pole

V případě, že by na počátku existovalo osové pole B_{0z} , budou první dva módy již alespoň v některých oblastech parametrů stabilní. Osově pole má na proudové vlákno stabilizující účinek.



Obr. 121: Obecnější případ plazmového vlákna.

Obdobným postupem můžeme získat disperzní relaci i nyní. Uvedme jen výsledek, který je nutné řešit graficky, pro první dva módy budou existovat stabilní oblasti řešení:

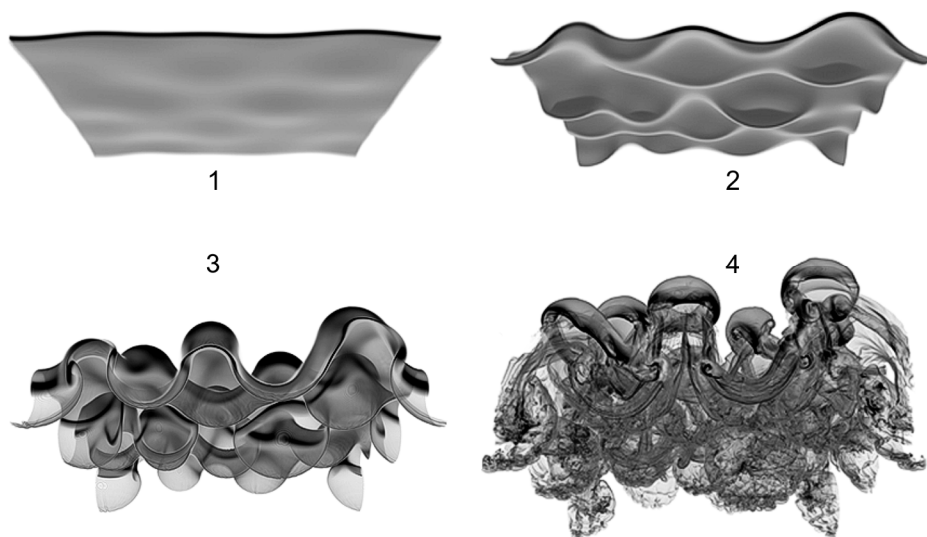
$$\omega^2 = k^2 v_{A,\text{in}}^2 - \left(k v_{A,\text{ex}} + m \frac{v_A}{r_0} \right)^2 \frac{q I'_m(qr_0) K_m(kr_0)}{k I_m(qr_0) K'_m(kr_0)} - \frac{v_A^2 q I'_m(qr_0)}{r_0 I_m(qr_0)};$$

$$\left. \begin{aligned} v_A^2 &\equiv \frac{B_0^2(r_0)}{\rho_0 \mu_0}; & v_{A,\text{in}}^2 &\equiv \frac{B_{0,\text{in}}^2}{\rho_0 \mu_0}; & v_{A,\text{ex}}^2 &\equiv \frac{B_{0,\text{ex}}^2}{\rho_0 \mu_0}; \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

$$q^2 \equiv \frac{(k^2 - \omega^2/c_s^2)(k^2 - \omega^2/v_{A,\text{in}}^2)}{k^2 - \omega^2/c_s^2 - \omega^2/v_{A,\text{in}}^2}.$$

5.2.4 Rayleighova-Taylorova nestabilita

Rayleighova Taylorova nestabilita (RT nestabilita) vzniká na rozhraní dvou tekutin různých hustot (například je-li v gravitačním poli hustší kapalina „nad“ řidší). Pro tekutiny v konstantním tíhovém poli byla poprvé tato nestabilita popsána anglickým fyzikem, lordem Rayleighem (1842–1919) v roce 1883. Anglický fyzik a matematik Geoffrey Ingram Taylor (1886–1975) zobecnil tuto nestabilitu v roce 1950 i pro jakékoli konstantní zrychlení, které míří směrem od hustší k řidší tekutině. V takové situaci se snaží hustší tekutina zaujmout polohu „pod“ řidší tekutinou (v daném poli) a počáteční poruchy na rozhraní se rozvinou do charakteristických útvarů podobných prstům a později kloboučkům hub. Někdy se nestabilitám tohoto typu říká *výměnné nestability*, protože si různé oblasti tekutiny vyměňují pozici a „hledají“ stav s nižší energií. Typickým příkladem jsou dvě nemísící se kapaliny nalité do sklenice tak, aby hustší kapalina byla nad řidší. RT nestabilita ale vzniká i při inverzi na rozhraní dvou vzdušných mas nebo při interakci expandujícího hvězdného větru s Krabí mlhovinou, jež je pozůstatkem po explozi supernovy pozorované v roce 1054. RT nestabilita je zodpovědná i za hříbovitý tvar vznikající při atomovém výbuchu. V místě exploze vznikne lehký a horký plyn, který za pomoci RT nestability proniká vzhůru.

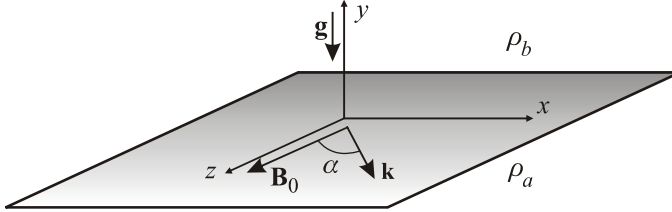


Obr122: Numerická simulace rozvoje Rayleighovy-Taylorovy nestability.
Pittsburg Supercomputing Centrum.

V roce 1954 ukázali Martin Kruskal (1925–2006) a Martin Schwarzschild (1912–1997), že přítomnost magnetického pole může u krátkých vlnových délek zabránit rozvoji této nestability na rozhraní dvou druhů plazmatu.

Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby rozhraní obou prostředí bylo v rovině $y = 0$. Předpokládejme, že ve směru osy y působí homogenní tíhové pole a na plazma působí vnější magnetické pole \mathbf{B}_0 rovnoběžné s rozhraním. Na rozhraní obou prostředí

se rozvine malá porucha. Osu z můžeme opět volit ve směru magnetického pole a zajistit tak kompatibilitu s předchozími výpočty. Jinou možností je volit osu z ve směru šíření poruchy – periodická část pak bude mít jednoduchou závislost $\exp[ikz]$. Postup odvození, který následuje, na volbě osy z nezávisí. Důležité je jen, že vektory \mathbf{B}_0 a \mathbf{k} jsou rovnoběžné s rozhraním. Pro určitost předpokládáme souřadnicový systém zvolený dle obrázku:



Obr. 123: Volba souřadnicového systému.

Výpočet vektoru posunutí

Při naší volbě souřadnicového systému budou mít poruchy tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_0(y) + \delta\psi(t, \mathbf{x}); \quad \delta\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_1(y) e^{i[k_x x + k_z z - \omega t]}. \quad (5.94)$$

U vektoru posunutí budeme pro jednoduchost index 1 vynechávat

$$\delta\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(y) e^{i[k_x x + k_z z - \omega t]}. \quad (5.95)$$

Z geometrie problému pro jednotlivé veličiny plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, 0, k_z), \\ \boldsymbol{\xi}(y) &= \boldsymbol{\xi}_{\perp} \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\xi}_{\parallel} = (\xi_{\parallel x}, \xi_{\perp}, \xi_{\parallel z}), \\ \mathbf{B}_0 &= \mathbf{B}_0(y) = (B_{0x}, 0, B_{0z}), \\ \rho_0 &= \rho_0(y); \quad p_0 = p_0(y). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Symbol \parallel znamená rovnoběžný s rozhraním, symbol \perp znamená kolmý na rozhraní (tedy ve směru osy y). Hodnota B_{0x} je v naší geometrii nulová, ale pro další odvození to není podstatné. Pro jednoduchost budeme předpokládat nestlačitelné plazma, tj. $\text{div } \delta\boldsymbol{\xi} = 0$. Po rozeptání dá tato podmínka jednoduchý vztah

$$\xi'_{\perp} + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi'_{\perp} + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} = i\xi'_{\perp}. \quad (5.97)$$

Čárka ve všech výrazech znamená derivaci podle jediné neperiodické proměnné y . V rovnici pro vektor posunutí (5.40) určíme nejprve poruchu magnetického pole v dané geometrii ($\text{div } \mathbf{B}_0 = 0$; $\text{div } \boldsymbol{\xi} = 0$):

$$\delta\mathbf{B} = \text{rot}(\delta\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \delta\boldsymbol{\xi} - (\delta\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 = i(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \delta\boldsymbol{\xi} - \delta\xi_{\perp} \mathbf{B}'_0. \quad (5.98)$$

Poruchu dosadíme do rovnice (5.40) pro vektor $\delta\boldsymbol{\xi}$, která pro nestlačitelné plazma dává

$$-\omega^2 \rho_0 \delta\boldsymbol{\xi} = \nabla(\delta\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) p_0 - \mathbf{g} \text{div}(\rho_0 \delta\boldsymbol{\xi}) + \frac{\text{rot } \delta\mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\text{rot } \mathbf{B}_0}{\mu_0} \times \delta\mathbf{B}. \quad (5.99)$$

V rovnici rozepíšeme všechny členy, provedeme derivace, zkrátíme periodické části, upravíme dvojné vektorové součiny a za všechny výskyty $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})$ dosadíme z (5.97):

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_{\perp} = \left[\xi_{\perp} \rho'_0 - \frac{i}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}'_0) \xi_{\perp} \right] - \frac{\xi_{\perp}}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + g \rho'_0 \xi_{\perp},$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_{\parallel} = i k \xi_{\perp} \rho'_0 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{k} (\mathbf{B}_0 \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) - \frac{1}{\mu_0} \xi_{\parallel} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{i}{\mu_0} \mathbf{k} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}'_0) \xi_{\perp}.$$

Jde o tři rovnice (1+2) pro vektor posunutí. Druhou rovnici vynásobíme skalárně vektorem \mathbf{k} , za $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\parallel} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}$ opět dosadíme z (5.97), a vypočteme kombinaci

$$\frac{i}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) = \xi_{\perp} \rho'_0 + \frac{\omega^2}{k^2} \rho_0 \xi'_{\perp} - \frac{1}{\mu_0 k^2} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \xi'_{\perp} + \frac{\xi_{\perp}}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}'_0),$$

kteřou dosadíme do první rovnice. Tím získáme jednu jedinou rovnici pro kolmou složku vektoru posunutí:

$$\left[\left(\omega^2 \rho_0 - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{\mu_0} \right) \xi'_{\perp} \right] - k^2 \left(\omega^2 \rho_0 - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{\mu_0} \right) \xi_{\perp} - g k^2 \rho'_0 \xi_{\perp} = 0. \quad (5.100)$$

Pokud označíme kulaté závorky symbolem \mathcal{H}_0 , získá rovnice pro kolmou složku vektoru posunutí jednoduchý tvar

$$(\mathcal{H}_0 \xi'_{\perp})' - k^2 (\mathcal{H}_0 \xi_{\perp}) - g k^2 \rho'_0 \xi_{\perp} = 0; \quad (5.101)$$

►

$$\mathcal{H}_0 \equiv \omega^2 \rho_0 - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2.$$

Zavedeme-li Alfvénovu rychlost odpovídající neporušenému magnetickému poli vztahem

$$\mathbf{v}_{0A} \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}, \quad (5.102)$$

lze funkci \mathcal{H}_0 přepsat do podoby

$$\mathcal{H}_0 \equiv \rho_0 \left[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{0A})^2 \right]. \quad (5.103)$$

Pokud budeme uvažovat infinitezimálně tenké rovinné rozhraní (přechodovou vrstvu), jsou hustota $\rho_0(y)$ a magnetické pole $\mathbf{B}_0(y)$ v obou poloprostorech konstantní, ale v rovině $y = 0$ mají skok, takže derivace ρ'_0 , \mathbf{B}'_0 vedou na distribuce. Nicméně pro $y \neq 0$ je $\rho'_0 = 0$ a funkce \mathcal{H}_0 je konstantní. Rovnice má proto v obou poloprostorech tvar

$$\xi''_{\perp} - k^2 \xi_{\perp} = 0. \quad (5.104)$$

Řešením je lineární kombinace dvou exponenciálních funkcí, z nichž v každém poloпростору vybereme tu, která v nekonečno klesá k nule. Vektor posunutí bude spojitý:

$$\xi_{\perp}(y) = Ce^{-k|y|} = \begin{cases} Ce^{-ky} & ; y > 0, \\ Ce^{+ky} & ; y < 0. \end{cases} \quad (5.105)$$

Navázání řešení a disperzní relace

Je zřejmé, že první derivace nalezeného řešení má v rovině $y = 0$ skok a druhá derivace se chová jako distribuce. Všechny derivace skoků se musí v původní rovnici (5.101) vyrušit. Toho můžeme využít k navázání řešení na rozhraní. Nalezené řešení dosadíme do původní rovnice (5.101). Integraci v proměnné y se zbavíme derivace v prvním výrazu (a s ní souvisejících derivací skoků). V druhém výrazu derivace skoků nejsou. V posledním výrazu provedeme integraci per partes a derivaci skoku v hustotě tak převedeme na derivaci spojitě veličiny ξ_{\perp} :

$$\left[-\mathcal{H}_0 k \operatorname{sgn} y e^{-k|y|} \right]_{-l}^{+l} - k^2 \int_{-l}^{+l} \mathcal{H}_0 e^{-k|y|} dy - \left[gk^2 \rho_0 e^{-k|y|} \right]_{-l}^{+l} - \int_{-l}^{+l} gk^3 \rho_0 \operatorname{sgn} y e^{-k|y|} dy = 0.$$

Nyní provedeme limitu $l \rightarrow 0$ (tedy z obou poloprostorů se blížíme k rozhraní). Oba integrandy jsou omezené a v limitě se integrály blíží k nule. Zbývá podmínka

$$\left[-\mathcal{H}_0 k \operatorname{sgn} y e^{-k|y|} - gk^2 \rho_0(y) e^{-k|y|} \right]_{y \rightarrow 0^-}^{y \rightarrow 0^+} = 0,$$

ze které okamžitě plyne disperzní relace

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b + gk(\rho_b - \rho_a) = 0, \quad (5.106)$$

kde indexy a a b značí dolní a horní poloprostor. Po dosazení za funkci \mathcal{H} máme finální disperzní relaci problému

$$\blacktriangleright \quad \omega^2 (\rho_a + \rho_b) - \frac{1}{\mu_0} \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_b)^2 \right] + gk(\rho_b - \rho_a) = 0. \quad (5.107)$$

Rozbor řešení (nulové magnetické pole)

Pro nulové magnetické pole vychází:

$$\blacktriangleright \quad \omega^2 = -gk \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a + \rho_b}. \quad (5.108)$$

Situace je tedy vždy nestabilní, pokud je těžší tekutina nad lehčí ($\omega^2 < 0$, $\rho_b > \rho_a$). Koefficient nárůstu nestability je

$$\gamma = \sqrt{gk \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a + \rho_b}}, \quad (5.109)$$

tedy k nejrychlejšímu rozvoji nestability bude docházet pro krátké vlnové délky a pro velké rozdíly hustot ($\rho_b \gg \rho_a$, hustší kapalina je nad řidší).

Rozbor řešení (nenulové magnetické pole)

V přítomnosti magnetického pole máme disperzní relaci

$$\omega^2 = -gk \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a + \rho_b} + \frac{1}{\mu_0} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_b)^2}{\rho_a + \rho_b}, \quad (5.110)$$

která vede na podmínku stability ($\omega^2 \geq 0$)

$$-gk(\rho_b - \rho_a) + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_b)^2}{\mu_0} \geq 0. \quad (5.111)$$

Snadno ji přepíšeme do tvaru

$$\lambda \leq \frac{2\pi (B_a^2 \cos^2 \alpha_a + B_b^2 \cos^2 \alpha_b)}{\mu_0 g (\rho_b - \rho_a)}. \quad (5.112)$$

Úhel mezi magnetickým polem a vlnovým vektorem jsme označili α . Pro poruchu šířící se podél pole tedy vždy existuje pro dosti krátké vlnové délky oblast stability i v případě hustší kapaliny nad řidší. Pro kužel stability platí (pokud jsou oba úhly stejné, tj. $\alpha_a = \alpha_b = \alpha$)

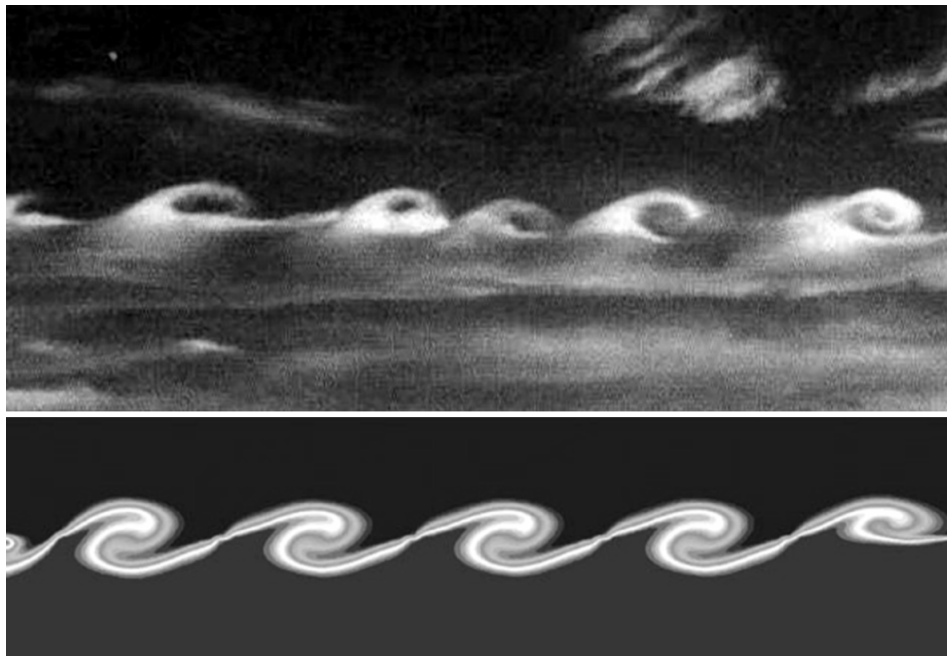
$$\alpha \in (0, \alpha_{\max}); \quad \alpha_{\max} = \arccos \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_{\max}}}; \quad (5.113)$$

$$\lambda \leq \lambda_{\max} \equiv \frac{2\pi (B_a^2 + B_b^2)}{\mu_0 g (\rho_b - \rho_a)}; \quad \rho_b > \rho_a.$$

5.2.5 Kelvinova-Helmholtzova nestabilita

Další typickou nestabilitou, která se může rozvinout na rozhraní dvou prostředí je Kelvinova Helmholtzova (KH) nestabilita. Vzniká tam, kde se vůči sobě obě prostředí pohybují (vítr nad vodní hladinou, sluneční vítr obtékající na bocích magnetosféru, rozhraní pásů obřích planet nebo rozhraní dvou vrstev atmosféry Země). Při dostatečně velkém rozdílu rychlostí dojde k rozvoji nestability i tehdy, pokud je situace RT stabilní (tj. lehčí tekutina je nad těžší). KH nestabilita vzniká i při velkém sřížném (kolmém na směr rychlosti) gradientu rychlosti v tekutině jediné. K stabilizujícím prvkům patří přítomnost gravitačního pole, magnetického pole v plazmatu nebo neostrost hranice rozhraní (rychlost se nemění skokem, ale postupně).

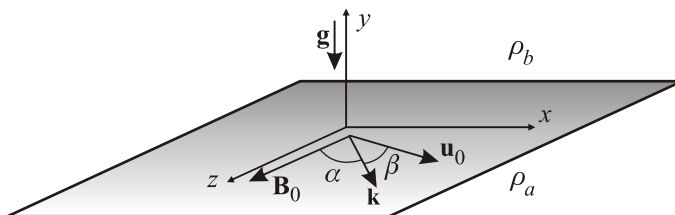
Nestabilitu poprvé popsal Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894) v roce 1868 a nezávisle na něm lord Kelvin (1824–1907) v roce 1871. Kompletní řešení pro nestlačitelné kapaliny nalezl v roce 1961 Subramanyan Chandrasekhar. V roce 1963 zobecnil toto řešení pro ideální magnetohydrodynamiku Amiya Sen, o rok později nalezl i řešení pro stlačitelný případ, které v roce 1968 zobecnil Richard Gerwin a v témže roce ještě David John Southwood pro magnetopauzu. V roce 1980 nalezl Attilio Ferrari alespoň částečné řešení pro relativistické rychlosti, které je důležité například u relativistických výtrysků z černých děr.



Obr. 124: Porovnání KH nestability v oblačnosti s numerickou simulací.
Foto: University of Notre Dame. Simulace: Programový balík FLUENT.

Disperzní relace

Uvažujme obdobné podmínky, jako u Rayleighovy-Taylorovy nestability, tj. nestlačitelné plazma s infinitezimálně úzkým rovinným rozhraním v rovině $y = 0$. Opět budeme předpokládat závislost počátečních podmínek na souřadnici y , tj. $\rho_0 = \rho_0(y)$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0(y)$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(y)$. Magnetické pole \mathbf{B}_0 i vektor rychlosti \mathbf{u}_0 leží v rovině rozhraní $y = 0$. Souřadnicový systém můžeme zvolit obdobně jako u RT nestability (na této volbě je ale výsledná disperzní relace nezávislá):



Obr. 125: Volba souřadnicového systému.

Disperzní relaci lze odvodit stejným postupem, obdobně jako ve vztahu (4.33) dojde jen k záměně

$$\omega \rightarrow \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0. \quad (5.114)$$

Disperzní relace tedy opět bude mít tvar (5.106):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b + gk(\rho_b - \rho_a) &= 0; \\ \mathcal{H}_0 &\equiv [\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0]^2 \rho_0 - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Po dosazení máme

$$\blacktriangleright (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_a)^2 \rho_a + (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_b)^2 \rho_b - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_a)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_b)^2}{\mu_0} + gk(\rho_b - \rho_a) = 0. \quad (5.116)$$

Rozbor řešení (nulová tíže, nulové magnetické pole)

Předpokládejme pro jednoduchost, že tekutina v poloprostoru a je v klidu, rychlost \mathbf{u}_b má pak význam vzájemné rychlosti $\Delta \mathbf{u}_0$ obou prostředí, úhlová frekvence je měřena v námi zavedené soustavě, tj. vzhledem k tekutině v klidu. Disperzní relace je

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho_a + (\omega - \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{u}_0)^2 \rho_b &= 0, \\ \omega^2 \rho_a + \omega^2 \rho_b - 2\omega(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{u}_0)\rho_b + (\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{u}_0)^2 \rho_b &= 0, \\ \blacktriangleright \omega_{1,2} &= (\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{u}_0) \frac{r \pm i\sqrt{r}}{(1+r)}; \quad r \equiv \frac{\rho_b}{\rho_a}. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Vzhledem k tomu, že má úhlová frekvence nenulovou imaginární část, dojde k rozvoji KH nestability vždy, dokonce i pro $r = 1$, tj. pro stejné tekutiny pohybující se vůči sobě nenulovou rychlostí. Koeficient nárůstu nestability (kladná imaginární část úhlové frekvence) je

$$\gamma = \frac{(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{u}_0)\sqrt{r}}{(1+r)}. \quad (5.118)$$

Rozbor řešení (vliv tíže)

Opět budeme předpokládat, že tekutina v poloprostoru a je v klidu. Jediné pole, které na obě tekutiny působí, je tíže. Z disperzní relace snadno nalezneme řešení pro ω :

$$\blacktriangleright \omega_{1,2} = \frac{(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{u}_0)r}{1+r} \pm \sqrt{\frac{gk(1-r)}{1+r} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{u}_0)^2 r}{(1+r)^2}}; \quad r \equiv \frac{\rho_b}{\rho_a}. \quad (5.119)$$

Z řešení je patrné, že tíže má stabilizující vliv, úhlová frekvence již nemusí mít nenulovou imaginární část. Podmínkou stability je, aby výraz, který je pod odmocninou, nebyl záporný, tj.

$$gk(1-r^2) - (\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{u}_0)^2 r \geq 0.$$

Předpokládejme, že situace je RT stabilní (tj. lehčí tekutina je nad těžší, $r < 1$, v opačném případě by byla RT nestabilní jen zvýrazněna). Podmínka stability potom je

$$\blacktriangleright \quad \lambda \geq \lambda_{\max} \cos^2 \beta; \quad \lambda_{\max} \equiv 2\pi \frac{\Delta u_0^2}{g} \frac{r}{1-r^2}; \quad \beta = \angle(\mathbf{k}, \Delta \mathbf{u}_0). \quad (5.120)$$

Vlny větší než λ_{\max} jsou stabilní, pokud by vůbec vznikly, nebudou zesilovány. Například pro vítr nad vodní hladinou (vítr je sice stlačitelný, ale v prvním přiblížení lze vztah použít) vznikají vlny ve směru větru ($\beta = 0$) a hustota větru je mnohem menší než vody ($r \ll 1$). Podmínka stability se v tomto případě redukuje na vztah

$$\lambda \geq \lambda_{\max}; \quad \lambda_{\max} \equiv 2\pi r \frac{\Delta u_0^2}{g}. \quad (5.121)$$

Nutno ale poznamenat, že krátkovlnné módy jsou stabilizovány povrchovým napětím.

Rozbor řešení (vliv tíže a magnetického pole)

Disperzní relace (5.116) bude mít při nenulové tíži a nenulovém poli řešení

$$\blacktriangleright \quad \omega_{1,2} = \frac{(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{u}_0)r}{1+r} \pm \sqrt{\frac{gk(1-r)}{1+r} + \frac{[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_a)^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_b)^2]r}{1+r}} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{u}_0)^2 r}{(1+r)^2}, \quad (5.122)$$

$$\mathbf{v}_a \equiv \frac{\mathbf{B}_a}{\sqrt{\mu_0 \rho_a}}; \quad \mathbf{v}_b \equiv \frac{\mathbf{B}_b}{\sqrt{\mu_0 \rho_b}}; \quad r \equiv \frac{\rho_b}{\rho_a}.$$

Variabilita možností je nyní značná, přítomnost tíže i magnetického pole má stabilizující účinek (přispívají ke kladné části výrazu pod odmocninou). Podmínka stability má tvar (předpokládáme RT stabilní systém, tj. $r < 1$)

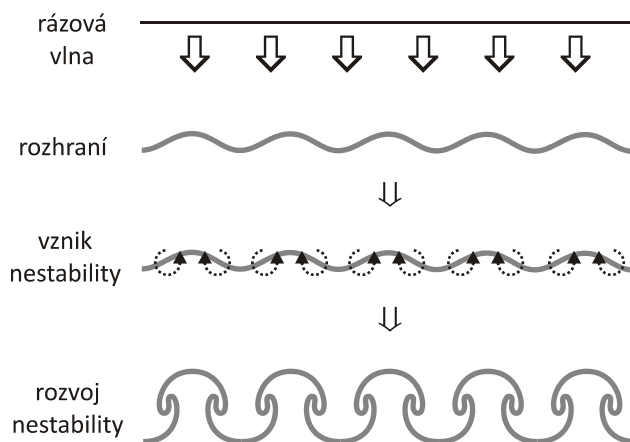
$$\blacktriangleright \quad k(\Delta u_0)^2 r \cos^2 \beta \leq g(1-r^2) + k(v_a^2 \cos^2 \alpha_a + v_b^2 r \cos^2 \alpha_b)(1+r). \quad (5.123)$$

Z relace je možné pro konkrétní situaci dopočítat oblasti stability systému.

5.2.6 Další nestability (Richtmyerova–Meškovova, diocotronová)

Richtmyerova-Meškovova nestabilita

Další nestabilitou vznikající na rozhraní dvou prostředí je Richtmyerova-Meškovova nestabilita (RM). Dochází k ní při prudkém urychlení hranice dvou prostředí, například při průchodu rázové vlny. K rozvoji této nestability dochází při explozích supernov, vzniklé mísení je kombinací RM a RT nestability. Jiným typickým příkladem je rozvoj této nestability při inerciální fúzi, kdy dochází k implozi horké obálky na zatím studeném peletu s jaderným palivem. Odraz rázové vlny na rozhraní může vést ke vzniku vírových struktur. Teoreticky existenci této nestability předpověděl Robert Davis Richtmyer (1911–2003) v *Los Alamos National Laboratory* v roce 1953. Nestabilitu poprvé experimentálně pozoroval Evgenij Meškov v roce 1970 v Sovětském svazu, v *Vserusskom naučnom issledovatelskom institute*.



Obr 126: Vznik Richtmyerovy-Meškovovy nestability.

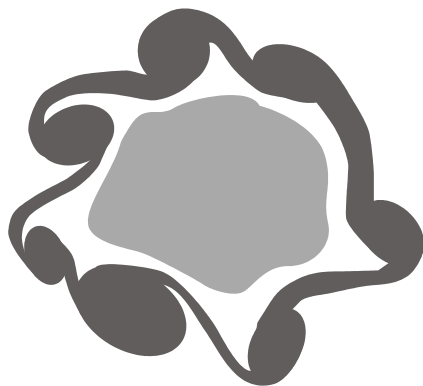
Diocotronová nestabilita

Jde o obdobu KH nestability, u které pohyb plazmatu podél rozhraní vzniká díky narušení kvazineutality plazmatu. Vzniklé elektrické pole způsobí spolu s magnetickým polem drift nabitých částic, který vede k rozvoji nestability. V oblasti měnící se rychlosti se vytvářejí charakteristické víry. K diocotronové nestabilitě dochází na povrchu plazmových vláken, při průniku svazku elektronů plazmatem, ve stěnách polárních září nebo ve spirálních ramenech galaxií (NGC 3646). Název nestability pochází z řeckého slova *pronásledovat*. Nestabilitu zavedl Hannes Alfvén (1908–1995) v roce 1950 k vysvětlení vzniku vírových struktur v polárních zářích.

Diocotronová nestabilita vzniká všude tam, kde se po sobě posouvají dvě vrstvy různě nabitého plazmatu. Nejčastější je ale u plazmového vlákna, ve kterém z nějakého důvodu došlo k separaci elektrického náboje v radiálním směru. Vzniklé radiální elektrické pole způsobuje spolu s osovým magnetickým polem B_z azimutální drift rychlostí v_φ . Celé vlákno začne rotovat diferenciální rotací (oblasti různě vzdálené od osy mají různou úhlovou rychlost). Na povrchu vlákna se stýkají dvě oblasti s různou rychlostí (rotující vlákno a okolní prostředí) a může dojít k rozvoji diocotronové nestability.

K separaci náboje v radiálním směru, která je základní podmínkou vzniku diocotronové nestability, může dojít mnoha způsoby. Nejčastěji jde o různé drifts, na které reagují elektrony jinak než ionty. Vlastní záření pinče také může způsobit separaci náboje. Zářivé procesy odnášejí část tepelné energie uvolněné při výboji, tím vzniká radiální gradient teploty, který způsobí nejen separaci elektrického náboje (analogie termoelektrického jevu), ale i separaci jednotlivých chemických prvků. Také různé typy jiných nestabilit mohou vést ke vzniku nekompenzovaného náboje.

Diocotronová nestabilita je pro plazmová vlákna velice častá. Je pozorována v mnoha laboratorních experimentech, ve vesmírném plazmatu a v numerických simulacích. Rozvoj diocotronové nestability podmíněný povrchovou rotací může být dominantním impulsem k přestavbě vlákna do helikální struktury.



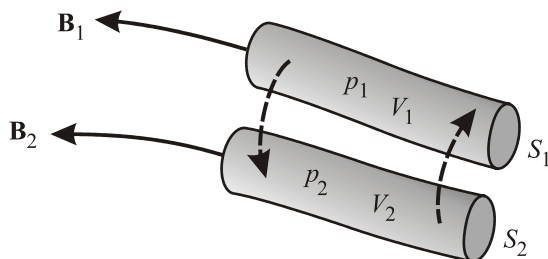
Obr 127: Diocotronová nestabilita.

5.2.7 Výměnné (tlakem řízené) nestability

K Rayleighově Taylorově nestabilitě dochází proto, že je těžší tekutina nad lehčí. Při přesunu těžší tekutiny pod lehčí (a lehčí nad těžší) dojde k takovému přeskupení, které vede ke snížení vnitřní energie tekutiny. Stejný princip platí ale i obecně. Pokud je situace taková, že přesunem plazmatu můžeme docílit, aby se snížila vnitřní energie systému, je plazma nestabilní. Podmínkou *stability* tedy je

$$\delta W_{\text{int}} \geq 0; \quad \delta W_{\text{int}} \equiv -\int \delta \xi^* \cdot \hat{\mathcal{L}} \delta \xi \, d^3x. \quad (5.124)$$

K vyjádření energie jsme využili vztahu (5.46). Předpokládejme plazma s dominantním magnetickým polem ($\beta = p/p_M \ll 1$) a vypočtíme změnu vnitřní energie, pokud by se plazma z okolí jedné magnetické indukční čáry zaměnilo za plazma z okolí jiné, blízké magnetické indukční čáry (vyměníme plazma ve dvou sousedních magnetických trubcích).



Obr 128: Výměnná nestabilita.

Pro vnitřní energii podle vztahu (2.51) platí

$$W_{\text{int}} = \frac{pV}{\gamma-1}, \quad (5.125)$$

kde p je tlak plazmatu v magnetické trubici, V její objem a γ polytropní koeficient. Pro tlak plazmatu předpokládejme polytropní chování, tj.

$$pV^\gamma = \text{const} . \quad (5.126)$$

Pokud přejde plazma z trubice 1 do trubice 2, bude změna vnitřní energie rovna

$$\delta W_{1 \rightarrow 2} = \frac{p_2' V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{p_1 (V_1/V_2)^\gamma V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} .$$

Pokud přejde naopak plazma z trubice 2 do trubice 1, změní se energie o hodnotu

$$\delta W_{2 \rightarrow 1} = \frac{p_1' V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{p_2 (V_2/V_1)^\gamma V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} .$$

Celková změna energie obou trubic bude

$$\delta W = \delta W_{1 \rightarrow 2} + \delta W_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \left[p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma V_2 - p_1 V_1 + p_2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma V_1 - p_2 V_2 \right] .$$

Pokud výchozí tlak a objem označíme $p_1 = p$, resp. $V_1 = V$ a zapíšeme změnu tlaku a objemu jako $p_2 = p + \delta p$, resp. $V_2 = V + \delta V$, můžeme provést rozvoj v poruchách. Nulté a první řády všech poruch se odečtou, rozvoje je tedy třeba dělat do druhého řádu

$$\delta W = \frac{1}{\gamma - 1} \left[p \left(\frac{V}{V + \delta V} \right)^\gamma (V + \delta V) - pV + (p + \delta p) \left(\frac{V + \delta V}{V} \right)^\gamma V - (p + \delta p)(V + \delta V) \right] ,$$

$$\delta W = \frac{1}{\gamma - 1} \left[p \left(1 + \frac{\delta V}{V} \right)^{-\gamma} (V + \delta V) - pV + (p + \delta p) \left(1 + \frac{\delta V}{V} \right)^\gamma V - (p + \delta p)(V + \delta V) \right] .$$

Nyní využijeme pro rozvoj mocnin vztah

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots$$

a po roznásobení všech členů ponecháme jen výrazy do druhého řádu v poruchách:

$$\delta W = \gamma \frac{p}{V} (\delta V)^2 + \delta p \delta V . \quad (5.127)$$

Vztah jsme odvodili za předpokladu dominantního pole, v případě slabého pole bychom museli u sousedních magnetických trubic ještě uvažovat různý magnetický indukční tok a tedy změnu magnetické energie, což by vedlo na nepatrně odlišný vztah. Objem trubice (předpokládáme, že je konečné délky) je potom

$$V = \int S dl .$$

Plochu budeme volit kolmou na element délky trubice a vyjádříme ji ze zákona zachování indukčního toku $\phi = BS$, tj.

$$V = \phi \int \frac{dl}{B} = \phi U; \quad U \equiv \int \frac{dl}{B}.$$

Veličina U je objem magnetické trubice vztažený na jednotku indukčního toku. Vypočítá se jako převrácená hodnota magnetického pole vysčítaná podél celé délky trubice. Základním kritériem stability plazmatu vzhledem k výměně plazmatu v sousedních magnetických trubcích je vztah (vnitřní energie se nesmí snížit, neboť taková situace by vedla k výměně trubic a tím k nestabilitě)

$$\triangleright \quad \gamma \frac{p}{U} (\delta U)^2 + \delta p \delta U \geq 0; \quad U \equiv \int \frac{dl}{B}. \quad (5.128)$$

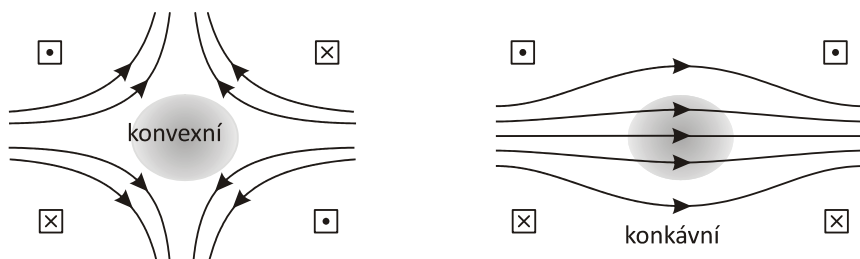
Postačující podmínka stability

Vzhledem k tomu, že první výraz je vždy nezáporný, je postačující (nikoli nutnou) podmínkou stability vztah

$$\delta p \delta U > 0; \quad U \equiv \int \frac{dl}{B}. \quad (5.129)$$

Oba členy musí mít stejné znaménko, tj. například s rostoucím tlakem musí růst i veličina U , tj. magnetické pole musí klesat. Ke stabilitě tedy postačí, aby ve směru poklesu tlaku plazmatu magnetické pole rostlo (nebo naopak ve směru růstu tlaku klesalo).

● Příklad 18: Konvexní a konkávní zrcadlo



Obr. 129: Konvexní a konkávní zrcadlo.

Na obrázku je nalevo azimutální neboli konvexní (vzhledem k plazmatu) zrcadlo, někdy také nazývané *kasp* z anglického slova „cusp“ (roh, cíp). Budeme-li se pohybovat napříč indukčních čar (v tomto směru probíhá výměna plazmatu mezi magnetickými trubecemi) směrem od plazmatu, bude klesat tlak plazmatu a růst magnetické pole. To je postačující podmínka pro stabilitu a takováto konfigurace bude stabilní vzhledem k pronikání plazmatu napříč indukčních čar.

U klasického (konkávního) zrcadla je situace přesně opačná. Budeme-li se pohybovat napříč indukčních čar, klesá tlak plazmatu i magnetické pole. Taková situace nám stabilitu nezaručuje a systém může (ale nemusí) být nestabilní.

Nutná i postačující podmínka stability

Vyšetřeme nyní celou podmínku stability (5.128). Pro její aplikaci je nutné nasčítat veličinu $1/B$ podél magnetické indukční čáry a zjistit závislost na poloze indukční čáry. Pokud se jednotlivé indukční čáry liší parametrem r (například vzdáleností od osy systému), musíme znát průběh tlaku $p(r)$ a závislost $U(r)$. Systém je stabilní právě tehdy, když

$$\gamma \frac{p}{U} \left(\frac{dU}{dr} \right)^2 + \frac{dp}{dr} \frac{dU}{dr} \geq 0; \quad U \equiv \int \frac{dl}{B}. \quad (5.130)$$

Někdy je výhodné přepsat podmínku stability (5.128) do alternativního tvaru

$$\frac{\delta \ln p}{\delta \ln U} \geq -\gamma. \quad (5.131)$$

Dalším alternativním přepisem podmínky stability (ve tvaru součinu) je

$$\delta U \delta \left[\ln(pV^\gamma) \right] \geq 0. \quad (5.132)$$

Vzhledem k tomu, že případný rozvoj či utlumení nestability závisí výhradně na průběhu tlaku, nazývají se nestability tohoto druhu někdy *tlakem řízené nestability*.

■ **Příklad 19 (nekonečný vodič):** Uvažujte nekonečný vodič protékáný konstantním proudem. Předpokládejte, že v okolí vodiče je plazma.

- 1) Jak rychle může ubývat tlak plazmatu se vzdáleností od vodiče, aby byl systém ještě stabilní?
- 2) Nalezněte závislost β parametru na vzdálenosti od vodiče pro rozhraní mezi stabilitou a nestabilitou.

Řešení: Předpokládejme, že tlak ubývá se vzdáleností od vodiče jako C/r^α . Indukční čáry magnetického pole tvoří kružnice a na kružnici o poloměru r je magnetické pole dané Ampérovým zákonem, $B(r) = D/r$. Na celé kružnici má toto pole stejnou hodnotu, a proto obě klíčové veličiny jsou:

$$p(r) = \frac{C}{r^\alpha}; \quad U(r) = \int \frac{dl}{B(l)} = \frac{2\pi r}{D/r} = Kr^2.$$

Z kritéria stability ve tvaru (5.130) máme po dosazení za $p(r)$ a $U(r)$

$$\alpha \leq 2\gamma.$$

Parametr β bude mít pro $\alpha = 2\gamma$ závislost

$$\beta \equiv p/p_M \sim p/B^2 \sim 1/r^{\alpha+2} = 1/r^{2\gamma+2}.$$

Závěr: Plazma v okolí vodiče bude stabilní vzhledem k pohybu mezi magnetickými trubicemi, pokud tlak klesá pomaleji než $1/r^{2\gamma}$. Pokud tlak klesá rychleji, plazma je nestabilní. Kritická hodnota parametru β ubývá se vzdáleností jako $1/r^{2\gamma+2}$.

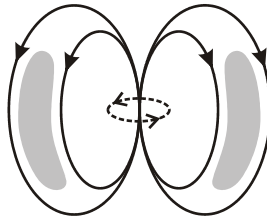
● **Příklad 20 (dipól):** Řešte předchozí příklad pro vodič stočený do kružnice o poloměru a . Předpokládejte, že se nacházíte dosti daleko od vodiče, tj. $r \gg a$.

Řešení: Budeme postupovat obdobně jako u minulého příkladu, délka indukční čáry je úměrná vzdálenosti od vodiče a magnetické pole dipólu klesá dosti daleko od zdroje s třetí mocninou vzdálenosti

$$B(r) \sim \frac{1}{r^3}; \quad \Rightarrow \quad U(r) \equiv \int \frac{dl}{B} \sim r^4.$$

Aplikací kritéria na tlak s průběhem C/r^α získáme podmínku stability

$$\alpha \leq 4\gamma. \quad (5.133)$$



Obr. 130: Magnetický dipól.

Závěr: Plazma v okolí magnetického dipólu bude stabilní vzhledem k pohybu mezi magnetickými trubicemi, pokud tlak klesá pomaleji než $1/r^{4\gamma}$. Pokud tlak klesá rychleji, plazma je nestabilní. Kritická hodnota parametru β ubývá se vzdáleností jako $1/r^{4\gamma+2}$.

Poznámka 1: Plazma ve Van Allenových pásech je stabilní, a proto zde tlak klesá pomaleji než $1/r^{4\gamma}$.

Poznámka 2: Jednou z konfigurací pro udržení plazmatu při termojaderné fúzi je také pole magnetického dipólu (obdoba Van Allenových pásů). Pokud je pokles tlaku plazmatu se vzdáleností od středu příliš rychlý, uniká plazma ze systému výměnnou nestabilitou.

Poznámka 3: Pokud by parametr β nebyl malý, bylo by třeba při odvození uvažovat i změny magnetické energie. Kritérium stability v takovém případě je [14], [22]

$$\gamma \frac{p}{U} (\delta U)^2 + \left(1 + \gamma \frac{pU}{I}\right) \delta p \delta U \geq 0; \quad U \equiv \int \frac{dl}{B}; \quad I \equiv \frac{1}{\mu_0} \int B dl. \quad (5.134)$$

Poznámka 4.: Přítomnost střížného (pole podél rozhraní, jehož velikost závisí na vzdálenosti od rozhraní) magnetického pole může tlakem řízné nestability stabilizovat (obdobně jakou RT nestability).

5.3 Rezistivní nestability

5.3.1 Základní vztahy

Nenulový odpor plazmatu umožňuje především přepojování magnetických indukčních čar a s tím spojenou ostrůvkovou (tearing) nestabilitu rozvíjející se na rozhraní dvou oblastí s opačným směrem magnetických indukčních čar. Na hranici takové oblasti nemůžeme zanedbat difúzní člen v rovnici pro magnetické pole (3.13). Podstatné jsou ovšem i jevy spojené s případným gradientem rezistivity napříč rozhraním. Proto odvodíme rovnici pro magnetické pole ještě jednou s uvažováním nenulového gradientu rezistivity. V celé kapitole budeme uvažovat opět poruchy ve tvaru

$$\psi(t, \mathbf{q}_n, \mathbf{q}_p) = \psi_0(\mathbf{q}_n) + \psi_1(\mathbf{q}_n) e^{i\mathbf{q}_p \cdot \mathbf{k}_p - i\omega t}, \quad (5.135)$$

kde \mathbf{q}_n jsou neperiodické proměnné (zpravidla kolmo na rozhraní) a \mathbf{q}_p periodické proměnné. Budeme také předpokládat „nestlačitelnost“ magnetického pole (je splněna vždy z Maxwellových rovnic) a nestlačitelnost plazmatu (je zpravidla splněna, dominuje-li zamrzání plazmatu nad difúzí, tato situace platí pro naprostou většinu laboratorního i vesmírného plazmatu):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (5.136)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0. \quad (5.137)$$

Rovnice pro magnetické pole

Vyjděme z Maxwellovy rovnice pro časový vývoj magnetického pole

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.138)$$

a Ohmova zákona v diferenciálním tvaru

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}); \quad \sigma = \sigma(\mathbf{x}). \quad (5.139)$$

Do rovnice (5.138) dosadíme za elektrické pole z (5.139) a po přímočarých úpravách dostaneme

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \eta) \times \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (5.140)$$

kde jsme zavedli rezistivitu vztahem

$$\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma(\mathbf{x})}. \quad (5.141)$$

První člen popisuje difúzi pole, druhý představuje zamrznání a v dalším uvidíme, že třetí člen se chová jako nové silové pole, které může výrazně ovlivnit přepojování magnetických indukčních čar. Napišme ještě linearizovaný tvar rovnice pro magnetické pole pro $\mathbf{u}_0 = 0$ a \mathbf{B}_0 splňující rovnici $\nabla^2 \mathbf{B}_0 = 0$ (magnetické pole splňuje vlnovou rovnici a toto je její stacionární podoba):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta_0}{\mu_0} \nabla^2 \delta \mathbf{B} + \text{rot}(\delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \eta_0) \times \text{rot} \delta \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \delta \eta) \times \text{rot} \mathbf{B}_0. \quad (5.142)$$

Rovnice pro rezistivitu

Původ gradientu rezistivity plazmatu může být různý. Zpravidla známe počáteční průběh rezistivity a potřebujeme zjistit její změny způsobené průchodem vlny nebo nestability. V takovém případě se nemusíme opírat o detailní mechanismus původu vodivosti plazmatu a můžeme konstatovat, že se díky pohybům plazmatu budou přenášet od místa k místu i oblasti s konkrétní rezistivitou, tedy bude platit $d\eta/dt = 0$. Po rozepsání máme rovnici pro rezistivitu ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \eta = 0. \quad (5.143)$$

Linearizovaná podoba rovnice pro rezistivitu bude

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \eta_0 = 0.$$

Oba členy lze přímo integrovat v čase

$$\delta \eta + (\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \eta_0 = 0.$$

Po vynechání periodických proměnných máme finální tvar

$$\blacktriangleright \quad \eta_1 + (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \eta_0 = 0. \quad (5.144)$$

Tím, že neřešíme fyzikální mechanismy, ale pouhý přesun oblastí s danou rezistivitou, můžeme z vektoru posunutí přímo spočítat poruchu rezistivity η_1 . Celá rovnice pro rezistivitu je proto v lineárním přiblížení triviální záležitostí.

Význam gradientu η_0

Přepišme Ohmův zákon (5.139) do tvaru s rezistivitou:

$$\boldsymbol{\eta} \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}.$$

V lineárním přiblížení máme

$$\delta \boldsymbol{\eta} \mathbf{j}_0 + \eta_0 \delta \mathbf{j} = \delta \mathbf{E} + \delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0.$$

Vzhledem k tomu, že jde o algebraické vztahy, můžeme na obou stranách rovnosti vypustit periodickou část

$$\eta_1 \mathbf{j}_0 + \eta_0 \mathbf{j}_1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0.$$

Poruchu η_1 dosadíme ze vztahu (5.144) a určíme poruchu proudové hustoty \mathbf{j}_1 :

$$\mathbf{j}_1 = \frac{(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \eta_0}{\eta_0} \mathbf{j}_0 + \frac{\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0}{\eta_0}.$$

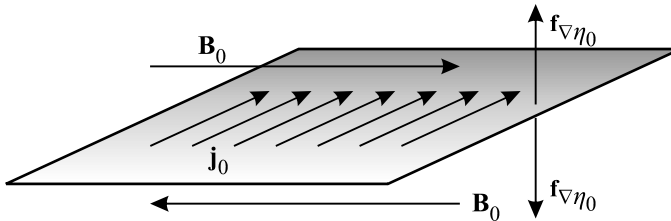
Novému elektrickému proudu bude příslušet hustota Lorentzovy síly působící na plazma

$$\mathbf{f}_1 \equiv \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 = \frac{(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \eta_0}{\eta_0} (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0) + \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0 + (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0}{\eta_0}.$$

Zatímco druhý člen je standardní změna hustoty síly způsobená perturbacemi, první člen je zcela nový. Jde o sílu způsobenou gradientem počátečního rozložení rezistivity, který můžeme zapsat jako:

$$\mathbf{f}_{\nabla \eta_0}^{(1)} \equiv \frac{(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \eta_0}{\eta_0} (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0). \quad (5.145)$$

Pokud má magnetické pole na obou stranách rozhraní opačný směr, teče proudová hustota \mathbf{j}_0 v rozhraní a nová síla má směr kolmý na rozhraní. Taková síla může výrazně vznik nestability na rozhraní ovlivnit (podobně jako tíhové zrychlení je podnětem k rozvoji Rayleighovy-Taylorovy nestability). V tomto případě bude ale na jedné straně nestabilitu podporovat a na druhé tlumit.



Obr. 131: Neutrální vrstva v rezistivní magnetohydrodynamice.

Rovnice pro vektor posunutí

Pohybovou rovnicí budeme uvažovat ve tvaru

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (5.146)$$

po linearizaci máme

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} + = -\nabla \delta p + \delta \rho \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{B}_0) \times \delta \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \delta \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0. \quad (5.147)$$

Další rovnice

Rovnice (5.142), (5.144) a (5.147) je třeba doplnit podmínkami nestlačitelnosti nebo nějakým jiným uzavřením soustavy. V případě nestlačitelnosti bude tlak i hustota sledovat pohybující se plazma obdobně jako rezistivita a můžeme tedy psát analogicky se vztahem (5.144)

► $\rho_1 + (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \rho_0 = 0, \tag{5.148}$

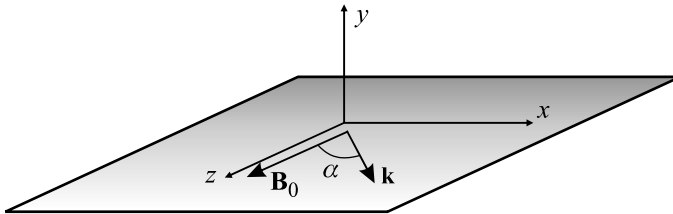
► $p_1 + (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) p_0 = 0. \tag{5.149}$

Jedinými skutečnými rovnicemi jsou tedy rovnice pro magnetické pole a pro vektor posunutí. Zbylé rovnice jsou jen algebraické a triviálně řešitelné.

5.3.2 Ostrůvková (tearing) nestabilita

Geometrie úlohy

Uvažujme dvě oblasti s opačně orientovanými magnetickými poli oddělenými rovinným rozhraním. Souřadnicovou soustavu zvolíme obdobně jako při řešení Rayleighovy-Taylorovy nestability, tedy tak, aby rozhraní bylo v rovině $y = 0$ a magnetický vektor mířil v ose z . Veličiny budeme opět rozkládat do paralelního směru (roviny $y = 0$ a kolmého směru)



Obr. 132: Geometrie úlohy.

Porucha libovolné veličiny potom bude mít tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_0(y) + \delta\psi = \psi_0(y) + \psi_1(y) e^{i[k_x x + k_z y - \omega t]}. \tag{5.150}$$

Neperiodická proměnná je ve směru kolmém na rozhraní, periodické proměnné jsou x a z . Z podmíněk nestlačitelnosti (5.136) a (5.137) budeme při této volbě mít

$$\text{div } \delta\mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \delta B_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta B_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta B_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow$$

► $\frac{dB_{1\perp}}{dy} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{1\parallel} = 0. \tag{5.151}$

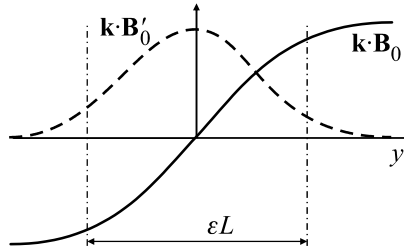
Stejná situace je s vektorem posunutí ($\text{div } \boldsymbol{\xi} = 0$),

► $\frac{d\xi_{1\perp}}{dy} + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}_{1\parallel} = 0. \tag{5.152}$

Obdobně jako u RT nestability je třeba nalézt kolmou složku vektoru posunutí a kolmou složku poruchy magnetického pole, vodorovné projekce je možné opět eliminovat pomocí vztahů (5.151) a (5.152).

Při známém průběhu $\mathbf{B}_0(y)$ a $\eta_0(y)$, případně ostatních rovnovážných hodnot, vede za předpokladu symetrie (5.150) celý problém na soustavu obyčejných diferenciálních

rovníc. Buď je řešíme numericky, nebo můžeme provádět různé rozměrové odhady, ve kterých vystupuje šířka přechodové oblasti mezi oběma směry pole εL , „malost“ přechodové oblasti je určena parametrem ε .



Obr. 133: Přechodová oblast.

Na vodorovné ose je vzdálenost od rozhraní. Veličina $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$ je vlastně projekcí pole do směru šíření vlny (až na normovací konstantu). Vidíme, že na jedné straně poloprostoru je kladná a na druhé záporná. Samotná rovina oddělující poloprostory s různým polem je definovaná vztahem

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (5.153)$$

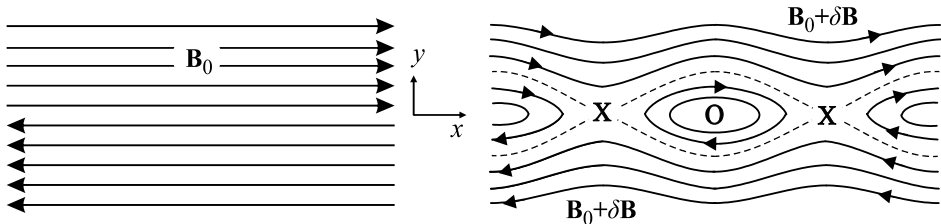
a říkáme jí rezonanční povrch. V grafu je čárkovaně vykreslena derivace této veličiny, která má v místě rezonančního povrchu maximum. V rozměrové analýze problému lze pro derivaci $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$ psát

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}'_0 \approx \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0}{\varepsilon L}.$$

Nebo naopak, veličina $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$, která je nulová na rezonančním povrchu, se píše jako

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 \approx \varepsilon L \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}'_0.$$

Z rozměrové analýzy rovnic v popsané geometrii lze odhadnout koeficient nárůstu nestability γ definovaný vztahem (5.3). Numerické řešení rovnic dá kolem rezonančního povrchu charakteristický průběh magnetického pole s magnetickými ostrovy (body O) a průsečíky separatrix, kde dochází k rekonekci (body X).



Obr. 134: Rekonekce a vznik bodů X, O.

Elektrický proud teče i nadále v rovině rozhraní, není již ale homogenní. V místech magnetických ostrovů je proudová hustota vyšší. Dojde k rozvrstvení (roztrhání) proudové stěny. Odtud pochází anglický název *tearing instability* (tear = trhat).

5.3.3 Řízené rezistivní nestability

Řízenou nestabilitou nazýváme nestabilitu, jejíž chování ovlivňuje nějaká vnější síla. V případě Rayleighovy-Taylorovy nestability to může být například tíhové pole. V jednom směru tíhové pole situaci stabilizuje (tekutina s vyšší hustotou je dole) v druhém směru dochází k řízené nestabilitě (hustší tekutina je nahoře). Chování ostrůvkové nestability může ovlivnit tíhové pole také (pak hovoříme o tzv. *g módu*). Mnohem důležitější je ale ovlivnění způsobené gradientem rezistivity plazmatu, který je kolmý na rozhraní (tzv. *rippling mód*). Již jsme si ukázali, že se takový gradient projeví jako síla působící kolmo na rozhraní. Jenže na rozdíl od tíhového zrychlení má v obou poloprostorech opačný směr (buď k rezonančnímu povrchu, nebo od něho). V jednom poloprostoru tato řídicí síla nestabilitu stabilizuje a v druhém ji naopak rozvíjí. Je zřejmé, že rozvoj nastane v poloprostoru s nižší rezistivitou, kde mohou téci vyšší proudy.

5.3.4 Tokamakové nestability

Jestliže v tokamaku označíme toroidální úhel φ a poloidální θ , můžeme pro různé veličiny psát

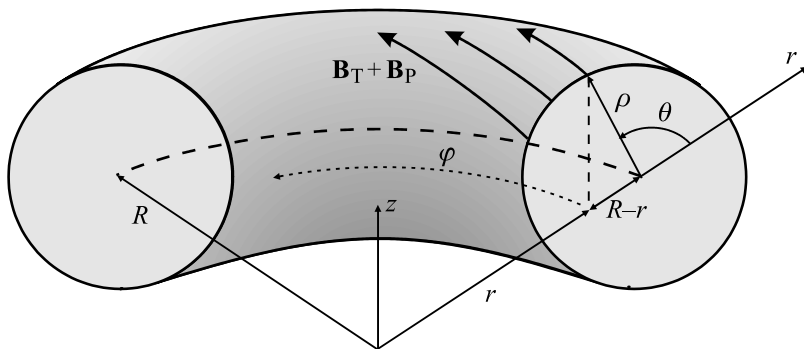
$$\psi = \psi(\rho) e^{i[m\theta + n\varphi - \omega t]}; \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.154)$$

Rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$ pro magnetické pole dá

$$\frac{dB_\rho}{d\rho} + \frac{m}{\rho} B_\theta + \frac{n}{r} B_\varphi = 0. \quad (5.155)$$

Periodická část této rovnice není nic jiného než definice rezonančního povrchu:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \frac{m}{\rho} B_\theta + \frac{n}{r} B_\varphi = 0. \quad (5.156)$$



Obr 135: Situace v tokamaku.

Rovnici lze přepsat do tvaru

$$\frac{\rho}{r} \frac{B_\varphi}{B_\theta} = \frac{m}{n}.$$

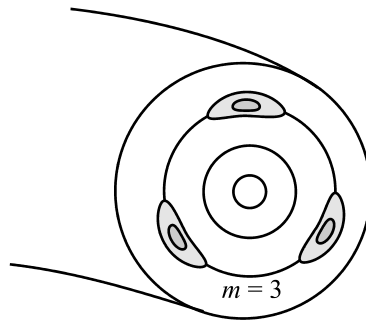
Znaménko není podstatné, obě čísla m, n mohou nabývat kladných i záporných hodnot. Zavedme nyní tzv. rotační číslo (bezpečnostní parametr) jako průměrný počet toroidálních otáček pole na jednu poloidální:

$$q(\rho) \equiv \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\rho}{r} \frac{r d\varphi}{\rho d\theta} = \frac{\rho}{r} \frac{B_\varphi}{B_\theta} \approx \frac{\rho}{R} \frac{B_T}{B_p}.$$

V tokamacích s $a \ll R$ platí proto pro rezonanční povrchy rovnice

$$\blacktriangleright \quad q(\rho) \approx \frac{\rho}{R} \frac{B_T}{B_p} = \frac{m}{n}. \quad (5.157)$$

Na těchto tzv. „ mn “ površích dochází k rozvoji ostrůvkové (tearing) nestability. Na povrchu se objeví m ostrovů. Jejich opakovaná geneze je doprovázena známými pilovitými signály elektrického pole.



Obr. 136: Vznik ostrovů v tokamaku pro $m = 3$.

5.4 Mikronestability

5.4.1 Základní vztahy

Při přechodu od statistického popisu plazmatu ke kontinuu (například k magnetohydrodynamice) ztrácíme informace o statistickém rozdělení v rychlostní části fázového prostoru. Přicházíme tak i o celou třídu nestabilit, jejichž původ je právě v přerozdělování pravděpodobnosti výskytu částic v rychlostní části fázového prostoru. V této kapitole se zaměříme na lineární nestability ve statistickém přístupu v bezesrážkovém plazmatu. Jde do jisté míry o druhý extrém. Kontinuum je dominantně srážkové, my se budeme zabývat v této kapitole plazmatem, v němž lze srážky zcela zanedbat, tedy výhradně

nestabilitami způsobenými interakcí částic s poli. Za výchozí rovnici budeme považovat Boltzmannovu rovnici pro hustotu pravděpodobnosti výskytu částic druhu α

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\alpha + \frac{Q_\alpha}{m_\alpha} [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}] f_\alpha = 0, \quad (5.158)$$

doplněnou Maxwelllovými rovnicemi pro pole

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (5.159)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (5.160)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.161)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.162)$$

Částicová a polní část je provázána zdrojovými členy

$$\begin{aligned} \rho_Q &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int Q_{\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}, \\ \mathbf{j}_Q &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int Q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.163)$$

S touto sadou rovnic budeme provádět lineární perturbační analýzu stejným způsobem jako v teorii kontinua. Obdobně můžeme rozčlenit i jednotlivé typy jevů:

- *Vysokofrekvenční děje bez magnetického pole.* Jde o zobecnění plazmových vln o Landauův útlum na elektronech.
- *Nizkofrekvenční děje bez magnetického pole.* Jde o zobecnění iontových vln o Landauův útlum na iontech.
- *Vysokofrekvenční děje s magnetickým polem.* Jde o vzájemnou interakci částic a elektromagnetického komplexu vln.
- *Nizkofrekvenční děje s magnetickým polem.* Jde o vzájemnou interakci částic a magnetoakustického komplexu vln.

5.4.2 Landauův útlum na elektronech

V kapitole 4.2.3 jsme se zabývali plazmovými vlnami, které souvisí s pohyby elektronů na plazmové frekvenci. Vlny a oscilace byly tvořeny elektrickým polem a k jejich vzniku nebylo třeba žádné klidové magnetické pole. Podle disperzní relace, kterou jsme získali z tekutinového modelu, se vlny s frekvencí vyšší než plazmovou šířily bez útlumu.

Ve skutečnosti i v lineární teorii dochází k útlumu vln, který souvisí se statistickým chováním částic. Tento útlum se nazývá *Landauův útlum* (L. D. Landau, 1946) a není možné ho odvodit z tekutinového modelu, kdy je Boltzmannova rovnice vystředována přes momenty rychlosti a část informace se ztrácí. K odvození musí být použita Boltzmannova rovnice pro rozdělovací funkci elektronů. Samotný útlum se projevuje i bez přítomnosti srážek a proto lze využít Vlasovovu rovnici (bez srážkového členu).

Uvažujme tedy bezesrážkové plazma a zkoumejme interakci elektronů s plazmovou vlnou v okolí plazmové frekvence elektronů v neomezeném prostředí. Předpokládáme dále, že interakce je zprostředkována jen elektrickým polem, tj. $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ a jde tedy o podélné vlnění s $\delta \mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$. Souřadnicovou soustavu budeme volit s osou x ve směru šíření vlnění, tj.

$$\mathbf{k} = (k, 0, 0); \quad \delta \mathbf{E} = (\delta E, 0, 0). \quad (5.164)$$

Obecná porucha bude mít tvar

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi = \psi_0 + \psi_1 e^{i[kx - \omega t]}. \quad (5.165)$$

Budeme sledovat jen pohyby elektronů, pohyby iontů v okolí plazmové frekvence elektronů zanedbáme. Proto bude mít výchozí soustava rovnic tvar ($Q_e = -e$, $m = m_e$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{E} &= -\frac{en}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (5.166)$$

$$n(t, \mathbf{x}) = \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v},$$

kde f je rozdělovací funkce elektronů. Poznamenejme, že rychlost \mathbf{v} zde nemá význam vystředované rychlosti proudění, ale význam fázové proměnné, $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. Z celé sady Maxwellových rovnic postačí rovnice pro elektrické pole ve tvaru divergence. Je to dáno tím, že neuvažujeme magnetické pole, porucha elektrického pole je rovnoběžná se směrem šíření a jde vlastně o jednorozměrný problém. V přítomnosti magnetického pole bychom samozřejmě museli využít rovnici $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$. Jako první krok provedeme linearizaci výchozích rovnic (5.166) pomocí perturbací

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \delta f; \\ \mathbf{E} &= \delta \mathbf{E}; \\ n &= n_0 + \delta n. \end{aligned} \quad (5.167)$$

Nulové řešení budeme předpokládat klidové homogenní (nezávislé na t, \mathbf{x}), rozdělovací funkci f_0 za Gaussovu

$$f_0(\mathbf{v}) \equiv n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_e \mathbf{v}^2}{2k_B T} \right], \quad (5.168)$$

kteřou můžeme rozložit na parciální funkce

$$f_0(\mathbf{v}) \equiv n_0 f_{0x}(v_x) f_{0y}(v_y) f_{0z}(v_z), \quad (5.169)$$

kde

$$f_{0l}(v_l) \equiv \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m_e v_l^2}{2k_B T} \right]. \quad (5.170)$$

Výsledek linearizace výchozích rovnic (5.166) je v prvním řádu

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_e} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

$$\operatorname{div} \delta \mathbf{E} = -\frac{e \delta n}{\epsilon_0}, \quad (5.171)$$

$$\delta n(t, \mathbf{x}) = \int \delta f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}.$$

Předpokládejme nyní existenci perturbací ve tvaru rovinné vlny ve směru osy x , tj. budeme psát $\delta \psi = \psi_1 e^{ikx - i\omega t}$:

$$-i\omega \delta f + i v_x k \delta f - \frac{e}{m_e} \delta E_x \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = 0,$$

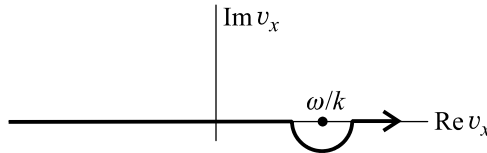
$$ik \delta E_x = -\frac{e \delta n}{\epsilon_0}, \quad (5.172)$$

$$\delta n(t, x) = \int \delta f d^3 \mathbf{v}.$$

Do poslední rovnice dosadíme za δn z druhé rovnice a za δf z první rovnice a provedeme integraci přes proměnné v_y a v_z . Výsledkem je disperzní relace:

$$k = -\omega_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_{0x}/dv_x}{\omega - kv_x} dv_x; \quad \omega_p^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}. \quad (5.173)$$

Všechny veličiny se týkají elektronové složky. Hlavním problémem je pól prvního řádu v hodnotě $v_x = \omega/k$. Integrační cestu nelze uzavřít v horní ani dolní komplexní polorovině, protože integrand v nekonečnu nekonverguje na imaginární ose k nule (jde o Boltzmannovo rozdělení $\exp[-\alpha v^2]$). Z komplexní analýzy je známo (viz dodatek A3), že správná integrační cesta má tvar podle obrázku:



Obr. 137: Integrační cesta.

Pro tuto cestu je integrál z komplexní funkce F roven

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = \text{V.P.} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx \right) + \pi i \cdot \operatorname{Res}(F) = I_1 + I_2.$$

První část je tzv. hlavní Cauchyova hodnota (V.P.) a počítá se tak, jako by funkce byla reálná a pól neexistoval, tedy integruje se v limitě, kdy obě meze jdou k nekonečnu. Výsledný integrál I_1 není analyticky řešitelný. Integrand obsahuje Gaussovou funkci, a proto přispějí k integraci jen malé argumenty ze jmenovatele a je možné využít první členy rozvoje:

$$\begin{aligned}
 I_1 &\equiv \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_{0x}/dv_x}{\omega - kv_x} dv_x = \frac{1}{\omega} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_{0x}/dv_x}{1 - \frac{kv_x}{\omega}} dv_x = \\
 &= \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \left(\frac{kv_x}{\omega} \right) + \left(\frac{kv_x}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{kv_x}{\omega} \right)^3 + \dots \right] \frac{df_{0x}}{dv_x} dv_x.
 \end{aligned}$$

Nyní provedeme integraci per partes, na hranicích integračního oboru je rozdělovací funkce f_{0x} nulová:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\frac{k}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + 2 \left(\frac{kv_x}{\omega} \right) + 3 \left(\frac{kv_x}{\omega} \right)^2 + \dots \right] f_{0x} dv_x = \\
 &= -\frac{k}{\omega^2} \left[1 + 2 \left(\frac{k}{\omega} \right) \langle v_x \rangle + 3 \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \langle v_x^2 \rangle + \dots \right] = -\frac{k}{\omega^2} \left[1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{k_B T_e}{m_e} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Integrály tohoto typu z Boltzmannova rozdělení se řeší ve statistické fyzice [3]. Nyní je třeba najít druhou část, která je πi násobkem rezidua integrované funkce v singularitě. Postup hledání reziduí naleznete v dodatku A3.

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \pi i \cdot \text{Res} \left(\frac{df_{0x}/dv_x}{\omega - kv_x} \right) = -\frac{\pi i}{k} \cdot \text{Res} \left(\frac{df_{0x}/dv_x}{v_x - \omega/k} \right) = \\
 &= -i \frac{\pi}{k} \frac{df_{0x}}{dv_x} \Big|_{\frac{\omega}{k}} = i \frac{\pi}{k} \frac{m}{k_B T_e} \frac{\omega}{k} f_{0x}(\omega/k).
 \end{aligned}$$

V posledním výrazu jsme provedli derivaci Boltzmannova rozdělení. Nyní obě vypočtené části integrálu dosadíme do disperzní relace (5.173):

$$k = -\omega_p^2 [I_1 + I_2] = -\omega_p^2 \left[-\frac{k}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{k_B T_e}{m_e} + \dots \right) + i \frac{\pi m_e \omega}{k^2 k_B T_e} f_{0x}(\omega/k) \right].$$

Po triviální úpravě (rovnici násobíme ω^2/k) získáme disperzní relaci ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad \omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} v_t^2 k^2 + \dots - i \frac{3\pi\omega_p^2}{v_t^2} \frac{\omega^3}{k^3} f_{0x}(\omega/k), \quad (5.174)$$

kde jsme označili kvadrát plazmové frekvence a kvadrát tepelné rychlosti

$$\omega_p^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}; \quad v_t^2 \equiv \frac{3k_B T_e}{m_e}.$$

Plazmová frekvence i tepelná rychlost se týká elektronů. První člen disperzní relace představuje nám již známé plazmové oscilace. Druhý člen je způsoben tepelnými procesy a je-li malý oproti prvnímu, lze v něm psát $\omega \sim \omega_p$ a přejde ve známý druhý člen disperzní relace plazmových vln. Poslední člen je zcela nový a reprezentuje Landauův útlum, zpravidla je oproti oběma prvním členům velmi malý.

Toho můžeme využít při odmocnění výrazu (5.174):

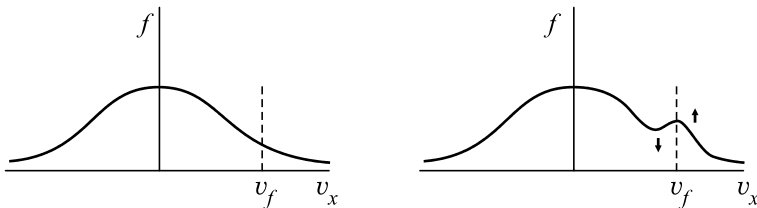
$$\begin{aligned} \omega^2 &= a + ib; & b \ll a; & \Rightarrow \\ \omega^2 &= A \exp[i\varphi]; & A = \sqrt{a^2 + b^2} \sim a; & \varphi = \arctg(b/a) \approx \frac{b}{a} \Rightarrow \\ & \omega^2 \approx a \exp\left[i\frac{b}{a}\right] \Rightarrow \\ \omega &\approx \sqrt{a} \cos\left(\frac{b}{2a}\right) + i\sqrt{a} \sin\left(\frac{b}{2a}\right) \approx \sqrt{a} + i\frac{b}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Výsledná frekvence bude (imaginární část odpovídající b ve výrazu (5.174) je záporná)

$$\blacktriangleright \quad \omega \approx \omega_0 - i \frac{3\pi\omega_p^2}{2v_T^2\omega_0} \frac{\omega^3}{k^3} f_{0x}(\omega/k); \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\omega_p^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} v_T^2 k^2 + \dots} \quad (5.175)$$

Fyzikální interpretace Landauova útlumu

Ze vztahu (5.175) je zřejmé, že imaginární část frekvence je záporná a jedná se skutečně o útlum. Odvození útlumu Landauem v *bezesrážkovém* plazmatu za pomoci integrace funkce komplexní proměnné bylo velkým překvapením. Později byl útlum nalezen experimentálně. Plazmová vlna je tlumena, aniž by docházelo ke srážkám částic. Podobně jako surfař surfuje na vodní hladině, můžeme si zjednodušeně představit elektrony surfující na podélné plazmové vlně elektrického pole. Elektrony s příliš malou rychlostí se na vlně pohupují a nevyměňují si s ní energii. Také elektrony s příliš velkou rychlostí si nevyměňují s vlnou energii. Jen elektrony s rychlostí blízkou fázové rychlosti plazmové vlny (oblast pólu při integraci) intenzivně s vlnou vyměňují energii. Obdobně jako surfař jsou elektrony vlnou nesený. Pokud jejich rychlost byla nepatrně nižší než fázová, získávají elektrony energii na úkor vlny. Pokud je jejich rychlost vyšší než fázová, jsou brzděné, svou energii ztrácejí, a předávají ji vlně.



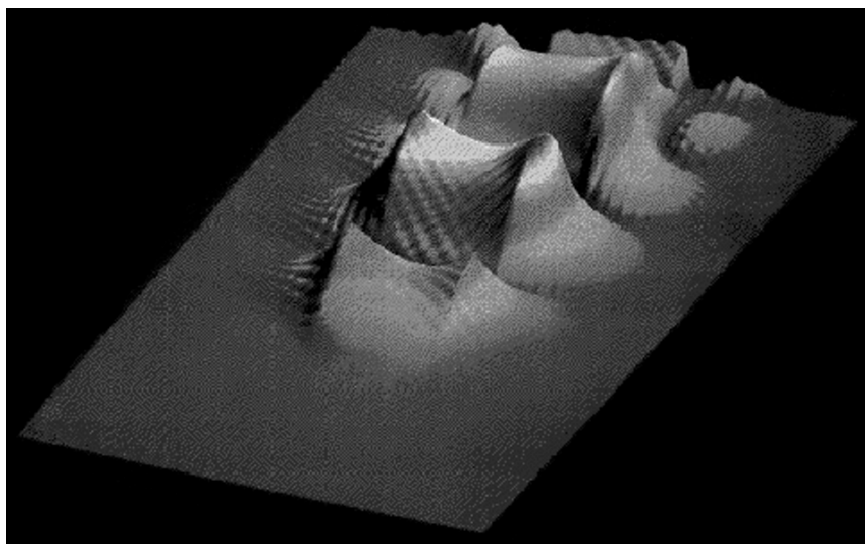
Obr. 138. Landauův útlum.

Podle Boltzmannova rozdělení je statisticky více elektronů s nižší rychlostí než elektronů s vyšší rychlostí. Tím převládá proces tlumení vlny, sání energie z ní. To je přibližná podstata Landauova útlumu. Boltzmannovo rozdělení je deformováno, vzniká perturbace způsobující sekundární pík (právě ten jsme počítali jako δf). Na rozdělení rychlostí se objevují dvě maxima, což ve výsledku vede k dvojsvazkové (Bunemanově nestabilitě). Pro velmi nízké fázové rychlosti plazmové vlny je možný i Landauův útlum způsobený ionty.

Urychlovače LWFA (Laser Wake Field Accelerator)

Elektrony jsou pro výzkumné i praktické účely většinou urychlovány buď na kruhových drahách v betatronu nebo v synchrotronu. K největším urychlovačům tohoto typu patří americký Tevatron s obvodem 6,3 km. Další možností jsou lineární urychlovače s proměnným elektrickým polem na radiových frekvencích. Typické urychlovací pole těchto zařízení nemůže výrazně přesáhnout 100 MV/m. Již v roce 1979 navrhli T. Tajima a D. Dawson zcela nový typ urychlovače, ve kterém by elektrony byly urychleny na plazmové vlně podobně jako surfař na vlně v oceánu. Tato zajímavá myšlenka čekala na praktickou realizaci více než čtvrt století. Dnes se zdá, že nic nestojí v cestě urychlovat elektrony v urychlovači nové generace přímo na pracovním stole.

Plazmová vlna může vzniknout při průchodu intenzivního laserového pulzu plyným prostředím. Pulz ionizuje plyn na plazma a s sebou strhává lehké elektrony. Za pulzem vzniká brázda zvlněné koncentrace elektronů a podélného elektrického pole – plazmová vlna. V angličtině se toto pole nazývá „wakefield“, což by snad šlo přeložit jako brázdové pole, případně pole v brázdě.



Obr. 139: Brázdové pole (wakefield). Za laserovým pulzem vzniká při průchodu prostředím typické zvlněné podélné pole. Na obrázku je různým odstínem znázorněna velikost pole.

Toto pole může při vhodné hybnosti a energii urychlovat elektron, který je nesený na vlně elektrického pole podobně jako výše zmíněný surfař na vodní vlně. Vlnou jsou ovšem zachyceny jen některé z elektronů a ty vytvoří shluky urychlených částic. To je základní princip urychlovače LWFA (Laser Wake Field Accelerator). V praktických zařízeních se většinou využívají lasery s krátkým pulsem (≤ 1 ps) a velkou intenzitou ($\geq 10^{18}$ W/cm²). Vzniklé brázdové pole má typicky intenzitu 100 GV/m, což je o tři řády více než v konvenčních urychlovačích. Shluky elektronů o velikosti 10^9 elektronů (stovky pikocoulombů) mohou být urychleny na energie až 60 MeV. Jde ovšem jen o malý zlomek přítomných elektronů a parametry plazmatu a brázdového pole lze jen obtížně ovlivnit. To je hlavní nevýhodou dosud postavených zařízení, která měla spíše studijní charakter, a nebylo je možné prakticky využít.

Situace se změnila po roce 2004, kdy byly navrženy urychlovače LWFA s více laserovými pulzy. Kromě základního pulzu, který generuje laserové plazma s brázdovým polem, lze dvěma dalšími pomocnými pulzy vytvořit za pulzem stojatou vlnu (rázy). Podélná složka elektrického pole může předurčit elektron, příčná složka může fokusovat shluk elektronů. Pomocnými pulzy můžeme ovlivňovat parametry plazmatu v brázdě za základním laserovým pulzem. Urychlování je v této konfiguraci dvoustupňové. Elektronky jsou nejprve urychleny v pomalu se pohybující ($\Delta\omega/2k_0$) stojaté vlně generované pomocnými pulzy a teprve poté v rychlé ($\sim c$) brázdové vlně za hlavním pulzem. V současných systémech je brázdové pole až 270 GV/m a bylo dosaženo energie až 250 MeV na pouhých dvou milimetrech dráhy. Spektrum urychlených elektronů je monoenergetické.

Urychlovače LWFA znamenají revoluci v možnostech urychlování nabitých částic. Hlavní výhodou jsou především malé rozměry urychlovačů tohoto typu, některé mohou být postaveny přímo na pracovním stole. Předurčení pomocnými pulzy umožňuje ovlivňování parametrů urychlení, bez kterého nejsou možné praktické aplikace. Vývoj probíhá na Coloradské univerzitě, UCB, UCLA, LLNL a dalších pracovištích.

Maximální podélné pole δE

Z rovnice $\text{div } \mathbf{E} = -e\delta n/\epsilon_0$ můžeme odhadnout maximální možnou velikost generovaného pole:

$$ik\delta E = -e\delta n/\epsilon_0 \quad \Rightarrow$$

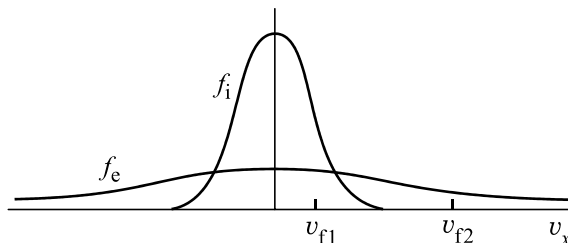
$$(\delta E)_{\max} < \left| i \frac{e\delta n}{k\epsilon_0} \right| < \frac{en_0}{k\epsilon_0} = \frac{m_e\omega_p^2}{ke} = \frac{\omega_p}{k} \frac{m_e\omega_p}{e} < \frac{cm_e\omega_p}{e}.$$

Pro maximální dosažitelné pole tedy platí relace

$$\blacktriangleright \quad (\delta E)_{\max} < \frac{cm_e\omega_p}{e}. \quad (5.176)$$

5.4.3 Landauův útlum na iontech

Obdobou surfování elektronů na plazmových vlnách je surfování iontů na iontových vlnách (jsou analogií zvukových vln v plazmatu, proto jim někdy říkáme iontově-akustické vlny). Boltzmannovo rozdělení pro elektrony a ionty je vzhledem k různým hmotnostem velmi rozdílné:



Obr. 140: Boltzmannovo rozdělení elektronů a iontů.

U iontově-akustických vln není hlavní „návratovou“ silou elektrostatické pole, ale tepelný tlak a setrvačnost iontů. Disperzní relaci iontově-akustických vln jsme odvodili v kapitole 4.2.4, viz vztah (4.53):

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \left[1 + c_i^2 k^2 / \omega_{pi}^2 - \frac{1}{1 + c_e^2 k^2 / \omega_{pe}^2} \right]. \quad (5.177)$$

V limitě dlouhých vln lze tuto relaci přepsat do tvaru (viz kapitola 4.2.4):

$$\omega = c_i k \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i}}.$$

Fázová rychlost dlouhých iontově-akustických vln proto bude

$$v_f = c_i \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i}}. \quad (5.178)$$

Ze vztahu je patrné, že pro vyrovnanou teplotu obou složek ($T_e \approx T_i$) bude mít fázová rychlost iontově-akustické vlny hodnotu v oblasti v_{f1} na obrázku 140, tj. v oblasti nejprudšího poklesu Boltzmannova rozdělení iontů a podstatná část iontů bude schopná surfovat na iontově-akustické vlně. Vlně budou odnímat energii ionty s nižší rychlostí než fázovou a naopak dodávat energii ionty s vyšší rychlostí než fázovou. Iontů s nižší rychlostí je výrazně větší počet, proto bude iontová akustická vlna silně tlumená Landauovým útlumem na iontech. Naopak, v situaci kdy $T_e \gg T_i$, bude mít fázová rychlost iontově-akustické vlny hodnotu v oblasti v_{f2} na obrázku 140, kde má hustota pravděpodobnosti minimální spád a navíc je zde počet iontů malý. Landauův útlum bude zanedbatelný a iontově-akustická vlna se bude v takovémto plazmatu šířit téměř volně bez útlumu. Vysoká teplota elektronů vzhledem k iontům tedy zajistí průchod iontově-akustické vlny dlouhých vlnových délek.

V limitě krátkých vln lze relaci (5.177) přepsat do tvaru (viz kapitola 4.2.4) $\omega \approx c_i k$ a fázová rychlost krátkých iontových vln bude

$$v_f \approx c_i. \quad (5.179)$$

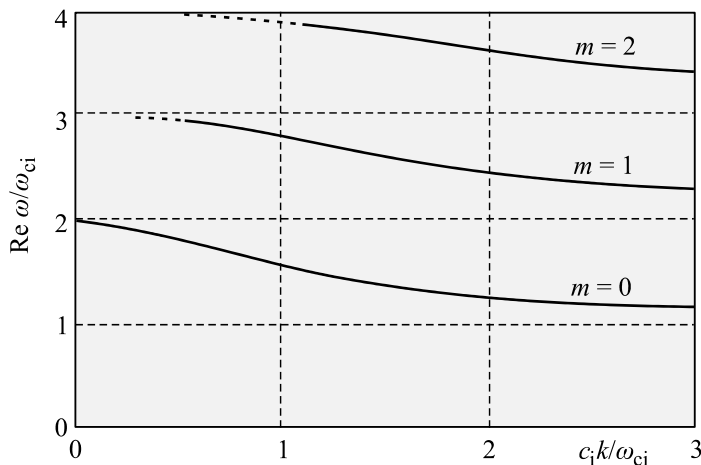
Pro krátké vlny bude mít fázová rychlost iontově-akustické vlny hodnotu v oblasti v_{f1} na obrázku 140 a Landauův útlum na iontech bude vždy podstatný.

5.4.4 Bernsteinovy módy

V přítomnosti magnetického pole je interakce částic s vlnovými módy značně komplikovaná. Poprvé tuto problematiku řešil americký fyzik Ira Bernstein (1924) v roce 1958. Uvažujme nejprve iontově-akustické vlny v přítomnosti externího magnetického pole. Z podrobné analýzy plyne, že šíření vln silně závisí na úhlu a frekvenci. Vlny jsou tlumeny jednak cyklotronní iontovou rezonancí a jednak Landauovým útlumem na iontech. Kolmo na pole je útlum výrazně nižší než podél pole a vlna prochází, pokud není v blízkosti násobků iontové cyklotronní frekvence (tj. jejich harmonických). Tyto vlny se nazývají Bernsteinovy módy, jejich reálná část frekvence leží mezi dvěma sousedními násobky cyklotronní frekvence iontů:

$$m\omega_{ci} < |\operatorname{Re}(\omega)| < (m+1)\omega_{ci}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.180)$$

Imaginární část frekvence, která je zodpovědná za útlum, razantně roste, pokud se vlny nešíří kolmo na magnetické pole. Útlum také roste s číslem módu m , jen několik nejnižších Bernsteinových módů se šíří téměř bez útlumu. Elektrické pole Bernsteinových módů míří přibližně ve směru vlnového vektoru.



Obr. 141: První tři Bernsteinovy iontové módy. Na vodorovné ose je bezrozměrný vlnový vektor a na svislé ose reálná část bezrozměrné frekvence.

Obdobná sada Bernsteinových módů existuje i pro elektrony. Tyto módy plazmových vln se opět šíří kolmo na magnetické pole (v tomto směru je jejich útlum minimální) a mají frekvenci mezi jednotlivými harmonickými elektronové cyklotronní frekvence.

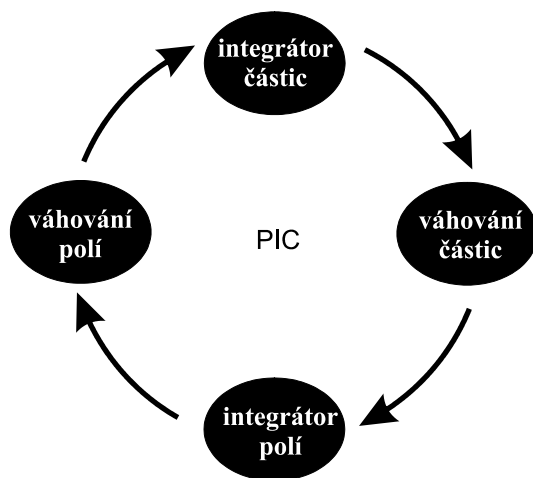
5.5 PIC simulace

PIC (Particle in Cell, částice v buňce) patří mezi nejoblíbenější algoritmy ve fyzice plazmatu. Jde o hybridní simulace – částice se pohybují v prostoru volně v souladu s pohybovou rovnicí, pole jsou ale známa jen ve vrcholech předem dané mříže. Částice tak interaguje nikoli se všemi ostatními částicemi, ale se středním polem generovaným celým souborem částic. Označíme-li N počet částic v simulaci, sníží tento přístup výpočetní náročnost z N^2 (v molekulární dynamice, kde interaguje každá částice s každou) na $N \log N$. Každá částice v PIC kódu představuje v mnoha simulacích celý shluk skutečných částic.

PIC algoritmus je vhodný k popisu vln a nestabilit v plazmatu, přepojení magnetických indukčních čar, ohřevu plazmatu, interakce laserového paprsku s plazmatem, ke sledování vývoje turbulencí atd. Úspěšnost simulace je podmíněna vhodnou volbou časového a prostorového kroku. Obecně by časový krok integrátoru pohybové rovnice

měl být výrazně kratší než perioda odpovídající plazmové frekvenci elektronů a prostorový krok mříže by měl být menší (nebo alespoň srovnatelný), než je Debyeova vzdálenost v simulovaném plazmatu. Základní cyklus PIC metody probíhá ve čtyřech stěžejních krocích:

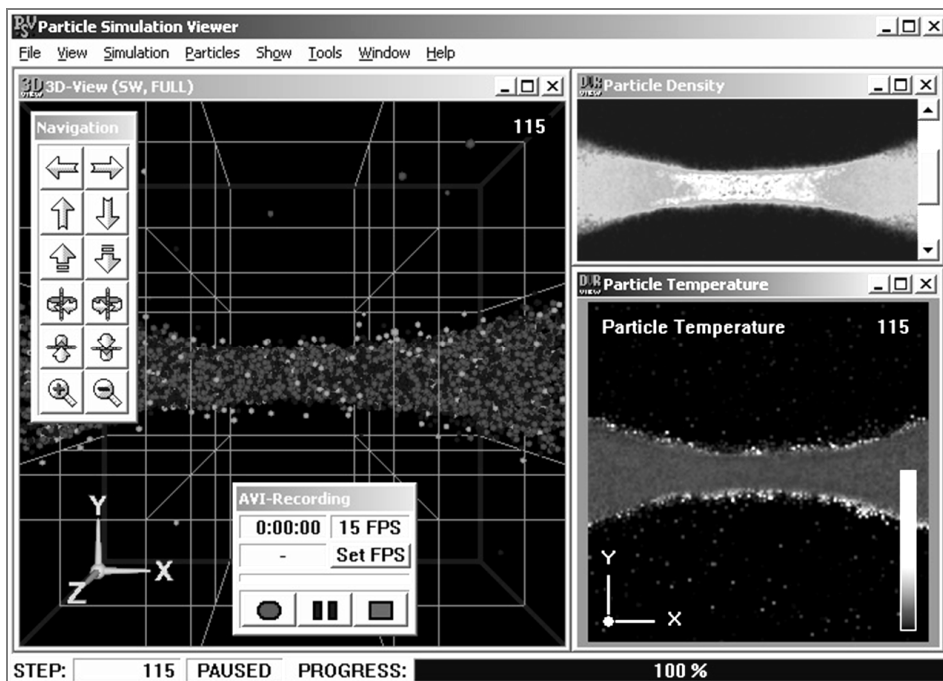
1. *Váhování částic.* Ze známých poloh a rychlostí částic určíme hustotu náboje a proudovou hustotu ve vrcholech mříže. Částici zpravidla rozdělíme mezi nejbližší vrcholy podle nějakého pravidla, které zajistí aby největší část částice „patřila“ do nejbližšího vrcholu. Ve vrcholech mříže po tomto kroku známe zdrojové členy Maxwellových rovnic.
2. *Integrátor polí.* Z Maxwellových rovnic určíme hodnotu elektrického a magnetického pole ve vrcholech mříže. Maxwellovy rovnice se zpravidla řeší pro potenciály a teprve poté se určují elektromagnetická pole. Lze využít veškeré dostupné metody pro řešení parciálních diferenciálních rovnic (sítě, konečné prvky, rychlou Fourierovu transformaci atd.). Po tomto kroku známe hodnoty polí ve vrcholech mříže.
3. *Váhování polí.* Po předchozím kroku jsou pole známá ve vrcholech mříže a je nutné zjistit hodnoty polí v místech, kde jsou lokalizovány částice. Pole je třeba „rozháhat“ do pozice konkrétní částice, jde o obrácený postup než u váhování částic. Po tomto kroku známe hodnotu pole v místě libovolně zvolené částice.
4. *Integrátor částic.* Procházíme jednotlivé částice (pole u nich již známe) a pohneme s nimi ve shodě s pohybovými rovnicemi. Integraci pohybových rovnic provádíme standardními metodami (například Runge-Kutta, Leap-Frog atd., viz kapitola 1.5)



Obr. 142: Základní cyklus PIC algoritmu.

Základní cyklus je srdcem PIC metody, nicméně k její implementaci je potřeba celá řada pomocných procedur. Důležité jsou počáteční podmínky (jakým způsobem je generováno počáteční rozdělení částic v plazmatu) a okrajové podmínky (jak se plazma má chovat na hranicích sledované oblasti). PIC výpočet není myslitelný bez zobrazování částic a polí, zde se nabízí nepřehledné množství metod – barvy částic mohou znázorňovat náboj, odstín barvy teplotu, částice za sebou mohou nechávat postupně mizející stopu nebo jsou zobrazeny jen jako pohybující se body, kuličky či mnohostěny. Pole

zpravidla zobrazujeme pomocí indukčních čar, buď prostorových nebo v různých řezech. Důležitá je tzv. diagnostika plazmatu, při které v probíhající simulaci počítáme makroskopicky ověřitelné parametry plazmatu (teplotu, koncentraci, měrná tepla, susceptibilitu, permeabilitu, permitivitu atd.). Pomocí Monte Carlo metod můžeme realizovat srážky nabitých částic s neutrály. Vzhledem k tomu, že interakce nabitých částic v rámci jedné buňky sítě je PIC metodou podceněna, je možné doplnit výpočet i Monte Carlo metodou, která zahrne náhodné binární srážky nabitých částic v rámci dané buňky sítě.

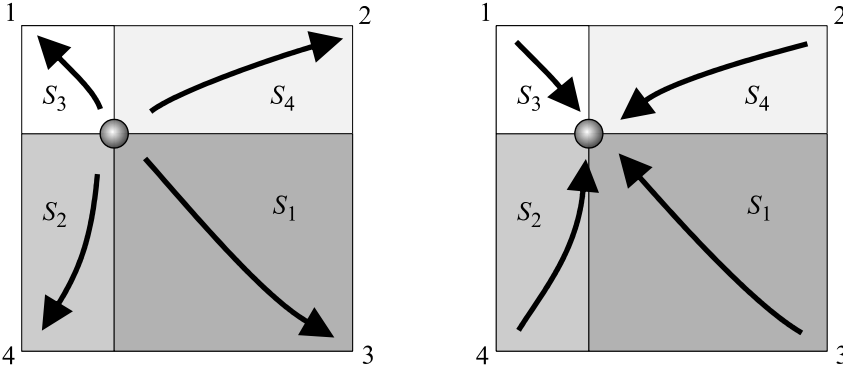


Obr. 143: Grafické uživatelské rozhraní programového balíku PIC vyvíjeného na pracovišti autora.

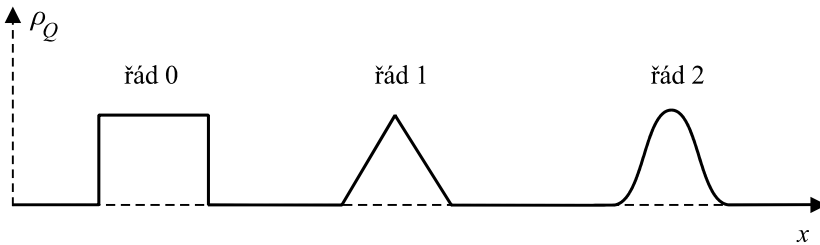
5.5.1 Váhování

Váhování je v PIC metodě prováděno dvakrát. Jednou jsou váhovány částice do vrcholů mříže a podruhé je váhováno pole z vrcholů mříže k částicím. Oba typy váhování by měly být stejného řádu. Popišme si nyní, jak probíhá váhování částic, zpětné váhování polí je obdobné. Nejjednodušší je tzv. váhování *nultého řádu*, při kterém předpokládáme, že částice patří celá do nejbližšího vrcholu mříže. Takové váhování je sice velmi rychlé, ale má své nevýhody. Představme si částici letící napříč mříží a sledujme například hustotu náboje v konkrétním vrcholu mříže. Hustota náboje bude nejprve nulová, jakmile se částice dostatečně ke sledovanému vrcholu přiblíží, skokem vzroste na maximální hodnotu a po odletu částice opět skokem poklesne na nulu. Takovéto skokové změny mohou zapříčinit numerické nestability metody. Většinou se proto využívá tzv. váhování prvního řádu, které si objasníme pro rovinný případ. Částice je rozváhována

k nejbližším vrcholům (v rovině jde o 4 vrcholy) v poměru protilehlých ploch, čímž dosáhneme toho, že nejbližšímu vrcholu patří největší část částice a nejvzdálenějšímu nejmenší. V prostorovém případě se váhování děje k nejbližším osmi sousedům v poměru protilehlých objemů. Existují i váhování vyšších řádů, která jsou kvalitnější, ale výpočetně náročnější.



Obr. 144: Váhování prvního řádu (nalevo částice, napravo pole)



Obr. 145. Průběh hustoty náboje ve vrcholu mříže způsobený prolétávající částicí při různých váhováních.

5.5.2 Řešení polí

Pro řešení polí ve vrcholech mříže existuje velké množství nejrůznějších metod. Pokud se pole změní za zvolený časový krok málo, postačí řešit Poissonovy rovnice pro potenciály (ρ_Q je hustota náboje, \mathbf{j}_Q je proudová hustota)

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}; \tag{5.181}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}_Q.$$

Po nalezení potenciálů (jakoukoli numerickou metodou) určíme pole ze vztahů

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \phi; \\ \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{5.182}$$

Popište stručně metodu řešení založenou na Fourierově transformaci, která je vhodná pro oblast ve tvaru kvádrů ($L_x \times L_y \times L_z$) s periodickými okrajovými podmínkami. Celý algoritmus má pět kroků:

1. Diskretizace Poissonovy rovnice.
2. Diskrétní Fourierova transformace (DFT) rovnic.
3. Algebraické řešení v \mathbf{k} prostoru.
4. Provedení inverzní diskrétní Fourierovy transformace (IDFT), získání potenciálu.
5. Výpočet polí ve vrcholech mřížky.

Popište tyto kroky na Poissonově rovnici pro potenciál elektrického pole. Diskretizaci můžeme provést například přes centrální diference (hustotu náboje budeme značit ρ):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_x^2 \varphi}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta_y^2 \varphi}{(\Delta y)^2} + \frac{\Delta_z^2 \varphi}{(\Delta z)^2} &= -\frac{\rho_{n_1, n_2, n_3}}{\epsilon_0}; \\ \frac{\Delta_x^2 \varphi}{(\Delta x)^2} &\equiv \frac{\varphi_{n_1+1, n_2, n_3} - 2\varphi_{n_1, n_2, n_3} + \varphi_{n_1-1, n_2, n_3}}{(\Delta x)^2}, \\ \frac{\Delta_y^2 \varphi}{(\Delta y)^2} &\equiv \frac{\varphi_{n_1, n_2+1, n_3} - 2\varphi_{n_1, n_2, n_3} + \varphi_{n_1, n_2-1, n_3}}{(\Delta y)^2}, \\ \frac{\Delta_z^2 \varphi}{(\Delta z)^2} &\equiv \frac{\varphi_{n_1, n_2, n_3+1} - 2\varphi_{n_1, n_2, n_3} + \varphi_{n_1, n_2, n_3-1}}{(\Delta z)^2}. \end{aligned} \quad (5.183)$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) funkce F a inverzní diskrétní Fourierova transformace (IDFT) jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(k_1, k_2, k_3) &= \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} F(n_1, n_2, n_3) \exp \left[2\pi i \left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2} + \frac{k_3 n_3}{N_3} \right) \right]; \\ F(n_1, n_2, n_3) &= \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \tilde{F}(k_1, k_2, k_3) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2} + \frac{k_3 n_3}{N_3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Aplikace DFT převede rovnici (5.183) do \mathbf{k} prostoru:

$$\left[\frac{4N_1^2}{L_x^2} \sin^2 \frac{\pi k_1}{N_1} + \frac{4N_2^2}{L_y^2} \sin^2 \frac{\pi k_2}{N_2} + \frac{4N_3^2}{L_z^2} \sin^2 \frac{\pi k_3}{N_3} \right] \tilde{\varphi}(k_1, k_2, k_3) = \frac{\tilde{\rho}(k_1, k_2, k_3)}{\epsilon_0}. \quad (5.184)$$

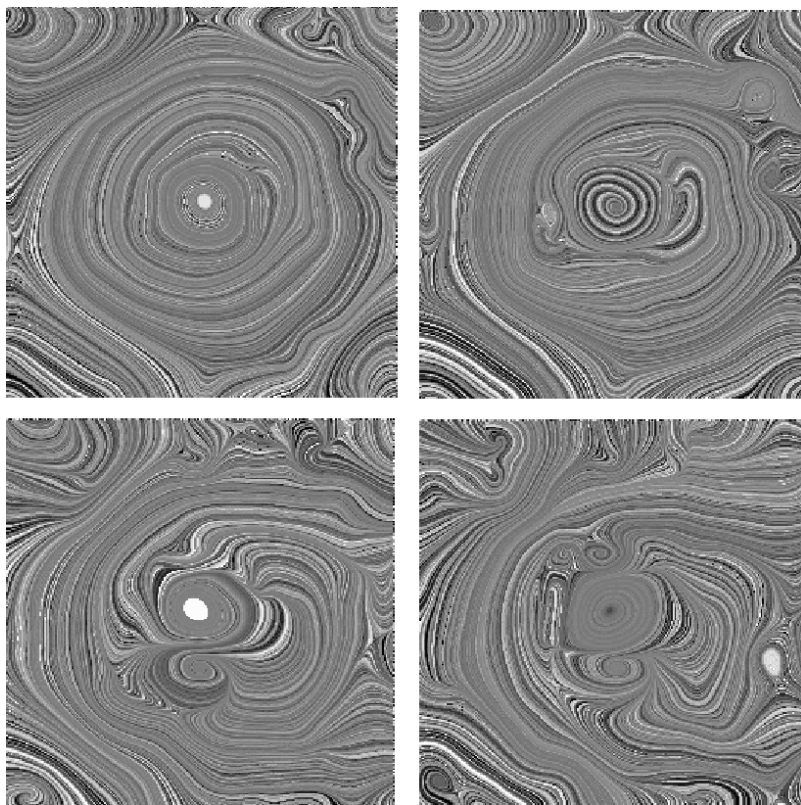
Poznamenejme, že spojitá Fourierova transformace pro spojitou proměnnou by dala $k^2 \tilde{\varphi} = \tilde{\rho} / \epsilon_0$. Kvadráty funkce sinus, které se objevily ve výsledku, jsou způsobeny vlivem mřížky. Algebraické řešení rovnice je velmi jednoduché:

$$\tilde{\varphi}(k_1, k_2, k_3) = \frac{\tilde{\rho}(k_1, k_2, k_3)}{\epsilon_0 \left[\frac{4N_1^2}{L_x^2} \sin^2 \frac{\pi k_1}{N_1} + \frac{4N_2^2}{L_y^2} \sin^2 \frac{\pi k_2}{N_2} + \frac{4N_3^2}{L_z^2} \sin^2 \frac{\pi k_3}{N_3} \right]}. \quad (5.185)$$

Hledaný potenciál získáme inverzní diskrétní Fourierovou transformací

$$\varphi = \text{IDFT}(\tilde{\varphi}). \quad (5.186)$$

Z potenciálu již snadno určíme elektrické pole ve vrcholech mříže. Namísto DFT/IDFT algoritmu je možné využít algoritmus pro rychlou Fourierovu transformaci (FFT/IFFT), který je rychlejší (namísto N^2 operací je zapotřebí $N \log N$ operací) a je také implementován ve většině numerických knihoven.



Obr. 146: Časový vývoj magnetických indukčních čar v příčném řezu plazmového vlákna (400 000 elektronů a iontů). Jde o výsledek PIC simulace, pole je zobrazeno metodou LIC (Line Integral Convolution).

5.5.3 Řešení pohybu částic

Řešení pohybu částic ve známém poli jsme se podrobně věnovali v kapitole 1.5, lze zvolit libovolnou z popsáných metod nebo jinou metodu popsanou v literatuře.



Dodatky



Dodatek A – Užitečné vztahy

Ve vztazích je označeno $n! = n(n-1)\dots 1$; $n!! = n(n-2)(n-4)\dots 1$.

A1 Některé integrály a řady

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}; \quad a > 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.1})$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}a^{(2n+1)/2}}; \quad a > 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.2})$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}; \quad a > 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}; \quad a > 0 \quad (\text{Gaussův integrál}) \quad (\text{A.4})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}; \quad a > 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{+b^2/4a}; \quad a > 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{A.7})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{A.8})$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \sqrt{a^2+x^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x+1} dx \cong 5,6822; \quad \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1} dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (\text{A.10})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}; \quad |q| < 1 \quad (\text{součet geometrické řady}) \quad (\text{A.11})$$

$$V_{2N} = \pi^N R^{2N}/N! \quad (\text{objem koule v sudém počtu dimenzí}) \quad (\text{A.12})$$

A2 Vektorový součin a některé vektorové identity

Definice vektorového součinu

Při úpravách výrazů s vektorovým součinem je někdy výhodný zápis pomocí Levi-Civitova tenzoru. Jde o totálně antisymetrický tenzor 3. řádu, který má jedinou nezávislou složku

$$\varepsilon_{123} = 1; \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji}. \quad (\text{A.13})$$

Složky tohoto tenzoru mají hodnotu +1, -1 nebo 0. Všechny složky s dvěma nebo více shodnými indexy jsou nutně nulové (základní vlastnost antisymetrických matic, například ε_{112} , ε_{233} , ε_{222} , ...). Ukažme nulovost například pro složku ε_{112} : Zaměňme první dva indexy, z antisymetrie platí

$$\varepsilon_{112} = -\varepsilon_{112} \quad \Rightarrow \quad 2\varepsilon_{112} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{112} = 0.$$

Pro Levi-Civitův tenzor platí velmi užitečný vztah:

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (\text{A.14})$$

Přes index k se automaticky sčítá. Důkaz je možné provést buď z úvah o symetrii tenzoru, nebo prostým rozepsáním do složek. Vektorový součin lze pomocí Levi-Civitova tenzoru definovat takto:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}; \quad c_k = \varepsilon_{klm} a_l b_m. \quad (\text{A.15})$$

Z celého dvojného součtu jsou vždy nenulové dva členy, například pro první složku máme

$$c_1 = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2.$$

Ukažme si typické výpočty na třech jednoduchých příkladech:

Dvojný vektorový součin $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_k &= \varepsilon_{klm} a_l (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_m = \varepsilon_{klm} a_l \varepsilon_{mno} b_n c_o = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} a_l b_n c_o = \\ &= (\delta_{kn} \delta_{lo} - \delta_{ko} \delta_{ln}) a_l b_n c_o = a_l b_k c_l - a_l b_l c_k = b_k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \Rightarrow \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Dvojná rotace vektorového pole $\text{rot rot } \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} [\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A})]_k &= \varepsilon_{klm} \partial_l (\text{rot } \mathbf{A})_m = \varepsilon_{klm} \partial_l \varepsilon_{mno} \partial_n A_o = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} \partial_l \partial_n A_o = \\ &= (\delta_{kn} \delta_{lo} - \delta_{ko} \delta_{ln}) \partial_l \partial_n A_o = \partial_l \partial_k A_l - \partial_l \partial_l A_k = \\ &= \partial_k (\partial_l A_l) - (\partial_l \partial_l) A_k = \partial_k \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 A_k \quad \Rightarrow \\ \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) &= \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Divergence vektorového součinu

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \partial_k \varepsilon_{klm} a_l b_m = \varepsilon_{klm} (\partial_k a_l) b_m + \varepsilon_{klm} a_l (\partial_k b_m) = \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} \Rightarrow \\ \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} . \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Člen zamrznání v magnetohydrodynamice $\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$

$$\begin{aligned} [\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})]_k &= \varepsilon_{klm} \partial_l (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_m = \varepsilon_{klm} \partial_l \varepsilon_{mno} u_n B_o = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} \partial_l (u_n B_o) = \\ &= (\delta_{kn} \delta_{lo} - \delta_{ko} \delta_{ln}) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_l} B_o + u_n \frac{\partial B_o}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} B_l + u_k \frac{\partial B_l}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_l} B_k - u_l \frac{\partial B_k}{\partial x_l} = \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_k + u_k \operatorname{div} \mathbf{B} - B_k \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_k \Rightarrow \\ \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} . \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Lorentzova síla $\mathbf{Q} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} F_k &= Q [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_k = Q [\mathbf{v} \times (\operatorname{rot} \mathbf{A})]_k = Q \varepsilon_{klm} v_l (\nabla \times \mathbf{A})_m = Q \varepsilon_{klm} v_l \varepsilon_{mno} \partial_n A_o = \\ &= Q \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} v_l \partial_n A_o = Q (\delta_{kn} \delta_{lo} - \delta_{ko} \delta_{ln}) v_l \partial_n A_o = Q (v_l \partial_k A_l - v_l \partial_l A_k) \Rightarrow \\ F_k &= Q [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}]_k = Q v_l \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right) . \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A3 Základní vztahy z komplexní analýzy

Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je funkcí komplexní proměnné, tj. $f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. V následujícím textu uvedeme základní pojmy a postupy z komplexní analýzy.

Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Funkce $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ má v daném bodě derivaci, právě když

1. funkce u, v mají úplný diferenciál,
2. platí tzv. Cauchyovy-Riemannovy (CR) podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} . \quad (\text{A.21})$$

Platnost CR podmínek je zřejmá z toho, že derivace musí dát stejný výsledek, ať se k danému bodu blížíme po reálné nebo po imaginární ose, tedy musí platit $\partial f / \partial x = \partial f / \partial iy$. Oddělením reálné a imaginární části získáme CR podmínky.

Holomorfní funkce

Řekneme, že komplexní funkce je holomorfní na otevřené množině, pokud má derivaci v každém bodě množiny. Otevřená množina je v definici podstatná, protože ke každému bodu množiny musí existovat okolí, na kterém je možné derivaci zavést. Existence komplexní derivace je velmi silný požadavek, a pokud je funkce holomorfní, má zajímavé vlastnosti:

1. Z CR podmínek je okamžitě vidět, že reálná i imaginární část holomorfní funkce je harmonická, tj. splňuje Laplaceovu rovnici:

$$\nabla^2 u = 0; \quad \nabla^2 v = 0. \quad (\text{A.22})$$

Situaci lze i obrátit. Pokud vezmeme za reálnou část komplexní funkce nějakou harmonickou funkci, můžeme z CR podmínek dopočítat její imaginární část, tedy každou harmonickou funkci je určena nějaká komplexní funkce.

2. Nechť γ je uzavřená prostá (oběhne právě jednou) křivka. Je-li f holomorfní na křivce i uvnitř křivky, platí *Cauchyova fundamentální věta*:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (\text{A.23})$$

3. Hodnoty holomorfní funkce uvnitř libovolné uzavřené prosté křivky lze dopočítat z hodnot na této křivce (funkce musí být holomorfní v celé oblasti) podle tzv. *Cauchyova integrálního vzorce*:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (\text{A.24})$$

Samotný integrand není holomorfní v bodě $z = z_0$.

Důkazy obou dvou posledních tvrzení jsou jednoduché. Provedme důkaz Cauchyova integrálního vzorce. Křivku nahradíme bez újmy na obecnosti kružnicí se středem v bodě z_0 (spojitá deformace křivky na holomorfní oblasti nezmění hodnotu křivkového integrálu, nesmíme tedy křivku jen deformovat přes centrální bod z_0 , kde integrand není holomorfní). Využijeme parametrizaci kružnice v komplexní rovině

$$z = z_0 + R e^{i\varphi}; \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (\text{A.25})$$

Střed kružnice je v bodě, kde počítáme hodnotu funkce, na poloměru kružnice nezáleží (kružnice s různým poloměrem lze spojitě deformovat jednu na druhou). Holomorfní funkci rozvineme do Laurentovy řady v okolí bodu z_0 , která bude mít díky holomorfnosti jen nezáporné členy:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (\text{A.26})$$

Integrujme nyní na pravé straně vztahu (A.24) libovolný z členů řady:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{c_k (z-z_0)^k}{z-z_0} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} c_k (z-z_0)^{k-1} dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} c_k R^{k-1} e^{i(k-1)\varphi} i R e^{i\varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{i c_k R^k}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{ik\varphi} d\varphi = \frac{i c_k R^k}{2\pi i} 2\pi \delta_{k0} = c_0 \delta_{k0} = f(z_0) \delta_{k0}.
 \end{aligned}$$

Jediný nenulový příspěvek má tedy nultý člen rozvoje a ten je přímo roven hledané hodnotě.

Laurentův rozvoj

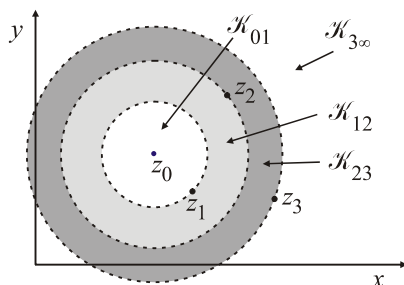
Laurentovým rozvojem komplexní funkce $f(z)$ v okolí bodu z_0 nazýváme řadu

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k. \quad (\text{A.27})$$

Touto řadou se zabýval Pierre Alphonse Laurent (1813–1854). Součet záporných členů řady ($k < 0$) nazýváme *hlavní část* Laurentovy řady, součet nezáporných členů ($k \geq 0$) nazýváme *regulární část* Laurentovy řady.

Pokud má funkce v komplexní rovině póly (osamocené body, ve kterých hodnota funkce diverguje, ale v jejichž prstencovém okolí je funkce holomorfní, viz dále), lze vždy nalézt k danému bodu z_0 nějaká mezikruží \mathcal{K} , na kterých bude funkce holomorfní. Pro tato mezikruží je možné jednoznačně určit koeficienty c_k řady tak, aby Laurentova řada byla na těchto mezikruzích konvergentní. Pro různá mezikruží bude mít řada různé koeficienty.

Na následujícím obrázku jsou póly v bodech z_1, z_2 a z_3 a existují 4 mezikruží, ve kterých lze nalézt koeficienty c_k tak, aby Laurentova řada konvergovala k původní funkci:



Obr 147: Ukázka pólů v Laurentově rozvoji.

Pro $z_0 \neq \infty$ lze koeficienty řady určit ze vztahu

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz; \quad \gamma \subset \mathcal{K}. \quad (\text{A.28})$$

Křivka γ je uzavřená prostá a celá leží v daném mezikruží. Může jít například o kružnici se středem v z_0 a vhodným poloměrem. Důkaz vztahu (A.28) je zcela analogický důkazu vztahu (A.24), tj. jen dosadíme parametrizaci kružnice (A.25) a za funkci hledaný rozvoj. Nenulový bude jediný člen a dá právě koeficient c_k . Pro regulární část řady přejdou koeficienty c_k v běžné koeficienty Taylorovy řady

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{A.29})$$

K rozvoji funkce do Laurentovy řady existuje řada triků, při kterých není nutné provádět výpočet koeficientů podle vztahu (A.28).

Reziduová věta

Hledejme nyní křivkový integrál z komplexní funkce po prosté, kladně orientované uzavřené křivce γ (oblast oběhne právě jednou). Funkce musí být holomorfní v každém bodě křivky, nicméně v oblasti ohraničené křivkou mohou být póly, a proto nebude integrál po křivce nulový, neboť neplatí předpoklad Cauchyovy fundamentální věty o holomorfnosti funkce v celé oblasti.

Uvažujme nejprve jednoduchou situaci s jediným pólem v z_0 , kolem něhož existuje prstencové okolí (bod z_0 do něho nepatří), na kterém je f holomorfní. Najdeme integrál po kružnici vedené kolem bodu z_0 :

$$\begin{aligned} \oint_{z=z_0+r e^{i\varphi}} f(z) dz &= \oint_{z=z_0+r e^{i\varphi}} \sum_k c_k (z-z_0)^k dz = \sum_k \int_0^{2\pi} c_k r^k e^{ik\varphi} r i e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \sum_k i c_k r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \sum_k i c_k r^{k+1} 2\pi \delta_{k,-1} = 2\pi i c_{-1}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že jediným nenulovým členem je člen s $k = -1$. Koeficientu c_{-1} proto říkáme *reziduum* (zbytek) funkce f v bodě z_0 , značíme $\text{Rez}(f; z_0)$. Pro obecnou křivku můžeme postupovat obdobně, výsledkem je *reziduová věta*

$$\blacktriangleright \quad \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{Int } \gamma} \text{Rez}(f, z_k). \quad (\text{A.30})$$

Integrál z prosté, kladně orientované uzavřené křivky je roven $2\pi i$ -násobku součtu všech reziduí funkce ležících uvnitř křivky ($\text{Int } \gamma$). Věta umožňuje efektivní výpočty mnoha křivkových integrálů v komplexní rovině, ale i integrálů po reálné ose, kterou chápeme jako část křivky v komplexní rovině. Typický je výpočet integrálu s jednoduchým pólem na reálné ose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx.$$

Je-li funkce $g(z)$ holomorfní v komplexní rovině a v reálném nekonečnu se blíží k nule tak rychle, aby integrál konvergoval, využijeme k výpočtu reziduovou větu pro čárkovanou křivku na obrázku 148:

$$\oint_{\gamma} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i \operatorname{Rez} \left(\frac{g(z)}{z-z_0}; z_0 \right) = 2\pi i g(z_0) = 2\pi i g(x_0).$$

Integrál na levé straně napíšeme jako součet integrálů po jednotlivých křivkách

$$\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z-z_0} dz + \int_{\gamma_2+\gamma_6} \frac{g(z)}{z-z_0} dz + \int_{\gamma_3+\gamma_5} \frac{g(z)}{z-z_0} dz + \int_{\gamma_4} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i g(x_0).$$

Vzhledem k $h \rightarrow 0$ budou integrály přes γ_2 a γ_6 nulové. Po provedení limit $R \rightarrow \infty$ a $r \rightarrow 0$ dají jednotlivé integrály postupně:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx + 0 + \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left(\int_R^{x_0+r} \frac{g(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0-r}^{-R} \frac{g(x)}{x-x_0} dx \right) + \int_{\gamma_4} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i g(x_0),$$

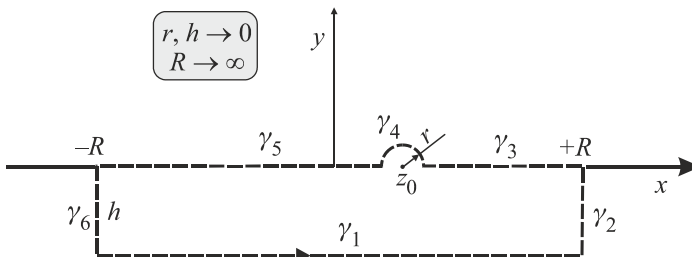
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left(\int_{-R}^{x_0-r} \frac{g(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+r}^R \frac{g(x)}{x-x_0} dx \right) + \int_{\gamma_4} \frac{g(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i g(x_0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx - \operatorname{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{g(z_0 + r e^{i\varphi})}{r e^{i\varphi}} i r e^{i\varphi} d\varphi = 2\pi i g(x_0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx - \operatorname{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx + i \int_{\pi}^{2\pi} g(x_0) d\varphi = 2\pi i g(x_0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx = \operatorname{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0} dx + \pi i g(x_0).$$

Uvedený postup je užitečný při odvozování Landauova útlumu. Pokud ale integrál z komplexní funkce konverguje v imaginárním nekonečnu ($i\infty$, nebo $-i\infty$), můžeme spodní část integrace nahradit polokružnicí, buď v horní polorovině, nebo v dolní polorovině – podle toho, kde půjde integrál přes polokružnici k nule.



Obr. 148: Výpočet integrálu pomocí reziduové věty.

Pól

Řekneme, že funkce $f(z)$ má pól v bodě z_0 , pokud

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$,
2. v prstencovém okolí z_0 je funkce holomorfní.

Násobnost pólu

Řekneme, že pól z_0 funkce $f(z)$ má násobnost k , pokud koeficienty Laurentova rozvoje na prstencovém okolí bodu z_0 splňují

1. $c_{-k} \neq 0$,
2. $c_l = 0$; $l < -k$.

Reziduum v pólu první násobnosti

Reziduum v pólu první násobnosti lze určit ze vztahu (plyne okamžitě z Laurentova rozvoje)

$$\operatorname{Rez}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]. \quad (\text{A.31})$$

Ze vztahu je zřejmé, že pro holomorfní funkci g platí

$$\operatorname{Rez}\left(\frac{g(z)}{(z - z_0)}, z_0\right) = g(z_0).$$

Například

$$\operatorname{Rez}\left(\frac{\sin(z)}{(z+i)(z-i)}, i\right) = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{\sin(z)}{(z+i)(z-i)} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{\sin(z)}{(z+i)} \right] = \frac{\sin(i)}{2i}.$$

Reziduum v pólu k -té násobnosti

$$\operatorname{Rez}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}. \quad (\text{A.32})$$

Reziduum v nekonečnu

Pro holomorfní funkci můžeme v prstencovém okolí nekonečna zavést Laurentův rozvoj ve tvaru

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{z^k}. \quad (\text{A.33})$$

Reziduum v nekonečnu potom definujeme vztahem

$$\operatorname{Rez}(f, \infty) = -b_1. \quad (\text{A.34})$$

Znaménko se definuje záporné proto, aby pro funkci, která je holomorfní až na konečný počet pólů z_k , platilo, že součet všech reziduí je nulový:

$$\operatorname{Rez}(f, \infty) + \sum_{z_k} \operatorname{Rez}(f, z_k) = 0 . \quad (\text{A.35})$$

Tento vztah umožňuje vypočítat reziduum v nekonečnu bez použití definičního vztahu (A.34).

A4 Některé speciální funkce

Besselovy funkce

Besselovy funkce jsou řešenými Laplaceovy nebo Helmholtzovy rovnice ve válcových souřadnicích

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0 . \quad (\text{A.36})$$

Obecné řešení má tvar

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x) . \quad (\text{A.37})$$

Funkce J_m nazýváme Besselovy funkce prvního druhu a mají v počátku konečné hodnoty. Funkce Y_m nazýváme Besselovy funkce druhého druhu a v počátku jsou singulární. Funkce $J_0(x)$ koresponduje ve válcových souřadnicích s funkcí kosinus z kartézských souřadnic a funkce $J_1(x)$ koresponduje se sinem. Platí mezi nimi i obdobný vztah:

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x) . \quad (\text{A.38})$$

Funkce prvního druhu lze jednoduše zapsat pomocí řady, pro druhý druh je přehlednější integrální vyjádření:

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} , \quad (\text{A.39})$$

$$Y_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{mt} + (-1)^m e^{-mt} \right] e^{-x \operatorname{sh} t} dt .$$

Besselovy funkce lze bez problémů definovat i pro neceločíselný index m (faktoriály v definiční řadě nahradí Γ funkce) nebo pro komplexní argument. Z komplexních argumentů je nejdůležitější ryze imaginární argument ($x \rightarrow ix$). V tomto případě rovnice (A.36) přejde v

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0 , \quad (\text{A.40})$$

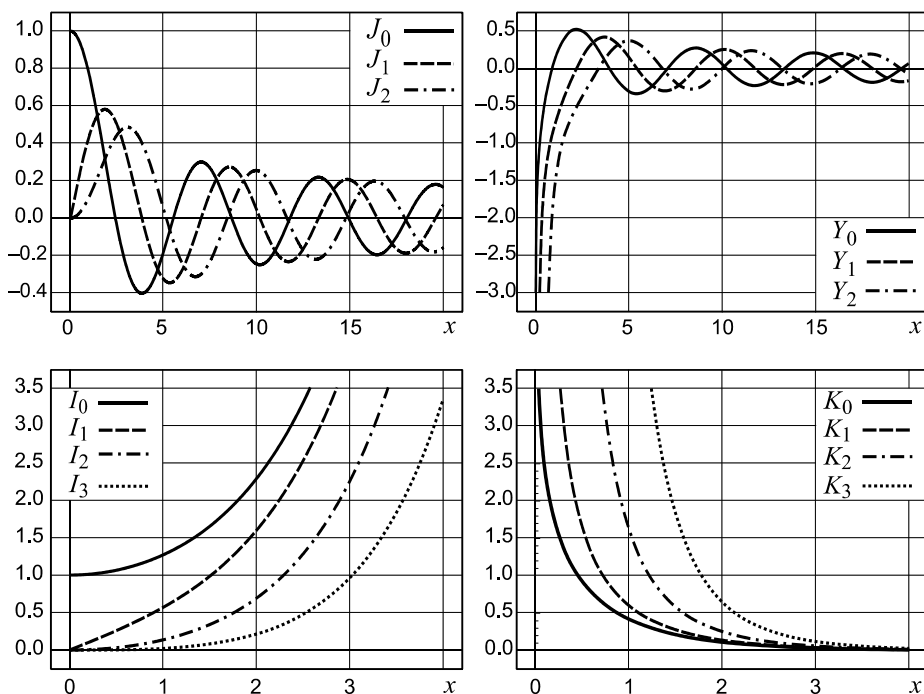
jejímž řešením je analogie hyperbolických funkcí

$$y(x) = c_1 I_m(x) + c_2 K_m(x), \tag{A.41}$$

kde I_m , K_m nazýváme hyperbolické neboli modifikované Besselovy funkce. Funkce I_m mají konečné hodnoty v počátku a v nekonečnu divergují (analogicky jako $\exp[x]$), snadno se definují pomocí řady. Naopak funkce K_m divergují v počátku a v nekonečnu se blíží nule (analogicky jako $\exp[-x]$) a jednodušší je jejich integrální vyjádření:

$$I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m};$$

$$K_m(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(m-1/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \int_1^{\infty} e^{-tx} (t^2 - 1)^{m-1/2} dt. \tag{A.42}$$



Asymptotické vztahy v okolí počátku ($x \ll 1$):

$$J_m(x) \approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m,$$

$$Y_m(x) \approx \frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}; \quad m > 0,$$

$$I_m(x) \approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m,$$

$$K_m(x) \approx \frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}; \quad m > 0. \tag{A.43}$$

Asymptotické vztahy v nekonečnu ($x \gg 1$):

$$\begin{aligned} J_m(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ Y_m(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ I_m(x) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \\ K_m(x) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Kulové funkce

Kulové funkce tvoří bázi pro sféricky symetrický potenciál v kvantové teorii, viz [2]. Jsou vhodné pro rozvoje úhlových částí funkcí ve sférických souřadnicích. Kulové funkce jsou definovány vztahy (φ je azimutální úhel, θ polární úhel)

$$Y_{lm}(\varphi, \theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_{lm}(\cos\theta); \quad (\text{A.45})$$

$$P_{lm}(x) \equiv \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l; \quad l=0, 1, 2, \dots; \quad |m| \leq l; \quad m=0, \pm 1, \dots$$

Polynomy P_{lm} se nazývají přidružené Legendreovy polynomy. Pro $m=0$ se nazývají Legendreovy polynomy:

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l; \quad l=0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.46})$$

Jiný způsob, jak zapsat Legendreův polynom je v komplexní rovině za pomoci křivkového integrálu po křivce, která proti směru hodinových ručiček oběhne počátek souřadnic $z, t \in \mathbb{C}$:

$$P_l(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (1-2tz+t^2)^{-1/2} t^{-l-1} dt. \quad (\text{A.47})$$

Pro Legendreovy polynomy platí některé užitečné vztahy, například

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) dx = 2\delta_{0l}; \quad \int_{-1}^{+1} x P_l(x) dx = \frac{2}{3} \delta_{1l}, \quad (\text{A.48})$$

v prvním případě je tedy nenulový jen integrál z $P_0(x)$, v druhém případě z $P_1(x)$. Je to zřejmé ze vztahu (A.46). Jiným užitečným výrazem je rozvoj

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\min^l(r, r')}{\max^{l+1}(r, r')} P_l(\cos\theta), \quad (\text{A.49})$$

kde θ je úhel mezi vektory \mathbf{r} , \mathbf{r}' .

Chybová funkce

Pomocí chybové funkce lze vyjádřit první Rosenbluthův potenciál H pro Maxwellovo rozdělení. Chybová funkce je definována vztahem

$$\phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \quad (\text{A.50})$$

Chandrasekharova funkce

Tato funkce vystupuje v dynamickém třecím členu Fokkerovy-Planckovy rovnice pro Maxwellovo rozdělení. Pomocí této funkce se popisuje *runaway* (ubíhající) řešení:

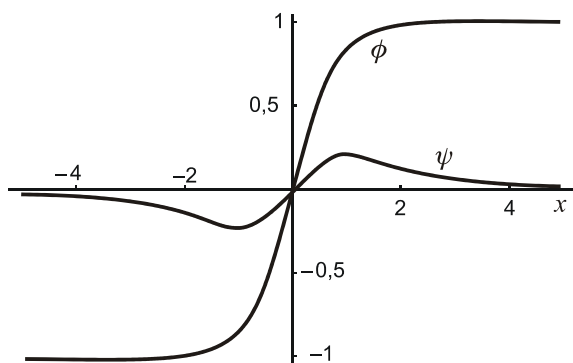
$$\psi(x) \equiv \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi}{x^2}. \quad (\text{A.51})$$

Mezi Chandrasekharovou funkcí a chybovou funkcí platí jednoduchý vztah:

$$\psi(x) = \frac{\phi - x\phi'}{2x^2}. \quad (\text{A.52})$$

Využijeme-li, že $\phi' = 2e^{-x^2} / \sqrt{\pi}$, můžeme snadno vztah obrátit:

$$\phi = 2x^2\psi + \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (\text{A.53})$$



Obr. 150: Chandrasekharova funkce (ψ) a chybová funkce (ϕ).

A5 Výpočet Rosenbluthových potenciálů pro Maxwellovo rozdělení rychlostí

Určeme nyní oba Rosenbluthovy potenciály pro Maxwellovo rozdělení terče, tedy výrazy

$$H(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{f_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} d^3 \mathbf{v}_\beta; \quad G(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta, \quad (\text{A.54})$$

kde index α označuje sledovanou částici a β částici terče. Rozdělení f_β předpokládáme Maxwellovo:

$$f_\beta = n_\beta \left(\frac{m_\beta}{2\pi k_B T_\beta} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv_\beta^2}{2k_B T_\beta}}. \quad (\text{A.55})$$

Výpočet potenciálu H

Z izotropie terče (funkce f_β) plyne, že výsledný potenciál může záviset jen na velikosti rychlosti v_α . Jmenovatel integrandu rozvineme do Legendreových polynomů podle vztahu (A.49):

$$\begin{aligned} H(v_\alpha) &\equiv \int \frac{f_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} d^3 \mathbf{v}_\beta = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \iiint f_\beta(v_\beta) \frac{\min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)} P_l(\cos \theta) v_\beta^2 \sin \theta d\varphi d\theta dv_\beta. \end{aligned}$$

Integrace přes azimutální úhel φ je triviální a dá 2π . Integrace přes úhel θ mezi vektory $\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta$ je také jednoduchá. Budeme substituovat $\cos \theta = x$:

$$H(v_\alpha) = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty \frac{v_\beta^2 \min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)} \left(\int_{-1}^1 P_l(x) dx \right) f_\beta(v_\beta) dv_\beta \right].$$

Podle vztahu (A.48) je ale integrál z Legendreova polynomu nenulový jen pro $l=0$ a má hodnotu 2. Z celé řady tedy zůstane jen nultý člen:

$$\begin{aligned} H(v_\alpha) &= 4\pi \int_0^\infty \frac{v_\beta^2 f_\beta(v_\beta)}{\max(v_\alpha, v_\beta)} dv_\beta \quad \Rightarrow \\ H(v_\alpha) &= 4\pi \left[\frac{1}{v_\alpha} \int_0^{v_\alpha} v_\beta^2 f_\beta(v_\beta) dv_\beta + \int_{v_\alpha}^\infty v_\beta f_\beta(v_\beta) dv_\beta \right]. \quad (\text{A.56}) \end{aligned}$$

Pól v původním integrálu tak rozdělil integraci na dvě části. Jde o obecný vztah, do kterého lze nyní dosadit jakékoli rozdělení f_β , tedy například Maxwellovo nebo Fer-

miho-Diracovo rozdělení. V našem případě dosadíme Maxwellovo rozdělení (A.55) a snadno získáme

$$H(v_\alpha) = n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2k_B T_\beta}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi + n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2k_B T_\beta}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2};$$

$$x \equiv \frac{v_\alpha}{\sqrt{2k_B T_\beta / m_\beta}}.$$

Tento výsledek lze přepsat pomocí definice Chandrasekharovy funkce (A.51) do tvaru

$$H(v_\alpha) = n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2k_B T_\beta}} \left[\frac{2}{x} \psi(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right].$$

Pomocí vztahu (A.53) máme ihned výsledný výraz pro potenciál H :

$$H(v_\alpha) = \left(\frac{2k_B T_\beta}{m_\beta} \right)^{-1/2} n_\beta \frac{\phi(x)}{x};$$

$$x \equiv \frac{v_\alpha}{\sqrt{2k_B T_\beta / m_\beta}}. \quad (\text{A.57})$$

Výpočet potenciálu G

Postup je obdobný, jen využijeme vztahu

$$|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| = \frac{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|^2}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} = \frac{v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta \cos \theta + v_\beta^2}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|}.$$

Jmenovatele opět rozvineme do řady Legendrových polynomů a postupujeme analogicky jako u potenciálu H :

$$G(v_\alpha) \equiv \int |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta = \int \frac{v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta \cos \theta + v_\beta^2}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \iiint f_\beta(v_\beta) \left(v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta \cos \theta + v_\beta^2 \right) \frac{\min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)} P_l(\cos \theta) v_\beta^2 \sin \theta d\varphi d\theta dv_\beta =$$

$$= 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty \frac{\min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)} v_\beta^2 f_\beta(v_\beta) \left(\int_{-1}^1 \left(v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta x + v_\beta^2 \right) P_l(x) dx \right) dv_\beta \right].$$

Každá z integrací přes Legendreův polynom ponechá podle vztahu (A.48) jediný nenulový člen z celé řady. Obdobným postupem jako pro potenciál H získáme

$$G(v_\alpha) = \frac{4\pi v_\alpha}{3} \left[\int_0^{v_\alpha} \left(3v_\beta^2 + \frac{v_\beta^4}{v_\alpha^2} \right) f_\beta(v_\beta) dv_\beta + \int_{v_\alpha}^{\infty} \left(\frac{3v_\beta^3}{v_\alpha} + v_\alpha v_\beta \right) f_\beta(v_\beta) dv_\beta \right]. \quad (\text{A.58})$$

Opět jde o obecný výraz pro jakékoli rozdělení f_β . Pro Maxwellovo rozdělení lze provést výpočet analogicky, jako pro potenciál H . Výsledek lze opět zapsat za pomoci chybové funkce a její derivace:

$$G(v_\alpha) = \left(\frac{2k_B T_\beta}{m_\beta} \right)^{+1/2} n_\beta \left[x\phi(x) + \frac{\phi(x)}{2x} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right]; \quad (\text{A.59})$$

$$x \equiv \frac{v_\alpha}{\sqrt{2k_B T_\beta / m_\beta}}.$$

Jednoduše zapsatelná je první derivace tohoto potenciálu podle rychlosti:

$$\frac{\partial G(v_\alpha)}{\partial v_\alpha} = n_\beta [\phi(x) - \psi(x)]. \quad (\text{A.60})$$

A6 Základní trigonometrické vztahy

Jednoduché definice

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (\text{A.61})$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad (\text{A.62})$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad (\text{A.63})$$

$$\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}, \quad (\text{A.64})$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \quad (\text{A.65})$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}. \quad (\text{A.66})$$

Součtové vzorce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad (\text{A.67})$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \quad (\text{A.68})$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad (\text{A.69})$$

$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\pm \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x \mp \operatorname{cotg} y}, \quad (\text{A.70})$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (\text{A.71})$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \quad (\text{A.72})$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (\text{A.73})$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \quad (\text{A.74})$$

Dvojnásobný úhel

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad (\text{A.75})$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (\text{A.76})$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad (\text{A.77})$$

$$\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}. \quad (\text{A.78})$$

Poloviční úhel

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad (\text{A.79})$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad (\text{A.80})$$

(znaménko se určí dle kvadrantu)

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \quad (\text{A.81})$$

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}, \quad (\text{A.82})$$

Druhé mocniny

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad (\text{A.83})$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x, \quad (\text{A.84})$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (\text{A.85})$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad (\text{A.86})$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}, \quad (\text{A.87})$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad (\text{A.88})$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \quad (\text{A.89})$$

Převod na $\operatorname{tg}(x/2)$ a $\operatorname{cotg}(x/2)$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2 \operatorname{cotg}(x/2)}{1 + \operatorname{cotg}^2(x/2)}, \quad (\text{A.90})$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{\operatorname{cotg}^2(x/2) - 1}{\operatorname{cotg}^2(x/2) + 1}. \quad (\text{A.91})$$

Posuny o $\pi/2$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x, \quad (\text{A.92})$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \quad (\text{A.93})$$

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg} x, \quad (\text{A.94})$$

$$\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} x. \quad (\text{A.95})$$

Dodatek B – Zobecněné funkce

B1 Diracova distribuce

Ve fyzice se velmi často setkáváme s nutností popsat bodový náboj nebo hmotný bod. Náboj či hmotnost částice si představujeme lokalizované v jediném místě, což s sebou nese problém nekonečné hustoty náboje či hmoty v tomto místě. Řešením je zavedení tzv. zobecněných funkcí, zejména Diracovy distribuce. Ukažme si problém na lineární hustotě náboje lokalizovaného v místě $x = 0$:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0; & x \neq 0 \\ \neq 0 & x = 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Integrál z hustoty ale musí dát celkový náboj Q :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = Q. \quad (\text{B.2})$$

Je jasné, že hustota náboje není „normální“ funkcí. Má nenulovou hodnotu v jediném bodě a integrál z ní by přesto měl dát konečné číslo. Takové funkce ale neexistují, můžeme je zavádět jako limitu posloupností funkcí a jejich význam je jen ve skalárním součinu s jinou, tzv. testovací funkcí.

Posloupnost obdélníků

Zaveďme si obdélníkové funkce

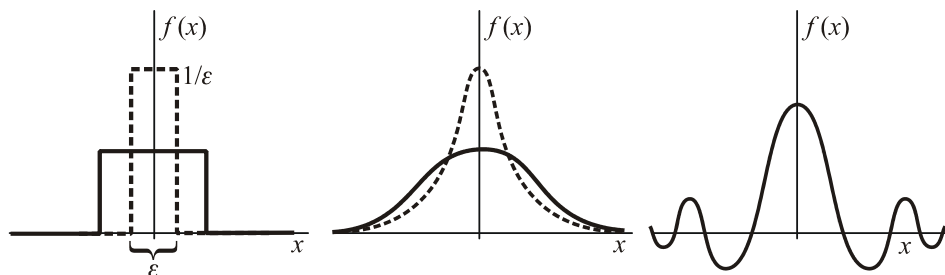
$$f_{\varepsilon}(x) \equiv \begin{cases} 1/\varepsilon, & x \in <-\varepsilon/2, \varepsilon/2>; \\ 0, & x \notin <-\varepsilon/2, \varepsilon/2>. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Všechny obdélníky mají stejnou plochu rovnou jedné a funkce mají zajímavé vlastnosti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\varepsilon}(x) dx = 1; \quad f_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{\varepsilon}; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}. \quad (\text{B.4})$$

Diracovu distribuci můžeme formálně zavést jako limitu těchto obdélníkových funkcí

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x). \quad (\text{B.5})$$



Obr. 151: Posloupnosti využívané k zavedení Diracovy zobecněné funkce.

Posloupnost „kopečků“ (Cauchyových-Lorentzových rozdělení)

Obdélníky z předchozí ukázky nejsou hladké funkce. To ale není nepřekonatelný problém, místo obdélníků můžeme použít funkce spojitě se všemi svými derivacemi podle vztahu

$$f_{\varepsilon}(x) \equiv \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}. \quad (\text{B.6})$$

Plocha pod těmito funkcemi je rovna jedné pro každé ε , protože

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\varepsilon}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} dx = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1. \quad (\text{B.7})$$

Pro malá ε se „kopce“ zužují a přitom se zvětšuje jejich výška:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\varepsilon}(x) dx = 1; \quad f_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{\pi\varepsilon}; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}. \quad (\text{B.8})$$

Opět můžeme zavést Diracovu distribuci jako limitu těchto spojitých funkcí:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x). \quad (\text{B.9})$$

Cauchy-Lorentzovo rozdělení, ze kterého jsme nyní zkonstruovali Diracovu distribuci popisuje ve spektroskopii tvar spektrálních čar a nebo v teorii vynucených kmitů rezonanční křivku. Je pojmenováno podle francouzského matematika Augustina Cauchyho (1759–1857) a holandského fyzika Hendrika Lorentze (1853–1928).

Posloupnost Dirichletových jader

Diracovu distribuci můžeme zavést také pomocí jednoduché funkce

$$f(x) \equiv \frac{\sin x}{x}; \quad f(0) \rightarrow 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi.$$

Zavedme posloupnost

$$f_k(x) = \frac{k}{\pi} \frac{\sin kx}{kx}, \quad (\text{B.10})$$

která má jednoduché vlastnosti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) dx = 1; \quad f_k(0) = \frac{k}{\pi}; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\} \end{cases}.$$

Diracovu distribuci lze zavést jako limitu posloupnosti funkcí (ne pro všechna $x \neq 0$ tato limita existuje)

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x).$$

Poznamenejme, že funkce $f_k(x)$ jsou známé z důkazu věty o Fourierově rozvoji do řady a nazývají se *Dirichletovo jádro*. Je pojmenováno podle německého matematika Johanna Petera Gustava Lejeunea Dirichleta (1805–1859).

Fourierův obraz jednotkové funkce

Spočtěme nejprve následující integrál:

$$\int_{-k}^{+k} e^{ikx} dx = \left[\frac{1}{ix} e^{ikx} \right]_{-k}^{+k} = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{ix} = 2k \frac{\sin kx}{kx}.$$

Integrál dává až na koeficient 2π Dirichletovo jádro. Diracovu distribuci lze proto napsat jako

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^{+k} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk. \quad (\text{B.11})$$

Integrál v nevlastních mezích chápeme právě ve smyslu uvedené limity. Diracova distribuce je tak úměrná Fourierovu obrazu jednotkové funkce.

Diracova distribuce nemá vlastnosti běžných funkcí. Přestože je její hodnota nenulová v jediném bodě, dá integrál z ní nenulovou hodnotu. To plyne z limitního charakteru zavedení této distribuce. K jejím základním vlastnostem patří:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(0) dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0). \quad (\text{B.12})$$

Důvod je snad zřejmý. Distribuce δ je všude nulová kromě jediného bodu $x = 0$. Proto výsledek integrálu může ovlivnit jedině hodnota funkce f v počátku. Tu však můžeme vytknout před integrál a dostaneme jako výsledek hodnotu funkce v počátku.

Poznámka 1: Distribuci lze také chápat jako velmi jednoduché zobrazení, které přiřadí funkci její hodnotu v počátku (zobrazení, které přiřadí funkci číslo, se nazývá *funkcionál*).

$$\hat{T}_\delta f(x) \equiv f(0); \quad \text{resp. } f(x) \xrightarrow{T_\delta} f(0),$$

Poznámka 2: Obecně lze distribuci chápat jako funkcionál daný skalárním součinem

$$\hat{T}_g f(x) \equiv \langle g | f \rangle;$$

Skalární součin působí na libovolnou funkci f z tzv. prostoru testovacích funkcí. Funkce g je pevně daná, definuje toto zobrazení a nazývá se temperovaná distribuce. Čím „hezcí“ vlastnosti budou mít funkce z testovacího prostoru (například budou dostatečně rychle konvergovat k nule na hranicích oblasti), tím „horší“ vlastnosti může mít funkce g definující zobrazení. Za prostor testovacích funkcí může posloužit například Schwartzův (Sobolevův) prostor nekonečně diferencovatelných funkcí klesajících v nekonečno rychleji než libovolná mocnina $1/x^k$.

Poznámka 3: Často se hledají řešení celých rovnic „ve smyslu skalárního součinu“. Například místo rovnice

$$\nabla^2 \varphi = f$$

řešíme rovnici

$$\langle \nabla^2 \varphi - f | \psi \rangle = 0,$$

kde φ je hledané řešení a ψ je libovolná funkce z prostoru testovacích funkcí. Tato řešení se nazývají *slabá řešení*. Jejich třída je mnohem bohatší než byla třída řešení původní rovnice. Nacházená řešení mohou mít „divočejší“ charakter a jsou bližší fyzikální realitě. Jejich hledáním se zabývala vynikající matematicka Olga Alexandrovna Ladyženská (1922–2004).

B2 Konvoluce

Na separabilních prostorech (se spoččetně bází) můžeme zobrazení $\hat{A}|f\rangle = |g\rangle$ psát v konkrétní reprezentaci v maticovém tvaru

$$\sum_l A_{kl} f_l = g_k. \quad (\text{B.13})$$

Jednotkové zobrazení $\hat{1}|f\rangle = |f\rangle$ je dáno jednotkovou maticí, jejíž prvky tvoří Kroneckerův symbol:

$$\sum_l \delta_{kl} f_l = f_k. \quad (\text{B.14})$$

V případě neseparabilních prostorů je zobrazení dáno funkcí dvou proměnných

$$\int_{\Omega} A(x, y) f(y) dy = g(x). \quad (\text{B.15})$$

Integrál (B.15) se nazývá *konvoluce* a označuje se

$$A * f \equiv \int_{\Omega} A(x, y) f(y) dy. \quad (\text{B.16})$$

Konvoluce je analogií maticového násobení na neseparabilních prostorech. Roli indexů přebírají spojité proměnné x a y . Roli matice přebírá tzv. *jádro konvoluce* $A(x, y)$. Speciálním případem konvolucí jsou různé integrální transformace (Laplaceova, Fourierova, Abelova atd.). Jádrem jednotkového operátoru je Diracova distribuce (je nenulová jen pro $x = y$):

$$\int \delta(x - y) f(y) dy = f(x).$$

Diracova distribuce tak na neseparabilních prostorech přebírá úlohu Kroneckerova symbolu.

B3 Greenův operátor a Greenova funkce

Napišme maticové elementy jednotkového operátoru v x reprezentaci (maticové elementy jednotkového operátoru jsou právě Diracovou distribucí):

$$\delta(x - y) = \langle y | \hat{1} | x \rangle = \sum_n \langle y | n \rangle \langle n | x \rangle = \sum_n f_n^*(y) f_n(x).$$

Ve spojitých prostorech

$$\delta(x - y) = \int_k f_k^*(y) f_k(x) dk. \quad (\text{B.17})$$

Diracovu distribuci lze tak napsat pomocí libovolných bázových funkcí, například pomocí

$$|k\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx},$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \delta(x-y) &= \frac{1}{2\pi} \int_k e^{-iky} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_k e^{ik(x-y)} dk \quad \Rightarrow \\ \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_k e^{ikx} dk, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

což je výše odvozený vztah (B.11). V N dimenzích jsou vztahy obdobné:

$$|\mathbf{k}\rangle \equiv \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}; \quad \delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^N \mathbf{k}. \quad (\text{B.19})$$

Greenův operátor

Hledíme řešení lineární operátorové rovnice s pravou stranou

$$\hat{L}|\phi\rangle = f. \quad (\text{B.20})$$

Z věty o spektrálním rozvoji víme, že řešení je možné zapsat pomocí vlastních vektorů (tvoří-li ortonormální bázi) a vlastních čísel ve tvaru

$$|\phi\rangle = \sum_l \frac{1}{\lambda_l} |l\rangle \langle l| f\rangle.$$

Přepíšme řešení takto

$$|\phi\rangle = \hat{G}|f\rangle; \quad \hat{G} = \sum_l \frac{1}{\lambda_l} |l\rangle \langle l|. \quad (\text{B.21})$$

Operátor \hat{G} se nazývá *Greenův operátor* a je inverzním operátorem k operátoru \hat{L} . V případě operátoru se spojitým spektrem přejde sumace v integraci.

Greenova funkce

Zabývejme se nyní speciálním případem – rovnicí s lineárním operátorem a nenulovou pravou stranou na prostoru L^2

$$\hat{L}\phi = f. \quad (\text{B.22})$$

Hledíme nejprve řešení pro jednotkový impuls na pravé straně (bude reprezentovaný Diracovou distribucí):

$$\hat{L}G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}).$$

Toto řešení se nazývá *Greenova funkce*. Obecné řešení rovnice (B.22) je konvolucí Greenovy funkce a pravé strany rovnice

$$\phi(\mathbf{x}) = G * f = \int G(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})d^N \mathbf{y}.$$

Důkaz je velmi jednoduchý. Ukážeme, že působením operátoru \hat{L} na nalezené řešení dostaneme pravou stranu původní rovnice:

$$\hat{L}\phi(\mathbf{x}) = \int \hat{L}G(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})d^N\mathbf{y} = \int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})d^N\mathbf{y} = f(\mathbf{x}).$$

B4 Fourierova transformace

Fourierovu transformaci můžeme chápat jako konvoluci s jádrem $\exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}]/(2\pi)^{N/2}$ nebo jako rozvoj funkce do rovinných vln:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int \tilde{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^N\mathbf{k}; \quad (\text{B.23})$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^N\mathbf{x}. \quad (\text{B.24})$$

Koeficienty rozvoje $\tilde{f}(\mathbf{k})$ chápeme jako amplitudy rozvoje nebo jako přímou transformací z \mathbf{x} prostoru do \mathbf{k} prostoru, vztah (B.23) jako inverzní transformaci z \mathbf{k} prostoru do \mathbf{x} prostoru:

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{F}(f(\mathbf{x})); \quad f(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}(\mathbf{k})). \quad (\text{B.25})$$

Věta: Pro Fourierovu transformaci konvoluce existuje jednoduchý vztah:

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{N/2} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g). \quad (\text{B.26})$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\int f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d^N\mathbf{y} \right) d^N\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int \left(\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d^N\mathbf{x} \right) d^N\mathbf{y} = \quad | \text{subst.: } \mathbf{x}-\mathbf{y} \equiv \mathbf{z} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int \left(\int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})} f(\mathbf{z})g(\mathbf{y})d^N\mathbf{x} \right) d^N\mathbf{y} = \\ &= (2\pi)^{N/2} \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}} f(\mathbf{z})d^N\mathbf{z} \right) \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} g(\mathbf{y})d^N\mathbf{y} \right) = \\ &= (2\pi)^{N/2} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g). \end{aligned}$$

■

B5 Obecné řešení rovnice difúze

Uvažujme rovnici difúze v neomezeném prostředí (například rovnici difúze magnetického pole) s vhodnou počáteční podmínkou a nenulovou pravou stranou

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \eta \nabla^2 \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}); \quad \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (\text{B.27})$$

Věta: Obecné řešení rovnice difúze v N dimenzích lze napsat jako prostorovou konvoluci Greenovy funkce s počáteční podmínkou a časoprostorovou konvolucí s pravou stranou:

$$\mathbf{u} = G *_{(\mathbf{x})} \mathbf{u}_0 + G *_{(t, \mathbf{x})} \mathbf{f}, \quad (\text{B.28})$$

neboli

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \int G(t, \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\xi}) d^N \boldsymbol{\xi} + \int G(t - \tau, \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{f}(\tau, \boldsymbol{\xi}) d\tau d^N \boldsymbol{\xi}, \quad (\text{B.29})$$

kde je Greenova funkce dána vztahem

$$G(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi\eta t)^{N/2}} \exp\left[-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\eta t}\right]. \quad (\text{B.30})$$

Důkaz: V rovnici (B.27) provedeme Fourierovu transformaci v prostorové části:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt} + \eta k^2 \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}}.$$

Všechny členy přenásobíme exponenciálou $\exp[\eta k^2 t]$ a upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt} e^{\eta k^2 t} + \eta k^2 e^{\eta k^2 t} \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{\mathbf{f}} e^{\eta k^2 t} \quad \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left(e^{\eta k^2 t} \tilde{\mathbf{u}} \right) &= \tilde{\mathbf{f}} e^{\eta k^2 t}. \end{aligned}$$

Obě strany integrujeme v čase a opět upravíme

$$\begin{aligned} e^{\eta k^2 t} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_0 &= \int_0^t \tilde{\mathbf{f}} e^{\eta k^2 \tau} d\tau \quad \Rightarrow \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{\mathbf{u}}_0 e^{-\eta k^2 t} + \int_0^t \tilde{\mathbf{f}}(\tau, \mathbf{k}) e^{-\eta k^2 (t-\tau)} dt'. \end{aligned}$$

Označíme-li

$$\exp[-\eta k^2 t] \equiv (2\pi)^{N/2} \tilde{G}, \quad (\text{B.31})$$

máme s využitím relace (B.26) vztah

$$\tilde{\mathbf{u}} = (2\pi)^{N/2} \tilde{\mathbf{u}}_0 \tilde{G} + (2\pi)^{N/2} \int_0^t \tilde{\mathbf{f}}(t', \mathbf{k}) \tilde{G}(t - \tau, \mathbf{k}) d\tau \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}(\mathbf{u}_0 *_{(x)} G) + \mathcal{F}(\mathbf{f} *_{(t,x)} G) \Rightarrow$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 *_{(x)} G + \mathbf{f} *_{(t,x)} G \Rightarrow$$

$$\mathbf{u} = G *_{(x)} \mathbf{u}_0 + G *_{(t,x)} \mathbf{f}.$$

Nyní již zbývá jen určit ze vztahu (B.31) Greenovu funkci G :

$$\tilde{G} \equiv \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp[-\eta k^2 t] \Rightarrow$$

$$G(t, \mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{G}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int e^{-\eta k^2 t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^N \mathbf{k} \Rightarrow$$

$$G(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} e^{-|\mathbf{x}|^2/4\eta t} \int e^{-\eta t(\mathbf{k} - i\mathbf{x}/2\eta t)^2} d^N \mathbf{k} \Rightarrow$$

$$G(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} e^{-|\mathbf{x}|^2/4\eta t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta t \xi^2} d\xi \right)^N \Rightarrow$$

$$G(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} e^{-|\mathbf{x}|^2/4\eta t} \left(\frac{\pi}{\eta t} \right)^{N/2} \Rightarrow$$

$$G(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi\eta t)^{N/2}} \exp\left[-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\eta t}\right].$$

■

Pro nulovou pravou stranu jsme obecné vztahy (B.28) a (B.30) získali přímým výpočtem i v kapitole věnované difúzi magnetického pole, viz vztah (3.24).

Dodatek C – Křivočaré souřadnice, vícerozměrné integrály

C1 Křivočaré souřadnice

V následujících tabulkách je k daným souřadnicím vždy uveden gradient, divergence, rotace a skalární a vektorový Laplaceův operátor. Působení Laplaceova operátoru na vektorové pole lze také určit z vektorové identity $\nabla^2 \mathbf{K} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{K}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{K})$.

Kartézské souřadnice

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.1})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}, \quad (\text{C.2})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{K} = \left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.3})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{K} = & \left(\frac{\partial^2 K_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial^2 K_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_y + \\ & + \left(\frac{\partial^2 K_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Válcové souřadnice

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.6})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial K_z}{\partial z}, \quad (\text{C.7})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{K} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial K_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial K_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial K_r}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial K_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.8})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{K} = & \left(\frac{\partial^2 K_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 K_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{K_r}{r^2} \right) \mathbf{e}_r + \\ & + \left(\frac{\partial^2 K_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 K_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial K_r}{\partial \varphi} - \frac{K_\varphi}{r^2} \right) \mathbf{e}_\varphi + \\ & + \left(\frac{\partial^2 K_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 K_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Sférické souřadnice

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{C.11})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 K_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta K_\theta), \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{K} = & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta K_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \\ & + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_\varphi) \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial K_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \quad (\text{C.14})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \quad (\text{C.14}')$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{K} = & \left(\begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rK_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 K_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial K_r}{\partial \theta} - \\ - \frac{2}{r^2} \frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2K_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} K_\theta \end{array} \right) \mathbf{e}_r + \\
& + \left(\begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rK_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 K_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} - \\ - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial K_r}{\partial \theta} - \frac{K_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \end{array} \right) \mathbf{e}_\theta + \quad (\text{C.15}) \\
& + \left(\begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rK_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 K_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \theta} - \\ + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial K_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial K_\theta}{\partial \varphi} - \frac{K_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \end{array} \right) \mathbf{e}_\varphi .
\end{aligned}$$

C2 Křivkové, plošné a objemové integrály

Skalární a vektorové pole

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{r}) : R^3 &\rightarrow R; \\
\mathbf{K}(\mathbf{r}) : R^3 &\rightarrow R^3 .
\end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Integrační variety

$$\begin{aligned}
\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u) ; & \quad \text{křivka,} \\
\sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) ; & \quad \text{plocha,} \\
\omega : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w) ; & \quad \text{těleso.}
\end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$u \in \langle u_1, u_2 \rangle ; \quad v \in \langle v_1, v_2 \rangle ; \quad w \in \langle w_1, w_2 \rangle .$$

Diferenciální elementy

Délkový element křivky (vektorový a skalární)

$$\begin{aligned}
d\mathbf{l} = (dx, dy, dz) = d\mathbf{r} &= \frac{d\mathbf{r}}{du} du = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du} \right) du , \\
dl = |d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + \left(\frac{dz}{du} \right)^2} du .
\end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Plošný element plochy (vektorový a skalární)

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du dv, \quad (\text{C.19})$$

$$dS = |d\mathbf{S}| = \sqrt{dS_x^2 + dS_y^2 + dS_z^2} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv.$$

Objemový element tělesa

$$dV = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| du dv dw. \quad (\text{C.20})$$

Integrály

Křivkový prvního druhu

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{x}) dl = \int_{u_1}^{u_2} f(\mathbf{x}(u)) \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du; \quad ' \equiv \frac{d}{du}. \quad (\text{C.21})$$

Křivkový integrál druhého druhu

$$\int_{\gamma} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} K_x dx + K_y dy + K_z dz = \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{K}(\mathbf{x}(u)) \cdot \mathbf{x}'(u) du; \quad ' \equiv \frac{d}{du} \quad (\text{C.22})$$

Plošný integrál prvního druhu

$$\int_{\sigma} f(\mathbf{x}) dS = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} f(\mathbf{x}(u,v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv. \quad (\text{C.23})$$

Plošný integrál druhého druhu

$$\int_{\sigma} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\sigma} K_x dS_x + K_y dS_y + K_z dS_z = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{K}(\mathbf{x}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv. \quad (\text{C.24})$$

Objemový integrál

$$\int_{\omega} f(\mathbf{x}) dV = \int_{w_1}^{w_2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} f(\mathbf{x}(u,v,w)) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw. \quad (\text{C.25})$$

Gaussova a Stokesova věta

Gaussova věta

$$\oint_{\sigma=\partial V} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{K} dV. \quad (\text{C.26})$$

Stokesova věta

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{C.27})$$

Obě předchozí věty jsou speciálním případem pro integraci per partes v N dimenzích

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} g + f \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) d^N x = \int_{\partial \Omega} f g n_k d^{N-1} x. \quad (\text{C.28})$$

Pro $g = 1$ máme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_k} d^N x = \int_{\partial \Omega} f n_k d^{N-1} x, \quad (\text{C.29})$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor normály k ploše. Ze vztahu (C.26) je zřejmé, že divergenci pole ($\operatorname{div} \mathbf{K} = \nabla \cdot \mathbf{K}$) lze použít jako test, který ukáže, zda je v daném místě zdroj pole \mathbf{K} . V místech, kde je $\operatorname{div} \mathbf{K} > 0$ pole vyvěrá a v místech, kde je $\operatorname{div} \mathbf{K} < 0$ pole mizí.

Ze vztahu (C.27) je zřejmé, že rotaci pole ($\operatorname{rot} \mathbf{K} = \nabla \times \mathbf{K}$) lze použít jako test, který ukáže, zda je v daném místě střed víru pole \mathbf{K} . Jde o vektorový test, jednotlivé složky odpovídají pohledu ze směru jednotlivých os. Například vír v rovině (xy) odhalíme jen při pohledu ve směru osy z , tedy nenulová bude jen z -ová složka $\operatorname{rot} \mathbf{K}$.

Metrika a míra

Předpokládejme, že na zadané N -rozměrné oblasti máme metriku g_{kl} , tj. vzdálenost je v zobecněných souřadnicích q_k dána vztahem

$$dl^2 = g_{kl} dq_k dq_l. \quad (\text{C.30})$$

Potom lze míru dané množiny (délkový element, plošný element, objemový element, atd.) obecně zapsat jako

$$d\mu = \sqrt{|\det g|} dq_1 \dots dq_N. \quad (\text{C.31})$$

Všechny integrály prvního druhu lze potom zapsat jednotně ve formě

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f \sqrt{|\det g|} dq_1 \dots dq_N. \quad (\text{C.32})$$

C3 Vnější algebra

Jednotný přístup k různým druhům integrálů lze získat zavedením tzv. vnější algebry, jejímž základem je antisymetrické násobení diferenciálů, například

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx.$$

Je zřejmé, že nově zavedený součin dvou stejných diferenciálů musí dát nulu, například

$$dx \wedge dx = 0.$$

Příklad 1 – ukázka dvojprvkové vnější algebry

Na dvou prvcích \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 můžeme zavést vnější algebru tak, že k těmto prvkům přidáme jednotkový prvek \mathbf{e}_0 (při násobení prvek nezmění) a výsledek vnějšího součinu \mathbf{e}_{12} . Násobení všech prvků můžeme odvodit z antikomutativnosti a asociativnosti, například

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}; \\ \mathbf{e}_{12} \wedge \mathbf{e}_1 &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_1 = -(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) = 0\end{aligned}$$

atd. Celkově lze výsledek násobení jednotlivých prvků zapsat do tabulky

\wedge	\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{12}
\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{12}
\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_1	0	\mathbf{e}_{12}	0
\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_{12}$	0	0
\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_{12}	0	0	0

Zaváděná algebra bude lineárním obalem těchto prvků.

Příklad 2 – ukázka použití vnější algebry v integrálech

Obecnou podobu vztahu (C.29) lze chápat jako

$$\int_{\Omega} dF = \int_{\partial\Omega} F; \quad \text{spec. pro jednu dimenzi} \quad \int_{\langle a,b \rangle} dF = [F]_a^b. \quad (\text{C.33})$$

Integrál napravo znamená hodnoty na hranici oblasti, proto zde nezapisujeme znak diferenciálu, obdobně jako v jedné dimenzi, kde hranicí jsou dva body. Pro Stokesovu větu je F na pravé straně dáno vztahem (počítáme cirkulaci vektoru \mathbf{K} podél γ)

$$F = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = K_x dx + K_y dy + K_z dz.$$

Definujeme-li diferenciál pomocí vnějšího součinu, máme pro levou stranu:

$$\begin{aligned}dF &= dK_x \wedge dx + dK_y \wedge dy + dK_z \wedge dz = \left(\frac{\partial K_x}{\partial x} dx + \frac{\partial K_x}{\partial y} dy + \frac{\partial K_x}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \dots = \\ &= \left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \\ &= (\text{rot } \mathbf{K})_x dS_x + (\text{rot } \mathbf{K})_y dS_y + (\text{rot } \mathbf{K})_z dS_z = \text{rot } \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}.\end{aligned}$$

Je zřejmé, že jsme ze vztahu (C.33) dostali jako speciální případ Stokesovu větu

$$\int_S \text{rot } \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}.$$

Obdobně lze postupovat u ostatních integrálů.

Dodatek D – Přehled vztahů a definic

D1 Základní vztahy

Transformace elektrických a magnetických polí – Lorentzova transformace elektromagnetického pole od inerciální soustavy S k soustavě S' pohybující se rychlostí \mathbf{v} vzhledem k S dává:

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E} \right) \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \mathbf{B}' = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{B} \right) \frac{\mathbf{v}}{c}; \quad (\text{D.1})$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Debyeova stínící vzdálenost λ_D ; *plazmový parametr* N_D – vzdálenost, na které poklesne potenciál bodového zdroje vlivem stínění na hodnotu $1/e$ Coulombova potenciálu; plazmový parametr N_D je počet elektronů v tzv. Debyeově sféře o poloměru λ_D :

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B}{\sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0} / T_{\alpha}}}; \quad N_D \equiv 4\pi n_e \lambda_D^3. \quad (\text{D.2})$$

Larmorův poloměr – poloměr rotace nabitě částice kolem magnetických indukčních čar:

$$R_L \equiv \frac{mv_{\perp}}{QB}. \quad (\text{D.3})$$

Cyklotronní frekvence – úhlová frekvence rotace nabitě částice kolem magnetických indukčních čar:

$$\omega_c \equiv \frac{QB}{m}. \quad (\text{D.4})$$

Kritický záměrný parametr – záměrný parametr, při kterém bude úhel rozptylu 90° , jde tedy o spodní hranici srážek braných v úvahu v Landauově rovnici.

$$b_0 \equiv \frac{Q_{\alpha} Q_{\beta}}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2}; \quad g \equiv |\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}|; \quad \mu \equiv \frac{m_{\alpha} m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}. \quad (\text{D.5})$$

Coulombův logaritmus – logaritmus podílu horní a dolní meze integrace přes záměrný parametr v Landauově nebo Fokkerově-Planckově rovnici. Za horní mez se bere Debyeova stínící vzdálenost a za dolní mez kritický záměrný parametr, při kterém je úhel rozptylu 90° . Argument logaritmu je trojnásobek počtu částic v Debyeově sféře. Platí

$$\ln A \equiv \ln(\lambda_D / b_0). \quad (\text{D.6})$$

Rosenbluthovy potenciály – potenciály, pomocí kterých lze zapsat pravou stranu Fokke-rovy-Planckovy rovnice.

$$H(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{1}{g} f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta, \quad G(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int g f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta; \quad (D.7)$$

$$g \equiv |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|.$$

Alfvénova rychlost – typická rychlost vln v plazmatu s magnetickým polem. Také jde o rychlost získanou plazmatem při přeměně magnetické energie na kinetickou.

$$v_A \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\mu \rho}}. \quad (D.8)$$

První adiabatický invariant – veličina, která se zachovává při Larmorově gyraci, pokud se magnetické pole mění pomalu v čase i v prostoru

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B}. \quad (D.9)$$

Druhý adiabatický invariant – veličina, která se zachovává při odrazech částice mezi dvěma magnetickými zrcadly, pokud se při tomto pohybu magnetické pole mění pomalu

$$J_2 \equiv \oint v_\parallel dl \approx 2Lv_\parallel. \quad (D.10)$$

Driftová rychlost – rychlost odvalování částice napříč magnetického pole, jev může být způsoben třemi mechanismy. Předpokládáme platnost adiabatického přiblížení, \mathbf{R} je poloha gyračního středu, \mathbf{F} externí pole.

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B - m \ddot{\mathbf{R}}}{QB^2}. \quad (D.11)$$

Hustota vnitřní energie – část hustoty energie, která odpovídá chaotickým pohybům. V izotropním prostředí ji lze pro polytropní děje vyjádřit pomocí tlaku

$$e \equiv \frac{1}{2} \rho \langle w^2 \rangle_{\mathbf{v}} = \frac{p}{\gamma - 1}. \quad (D.12)$$

Tenzor tlaku – část tenzoru toku hybnosti odpovídající chaotickým pohybům

$$\tilde{\mathbf{P}}_\alpha \equiv n_\alpha m_\alpha \langle \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha \rangle_{\mathbf{v}}. \quad (D.13)$$

Tepelný tok – tepelná energie proteklá jednotkovou plochou za jednotku času

$$\mathbf{q} \equiv \rho \left\langle \frac{w_\alpha^2}{2} \mathbf{w}_\alpha \right\rangle. \quad (D.14)$$

Hustota energie pole – je dána součtem hustoty energie elektrického a magnetického pole

$$\rho_W = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}. \quad (D.15)$$

Tok energie pole – Poyntingův vektor, energie protéká jednotkovou plochou za jednotku času

$$\mathbf{j}_W \equiv \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (\text{D.16})$$

Tok hybnosti pole – tok hybnosti přenášený elektromagnetickým polem

$$\boldsymbol{\gamma}_{EM} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \quad (\text{D.17})$$

Hustota Jouleova výkonu – hustota výkonu předávaná elektromagnetickým polem nabitým částicím

$$\mathcal{P} = \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{D.18})$$

Redukovaná hmotnost – pojem, který se zavádí v problému dvou těles. Umožňuje v těžišťové soustavě nahradit obě tělesa tělesem jediným s touto hmotností

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{D.19})$$

Pohyblivost – koeficient úměrnosti mezi elektrickým polem a rychlostí částic v daném prostředí

$$\mathbf{u} = \mu \mathbf{E}; \quad \mu = \frac{Q}{m\nu}. \quad (\text{D.20})$$

Vodivost – koeficient úměrnosti mezi proudovou hustotou a elektrickým polem v Ohmově zákoně

$$\mathbf{j}_Q = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \phi; \quad \sigma = \frac{Q^2 n}{m\nu}. \quad (\text{D.21})$$

Koeficient difúze – koeficient úměrnosti mezi tokem částic a gradientem jejich koncentrace ve Fickově zákoně

$$\mathbf{j}_N = -D \nabla n; \quad D = \frac{k_B T}{m\nu}. \quad (\text{D.22})$$

Koeficient ambipolární difúze – koeficient vázané difúze elektronů a iontů

$$D_a = \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e}. \quad (\text{D.23})$$

Koeficient difúze v homogenním magnetickém poli

$$D_{\perp} \equiv \frac{k_B T_{\perp}}{m\nu} \left[\frac{1}{1 + (\omega_c / \nu)^2} \right]; \quad D_{\parallel} \equiv \frac{k_B T_{\parallel}}{m\nu}. \quad (\text{D.24})$$

Koeficient gyromagnetické difúze v silném magnetickém poli

$$D = -\frac{k_B T_{\perp}}{QB_0}. \quad (\text{D.25})$$

Koeficient tepelné vodivosti – koeficient mezi tepelným tokem a gradientem teploty ve Fourierově zákoně

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T; \quad \kappa \equiv \frac{5nk_B^2 T}{2m\nu}. \quad (\text{D.26})$$

D2 Bezrozměrné charakteristiky plazmatu

Hartmannovo číslo – odmocnina z podílu hustoty magnetické a viskózní síly (a je příčný rozměr toku plazmatu, σ je vodivost plazmatu). U Hartmannova řešení má toto číslo význam podílu tloušťky příhraniční vrstvy proudícího plazmatu a šířky kanálu

$$\#_{\text{Ha}} \equiv B_0 a \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}. \quad (\text{D.27})$$

Reynoldsovo magnetické číslo – poměr členu zamrznání a difúze v rovnici pro časový vývoj magnetického pole (σ – vodivost plazmatu, L – rozměry plazmatu, u – rychlost proudění)

$$\#_{\text{Re,M}} = \sigma \mu L u. \quad (\text{D.28})$$

Reynoldsovo číslo – podíl setrvačných a viskózních sil

$$\#_{\text{Re}} = uL/\eta. \quad (\text{D.29})$$

Lundquistovo číslo – podíl rezistivního času (charakteristického času magnetické difúze) a Alfvénova času (doby, za kterou plazma proletí danou oblast Alfvénovou rychlostí). Lundquistovo číslo je rovno Reynoldsovu magnetickému číslu pro rychlost rovnou Alfvénově:

$$\#_{\text{Lu}} = S = \frac{\tau_R}{\tau_A} = \sigma \mu L v_A. \quad (\text{D.30})$$

Machovo číslo – podíl rychlosti plazmatu a rychlosti zvuku

$$\#_{\text{M}} = \frac{u}{c_S}. \quad (\text{D.31})$$

Machovo Alfvénovo číslo – podíl rychlosti plazmatu a Alfvénovy rychlosti

$$\#_{\text{MA}} = \frac{u}{v_A}. \quad (\text{D.32})$$

Index rekonekce – podíl rychlosti plazmatu proudícího směrem k neutrální vrstvě a Alfvénovy výstupní rychlosti.

$$\#_{\text{rec}} = \frac{u_{\text{in}}}{u_{\text{out}}} = \frac{u_{\perp}}{v_A}. \quad (\text{D.33})$$

Liší se pro samovolnou (index sp), řízenou (index dr) a Petschekovu (index P) rekonekci. Zpravidla se vyjadřuje pomocí Lundquistova čísla S :

$$\#_{\text{sp}} \approx \frac{1}{S}; \quad \#_{\text{dr}} \approx \frac{1}{\sqrt{S}}; \quad \#_{\text{p}} \approx \frac{1}{\ln S}. \quad (\text{D.33'})$$

Beta parametr – podíl tlaku a magnetického tlaku (pro systém s dominantním magnetickým polem je $\beta < 1$, například pro tokamaky je typicky $\beta \approx 0,05$)

$$\beta \equiv \frac{p}{p_{\text{M}}} = \frac{p}{B^2/2\mu_0}. \quad (\text{D.34})$$

Alfvénovo číslo – podíl magnetické a kinetické energie

$$\#_{\text{Al}} = \frac{B^2/2\mu_0}{\rho u^2/2} = \frac{B^2}{\mu_0 \rho u^2} = \frac{\#_{\text{St}}}{\#_{\text{Re,M}}}. \quad (\text{D.35})$$

Stuartovo číslo (parametr interakce) – podíl elektromagnetických a setrvačných sil

$$\#_{\text{St}} = \frac{\#_{\text{Ha}}}{\#_{\text{Re}}} = \frac{\sigma B^2 L}{\rho u}. \quad (\text{D.36})$$

Batchelorovo číslo – podíl klasické a magnetické viskozity

$$\#_{\text{Bt}} = \frac{\eta}{\eta_{\text{M}}} = \sigma \mu_0 \eta. \quad (\text{D.37})$$

Parametr dvojrstvy – poměr energie úbytku potenciálu na dvojrstvě a tepelné energie elektronů

$$\#_{\text{DL}} \equiv \frac{e \Delta \phi}{k_{\text{B}} T_{\text{e}}}. \quad (\text{D.38})$$

Relativistický parametr dvojrstvy – poměr energie úbytku potenciálu na dvojrstvě a klidové energie částice

$$\#_{\text{DL, rel}} \equiv \frac{e \Delta \phi}{m_0 c^2}. \quad (\text{D.39})$$

Rotační číslo (*bezpečnostní parametr, winding parameter, safety parameter*) – průměrný počet otáček toroidálního pole v tokamaku na jednu otáčku poloidální (φ je toroidální úhel, θ poloidální)

$$q(\rho) \equiv \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\rho}{r} \frac{r d\varphi}{\rho d\theta} = \frac{\rho}{r} \frac{B_{\varphi}}{B_{\theta}} \approx \frac{\rho}{R} \frac{B_{\text{T}}}{B_{\text{p}}}. \quad (\text{D.40})$$

D3 Potenciály elektromagnetického pole

Homogenní elektrické pole

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \phi = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}. \quad (\text{D.41})$$

Homogenní magnetické pole

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B}_0. \quad (\text{D.42})$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{cases} (-B y, 0, 0) & \text{nebo} \\ (0, B x, 0) & \text{nebo} \\ 1/2 (-B y, B x, 0). \end{cases} \quad (\text{D.43})$$

Bodový náboj

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (\text{D.44})$$

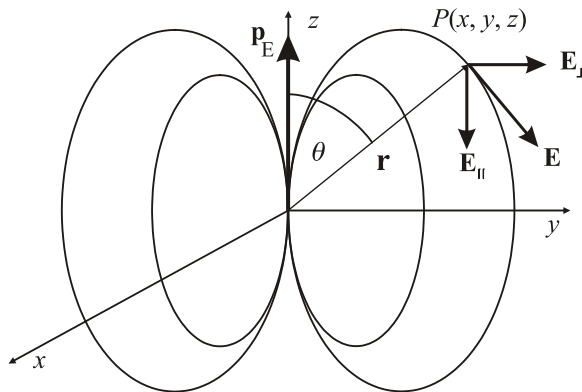
Elektrický dipól

$$\phi = \frac{\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p}_E \cdot \nabla) \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad (\text{D.45})$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{3(\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}_E}{4\pi\epsilon_0 r^5},$$

$$\mathbf{E} = \frac{p_E}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \quad (\text{D.46})$$

$$\mathbf{E} = (E_{\perp}, E_{\parallel}) = \frac{p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos\theta \sin\theta, 3 \cos^2\theta - 1). \quad (\text{D.47})$$



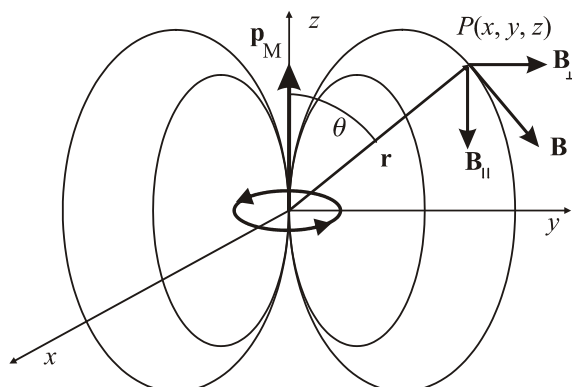
Obr. 152: Elektrický dipól.

Magnetický dipól

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_M \times \mathbf{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_M}{r^5}, \quad (\text{D.48})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} p_M \left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \quad (\text{D.49})$$

$$\mathbf{B} = (B_{\perp}, B_{\parallel}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} p_M (3 \cos \theta \sin \theta, 3 \cos^2 \theta - 1). \quad (\text{D.50})$$

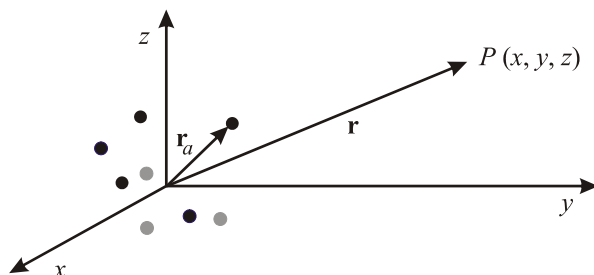


Obr. 153: Magnetický dipól.

Dodatek E – Multipólový rozvoj

E1 Rozvoj potenciálu elektrostatického pole

Předpokládejme lokalizovanou soustavu nábojů v okolí počátku souřadnicové soustavy, každý z nábojů má polohový vektor \mathbf{r}_a a náboj Q_a .



Obr. 154: Lokalizovaná soustava nábojů, rozvoj skalárního potenciálu.

Celkový potenciál elektrického pole je

$$\phi = \sum_a \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (\text{E.1})$$

Potenciál pozorujeme ve vzdáleném místě \mathbf{r} , platí $r \gg r_a$, takže můžeme provést Taylorův rozvoj pro argument \mathbf{r} a přírůstek \mathbf{r}_a :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} - x_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} x_k^{(a)} x_l^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left(\frac{1}{r} \right) \pm \dots \quad (\text{E.2})$$

Nyní provedeme derivace (při derivování využijeme $\partial r / \partial x_k = x_k / r$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} + x_k^{(a)} \frac{x_k}{r^3} + \frac{1}{2!} x_k^{(a)} x_l^{(a)} \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} \pm \dots \quad (\text{E.3})$$

Odvozený rozvoj dosadíme do vztahu (E.1) pro potenciál a ze sumace vytkneme veličiny, přes které se nesčítá:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_a Q_a + \frac{x_k}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_a Q_a x_k^{(a)} + \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a x_k^{(a)} x_l^{(a)} \pm \dots \quad (\text{E.4})$$

Ve třetím členu rozvoje lze výraz v sumaci upravit do obdobného tvaru, jaký má výraz před sumací:

$$\begin{aligned} \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a x_k^{(a)} x_l^{(a)} &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} \right) = \\ &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} - r_a^2 \delta_{kl} \right). \end{aligned}$$

Odečtením členu $r_a^2 \delta_{kl}$ získá tenzor v závorce nulovou stopu, fakticky se ale nic nestane, protože platí

$$\left(3x_k x_l - r^2 \delta_{kl} \right) r_a^2 \delta_{kl} = \left(3r^2 - 3r^2 \right) r_a^2 = 0.$$

Celkově tedy první tři členy rozvoje mají tvar:

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots, \quad (\text{E.5})$$

kde

$$\begin{aligned} \phi^{(0)} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; & Q &\equiv \sum_a Q_a, \\ \phi^{(1)} &= \frac{\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}; & \mathbf{p}_E &\equiv \sum_a Q_a \mathbf{r}_a, \\ \phi^{(2)} &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{8\pi\epsilon_0 r^5} Q_{kl}; & Q_{kl} &\equiv \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} - r_a^2 \delta_{kl} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Jednotlivé příspěvky se nazývají monopólový, dipólový a kvadrupólový. Elektricky neutrální soustava má celkový náboj Q nulový a tím je nulový i celý monopólový člen.

Elektrický dipólový moment \mathbf{p}_E je nábojovým těžištěm soustavy. Pro dva stejné náboje opačné polarity dostaneme vztah

$$\mathbf{p}_E = Q_+ \mathbf{r}_+ + Q_- \mathbf{r}_- = Q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = Q\mathbf{d}, \quad (\text{E.7})$$

kde \mathbf{d} je vektor spojnice záporného a kladného náboje. Jde o středoškolskou definici dipólového momentu. Polarizace soustavy ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$) je definována jako hustota elektrického dipólového momentu:

$$\mathbf{P} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a. \quad (\text{E.8})$$

Elektrické pole dipólu je

$$\mathbf{E}^{(1)} = -\nabla \phi^{(1)} = \frac{3(\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_E}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \quad (\text{E.9})$$

Potenciál dipólu klesá s druhou mocninou vzdálenosti, pole se třetí. Poznamenejme ještě, že na dipól ve vnějším elektrickém poli působí moment síly

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{p}_E \times \mathbf{E} \quad (\text{E.10})$$

a interakční energie dipólu s polem je

$$W_{\text{int}} = -\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{E.11})$$

Tenzor kvadrupólového momentu Q_{kl} vyjadřuje vyšší než dipólové chování soustavy částic. Má nulovou stopu a je symetrický, tj. má 5 nezávislých složek. Kvadrupólový příspěvek lze zapsat v invariantním tvaru

$$\phi^{(2)} = \frac{3\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} - r^2 \vec{\mathbf{1}}}{8\pi\epsilon_0 r^5} : \vec{\mathbf{Q}}; \quad \vec{\mathbf{Q}} \equiv \sum_a Q_a \left(3\mathbf{r}_a \otimes \mathbf{r}_a - r_a^2 \vec{\mathbf{1}} \right), \quad (\text{E.12})$$

kde

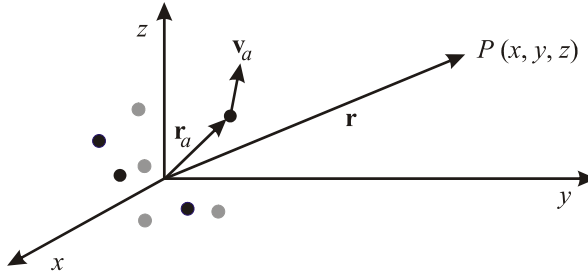
$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \equiv A_{kl} B_{kl}. \quad (\text{E.13})$$

Potenciál kvadrupólu klesá se třetí mocninou vzdálenosti, pole se čtvrtou. Celkové elektrostatické pole lokalizované soustavy je dáno vztahem

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \dots; \quad \mathbf{E}^{(k)} = -\nabla \phi^{(k)}. \quad (\text{E.14})$$

E2 Rozvoj potenciálu magnetostatického pole

Uvažujme obdobnou situaci jako v případě elektrostatického pole, tj. lokalizovanou soustavu nábojů v okolí počátku souřadnicové soustavy, každý z nábojů má polohový vektor \mathbf{r}_a , rychlost \mathbf{v}_a a náboj Q_a .



Obr. 155: Lokalizovaná soustava nábojů, rozvoj vektorového potenciálu.

Z podobnosti Poissonovy rovnice pro elektrický a magnetický potenciál

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{E.15})$$

plyne pro vektorový potenciál soustavy nábojů obdobné vyjádření jako (E.1)

$$\mathbf{A} = \sum_a \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_a \mathbf{v}_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (\text{E.16})$$

Do výrazu dosadíme první dva členy rozvoje (E.3):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{A}^{(1)} + \dots = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_a Q_a \mathbf{v}_a + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} x_k \sum_a Q_a \mathbf{v}_a x_k^{(a)} + \dots$$

Nultý člen je součtem příspěvků všech elektrických proudů a musí být ve stacionárním případě pro izolovanou soustavu nábojů nulový. V dalším členu lze vzniklou kombinaci rozložit na symetrickou a antisymetrickou část

$$\begin{aligned} \sum_a Q_a \mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) &= \sum_a Q_a \left(\frac{1}{2} [\mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) + \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_a)] + \frac{1}{2} [\mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) - \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_a)] \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) + \frac{1}{2} \sum_a Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \times \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Vzhledem k předpokladu stacionarity je symetrická část nulová a pro potenciál máme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(0)} &= 0; \\ \mathbf{A}^{(1)} &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{p}_M \times \mathbf{r}; \quad \mathbf{p}_M \equiv \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a). \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Veličina \mathbf{p}_M se nazývá magnetický dipólový moment. Z jeho definice je patrné, že pro soustavu stejných částic je úměrný orbitálnímu momentu hybnosti:

$$\mathbf{p}_M \equiv \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) = \frac{Q}{2m} \sum_a \mathbf{r}_a \times m \mathbf{v}_a = \frac{Q}{2m} \mathbf{L}. \quad (\text{E.18})$$

Pro spinový moment elektronu je výsledek dvojnásobný. Důležitý je vztah magnetického momentu a celkového momentu hybnosti částic \mathbf{J} :

$$\mathbf{p}_M \equiv g \frac{|Q|}{m} \mathbf{J}; \quad (\text{E.19})$$

kde g je tzv. *Landého faktor*, který zahrnuje i znaménko náboje částice. Magnetický moment elektronu je orientován opačně než jeho moment hybnosti, protonu souhlasně. To souvisí s náboji těchto částic. Neutron je navenek neutrální částice složená ze tří kvarků. Ty jsou nabitě, celkový magnetický moment neutronu je proto nenulový. Pro nejjednodušší částice je Landého faktor

$$\begin{aligned} g = -2 & \quad \text{elektron,} \\ g = 5,68 & \quad \text{proton,} \\ g = -3,86 & \quad \text{neutron.} \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Pro jeden jediný náboj pohybující se po kružnici dostaneme z formule (E.17) pro velikost magnetického momentu známý středoškolský vzoreček:

$$p_M = \frac{1}{2} Q r v = \frac{1}{2} Q r \frac{2\pi r}{T} = \frac{Q}{T} \pi r^2 = IS,$$

kde T je perioda, I je proud tekoucí na obvodu kružnice a S plocha kružnice. Magnetizace soustavy ($\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$) je definována jako hustota magnetického dipólového momentu:

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a). \quad (\text{E.21})$$

Magnetické dipólové pole má tvar podobný jako elektrické dipólové pole:

$$\mathbf{B}^{(1)} = \text{rot } \mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_M}{r^5}. \quad (\text{E.22})$$

Pole magnetického dipólu klesá se třetí mocnincou vzdálenosti, samotný potenciál s druhou mocninou vzdálenosti. Poznamenejme ještě, že na magnetický dipól působí ve vnějším magnetickém poli moment síly

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{p}_M \times \mathbf{B} \quad (\text{E.23})$$

a interakční energie magnetického dipólu s magnetickým polem je

$$W_{\text{int}} = -\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{B}. \quad (\text{E.24})$$



Seznam symbolů



# _{Al}	Alfvénovo číslo	f	funkce, hustota pravděpodobnosti, počet stupňů volnosti
# _{Bt}	Batchelorovo číslo	f_i	porucha hustoty pravděpodobnosti
# _{dr}	index řízené rekonekce	f_{LE}	lokálně rovnovážná hustota pravděpodobnosti
# _{DL}	parametr dvojvrstvy	f_α	hustota pravděpodobnosti výskytu částic druhu α
# _{DL,rel}	parametr relativistické dvojvrstvy	f	hustota síly
# _{GS}	index rekonekce v modelu GS95	F	velikost síly
# _{Ha}	Hartmannovo číslo	F_{ext}	externí silové pole
# _{Lu}	Lundquistovo číslo	g	stupeň degenerace, přenos (velikost relativní rychlosti dvou částic), zesilující faktor diferenčního schématu, tíhové zrychlení
# _M	Machovo číslo	g	vektor tíhového zrychlení
# _{MA}	Machovo-Alfvénovo číslo	g	relativní rychlost $\mathbf{g} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$
# _p	index rekonekce v Petschekově modelu	G	gravitační konstanta
# _{Re}	Reynoldsovo číslo	G, \mathbf{G}	Greenova funkce
# _{Re,M}	Reynoldsovo magnetické číslo	$G_{\alpha\beta}$	druhý Rosenbluthův potenciál
# _{rec}	index rekonekce	h	vzdálenost, výška
# _{sp}	index samovolné rekonekce	\hbar	Planckova konstanta
# _{St}	Stuartovo číslo	H	Hamiltonova funkce
A	vektorový potenciál	$H_{\alpha\beta}$	první Rosenbluthův potenciál
A	aditivní veličina	\mathcal{H}	hustota helicity
\mathcal{A}	hustota aditivní veličiny A	H	intenzita magnetického pole
A	čtyřpotenciál pole	i	elektrický proud na jednotku délky
B	vektor magnetické indukce	i	imaginární jednotka
B_p	poloidální magnetické pole	I	elektrický proud, ionizační potenciál, hodnota integrálu
B_T	toroidální magnetické pole	I_m	modifikovaná Besselova funkce
b	impaktní (záměrný) parametr	j	tok, proudová hustota
b	podíl magnetické indukce a hustoty plazmatu (\mathbf{B}/ρ)	j_C	vodivostní proud
c	rychlost šíření světla	j_M	magnetizační proud
c_s	rychlost zvuku	j_N	tok částic
D	koeficient difúze, distribuční funkce, tloušťka hraniční vrstvy, Stixův koeficient D	j_m	tok hmoty
D_a	koeficient ambipolární difúze	j_Q	tok náboje
D_k	distribuční posloupnost	J	čtyřvektor toku
D_{kl}	dynamický tlak (tenzor)	J_0, J_1	Besselovy funkce
D	indukce elektrického pole		
e_k	jednotkový vektor ve směru k - té osy		
e_B	jednotkový vektor ve směru B		
e	elementární náboj, hustota vnitřní energie		
\mathcal{E}	energie		
E	intenzita elektrického pole		

J_2	druhý adiabatický invariant	\mathcal{P}	hustota pravděpodobnosti
k_B	Boltzmannova konstanta		přechodu,
\mathbf{k}	vlnový vektor		hustota výkonu
$\mathbf{k}_{\alpha\beta}$	jednotkový vektor ve směru relativní rychlosti dvou částic	q	zobecněná souřadnice, bezpečnostní faktor
K	konstanta, helicita	\mathbf{q}	tepelný tok
K_m	modifikovaná Besselova funkce	Q	náboj
l	délka	r	radiální vzdálenost
L	Lagrangeova funkce, vzdálenost, Stixův koeficient L	\mathbf{r}	polohový vektor
L_{kl}	kinetické koeficienty	\mathbf{R}	polohový vektor gyračního středu
L_{elmg}	Lagrangeova funkce pole	R	velká poloosa v tokamaku, poloměr plazmového vlákna, poloměr hvězdy, Stixův koeficient R
L_{int}	Lagrangeova funkce interakce	R_k	poloměr křivosti oskulační kružnice
L_{part}	Lagrangeova funkce částice	R_D	driftový poloměr
m	hmotnost, mód nestability	R_L	Larmorův poloměr
m_0	klidová hmotnost	s	parametrizace křivky vlastní délkou, hustota entropie
\mathbf{M}	vektor magnetizace	S	plocha, srážkový člen, entropie, Stixův koeficient S
\mathcal{M}_{kl}	hustota momentu hybnosti		čas
n	koncentrace	t	kinetická energie,
\mathbf{n}	vektor normály	T	perioda, teplota
N	počet částic, index lomu	T_{kl}	tenzor toku hybnosti, Maxwellův tenzor pnutí
N_D	počet částic v Debyeově sféře		preškálovaná rychlost, $u = \gamma v$,
N_R	index lomu levotočivé vlny	u	velikost rychlostního pole
N_O	index lomu řádné vlny	\mathbf{u}	rychlostní pole v kontinuu
N_R	index lomu pravotočivé vlny	U	napětí
N_X	index lomu mimořádné vlny	\mathbf{v}	vektor rychlosti
\mathcal{N}	koncentrace na jednotku délky	\mathbf{v}_A	vektor Alfvénovy rychlosti
\mathcal{N}_{klm}	tok momentu hybnosti	$\mathbf{v}_{\alpha\beta}$	relativní rychlost
p	tlak, velikost hybnosti	$\mathbf{v}_{(\alpha\beta)}$	těžišťová rychlost
p_M	magnetický tlak	v	velikost rychlosti
\mathbf{p}	hybnost	v_f	fázová rychlost
\mathbf{p}_E	elektrický dipólový moment	v_g	grupová rychlost
\mathbf{p}_M	magnetický dipólový moment	v_{\parallel}	složka rychlosti rovnoběžná s magnetickým polem
p_q	zobecněná hybnost	v_{\perp}	složka rychlosti kolmá na magnetické pole
P	perioda, výkon, polynomiální funkce	v_A	Alfvénova rychlost
P_{kl}	tenzor tlaku, pravděpodobnost přechodu, Legendreův přidružený polynom		

v_D	driftová rychlost	δ_{kl}	Kroneckerovo delta
v_T	střední tepelná rychlost	L	délka difúzního regionu
V	potenciální energie, objem	Δ	rozdíl hodnot, Laplaceův operátor
V_G	gravitační potenciální energie	ε	parametr rozvoje v poruchové teorii, energie určitého kvantového stavu, permitivita
V_E	elektrická potenciální energie	ε_0	permitivita vakua
V_{kl}	tenzor viskozity	ε_F	Fermiho energie
\mathbf{V}	vektorové pole	ε_{klm}	Levi-Civitův tenzor
\mathcal{V}	Verdetova konstanta	ζ	druhý viskózní koeficient
V.P.	hlavní hodnota integrálu	η	první viskózní koeficient, rezistivita
w	pravděpodobnost, velikost chaotické složky rychlosti	η_M	magnetická viskozita
\mathbf{w}	chaotická složka rychlosti	κ	koeficient tepelné vodivosti,
W_{\perp}	kinetická energie pohybu kolmého na magnetické pole	λ	vlnová délka, multiplikativní konstanta, Lagrangeův multiplikátor
W_I	ionizační energie	λ_D	Debyeova vzdálenost
W_M	magnetická energie	A	argument Coulombova logaritmu
\mathbf{x}	poloha	θ	úhel, poloidální úhel
x	souřadnice x	μ	první adiabatický invariant, magnetický moment, pohyblivost (mobilita), redukováná hmotnost, permeabilita, konstanta v KG rovnici
X	zobecněná síla, Stixův koeficient X	μ	první adiabatický invariant, vektor magnetického momentu
y	souřadnice y	μ_0	permeabilita vakua
Y_m	Besselovy funkce druhého druhu	ν_c	srážková frekvence
Y_{lm}	kulové funkce	ζ	komplexní souřadnice, substituovaná proměnná, náhodná veličina
z	souřadnice z , komplexní argument	ξ	vektor posunutí
Z	stupeň ionizace	Π	celkový tlak
α	úhel, konstanta	ρ	hustota, vzdálenost od centra komory v tokamaku
β	úhel, převrácená hodnota teploty ($1/k_B T$), beta parametr (p/p_M)	ρ	polohový vektor částice vzhledem k gyračnímu středu
β_0	jednotkový vektor ve směru magnetického pole	ρ_Q	hustota náboje
γ	relativistický koeficient, polytropní koeficient, náhodné číslo, úhel, koeficient nárůstu nestability	ρ_m	hustota hmoty
γ	hustota hybnosti elektromagnetického pole	ρ_W	hustota energie
δ	Diracova distribuce, tloušťka difúzního regionu, skinová hloubka		

σ	účinný průřez, diferenciální vodivost, povrchové napětí
τ	čas popisující rychlé změny při gyraci, doba útlumu
τ_A	Alfvénův čas
τ_c	střední doba mezi srážkami
τ_R	rezistivní čas
τ_{REC}	doba rekonekce
φ	fáze, polární/toroidální úhel
ϕ	potenciál, sumační invariant, chybová funkce
ϕ_E	potenciál elektrického pole
ϕ_G	potenciál gravitačního pole
χ	úhel rozptylu
ψ	sumační invariant, Chandrasekharova funkce, vlnová funkce, magnetický povrch
ψ_k	parciální vlna
ω	úhlová frekvence
ω_c	cyklotronní frekvence
ω_d	dolní hybridní frekvence
ω_h	horní hybridní frekvence
ω_L	levá mezní frekvence
ω_p	plazmová frekvence
ω_R	pravá mezní frekvence
ω	vířivost
Ω	prostorový úhel, dopplerovsky posunutá frekvence

Indexy

a	pořadové číslo částice
A, Al	Alfén
c	cyklotronní
dr	řízená rekonekce
DL	dvojrůstva
e	elektrony
Ha	Hartman
i	ionty
i, j, k	kartézské osy 1, 2, 3
L	levotočivý
Lu	Lundquist
M	Mach
MA	Mach-Alfvén
O	řádný
p	plazmový
P	Petschek, poloidální
R	pravotočivý
Re	Reynolds
rec	přepojení, rekonekce
s	zvuk
sp	samovolná, spontánní rekonekce
T	toroidální
X	mimořádný
α	částice druhu α
\parallel	rovnoběžný s magnetickým polem
\perp	kolmý k magnetickému poli

Rejstřík osobností



Allen, James Alfred Van (1914–2006), americký vědec zabývající se kosmonautikou, který prosadil umístění Geigerových čítačů na prvních amerických družicích Explorer I a Explorer III. Tyto družice objevily torusy energeticky nabitých částic okolo Země, které dnes nazýváme Van Allenovy radiační pásy. Většinu svého aktivního života se potom Allen zabýval magnetosférickými jevy. Van Allen byl vůdčí osobností amerického dobývání vesmíru během studené války, podílel se na přípravě sond Pioneer, Mariner a geofyzikální observatoře OGO.



Alfvén, Hannes Olof Gösta (1908–1995), švédský fyzik a astrofyzik, jeden ze zakladatelů moderní fyziky plazmatu. Za své práce ve fyzice plazmatu získal Nobelovu cenu za fyziku v roce 1970. Rozpracoval první varianty magnetohydrodynamiky, zavedl koncept magnetického pole zamrzlého v látce. V roce 1939 publikoval teorii magnetických bouří a polárních září, položil základy teorie magnetosféry Země. V roce 1950 vysvětlil vznik vírových struktur v polárních zářích pomocí diocotronové nestability. Ve fyzice plazmatu je po něm pojmenována Alfvénova rychlost a Alfvénovo číslo. Některé Alfvénovy domněnky

se nepotvrdily. Byl odpůrcem teorie Velkého třesku a věřil, že ve vesmíru je stejně hmoty i antihmoty.



Ampère, André Maria (1775–1836), francouzský matematik a fyzik, který ukázal, že kolem vodiče protékaného proudem se nachází magnetické pole. Zjistil, že cívka protékaná proudem se chová jako tyčový magnet. Také ukázal, že dva vodiče protékané proudem shodným směrem se přitahují, obráceně se pak odpuzují. Na jeho počest je pojmenována jednotka elektrického proudu (definovaná na základě silového působení dvou vodičů). Ampérovo jméno nese i Ampérův zákon, který popisuje pole vzniklé kolem vodiče protékaného proudem a Ampérovo pravidlo pravé ruky, které určuje jeho směr.

Appleton, Edward Victor, sir (1892–1965), anglický fyzik a astronom. Zabýval se atmosférou, dokázal existenci ionosféry. Obdržel Nobelovu cenu za fyziku v roce 1947. Nazývá se po něm Appletonova vrstva ionosféry odrážející radiové vlny, Appletonova-Hartreeho formule pro šíření elektromagnetických vln v plazmatu s homogenním magnetickým polem a také jedna z nejvýznamnějších anglických národních laboratoří – Rutherfordova-Appletonova laboratoř (RAL).



Beltrami, Eugenio (1835–1899), italský matematik a fyzik. Zabýval se neeukleidovskou geometrií, elektřinou a magnetizmem. V matematice je po něm pojmenován Beltramův teorém týkající se zobrazení zakřiveného povrchu v mapách, Beltramovo pole (jehož rotace je úměrná samotnému poli) a Laplaceův-Beltramův operátor. Ve fyzice plazmatu hrají Beltramova pole klíčovou roli pro popis helikálních struktur.

Bennett, Willard Harrison (1903–1987), americký vědec a vynálezce, narodil se ve Findlay ve Spojených státech. Studoval ionizaci plynů elektrickým polem, vynalezl radiofrekvenční hmotovou spektrografii. V roce 1934 našel řešení rovnováhy plazmového vlákna (pinče) pro konstantní proudovou hustotu, které je podle něho dnes pojmenované (tzv. Bennettovo řešení).



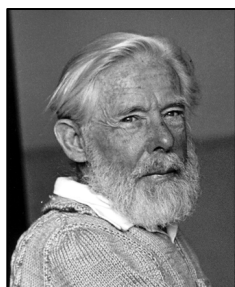
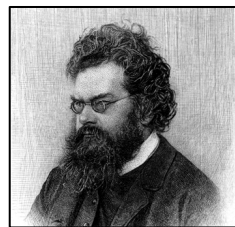
Bennett

Bhatnagar, Prabhu Lal (1912–1976), indický matematik a fyzik. Zabýval se astrofyzikou, bílými trpaslíky a vznikem sluneční soustavy. V plazmatu se věnoval statistickým výpočtům a spolu s Eugenem Grosseem a Maxem Krookem vytvořili v roce 1954 tzv. BGK aproximaci Boltzmannovy rovnice. V pozdějších letech se věnoval problematice nelineární hydrodynamiky. Zemřel na infarkt.



Birkeland, Kristian (1867–1917), norský fyzik a vynálezce. Vyráběl umělá hnojiva, vyvíjel elektromagnetické dělo, věnoval se výzkumu polárních září a pohyby nabitých částic v magnetickém poli. Usoudil, že při některých jevech na Slunci se uvolňují do prostoru svazky nabitých částic, které někdy zasáhnou Zemi a vyvolají polární záře. V laboratoři vyrobil *terellu*, malou napodobeninu Země, na které zkoumal podmínky vzniku polárních září. Jsou po něm pojmenovány Birkelandovy proudy tekoucí podél silokřivek magnetického pole.

Boltzmann, Ludwig (1844–1906), rakouský fyzik a zakladatel statistické fyziky. Formuloval vztah mezi entropií a pravděpodobností (entropie je úměrná logaritmu počtu realizovatelných stavů, 1872) a zformuloval tzv. H teorém o narůstání entropie v nevratných procesech. Ekvipartiční teorém pokládal za základní rys kinetické teorie. Je po něm pojmenována Boltzmannova rovnice pro hustotu pravděpodobnosti. Na konci života spáchal sebevraždu.



Buneman, Oscar (1914–1993), významný plazmový fyzik, zabýval se teorií elektromagnetických dějů i numerickými simulacemi. Narodil se v Itálii, vyrůstal v Německu a v roce 1935 emigroval do Anglie. Střídavě působil v Anglii a Kanadě, od roku 1960 na Stanfordské univerzitě v USA. Zabýval se rozptylem na fluktuacích plazmatu, teorií hvizdů, numerickým řešením rovnic fyziky plazmatu. Je spoluautorem kódu TRIS-TAN, je po něm pojmenována Bunemanova nestabilita, Bunemanovo diferenční schéma, Bunemanův potenciál a Bunemanovo-Hartreeho kritérium pro napěťový práh v magnetronu. Je

považován za otce numerických simulací v plazmatu.

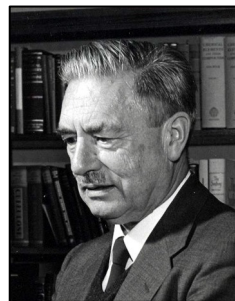
Carlqvist, Per (1937), švédský fyzik, zabýval se vývojem hvězd, slunečním větrem, teorií dvojvrstev. Spolu s Alfvénem navrhl teorii slunečních erupcí, ve které hrají podstatnou úlohu dvojvrstvy. Zobecnil Bennettovo řešení rovnováhy pinče.

Coulomb, Charles (1736–1806), francouzský fyzik, který prováděl pokusy s torzními vahami. Jeho výzkumy ho vedly k závěru, že elektrické a magnetické síly ubývají s kvadrátem vzdálenosti. Pro elektrické jevy se tento vztah nazývá Coulombův zákon

a popisuje ve fyzice plazmatu sílu působící při srážce nabitých částic. Před Coulombem ho objevil Robinson. Dále je po Coulombovi pojmenována jednotka elektrického náboje.

Cowling, Thomas George (1906–1990), anglický astronom, který v roce 1934 dokázal, že magnetické pole Slunce a planet nemůže vznikat jednoduchým prstencovým proudem. Sluneční skvrny pochopil správně jako projevy tekutinového dynamu v nitru Slunce. Klasifikoval neradiální oscilace hvězd, a tím položil základy helioseismologie.

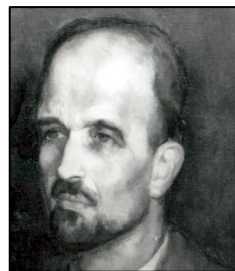
Debye, Peter Joseph William (1884–1966), holandský fyzik a chemik. Jako první popsal chování asymetrických molekul pomocí dipólového momentu a přímo je zkoumal rentgenovou difraktometrií. Dodnes se dipólový moment molekul měří v jednotkách debye. Jeho práce měla široký záběr, rozšířil Einsteinovu teorii měrného tepla o nízkofrekvenční fonony, zabýval se teorií elektrické vodivosti elektrolytů, teorií atomárních obalů, vysvětlil Comptonův jev. V roce 1936 obdržel Nobelovu cenu za chemii za příspěvek ke studiu molekulárních struktur. Ve fyzice je podle něho pojmenována Debyeova stínicí vzdálenost.



Drude, Paul Karl Ludwig (1863–1906), německý fyzik a optik. Prováděl experimenty s elektřinou a magnetismem a ověřoval Maxwellovu teorii elektromagnetického pole. Zavedl symbol c pro rychlost světla ve vakuu. V roce 1900 vyvinul model pro výpočet elektrických, tepelných a optických vlastností látek. Ve fyzice plazmatu se využívá Drudeho elementární teorie vodivosti.

Fick, Adolf Eugen (1821–1901), německý fyziolog, který jako první vytvořil kontaktní čočky, tehdy ovšem skleněné. Jako první navrhl techniku měření průtoku krve srdcem. Formuloval zákon difúze látek, který je ve fyzice znám jako Fickův zákon.

Fokker, Adriaan Daniël (1887–1972), holandský fyzik a muzikant, byl bratrancem slavného konstruktéra letadel Anthony Fokkera. Spolu s Maxem Planckem odvodili v roce 1913 Fokkerovu-Planckovu rovnici, která je dnes standardem pro statistický popis plazmatu při Coulombových srážkách. Fokker publikoval také několik prací o speciální a obecné relativitě. Matematicky se zabýval hudebními stupnicemi, byl úspěšným konstruktérem hudebních nástrojů. Nejznámější jsou 31 tun těžké Fokkerovy varhany, které jsou umístěné v Teylerově muzeu v Haarlemu.

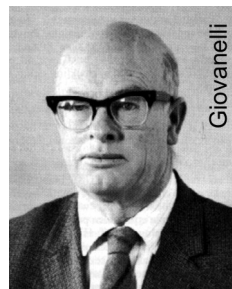


Fourier, Jean-Baptiste Joseph de (1768–1830), francouzský fyzik a matematik. Zkoumal termoelektřinu, v roce 1822 matematicky zpracoval teorii vedení tepla a přispěl k rozvoji parních strojů. V uvedené práci položil základ tzv. Fourierovy metody řešení parciálních diferenciálních rovnic. Zabýval se statistikou a teorií pravděpodobnosti. V matematice jsou po něm pojmenovány Fourierovy řady a Fourierova transformace, ve fyzice Fourierův zákon vedení tepla, který patří k základním transportním zákonům v teorii plazmatu. Zabýval se také ohřevem Země v důsledku existence atmosféry.

Gibbs, Josiah (1839–1903), americký fyzik, který se zabýval termodynamikou a statistikou. Zformuloval pojem termodynamické rovnováhy pomocí energie a entropie. Je po

něm pojmenováno Gibbsovo statistické rozdělení. Zformuloval také jednoduché pravidlo chemické rovnováhy několika koexistujících fází nazývané Gibbsovo pravidlo fází.

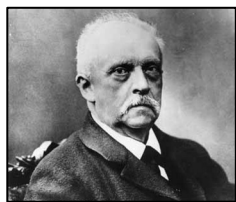
Giovanelli, Ronald Gordon (1915–1984), australský astronom a fyzik. Zabýval se povahou slunečních erupcí a mechanismem urychlení elektronů v proměnných magnetických polích. Jako první navrhl, že zdrojem ohřevu plazmatu a urychlení částic mohou být nulové body magnetického pole ve tvaru písmene X, čímž otevřel problematiku přepojení magnetických silokřivek. Je zakladatelem observatoře ve Fleurs v blízkosti Sydney.



Gross, Eugene (1926–1991), americký teoretický fyzik. Zabýval se interakcí bosonů v kvantové teorii pole, bosonovými kondenzáty, kmity a vlnami v plazmatu a kinetickou teorií plazmatu. Spolu s Bhatnagarem a Krookem odvodili BGK aproximaci Boltzmannovy rovnice. Vystudoval v Princetonu.

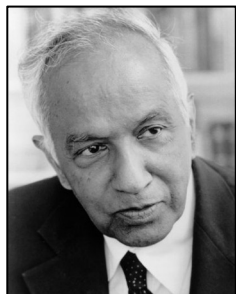
Hartmann, Julian, dánský inženýr, který v roce 1937 publikoval řešení pro tok vodivé kapaliny v homogenním magnetickém poli a navrhl elektromagnetickou pumpu kapalných kovů. Experimentálně ji na rtuti otestoval F. Lazarus. Ve fyzice plazmatu je po něm pojmenováno Hartmannovo číslo a Hartmannova vrstva.

Hartree, Douglas Rayner (1897–1958), anglický matematik a fyzik. Zabýval se především numerickou analýzou a její aplikací v kvantové teorii a atomové fyzice. Je po něm pojmenována Hartreeho-Fockova numerická metoda a Appletonova-Hartreeho formule pro šíření elektromagnetických vln v plazmatu s homogenním magnetickým polem.



Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von (1821–1894), německý lékař a fyzik, vědec s nesmírně širokým záběrem. Zabýval se teorií elektřiny a magnetizmu, termodynamikou, mechanikou, fyzikou lidského oka, teorií barevného vidění, akustikou, estetikou... Ve fyzice plazmatu používáme Helmholtzovu rovnici, kterou splňují tzv. Beltramova helikální pole. Po Helmholtzovi je také pojmenována Kelvinova-Helmholtzova nestabilita vznikající na rozhraní dvou prostředí s různou rychlostí. Elektroinženýrům je známý ještě Helmholtzův rezonátor, který jako první zkonstruoval.

Hugoniot, Henri Pierre (1851–1887), francouzský inženýr a vynálezce. Je spoluautorem teorie rázových vln v tekutinách. Odvodil spolu s Rankinem podmínky pro skoky veličin na rázové vlně, které se nazývají Rankinovy-Hugoniotovy podmínky. Pracoval také pro francouzské námořnictvo, kde získal hodnost kapitána.



Chandrasekhar, Subramanyan (1910–1995), indický astrofyzik, pracoval v Anglii, později v USA. Zabýval se zejména teorií stavby hvězd, matematickou teorií černých děr a obecnou relativitou. Ze stavové rovnice odvodil maximální možnou hmotnost bílého trpaslíka (Chandrasekharovu mez). Na jeho počest byla pojmenována rentgenová družice Chandra vypuštěná do vesmíru v roce 1999. Ve statistické fyzice a ve fyzice plazmatu se používá Chandrasekharova funkce. V roce 1983 získal Nobelovu cenu za fyziku za přínos k objasnění fyzikálních procesů při vzniku a vývoji hvězd.



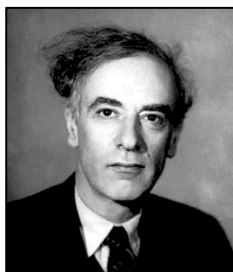
Joule, James Prescott (1818–1889), anglický fyzik a sládek, který studoval povahu tepla a jeho vztah k mechanické energii. S Kelvinem spolupracoval na zavedení absolutní teplotní stupnice. Zkoumal magnetostrikci, našel vztah pro teplo generované při průchodu elektrického proudu látkou. Toto tzv. Jouleovo teplo je hlavním disipačním procesem v plazmatu. Dále je po něm pojmenována jednotka energie. Joule si sám vyráběl velmi přesné měřicí přístroje. Zjistil, že teplo není tekutina, jak se v té době vědci domnívali, ale forma energie.

Kelvin, lord (1824–1907), vlastním jménem William Thomson, významný skotský fyzik. Zabýval se vedením tepla, kalorimetrií, sestrojil řadu přístrojů pro měření různých elektrických veličin, například Kelvinův (Thomsonův) můstek pro měření malých odporů. Podílel se na pokládání podmořských telegrafických kabelů. Je po něm pojmenována teplotní stupnice, Kelvinova-Helmholtzova nestabilita vznikající na rozhraní dvou prostředí s různou rychlostí a Jouleův-Thomsonův jev (ochlazení stlačeného plynu při prudké expanzi).



Krook, Max (1913–1985), americký matematik a astrofyzik. V matematice se zabýval teorií funkcí komplexní proměnné. Ve fyzice plazmatu spolu s Bhatnagarem a Grosseem odvodili BGK aproximaci Boltzmannovy rovnice, ze které se dají jednoduše odvodit různé transportní jevy.

Kruskal, Martin David (1925–2006), americký matematik a fyzik. Zabýval se obecnou relativitou, zavedl Kruskalovy souřadnice ve Schwarzschildově geometrii, je po něm pojmenována Kruskalova procedura v teorii Markovových procesů. Ve fyzice plazmatu zkoumal teoretické podmínky stability pinče. Popsal Rayleighovu-Taylorovu nestabilitu pro plazma s magnetickým polem.

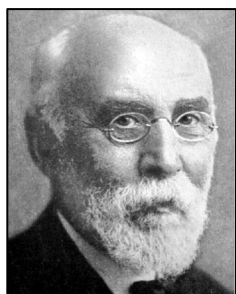
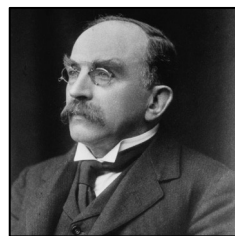


Landau, Lev Davidovič (1908–1968), sovětský teoretický fyzik, nositel Nobelovy ceny za fyziku pro rok 1962 za teorii supratekutosti. Landau významně přispěl do všech odvětví teoretické fyziky, zejména kvantové mechaniky, kvantové elektrodynamiky, supratekutosti, supravodivosti, fázových přechodů, diamagnetismu, fyziky plazmatu a teorie neutrin. V plazmatu je po něm pojmenovaná Landauova rovnice pro hustotu pravděpodobnosti při Coulombových srážkách a Landauův útlum popisující interakci částic a vln v rychlostní části fázového prostoru.



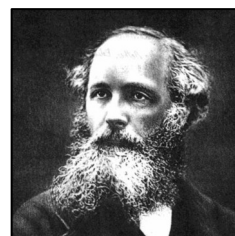
Langmuir, Irving (1881–1957), americký fyzik a chemik, získal Nobelovu cenu za chemii pro rok 1932 za chemii povrchů. Zabýval se metalurgií, inertními plyny a fyzikou plazmatu. Pro ionizované prostředí jako první použil název plazma, protože mu vlastnostmi připomínalo krevní plazmu. Je po něm pojmenována Langmuirova sonda pro měření potenciálu v plazmatu, Langmuirův soliton a nezávisle na Sahovi odvodil v roce 1923 Sahovu rovnici pro tepelnou ionizaci. Také byl prvním, kdo experimentálně detekoval dvojrstvu.

Larmor, Joseph (1857–1942), irský fyzik. Vysvětlil Fitz-Geraldovu kontrakci nezávisle na Lorentzovi. Vypočetl energii uvolňovanou při záření urychleného náboje, vysvětlil rozštěpení spektrálních čar v magnetickém poli. Jako jeden z prvních předpokládal, že geomagnetické bouře souvisí se slunečními erupcemi a jsou způsobeny elektrony přicházejícími ze Slunce. Na jeho počest je pojmenován Larmorův poloměr pohybu nabitě částice v magnetickém poli.

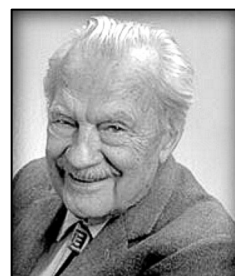


Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928), holandský fyzik, který jako první považoval za zdroje elektromagnetického pole oscilující nabitě částice. Předpověděl, že silné magnetické pole má vliv na vlnovou délku generovaného světla. Experimentálně tento fakt prokázal jeho žák Peter Zeeman. Oba získali Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1902. Objevil transformaci proměnných, vůči které se Maxwellovy rovnice nemění (Lorentzova transformace). Nezávisle prokázal nulový výsledek Michelsonova-Morleyho experimentu. Je po něm také pojmenována Loentzova síla působící na částici pohybující se v magnetickém poli.

Maxwell, James Clerk (1831–1879), skotský matematik a fyzik. S Clausiem vyvinuli kinetickou teorii plynů. V roce 1867 formuloval paradox Maxwellova démona. Ukázal, že druhý termodynamický zákon popisuje vlastnosti velkého počtu částic. V roce 1873 publikoval teorii elektřiny a magnetizmu. Dnešní podobu rovnice vytvořili Heaviside a Hertz. Maxwell odvodil, že světlo je příčné vlnění způsobené magnetickými a elektrickými jevy. Je po něm pojmenováno Maxwellovo rozdělení rychlostí, rovnice elektromagnetického pole a tenzor toku hybnosti elektromagnetického pole.



Metropolis, Nicholas Constantine (1915–1999), řecko-americký fyzik. Vystudoval fyziku na Univerzitě v Chicagu, většinu plodného života strávil v americké Národní laboratoři v Los Alamos, kde se podílel na stavbě prvních jaderných reaktorů. Úzce spolupracoval s Enricem Fermim, Edwardem Tellerem a Marshalllem Rosenbluthem. V roce 1953 se stal spoluautorem jedné z nejspěšnějších numerických metod všech dob – Monte Carlo algoritmu, který vzorkuje určité statistické rozdělení. Metropolisův algoritmus se hojně využívá ve fyzice plazmatu.

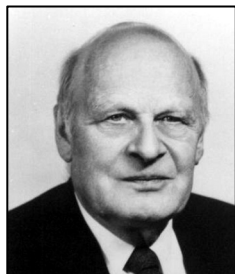
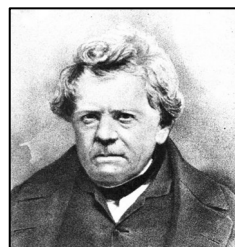


Moffatt, Henry Keith (1935), skotský astrofyzik, zabýval se dynamikou tekutin, magnetohydrodynamikou a teorií turbulence. Je spoluautorem teorie tekutinového dynama.



Neumann, John von (1903–1957), maďarský matematik, který se zabýval kvantovou fyzikou, teorií množin, ekonomii, informatikou, numerickými simulacemi, hydrodynamikou, statistikou a mnoha dalšími obory. Je považován za otce digitálních počítačů, je spoluvůrcem matematické teorie her, podílel se na vývoji vodíkové bomby v Los Alamos. Podle von Neumanna je pojmenována architektura počítače a postup hledání podmínek stability diferenčních schémat.

Ohm, Georg Simon (1789–1854), německý fyzik, který se zabýval elektřinou a vedením proudu. Z pokusů s elektrickými články vlastní konstrukce odvodil, že proud tekoucí vodičem je přímo úměrný napětí a průřezu vodiče a nepřímo jeho délce (Ohmův zákon). Zabýval se také akustikou a optikou, formuloval zákony fyziologické akustiky. Ohm vyučoval fyziku a matematiku, dokonce napsal učebnici geometrie. Je po něm pojmenován Ohmův zákon a jednotka elektrického odporu Ohm (Ω).

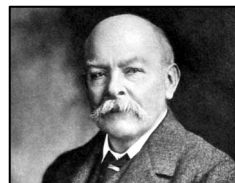


Onsager, Lars (1903–1976), norsk-americký chemik a teoretický fyzik. V roce 1968 získal Nobelovu cenu za chemii. Zabýval se teorií elektrolytů a Brownovým pohybem iontů. Uchvátila ho statistická fyzika a termodynamika. Zkoumal difúzi částic způsobenou gradientem teploty a koncentrace a produkci entropie při těchto procesech. Své poznatky zobecnil na tzv. Onsagerovy relace reciprocity, které popisují symetrie mezi toky a jejich příčinami. Působil na Brownově univerzitě, Hopkinsově univerzitě a Univerzitě v Yale.



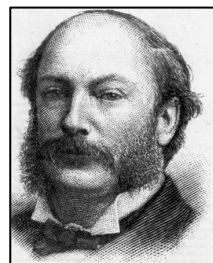
Parker, Eugene (1927), americký teoretik a astrofyzik zabývající se teorií slunečního větru a magnetickými poli ve vesmíru a meziplanetárním prostoru. Je po něm pojmenována Parkerova plocha nulového magnetického pole Slunce (tzv. neutrální vrstva), Parkerův model přepojení magnetických siločar, Parkerova teorie tekutinového dynama a Parkerova mez.

Poynting, John (1852–1914), anglický fyzik, zkoumal vyzářování energie v elektromagnetických vlnách. V roce 1884 publikoval, že tok energie záření je dán vektorem $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (Poyntingovým vektorem). V jeho směru se přenáší energie a míří grupová rychlost. V roce 1893 měřil nezávisle na ostatních gravitační konstantu. Je po něm také pojmenován Poyntingův-Robertsonův jev popisující drift prachových částic způsobený tlakem záření.

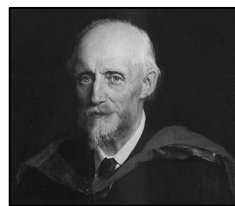


Rankine, William John Macquorn (1820–1872), skotský inženýr zabývající se dynamikou tekutin a termodynamikou. Vystudoval vodní a železniční stavitelství. Vytvořil kompletní teorii parního stroje. Zabýval se také botanikou a hudbou. Spolu s Hugoniotem odvodil Rankine-Hugoniotovy podmínky pro skoky veličin na rázové vlně. Zobecnění těchto podmínek se používá i ve fyzice plazmatu. Je po něm také pojmenována teplotní stupnice, kterou vytvořil a Rankinův tepelný cyklus.

Rayleigh, lord (1842–1919), anglický fyzik, původním jménem John William Strutt. V roce 1904 získal Nobelovu cenu za fyziku za spoluobjevení argonu. Vysvětlil a popsal rozptyl světla v atmosféře, který způsobuje modrou barvu oblohy, dnes se tento jev nazývá Rayleighův rozptyl. Je po něm také pojmenována povrchová Rayleighova seismická vlna. Jako první popsal nestabilitu vznikající na vodorovném rozhraní dvou různých tekutin v tíhovém poli. Dnes se tato nestabilita nazývá Rayleighova-Taylorova.



Reynolds, Osborne (1842–1912), anglický fyzik a průkopník teorie tekutin. Zabýval se ale i termodynamikou, vylepšil tehdejší konstrukci kotle a kondenzoru u parních strojů, jako inženýr se podílel na konstrukci parníků. V teorii tekutin je po něm pojmenováno Reynoldsovo číslo a ve fyzice plazmatu Reynoldsovo magnetické číslo, které je poměrem členů popisujících zamrznání a difúzi magnetického pole.

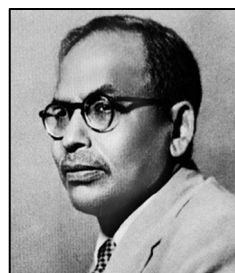


Richtmyer, Robert Davis (1911–2003), americký fyzik, vystudoval v Německu. Působil v Los Alamos, ve Stanfordu, na Cornellově univerzitě, na Coloradské univerzitě a dalších pracovištích. Za druhé světové války pracoval v Los Alamos, po válce se stal vedoucím teoretického oddělení. Zabýval se numerickými metodami ve fyzice plazmatu, diferenčními schémata a nestabilitami. Je po něm pojmenována Richtmyerova-Meškovova nestabilita a Richtmyerovo-Mortonovo schéma. Působil také jako nakladatel, hrál na housle ve filharmonii. Pro nadané studenty založil nadaci na jejich podporu.

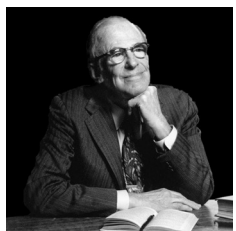
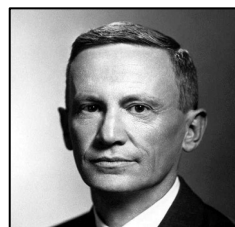


Rosenbluth, Marshall Nicholas (1927–2003), americký plazmový fyzik. Je jedním ze tří spoluautorů Metropolisova algoritmu (Monte Carlo simulace v přírodních vědách), jednoho z nejúspěšnějších algoritmů všech dob. Zabýval se rozptylem elektronů, vlnami a nestabilitami v plazmatu, turbulencemi v tokamacích. Ve statistickém popisu plazmatu zavedl Rosenbluthovy potenciály. Do roku 1999 se podílel na přípravě projektu první experimentální termojaderné elektrárny ITER.

Saha, Meghnad (1893–1956), indický astrofyzik, který v roce 1920 odvodil rovnici (Sahovu rovnici) pro tepelnou ionizaci plazmatu a otevřel cestu pro výzkum astrofyzikálního i laboratorního plazmatu. Velmi intenzivně se zajímal o kvantovou teorii záření a o speciální i obecnou relativitu. Připravoval anglické překlady Einsteinových prací. V roce 1919 zjistil, že tlak záření ve hvězdách je protíváhou gravitační kontrakce. Dnes je po něm pojmenován Sahův ústav jaderné fyziky v indické Kalkatě. Byl také architektem pro plánování říčních staveb v Indii.

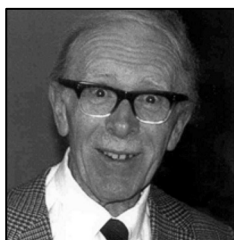
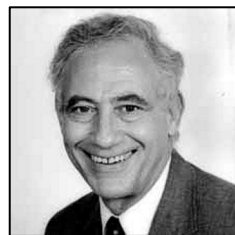


Schwarzschild, Martin (1912–1997), německo-americký astronom, syn známého fyzika Karla Schwarzschilda, který našel řešení rovnic obecné relativity pro sférické rozložení hmoty. Martin Schwarzschild se zabýval stavbou hvězd a vývojem hvězd. Spolu s Kruskalem řešil podmínky rovnováhy a stability plazmových vláken, tzv. pinčů, a popsal Rayleighovu-Taylorovu nestabilitu pro plazma s magnetickým polem.

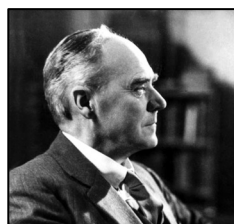


Spitzer, Lyman (1914–1997), americký astrofyzik a spoluzakladatel teoretické fyziky plazmatu. Intenzivně se zabýval mezihvězdným prostředím, plyny, prachem a magnetickými poli. Na jeho počest je pojmenován vztah pro vodivost plazmatu. Jako první navrhl v roce 1946, ještě dávno před založením NASA, umístit dalekohled na oběžné dráze. Jeho nesmírné úsilí vedlo NASA k umístění dalekohledů Copernicus a HST do vesmíru. Na jeho počest je pojmenován Spitzerův vesmírný dalekohled.

Stix, Thomas Howard (1924–2001), americký plazmový fyzik. Zabýval se ohřevem plazmatu elektromagnetickými vlnami na termojaderné teploty, studoval stochastické procesy při pohybu nabitých částic v plazmatu. Je držitelem mnoha cen, například Maxwellovy ceny (1980) – nejvyšší ceny udělované Americkou fyzikální společností za fyziku plazmatu. Na jeho počest jsou pojmenovány Stixovy koeficienty ve vztahu pro vysokofrekvenční permitivitu a Stixova cívka pro ohřev plazmatu.



Sweet, Peter Alan (1921–2005); anglický astronom, profesor astronomie na Univerzitě v Glasgow. Zabýval se magnetickými poli v mezihvězdném prostředí. Je autorem jednoho z modelů magnetické rekonekce (Sweetův-Parkerův model, 1958). V době vzniku částicových simulací připravoval Peter Sweet vhodné numerické algoritmy a demonstroval je pro pouhých 8 částic na kapesní kalkulačce. Dnešní výpočetní technika umožňuje sledování miliard nabitých částic.



Taylor, Geoffrey Ingram (1886–1975), anglický fyzik, matematik a zejména expert na dynamiku tekutin a teorii vln. Věnoval se meteorologii, vlnám v kvantové teorii (ukázal, že v dvouštěrbinovém experimentu dojde k interferenci, i když je v systému přítomen v daném čase jeden jediný foton), zabýval se turbulencemi oceánů, vznikem vírových struktur a nestabilit na rozhraní dvou prostředí. Je po něm pojmenována Rayleighova-Taylorova nestabilita, Taylorův vír, Taylorovo-Couettovo proudění, Taylorova disperze (v tekutině s nenulovou viskozitou) nebo Taylorova délka (charakteristický rozměr turbulencí).

Vlasov, Anatolij Alexandrovič (1908–1975), sovětský teoretický fyzik, který se po většinu života věnoval statistické fyzice. Ve fyzice plazmatu je podle něho pojmenovaná Vlasovova rovnice pro statistický popis bezesrážkového plazmatu. Kromě fyziky plazmatu se zabýval optikou, fyzikou krystalů a teorií gravitace. Vystudoval Moskevskou státní univerzitu, kde pracoval po boku Pjotra Kapici a Lva Davidoviče Landaua.



Rejstřík pojmů

- adiabatický invariant
 - druhý 38–40, 42, 342
 - první 29–30, 32, 37, 38, 39, 42, 342
 - třetí 40, 42
 - obecně 28–30
- Alfvénova rychlost 145, 158, 159, 161, 162, 223–226, 276, 342, 344
- algoritmus
 - ADI 189
 - Metropolisův 117–118, 365, 367
 - Newtonův (hledání kořene) 248–249
 - PIC 303–308
 - Weylův 246–248
 - zobecněný Newtonův 249–250
- anomální rezistivita 107
- banánová orbita 38, 46, 86
- Beltramovo pole 146–147, 149, 155, 170, 360, 363
- body O a X 160, 292
- Cauchyovy-Riemannovy podmínky 312
- CMA diagram 235–237
- Coulombův logaritmus 100, 120, 341
- cykloida 23, 24
- čas
 - Alfvénův 158
 - rezistivní 150, 158
- číslo
 - Alfvénovo 345
 - Batchelоровo 345
 - Hartmannovo 143, 344, 363
 - Lundquistovo 158, 159, 161, 344
 - Machovo 344
 - Machovo-Alfvénovo 344
 - Reynoldsovo 344
 - Reynoldsovo magnetické 127, 156, 159, 344, 367
 - Stuartovo 345
- čtyřvektor 16–17, 25, 133, 195
- čtyřvláňná interakce 259
- Debyeova vzdálenost 14, 61, 89–91, 94, 96, 100, 118, 175, 218, 219, 304, 341, 362
- diamagnetismus 50, 240, 364
- diference, diferenční 51–53, 182–186
- difúze
 - ambipolární 82–83, 124, 343
 - anomální 86
 - gyromagnetická (Bohmova) 85–86, 343
 - neoklasická 86
 - obecně 81–82, 343
 - v magnetickém poli 84–86, 343
- difúzní region 159, 161–164
- disperzní relace 195–208, 210, 211, 213, 217–220, 222–224, 226, 230–232, 234–235, 240, 242, 246, 251, 253–259, 271, 277, 279–281, 295, 297–298
- drift
 - $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 23, 34, 44
 - grad B 35, 48
 - gravitační 35
 - inerciální 34
 - obecně 23, 34–36, 46, 48, 85, 86, 107, 160, 259, 282, 342
 - polarizační 36, 48
 - zakřivení 34, 42, 44, 48, 49
- dvojvrstva 18, 174–179
- dynamické tření 105
- dynamický tlak 70, 73
- elektromagnetický kolaps 172
- energie
 - ionizační 12, 63
- entropie 88, 361, 362, 366
- Faradayova rotace – viz jev
- Fermiho mechanismus (urychlení) 38–40
- formule
 - Appletonova-Hartreeho 236, 240, 360, 363
 - Rutherfordova 91, 94
 - Spitzerova 107
- frekvence
 - cyklotronní 20, 21, 23, 29, 38, 84, 85, 228, 230, 240, 302, 303, 341
 - dolní hybridní 238
 - horní hybridní 233, 238
 - mezí levá 231, 233
 - mezí pravá 231, 233
- funkce
 - Besselovy 318–319
 - distribuční 11–113
 - Greenova 230–231
 - Hamiltonova 16, 17, 19, 22, 25, 26
 - holomorfní 313
 - Chandrasekharova 103–106, 211, 321, 323, 363
 - chybová 103–104, 132, 321, 324

- kulové 320
- Lagrangeova 16, 17, 25, 91
- speciální 318–321
- vlnová 194
- zobecněná (distribuce) 326–329
- generátor náhodných čísel
 - Fibonacciho 110
 - LCG 109
 - L'Ecuyerův 110
 - obecně 109–111
- gyrace – viz Larmorova rotace
- Hartmannovo řešení 140–143
- helicita 146–151, 154, 155, 158
- hustota
 - hybnosti 69, 73–76, 135
 - Jouleova výkonu 78
- hvizdy – viz vlny
- index
 - lomu 229, 230, 232–237, 244–245
 - rekonekce 161–164
- integrály
 - tabulka 310
 - vícerozměrné 337–339
- Jansovo kritérium 208–210
- jev (efekt)
 - alfa 152, 154
 - Comptonův 362
 - Faradayova rotace 236, 238–240
 - Hallův 163–164
 - omega 152, 153
 - termodifúze 88
 - termoelektrický 88, 282
- koeficient
 - difúze 82, 83, 85, 343
 - kinetický 88–89
 - magnetické difúze 129
 - nárůstu nestability 252, 258, 277, 280, 292
 - polytropní 78, 211, 284
 - Stixův 235–236, 368
 - tepelné vodivosti 87
 - viskozity 137
- komplex elektromagnetický 221, 228–244
- komplex magnetoakustický 221, 222–227
- komplexní analýza 312–318
- konvoluce 330
- konstanta vazební 254
- korelace 66, 109, 110, 154–157
- křivočaré souřadnice 335–337
- kvazineutralita 11, 13, 63, 82, 83, 90, 124, 125, 174, 175, 216, 220, 282
- Landauův útlum
 - na elektronech 295–301
 - na iontech 301–302
- Larmorova rotace 20, 28–39, 42, 48, 49, 84–86, 233, 236, 342
- Larmorův poloměr 20, 24, 28, 33, 38, 53, 85, 86, 163, 164, 231, 341, 365
- Lawsonovo kritérium 47
- magnetické zrcadlo 11, 37–40, 42, 45, 164, 285, 342
- magnetický ostrov 160, 164, 292, 294
- magnetický povrch 166–167
- magnetohydrodynamika
 - ideální 158, 159
 - jako teorie kontinua 78, 123–190
 - minimální varianta 124–125
 - rezistivní 158, 159, 290
- markovský řetězec (proces) 94, 95, 118, 364
- Maxwellovo rozdělení 79–81, 87, 88, 90, 102, 103, 105, 321–324
- metoda Monte Carlo
 - střelby (distribuční funkce) 111–114
 - superpozice 114
 - von Neumana 114
- model
 - jednotekutinový 69, 124, 125, 214
 - „GS 95“ 164
 - Parkerův (dynama) 152, 161–162, 164, 366, 368
 - Petschekův 162–163
 - Sweetův Parkerův 161–162, 164, 368
 - vícetekutinový 70
 - α 155
 - $\alpha\Omega$ 155
- módy
 - A nestabilní 252
 - Bernsteinovy 302–303
 - C nestabilní 252
 - evanescentní 253, 265
 - nestability pinče 261, 269–273
 - svázané 253–254
 - zesilující 253
- molekulární chaos 66
- moment
 - Boltzmannovy rovnice 67–78, 136, 139, 295
 - elektrický dipólový 349, 362
 - FP rovnice 104, 106
 - hybnosti 30, 43, 76, 91, 92, 136, 137, 351
 - kvadrupólový 349
 - magnetický dipólový 30, 40–42, 49, 50, 350, 351
 - spinový 351
- Monte Carlo 107–121
- monopól 43, 349

- multipólový rozvoj 347–351
 navázání polí na hranici 265–266
 nestability
 Bunemanova 256, 259
 diocotronová 282–283
 Kelvinova-Helmholtzova 278–281
 korálková 172, 272
 mikronestability 294–303
 ostrůvková (tearing) 163, 171, 174, 288, 291–294
 Rayleighova-Taylorova 274–278
 rezistivní 288–291
 Richtmyerova-Meškovova 281–282
 smyčková 172, 272
 svazek-plazma 259
 tokamaková 293–294
 výměnná (tlakem řízená) 260, 274, 283–288
 Weibelova 256, 259–260
 optická analogie 18–19
 parametr
 beta 286, 287, 345
 bezpečnostní (rotační číslo) 294
 dvojvrstvy 174, 175, 345
 záměrný 91–94, 96–100, 341
 Parkerova plocha 173, 366
 permitivita plazmatu 243–244
 PIC simulace 165, 260, 303–308
 pinč – viz proudové vlákno
 plazma
 bezesrážkové 13, 78, 163, 164, 294, 296, 299, 368
 definice 11
 ideální 14, 91, 147
 kvantové 12–13
 nerovnovážné 13, 61
 nízkoteplotní 13
 prachové 14, 208
 relativistické 12
 rovnováha 166–168
 rovnováha osově symetrická 167
 srážkové 13, 124, 163, 164
 v termodynamické rovnováze 13, 60, 62, 78, 88–89
 vysokoteplotní 13
 plazmové oscilace 216–217, 230
 pohyblivost (mobilita) 83–83, 343
 Poyntingův vektor 75, 77, 343, 366
 proudová stěna 173–174, 282
 proudové (plazmové) vlákno 168–171, 176, 261, 267–273, 282, 308, 361
 připojení indukčních čar 158–165
 Rankinovy-Hugoniotovy podmínky 180–181
 rázová vlna 18, 163, 179–181, 244, 259, 281, 363, 366
 redukováná hmotnost 91, 100, 120, 343
 rekonekce – viz přepojení
 relace Onsagerovy (reciprocity) 88–89
 reziduum 315–318
 rezonance
 cyklotronní 231, 236
 dolní hybridní 233, 236, 238
 horní hybridní 233, 238
 Rosenbluthovy potenciály 96–105, 321, 322, 342, 367
 rotační číslo – viz parametr, bezpečnostní
 rovinná vlna 195, 222, 297, 332
 rovnice
 BGK 62, 79, 81, 84, 87, 361, 363, 364
 Boltzmannova 60–70, 72–3, 78, 94, 124, 134, 136, 139, 295, 361, 363, 364
 driftová 34
 Fokkerova-Planckova 61, 94–107, 321, 341, 342, 362
 Gradova-Šafranovova 168
 gyračního středu 32
 Hamiltonovy 19, 22, 53, 198
 Helmholtzova 146, 149, 318, 363
 Kleinova-Gordonova 211–212
 kontinuity 69, 71, 73, 76, 82, 89, 128, 134, 135, 139–141, 162, 176–178, 180, 206, 215, 228
 Lagrangeovy 17
 Landauova 61, 93, 96, 341, 364
 proudnice 126, 129
 přenosu (momentová) 67–69
 Sahova 63, 364, 367
 telegrafní 212
 Vlasovova 62, 78, 295, 368
 vlnová 132, 144, 145, 183, 184, 192, 203, 208, 211–212, 289
 rychlost
 Alfvénova – viz Alfvénova rychlost
 fázová 195
 grupová 196, 198–200, 202, 204, 205, 207, 210–212, 218, 219, 226, 241, 242, 253, 366
 světla 75, 204, 228, 362
 zvuku 207, 210, 216
 rovnováha hvězdy 210–211
 separatrisa 160, 292
 schéma (numerické)
 Borisovo-Bunemanovo 56, 57
 Crankovo-Nicolsonovo 188
 Du Fortovo-Frankelovo 187
 explicitní 52, 186
 implicitní 52, 186

- Laxovo-Wendrofovo 187
 Leap-Frog 54, 57
 Newtonovo-Eulerovo 51, 57
 Richtmyerovo-Mortonovo 189
 Rungeovo-Kutteovo 55, 57
 relativistické 56–57
 řád 53
 stabilita 53
 síla
 Coriolisova 152, 154
 grad B 32–33
 Lorentzova 20, 32, 62, 68, 73, 74, 76,
 125, 135, 138, 139, 141, 144, 147, 160,
 166, 168, 233, 290, 312, 365
 termodynamická 88
 skinová hloubka 210
 srážkový člen 64–67
 srážkový (sumační) invariant 66–69, 73,
 77–78
 stabilita schématu
 CFL podmínka 192
 John von Neumannova podmínka 191
 obecně 53, 190–192
 stelarátor 44
 střední volní dráha 13, 82, 85, 86, 124, 260
 substancionální derivace 126–127, 129,
 133, 134, 135
 šlírová fotografie 232, 244–245
 tenzor
 difúze 105
 Levi-Civitův 311
 Maxwellův pnutí 70, 76, 136, 138
 tlaku 73, 74, 136, 138, 342
 teorie Drudeho 80
 tokamak 38, 44–47, 86, 151, 159, 233, 293,
 294, 345
 Compass D 46–47
 ITER 46–47, 367
 JET 46–47
 Tore Supra 46–47
 transformace
 Legendreova duální 26
 Fourierova 129, 190, 196, 202–206, 211,
 212, 215, 221, 228, 243, 255, 261–264,
 304, 307, 308, 329, 332–333, 362
 trochoida 23, 24
 ubíhající částice 105–106
 účinný průřez 61, 65–66, 87, 91, 93–94, 97,
 98, 118, 120
 úhlová frekvence 152, 194, 196, 202, 207,
 209, 232, 252, 253, 265, 280, 341
 úloha
 Cauchyova 184
 Dirichletova 184
 Neumannova 184
 smíšená 184
 urychlovač LWFA 300
 vazkost (první a druhá) 137
 vektor posunutí 262–265, 267, 268, 271,
 275, 276, 290–291
 vektorové identity 311–312
 věta
 Gaussova 338
 reziduová 315–318
 Stokesova 338
 vlnění
 podélné 201, 207, 214, 221, 226, 296,
 299–301
 příčné 201, 202, 204, 236, 365
 vlnoplocha 194–196, 224, 225, 236, 237
 vlnová funkce 194
 vlnový balík 196–198
 vlnový vektor 190, 191, 194, 195, 197, 202,
 222, 223, 232, 239, 242, 252, 254, 259,
 303
 vlny
 Alfvénovy (A) 224–226
 elektromagnetické 201–204, 213,
 227–237, 239, 240, 241, 243
 hvězdy 163, 227, 234, 240–243, 361
 kompresní 226
 konečné amplitudy 144–145
 levotočivé (L) 227, 230, 234–235
 magnetoakustické 219, 221, 222–227,
 295
 magnetoakustické pomalé (S) 224
 magnetoakustické rychlé (F) 224
 mimořádné (X) 227, 232–233, 234–235
 plazmové 212, 216–217, 299
 pravotočivé (R) 227, 230, 234–235
 řádne (O) 227, 231–232, 234–235
 vnější algebra 339–340
 vodivost diferenciální 80, 107
 zákon
 Fickův 81–82, 344, 362
 Fourierův 70, 78, 87
 Ohmův 79–81, 125, 127, 133, 147, 151,
 159, 163, 288, 289, 343, 366
 Poiseuillův 140, 142, 143
 zamrzání pole 13, 127–129, 133, 141, 144,
 147, 148, 154, 158, 159, 164, 288, 289,
 312, 344, 360, 367



Literatura

Na co navázat...

- [1] P. Kulhánek: *Teoretická mechanika*; studijní text pro doktorské studium; FEL ČVUT v Praze, 2001, online: <http://www.aldebaran.cz/studium/mechanika.pdf>.
- [2] P. Kulhánek: *Kvantová teorie*; studijní text pro doktorské studium; FEL ČVUT v Praze, 2001, online: <http://www.aldebaran.cz/studium/kvantovka.pdf>.
- [3] P. Kulhánek: *Statistická fyzika*; studijní text pro doktorské studium; FEL ČVUT v Praze, 2002, online: <http://www.aldebaran.cz/studium/statistika.pdf>.

Základní učebnice fyziky plazmatu v češtině

- [4] J. Kracík, J. Tobiáš: *Fyzika plazmatu*; ACADEMIA Praha, 1966.
- [5] J. Kleczek: *Plazma ve vesmíru a laboratoři*; ACADEMIA; Praha 1968.
- [6] J. Kracík a kol.: *Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu*; ACADEMIA, Praha, 1974.
- [7] F. F. Chen: *Úvod do fyziky plazmatu*; ACADEMIA, Praha 1984.
- [8] J. Kvasnica: *Teorie elektromagnetického pole*. ACADEMIA, Praha, 1985.
- [9] P. Kubeš: *Magnetohydrodynamika*, studijní text pro doktorské studium; FEL ČVUT v Praze, 2001, <http://www.aldebaran.cz/studium/MHD.pdf>.

Populární knížky o plazmatu

- [10] I. Štoll: *Tajemství kulového blesku*, Horizont 1988.
- [11] G. McCracken, P. Stott: *Fúze – energie vesmíru*; Mladá fronta, edice Kolumbus, 2006.
- [12] P. Kulhánek, J. Rozehnal: *Hvězdy, planety, magnety*; Mladá fronta, edice Kolumbus, 2007.

Učební texty v angličtině

- [13] D. Montgomery, D. Tidman: *Plasma Kinetic Theory*, MacGraw-Hill, 1964.
- [14] B. J. Rye, J. C. Taylor (editors): *Physics of hot plasmas*; Scottish Summer School; Olover & Boud, Edinburg, 1968.

- [15] G. B. Rybicki, A. P. Lightman: *Radiative Processes in Astrophysics*; John Wiley & Sons, 1979.
- [16] D. R. Nicholson: *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons Inc, 1983, ISBN: 047109045X.
- [17] R. A. Cairns: *Plasma Physics*; Blackie, Glasgow, 1985.
- [18] J. P. Freidberg: *Ideal Magnetohydrodynamics*, Springer, 1987, ISBN: 0306425122.
- [19] A. L. Peratt: *Physics of the Plasma Universe*, Springer-Verlag, 1991, ISBN 3-54097575-6.
- [20] S. P. Gary: *Theory of Space Plasma Microinstabilities*; Cambridge University Press, 1993.
- [21] R. Dendy (editor): *Plasma Physics – An Introductory Course*; Cambridge University Press, 1995, ISBN: 978-0521484527.
- [22] S. D. Pinches: *Nonlinear Interaction of Fast Particles with Alfvén Waves in Tokamaks*, University of Nottingham, 1996, online <http://www.ipp.mpg.de/~Simon.Pinches/thesis/>.
- [23] T. E. Cravens: *Physics of Solar System Plasmas*, Cambridge Atmospheric and Space Science Series, Cambridge University Press, 1997, ISBN: 0-52161194-6
- [24] T. J. Dolan: *Fusion Research; Principles, Experiments and Technology*; Pergamon Press, 1982, 2000.
- [25] E. Infeld, G. Rowlands: *Nonlinear waves, solitons, and chaos*; Cambridge University Press, 2000.
- [26] E. Priest, T. Forbes: *Magnetic Reconnection – MHD Theory and Applications*; Cambridge University Press, 2000, ISBN: 0-52148179-1.
- [27] T. J. M. Boyd, J. J. Sanderson: *The Physics of Plasmas*, Cambridge University Press, 2003, ISBN: 0521459125.
- [28] A. A. Fridman, L. A. Kennedy: *Plasma Physics and Engineering*; Taylor & Francis Routledge, 2004.
- [29] F. F. Chen: *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*; Springer, 2004, ISBN: 978-0306413322.
- [30] J. P. Goedbloed, S. Poedts: *Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas*; Cambridge University Press, 2004. ISBN: 978-0521626071.
- [31] K. Miyamoto: *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*; Springer, 2005.
- [32] T. H. Stix: *Waves in Plasmas*, Springer, 2006, ISBN: 0883188597.
- [33] M. De Bock: *Understanding and controlling plasma rotation in tokamaks*; Technische Universiteit Eindhoven, 2007.
- [34] J. P. Freidberg: *Plasma Physics and Fusion Energy*, Cambridge University Press, 2007.

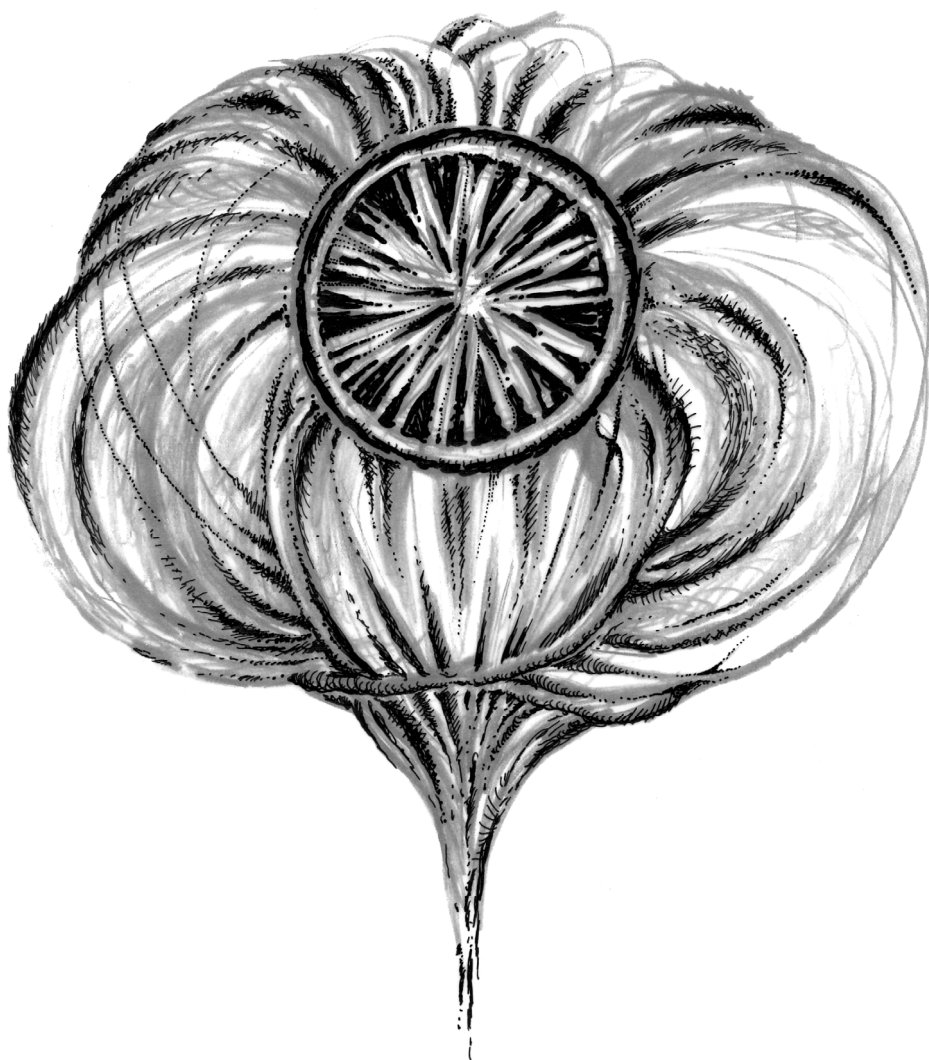
- [35] P. M. Bellan: *Fundamentals of Plasma Physics*; Cambridge University Press, 2008, ISBN: 978-0521528009.
- [36] Kip Thorne: *Applications of Classical Physics* (kapitoly 17 až 21), CalTech Course No. Ph 136, 2008.
Online: <http://www.pma.caltech.edu/Courses/ph136/yr2008/>.
- [37] J. D. Huba: *NRL Plasma Formulary*, Supported by The Office of Naval Research, 2009, <http://wwwwppd.nrl.navy.mil/nrlformulary/>.

Numerické metody, matematika

- [38] A. Ralston: *Základy numerické matematiky*; Academia, Praha, 1978.
- [39] R. Rubinstein: *Simulation and the Monte Carlo Method*; John Wiley & Sons, 1981.
- [40] E. Vitásek: *Numerické metody*; SNTL, Praha, 1987.
- [41] R. Goldston, P. Rutherford: *Introduction to Plasma Physics*; IOP Publishing Ltd., 1995.
- [42] J. Hubbard, D. Schleicher, S. Sutherland: *How to Find All Roots of Complex Polynomials With Newton's Method*; Inventiones Mathematicae 146 (2001).
- [43] G. W. Collins, II: *Fundamental Numerical Methods and Data Analysis*; 2003, ADS Digital Library for Physics and Astronomy, online: <http://ads.harvard.edu/books/1990fnmd.book/>.
- [44] Ch. K. Birdsall, A. B. Langdon: *Plasma Physics via Computer Simulation*; IoP, Series in Plasma Physics, 2004.
- [45] P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall: *Differential equations – third edition*; Thomson Brooks/Cole, 2006.
- [46] S. J. Chapman: *Fortran 95/2003 for Scientists and Engineers*; McGraw-Hill Companies, 2007.
- [47] A. J. Chorin, Ole H. Hald: *Stochastic Tools in Mathematics and Science*; Vol. 1, ze série knih Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, ed. by S. S. Antman, J. E. Marsden, L. Sirovich, Springer, 2009.
- [48] A. Quarteroni: *Numerical Model for Differential Problems*; Springer, 2009.
- [49] A. K. Jaiswall, Anju Khandelwall: *A Textbook of Computer Based Numerical and Statistical Techniques*; New Age International Publishers, 2010.



Příloha aneb o čem byste měli vědět



The logo for ELI, consisting of the lowercase letters 'eli' in a bold, sans-serif font.The logo for Beamlines, featuring a stylized graphic of several vertical, curved lines of varying heights, resembling a beam or a series of pulses, above the word 'beamlines' in a lowercase, sans-serif font.

ELI Beamlines pomůže napsat novou kapitolu fyziky plazmatu

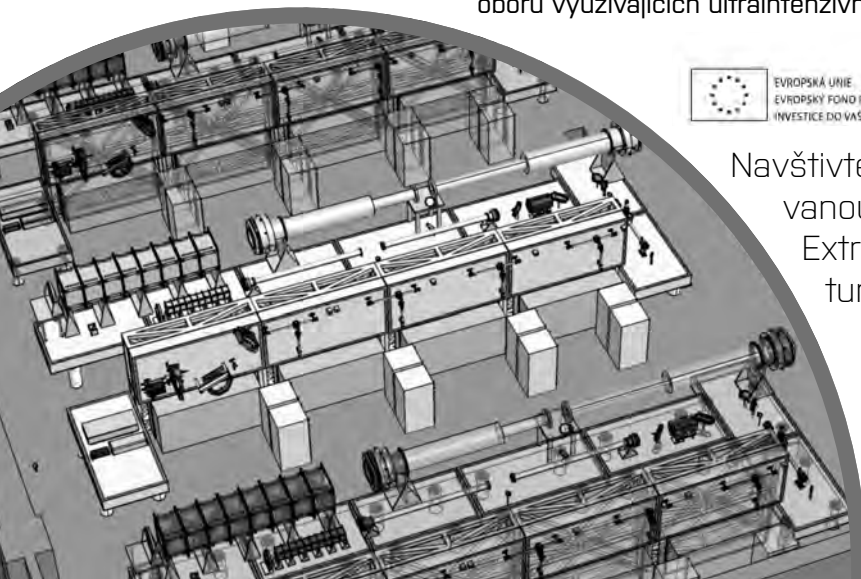
V České republice, konkrétně v obci Dolní Břežany ve Středočeském kraji, bude již za několik let stát unikátní laserové centrum ELI Beamlines. Špičkové laserové technologie tam budou generovat nejintenzivnějších pulzy světla, jaké kdy byly v laboratoři vytvořeny.

Výzkumný program bude pracovat s novou generací sekundárních zdrojů ionizujícího elektromagnetického záření a energetických nabitých částic vytvářených ultraintenzivními laserovými pulzy. Tyto zdroje (perfektně sčasované s částí původních laserových pulzů v rozličných schématech typu „pump-probe“) budou realizovány a využívány v rámci následujících pěti výzkumných aktivit:

-)))) rentgenové zdroje buzené ultrakrátkými laserovými pulzy,
-)))) laserové generování a urychlování nabitých částic,
-)))) aplikace v molekulárních, biomedicínských a materiálových vědách,
-)))) fyzika plazmatu a vysokých hustot energie, fyzika laserové termojaderné fúze,
-)))) exotická a mezní fyzika.

ELI Beamlines představuje zlomovou událost pro základní a aplikovaný výzkum v České republice propojený s evropskou a světovou vědecko-výzkumnou komunitou.

Studenti fyzikálních oborů [fyziky plazmatu a plazmové techniky především] zde budou realizovat své diplomové a doktorské práce v domácím prostředí na technické a vědecké úrovni absolutní světové špičky. Infrastruktura ELI Beamlines by měla být využívána 200–300 vědeckými pracovníky. Nejmodernější laserové, interakční a diagnostické technologie instalované v ELI-Beamlines poskytnou vědcům a studentům možnost provádět průkopnický výzkum v řadě oborů využívajících ultraintenzivních laserových pulzů.



EVROPSKÁ UNIE
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ/
INVESTICE DO VAŠÍ BUDOUCNOSTI

EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
INVESTICE DO VAŠÍ BUDOUCNOSTI



Navštivte průběžně aktualizovanou prezentaci projektu Extreme Light Infrastructure (ELI) Beamlines na www.eli-beams.eu a zaměřte své studijní a budoucí profesní plány správným směrem.



Projekt HiLASE

(High average power pulsed LASERs)

nabízí studentů a mladým vědeckým pracovníkům četné příležitosti prezentované na www.hilase.cz stránkách.



Projekt HiLASE směřuje k vybudování národní platformy pro vývoj nových laserových technologií s průlomovými technickými parametry, založených na vysoce účinném diodovém čerpání (diode pumped solid state laser systems, DPSSLs). Tyto lasery budou podstatně silnější a výkonnější, kompaktnější, stabilnější a snáze udržovatelné, než nabízejí současné technologie. HiLASE je zaměřen na lasery s vysokou opakovací frekvencí a současně značnou energií pulzu. Ty zcela jistě najdou využití v průmyslu, ve výzkumných laboratořích a budou sloužit i jako lasery pro optické čerpání zesilovačů v ultraintenzivním laserovém systému ELI Beamlines budovaném v České republice. HiLASE sleduje dva základní technologické koncepty:

- zesilovače na bázi tenkých disků s průměrným výstupním výkonem v řádu kW,
- a multi-deskové zesilovače dosahující vysokou výstupní energii v pulzu s opakovací frekvencí 10 Hz, škálovatelné na úroveň kJ.

Laserové systémy s těmito parametry nejsou komerčně dostupné. Můžeme je tedy považovat za unikátní nejen v České republice, ale i v celosvětovém měřítku.

Po zprovoznění tyto lasery v centru HiLASE umožní především

- výzkum spojený s testováním nových dielektrických optických komponent s vysokým prahem poškození, prototypování laserů založených na technice OPCPA (optické parametrické zesílení s chirpovaným pulzem) a generací vysoce účinných sekundárních energetických fotonových zdrojů s vysokou opakovací frekvencí,
- a průmyslové aplikace zaměřené na efektivní zpracování materiálů využívaných např. v leteckých motorech a turbínách, svařování, ablativní odstraňování tenkých vrstev ze solárních článků, pájení karosérie, řezání opticky průhledných materiálů, čištění starožitností, laserové vyklepávání a řezání, testování laserových diod a chladicích systémů.

Významnou součástí projektu HiLASE je vědecká výchova vysokoškolských studentů – diplomantů a doktorandů a mladých badatelů – postdoků s cílem rozšíření domácí komunity odborníků v oblasti výzkumu a vývoje laserů a souvisejících technologií. HiLASE klade velký důraz na praktické využití laserových zdrojů nové generace v úzké spolupráci s průmyslem.



EVROPSKÁ UNIE

EVROPSKÝ FOND
PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
INVESTICE DO VAŠÍ BUDOUCNOSTI



Potřebujete pro svůj výzkum výkonné lasery?

Využijte integrované iniciativy sdružení evropských laserových laboratoří LASERLAB-EUROPE!

Toto sdružení koordinuje od roku 2004 interdisciplinární laserový výzkum v celkem 26 vedoucích laserových laboratořích v 16 zemích Evropské unie včetně České republiky.

Sdružení **LASERLAB-EUROPE** provádí společný výzkum v oblasti attosekundové fyziky, výkonových laserů nejrůznějších typů včetně rentgenových laserů, laserového urychlování nabitých částic a biologických a lékařských aplikací laserů.

Jedním z jeho hlavních úkolů je zajišťování přístupu na špičková velká laserová zařízení pro vědce z celé Evropy. Přístup na tato zařízení (Transnational Access), včetně úhrady cestovních a pobytových nákladů, je poskytován zdarma projektům vybraným nezávislým mezinárodním hodnotícím panelem na základě centrálně evidovaných přihlášek.

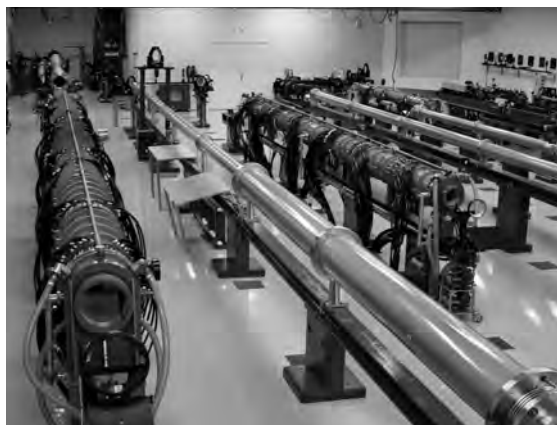
Podrobný návod, jak podávat projektové přihlášky a popis dalších aktivit sdružení **LASERLAB-EUROPE**, naleznete na www.laserlab-europe.eu.

Zakládajícím členem konsorcia **LASERLAB-EUROPE** je pražská laserová laboratoř Badatelské centrum **PALS**, společné pracoviště Fyzikálního ústavu a Ústavu fyziky plazmatu AV ČR, v. v. i., jenž k výzkumu laserového plazmatu využívá jednoho z největších evropských laserů, terawattového kilojoulového laseru známého od roku 2000 pod

jménem **Prague Asterix Laser System** (www.pals.cas.cz).

Laserová laboratoř **PALS** jako velká výzkumná infrastruktura pro výzkum, vývoj a inovace získala účelovou podporu z programu LM MŠMT na období 2011–2015.

Vedle svých rozsáhlých mezinárodních aktivit se významnou měrou podílí na praktickém školení mladých vědeckých pracovníků pro potřeby projektů **HiLASE** a **ELI**.





Dalekohledy a příslušenství
pro pozorování dynamických jevů
ve sluneční fotosféře (erupce, sluneční
skvrny, protuberance i filamenty) v čáře
H-Alfa (656.3 nm) od firmy LUNT.



SUPRA Praha spol. s r. o.
Mochovská 23/310, Praha 9
Tel.: 284 820 939
www.supra-dalekohledy.cz

**Původní články s aktuální tematikou,
popularizace astronomie a astrofyziky,
tipy a náměty k pozorování,
celostránkové mapky, barevné
fotografie, to vše je**

ASTROPIS

**Pětkrát ročně
jen za 295 Kč!**

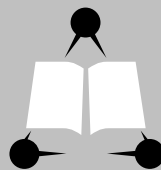


**Společnost Astropis
Mgr. Lenka Soumarová
Štefánikova hvězdárna
Petřín 205
11846 Praha 1**

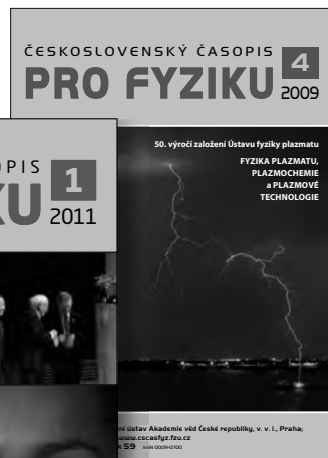
www.astropis.cz

info@astropis.cz, tel.: 723 858 717, 603 759 280

ČESKOSLOVENSKÝ ČASOPIS PRO FYZIKU



vědecko-populární fyzikální časopis
s dlouhou tradicí



Staňte se předplatitelem

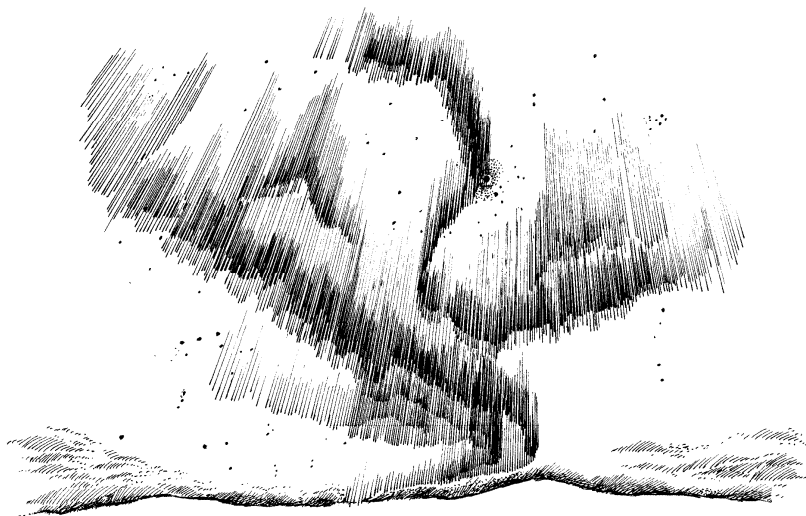
Volit můžete z několika forem předplatného:

- ♦ tištěný Československý časopis pro fyziku: 456 Kč/rok (23,25 €)
 - ♦ rozšířená elektronická verze ČČF na internetu: 390 Kč/rok (17,30 €)
 - ♦ kombinované předplatné (tištěný časopis + rozšířená elektronická verze): 550 Kč/rok (27,60 €)
 - ♦ sponzorské předplatné (kombinované): libovolná částka vyšší než 550 Kč/rok (27,60 €)
- Uvedené ceny platí pro rok 2011 – v ČR v Kč, v SR v €.*

Objednávkový formulář předplatného vyplňte na www.cscasfyz.fzu.cz, objednávky přijímáme také v redakci (tel.: 266 052 152, e-mail: cscasfyz@fzu.cz, adresa: FZÚ AV ČR, v. v. i., Redakce ČČF, Na Slovance 2, 182 21 Praha 8). Jednotlivá čísla zakoupíte i v prodejnách Academia v Praze, Brně, Ostravě a Olomouci. Dále v Praze i v prodejně technické literatury ČVUT a v Knihkupectví Karolinum UK.

www.cscasfyz.fzu.cz

Časopis,
který
překračuje
hranice



Petr Kulhánek
Úvod do teorie plazmatu

Žádná část této publikace nesmí být publikována a šířena žádným způsobem a v žádné podobě bez výslovného svolení autora a sdružení AGA.

Autor: Prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.
Odborná recenze: Doc. Ing. Rudolf Novák, DrSc., RNDr. David Břeň, Ph.D.
Grafika a obálka: Ing. arch. Ivan Havlíček
Formát: 165×235 mm, 384 stran, 202 obrázků
Nakladatelství: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)
Sazba: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)
Vydání: první upravené, Praha, 2018/11
Tisk: Europrint, a. s.

ISBN 978-80-904582-2-2

