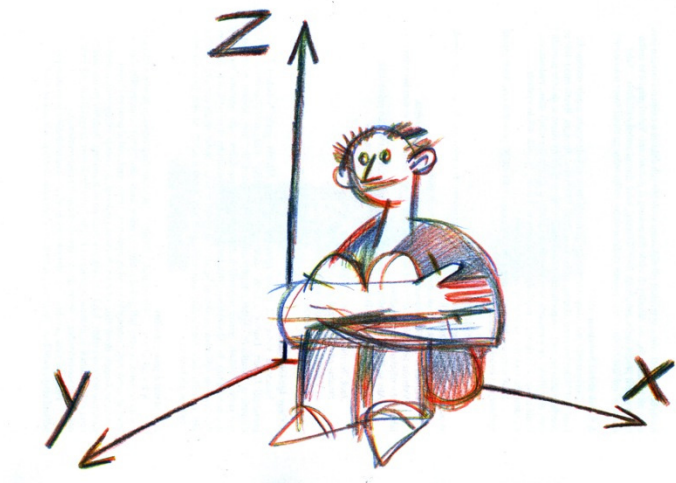


TF4: OBECNÁ RELATIVITA



STUDIJNÍ TEXT
PETR KULHÁNEK



OBSAH

PŘEDMLUVA, ÚVOD	4
1. SPECIÁLNÍ RELATIVITA	5
ROZPOR MEZI ELEKTRODYNAMIKOU A KLASICKOU MECHANIKOU	5
LORENTZOVA TRANSFORMACE	6
DILATACE ČASU A KONTRAKCE DÉLEK	7
RAPIDITA	8
2. METRIKA	10
KOVARIANTNÍ A KONTRAVARIANTNÍ INDEXY	10
SKALÁRNÍ SOUČIN, ZVYŠOVÁNÍ A SNIŽOVÁNÍ INDEXŮ	11
ČTYŘVEKTORY, MINKOWSKÉHO METRIKA	12
INTERVAL, VLASTNÍ ČAS A DALŠÍ ČTYŘVEKTORY	14
VELIKOST ČTYŘVEKTORU	16
3. PRINCIP EKVIVALENCE	17
SETRVAČNÁ A GRAVITAČNÍ HMOTNOST	17
PRINCIP EKVIVALENCE	17
EXPERIMENTY	18
LOKÁLNĚ INERCIÁLNÍ SOUSTAVA	19
4. KOVARIANTNÍ DERIVACE	21
VLASTNOSTI KOEFICIENTŮ AFFINNÍ KONEXE	21
KOVARIANTNÍ DERIVACE KOVARIANTNÍ SLOŽKY	22
KOVARIANTNÍ DERIVACE METRIKY	22
VZTAH MEZI CHRISTOFFELOVÝMI SYMBOLY A METRIKOU	23
VLASTNOSTI KOVARIANTNÍ DERIVACE	23
5. ROVNICE GEODETIKY	24
ÚPLNÁ DERIVACE VEKTOROVÉHO POLE	24
PARALELNÍ PŘENOS VEKTORU PODÉL KŘIVKY	24
ROVNICE GEODETIKY	26
NEWTONOVSKÁ LIMITA	27
6. DILATACE ČASU A ČERVENÝ GRAVITAČNÍ POSUV	31
DILATACE ČASU	31
RŮZNÉ POHLEDY NA DILATACI	32
POUNDŮV-REBKŮV EXPERIMENT	34
HAFELE-KEATINGŮV EXPERIMENT	35
GRAVITY PROBE A	36
BERKELEYSKÝ EXPERIMENT	37
7. RIEMANNŮV TENZOR KŘIVOSTI	39
JAK OTESTOVAT ZAKŘIVENÍ?	39
PLOCHOST ČASOPROSTORU	40
VLASTNOSTI RIEMANNOVA TENZORU	41
GRAVITY PROBE B	42
8. EINSTEINŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON	44
ROVNICE KONTINUITY V KLASICKÉ FYZICE	44
TENZOR ENERGIE A HYBNOSTI	46
EINSTEINŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON	48
VÝZNAM NOVÉHO ZÁKONA	49

9. GRAVITAČNÍ VLNY	52
VLNOVÁ ROVNICE	52
VLASTNOSTI GRAVITAČNÍCH VLN	53
NEPŘÍMÁ POZOROVÁNÍ GRAVITAČNÍCH VLN	56
DETEKTORY	57
10. SCHWARZSCHILDVO ŘEŠENÍ	64
METRIKA V OKOLÍ SFÉRICKY SYMETRICKÉHO TĚLESA	64
NĚKTERÉ VLASTNOSTI SCHWARZSCHILDVOVY METRIKY	66
DIAGRAMY VNOŘENÍ	69
ČERNÉ DÍRY	72
11. POHYBY VE SCHWARZSCHILDVOVĚ GEOMETRII	75
LAGRANGEOVA FUNKCE	75
EFEKTIVNÍ POTENCIÁL A POHYBY ČÁSTIC	76
POHYB SVĚTLA	77
GRAVITAČNÍ ČOČKY	82
12. STRHÁVÁNÍ ČASOPROSTORU ROTUJÍCÍM TĚLESEM	84
ANALOGIE S ELEKTROSTATIKOU	84
GRAVITOELEKTRICKÉ POLE	85
GRAVITOMAGNETICKÉ POLE	86
LENSEŮV-THIRRINGŮV JEV	87
13. KOSMOLOGIE	89
VLASTNOSTI FRIDMANOVY METRIKY	91
KOSMOLOGICKÝ ČERVENÝ POSUV	92
VLASTNOSTI EXPANZNÍ FUNKCE	94
KOSMOLOGICKÁ KONSTANTA	96

PŘEDMLUVA, ÚVOD

Gravitační interakce se od všech ostatních výrazně odlišuje. Jako jediná působí na všechny částice. Toto působení má zvláštní charakter: testovací (malá) tělesa se v gravitačním poli pohybují po stejných trajektoriích. Už Galileo Galilei věděl, že doba volného pádu malé kuličky i velkého kamene v tíhovém poli Země je shodná. (Nesmí jít například o pířko, kde je podstatnou silou odpor vzduchu.) To je důsledkem tzv. principu ekvivalence mezi setrvačnou a gravitační hmotou. Hmota se projevuje setrvačnými a gravitačními účinky a ty jsou si úměrné. Nelze proto od sebe odlišit setrvačné a gravitační jevy. Je jedno, zda se nacházíme v urychlovaném výtahu, tj. neinerciální soustavě, nebo v tíhovém poli se stejným gravitačním zrychlením. V obou soustavách dopadnou experimenty stejně. To vedlo Alberta Einsteina k zobecnění speciální relativity platící v inerciálních soustavách na veškeré souřadnicové systémy a k vzniku obecné relativity, jejíž kostru dokončil v roce 1915.

Právě universálnost gravitační interakce a jednotná odezva všech testovacích částic na zdroj gravitačního pole vedla k přehodnocení klasického pojmu síly. Zakřivení trajektorií již není způsobeno těžko definovatelnou silou, ale vlastnostmi prostoru a času. V obecné relativitě sama tělesa zakřivují čas a prostor a v tomto zakřiveném časoprostoru se pohybují po nejrovnějších možných drahách – geodetikách. Například volný pád všech těles probíhá stejně proto, že se pohybují v časoprostoru zakřiveném Zemí a toto zakřivení je pro všechna tělesa stejné.

Prostor a čas v obecné relativitě bez samotných těles neexistuje. Tělesa sama časoprostor vytvářejí. Zakřivení časoprostoru je matematicky popisováno metrickým tenzorem – jde vlastně o koeficienty $g_{\mu\nu}$ v Pythagorově větě, které určují vlastnosti času a prostoru.

Albert Einstein našel rovnice pro metrické koeficienty $g_{\mu\nu}$. Jde o deset diferenciálních rovnic druhého řádu. Rovnice obecné relativity jsou historicky první ucelenou teorií gravitace. V jedné sadě rovnic jsou obsaženy jak polní rovnice, tak rovnice pro pohyb částic. První řešení pro sféricky symetrické gravitační pole centrálního tělesa našel Karl Schwarzschild v roce 1916. Jeho řešení ve velké vzdálenosti od zdroje přechází v Minkowského metriku speciální relativity, pohyby těles ve větších vzdálenostech od zdroje jsou shodné s pohyby v Newtonově teorii. V silnějších polích (blíže ke zdroji) je ale v předpovědích možné pozorovat rozdíly. Světelný paprsek se zakřivuje, dráhy těles nejsou uzavřené elipsy, dochází ke stáčení celé trajektorie, hodiny jdou v různých místech gravitačního pole různě a pro vnějšího pozorovatele není možné pozorovat děje pod tzv. Schwarzschildovým poloměrem. Je-li těleso vytvářející pole pod Schwarzschildovým poloměrem, jedná se o černou díru.

Jiným důležitým řešením rovnic obecné relativity je Fridmanovo řešení z roku 1922, podle kterého homogenní izotropní vesmír jako celek nemůže být statický, musí se rozšiřovat nebo smršťovat. Nezávisle řešil Einsteinovy rovnice pro modely vesmíru belgický kněz George Lemaitre.

Obecná relativita s sebou přinesla řadu důležitých jevů: ohyb světla v okolí hmotných těles, gravitační čočky, gravitační vlny, strhávání časoprostoru rotujícím tělesem, červený gravitační posuv, kosmologický posuv, stáčení dráhy tělesa obíhajícího jiné těleso a mnoho dalších.

Tento učební text vznikl na základě přednášek, které jsem měl v letních semestrech 2014 a 2016 na elektrotechnické fakultě ČVUT. Snad pomůže nejenom mým studentům, ale i dalším zájemcům o tuto elegantní teorii gravitačního působení.

V Lešanech-Nelahozevsi 28. března 2016,
Petr Kulhánec

1. SPECIÁLNÍ RELATIVITA

Rozpor mezi elektrodynamikou a klasickou mechanikou

Poznávání relativnosti pohybu nás zasáhlo ve třech vlnách. První spadá do období 17. století, kdy Galileo Galilei a později Isaac Newton založili klasickou mechaniku, v níž jsou čas a prostor neměnným jevištěm pro pohyb těles. Druhou vlnu z roku 1905 nazýváme speciální relativita, čas a prostor jsou nadále absolutní, ale velikost časového nebo prostorového intervalu už závisí na tom, z jaké souřadnicové soustavy události sledujeme. Poslední je obecná relativita z roku 1916, kde se čas a prostor stává poprvé součástí dění, spoluvytvářejí ho všechny objekty ve vesmíru. Text této kapitoly rozhodně není učebnicí speciální relativity, chápejte ho spíše jako výčet nezbytných vztahů potřebných ke konstrukci obecné relativity.

Galileův princip relativity zavádí inerciální soustavu, jakousi ideální souřadnicovou soustavu, v níž platí zákon setrvačnosti, tj. tělesa jsou v klidu nebo se pohybují rovnoměrně přímočaře, pokud na ně nepůsobí síla. Různé inerciální souřadnicové soustavy se vůči sobě mohou pohybovat jen konstantní rychlostí – pokud by vzájemná rychlost nebyla konstantní, nemohly by obě soustavy být současně inerciální. Předpokládejme, že pro polohový vektor částice platí transformace (jednu ze soustav označujeme vlnkou)

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad (1)$$

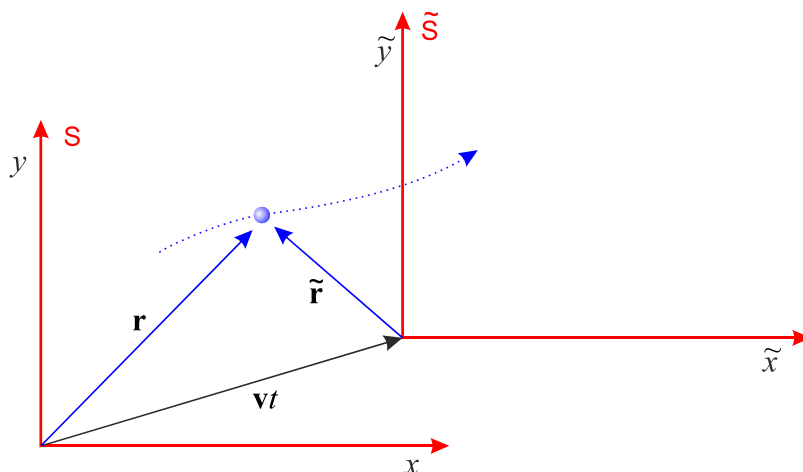
kde \mathbf{v} je vzájemná rychlost obou soustav a \mathbf{r} je polohový vektor částice. Derivováním podle času získáme transformaci rychlosti částice \mathbf{u} mezi oběma soustavami

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}. \quad (2)$$

Jde o klasické skládání rychlostí, na které jsme si v mechanice velmi zvykli. Dalším derivováním podle času získáme vztah mezi zrychleními (\mathbf{v} je konstantní):

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}. \quad (3)$$

V obou inerciálních soustavách působí stejná zrychlení a tedy stejné síly. Proto mechanické děje dopadnou ve všech inerciálních soustavách stejně a nelze nalézt nějakou preferovanou soustavu, která by byla lepší než ostatní. To je podstatou tzv. Galileova principu relativity.



V 18. a 19. století lidé postupně poznávali zákony elektřiny a magnetizmu a experimentálně nacházeli souvislosti mezi oběma jevy. V roce 1873 sepsal veškeré dosažené výsledky James Clerk Maxwell v monumentálním dvousvazkovém díle *A Treatise on Electricity and Magnetism*. V tomto spise jsou publikovány slavné Maxwellovy rovnice, z nichž plyne, že rychlosti by se měly skládat jiným způsobem, než předpokládal Galileo Galilei a že by rychlost světla měla být dokonce nezávislá na volbě souřadnicové soustavy a ve všech soustavách mít stejnou hodnotu. Tento zjevný rozpor mezi klasickou mechanikou a Maxwellovou elektrodynamikou nelze vyřešit „na papíře“, bylo třeba experimentálně rozhodnout, která z teorií je správně. Poprvé tak učinili Albert Abraham Michelson (1852–1931) a Edward Morley (1838–1923) ve svém slavném experimentu z roku 1887, v němž interferometricky měřili

rozdíl rychlosti světla na letící Zemi ve směru jejího pohybu kolem Slunce a ve směru kolmém na tento pohyb. Výsledek dal za pravdu Maxwellově elektrodynamice, rychlost světla nijak nezávisela na pohybu Země. Od té doby byla učiněna řada dalších experimentů, které prokázaly správnost Maxwellovy elektrodynamiky.

Lorentzova transformace

Úprava klasické mechaniky do podoby, ve které je v souladu s elektrodynamikou se nazývá speciální relativita a pochází z roku 1905. Jejím autorem je Albert Einstein, který rozšířil princip relativity i na elektromagnetické děje a předpokládal, že mechanické a elektromagnetické experimenty dopadnou ve všech inerciálních soustavách stejně a žádným mechanickým ani elektromagnetickým experimentem nelze najít preferovanou souřadnicovou soustavu. To samozřejmě ale znamená, že rychlost světla musí být ve všech soustavách stejná. Předpokládejme pro jednoduchost, že se dvě inerciální souřadnicové soustavy pohybují vůči sobě jen v ose x a „opravme“ Galileovu transformaci (1) za pomoci opravného koeficientu $\gamma(v)$, který se pro malé rychlosti blíží k jedné:

$$\tilde{x} = \gamma(x - vt), \quad (4)$$

Ze symetrie obou soustav plyne, že inverzní transformace musí mít stejný tvar, ale opačný směr rychlosti, tj.:

$$x = \gamma(\tilde{x} + v\tilde{t}). \quad (5)$$

Představme si nyní, že v okamžiku, kdy se obě soustavy míjejí, blikneme baterkou. Pokud se v obou soustavách světlo šíří stejnou rychlostí c , musí platit

$$x = ct; \quad \tilde{x} = c\tilde{t}, \quad (6)$$

proto z (4) a (5) máme

$$\begin{aligned} c\tilde{t} &= \gamma(ct - vt); \\ ct &= \gamma(c\tilde{t} + v\tilde{t}). \end{aligned} \quad (7)$$

vynásobením obou rovnic získáme relaci

$$c^2\tilde{t}\tilde{t} = \gamma^2(c - v)(c + v)t\tilde{t}, \quad (8)$$

v níž můžeme vykrátit oba časy a poté spočítat opravný koeficient γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (9)$$

Nová transformace souřadnic proto bude

$$\tilde{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (10)$$

Nyní již zbývá jen odvodit rovnici pro transformaci času. K tomu můžeme využít soustavu rovnic (4) a (5), v níž už známe koeficient γ . Z první rovnici dosadíme \tilde{x} do druhé rovnice a po snadném výpočtu vyjde

$$\tilde{t} = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11)$$

Nalezená transformace se nazývá Lorentzova transformace a pro celou událost (časovou i prostorovou souřadnici) ji můžeme zapsat ve tvaru

$$\tilde{t} = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \tilde{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \tilde{y} = y; \quad \tilde{z} = z, \quad (12)$$

Elegantnější je maticový zápis Lorentzovy transformace

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_S, \quad (13)$$

kde jsme označili

$$\beta = v/c; \quad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (14)$$

a souřadnice jsou $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ a $x_3 = z$. Časová souřadnice x_0 má stejný rozměr jako prostorové souřadnice. Transformaci rychlostí získáme diferencováním vztahu (12):

$$\tilde{u} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{(dx - v dt) / \sqrt{\dots}}{(dt - v dx/c^2) / \sqrt{\dots}} = \frac{dx - v dt}{dt - v dx/c^2}.$$

Po „vydělení“ čitatele i jmenovatele diferenciálem dt máme

$$\tilde{u} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}. \quad (15)$$

V případě, že je vzájemný pohyb soustav opačný ($v \rightarrow -v$), máme

$$\tilde{u} = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}. \quad (16)$$

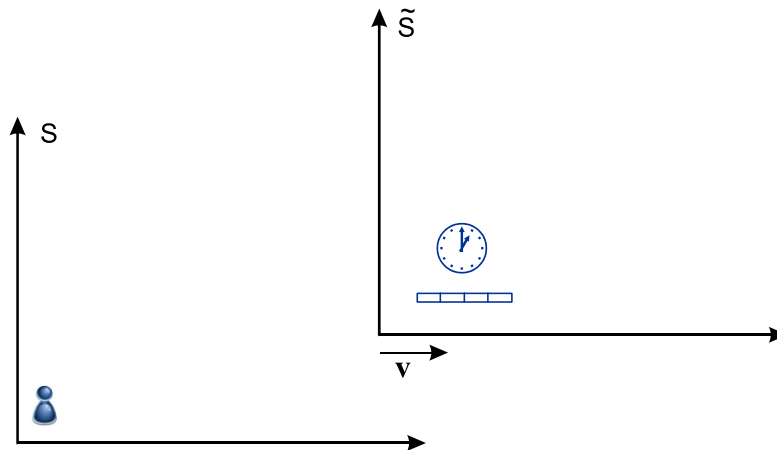
Transformace (15) a (16) představují nové skládání rychlostí. V čitateli je skládání shodné s Galileovým, ale ve jmenovateli je relativistická oprava, která se uplatní až při vysokých rychlostech. Položíme-li ve vztahu (16) rychlost u rovnou rychlosti světla, máme

$$\tilde{u} = \frac{c + v}{1 + cv/c^2} = \frac{c + v}{(c + v)/c} = c.$$

Vidíme, že rychlost světla se skutečně v nové transformaci s ničím neskládá a zůstane ve všech inerciálních soustavách stejná. Pro malé rychlosti v porovnání s rychlostí světla je oprava ve jmenovateli zanedbatelná a rychlosti se skládají galileovsky.

Dilatace času a kontrakce délek

Požadavek konstantní rychlosti světla s sebou přináší nové jevy. Rychlost světla je vzdálenost dělená časovým intervalem. Pokud má být tento poměr ve všech souřadnicových soustavách stejný, musí být vzdálenosti a časové intervaly závislé na tom, z jaké souřadnicové soustavy se díváme. Předpokládejme, že je pozorovatel v souřadnicové soustavě S , v pohybující se soustavě jsou hodiny a tyč mířící ve směru pohybu.



Napišme nyní přímou i zpětnou (bude se lišit znaménkem rychlosti) Lorentzovu transformaci pro čas a souřadnici x :

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & t &= \frac{\tilde{t} + v\tilde{x}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ \tilde{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & x &= \frac{\tilde{x} + v\tilde{t}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\end{aligned}\quad (17)$$

Pro konečné časové intervaly a pro konečné prostorové vzdálenosti máme:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{t} &= \frac{t - v \Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & \Delta t &= \frac{\Delta\tilde{t} + v \Delta\tilde{x}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ \Delta\tilde{x} &= \frac{x - v \Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & \Delta x &= \frac{\Delta\tilde{x} + v \Delta\tilde{t}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\end{aligned}\quad (18)$$

Hodiny se ve vlastní soustavě nepohybují, $\Delta\tilde{x} = 0$, $\Delta\tilde{t} = \Delta t_0$, pro transformaci časového intervalu bude proto výhodné použít druhý vztah (18), ze kterého plyne tzv. *dilatace času*

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19)$$

Časový interval je ve vlastní soustavě nejkratší možný. Nyní přejdeme k délce tyče. Její konce musíme měřit současně v souřadnicové soustavě pozorovatele, tj. $\Delta t = 0$, $\Delta\tilde{x} = \Delta x_0$. K odvození tedy bude nejvýhodnější třetí vztah (18), ze kterého plyne tzv. *kontrakce délek*

$$\Delta x = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta x_0. \quad (20)$$

Délka letících tyčí se zkracuje ve směru pohybu a nejdelší možná je ve vlastní souřadnicové soustavě.

Rapidita

Lorentzova transformace (13) má velmi jednoduché vlastnosti. Inverzní transformaci získáme pouhou záměnou znaménka rychlosti:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ +\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Determinant obou matic je roven jedné:

$$\det \Lambda = \gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \cdot (1 - v^2/c^2) = 1. \quad (22)$$

Z matematického hlediska jde proto o rotační transformaci. Substitucí

$$\begin{aligned}\cosh u &= \gamma; \\ \sinh u &= \gamma\beta\end{aligned}\quad (23)$$

můžeme Lorentzovu matici přepsat do jednoduchého tvaru

$$\Lambda = \begin{pmatrix} +\cosh u & -\sinh u & 0 & 0 \\ -\sinh u & +\cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Determinant je stále roven jedné, transformační matice je ale nyní formálně shodná s běžnou rotační maticí s obyčejnými siny a kosiny. Ty jsou v Lorentzově transformaci nahrazeny hyperbolickými funkcemi, což znamená, že úhel otočení je imaginární ($\varphi = iu$). Je zjevné, že rotace probíhá v rovině (t, x) . Veličinu u nazýváme rapiditou a její hodnotu získáme vydělením rovnic (23):

$$u = \operatorname{argtanh}\left(\frac{v}{c}\right). \tag{25}$$

Pro infinitezimální Lorentzovu transformaci můžeme využít Taylorův rozvoj (24):

$$\Lambda_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} 1 & -u & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - u \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Infinitezimální Lorentzovu transformaci tak lze rozložit na dvě maticové transformace, první je tvořena jednotkovou maticí (událost se nemění) a druhá matice jen zamění časovou a první prostorovou komponentu události. Infinitezimální Lorentzova transformace je tak jednou z nejjednodušších matematických transformací vůbec. Konečnou Lorentzovu transformaci je možné složit mnohonásobným opakováním transformace (26) s malou hodnotou rapidity.



2. METRIKA

Kovariantní a kontravariantní indexy

Předpokládejme, že máme lineární vektorový prostor opatřený bází $\{\mathbf{e}_k\}$. Vektor \mathbf{A} můžeme v této bázi rozvinout do výrazu

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N A^k \mathbf{e}_k = A^k \mathbf{e}_k. \quad (27)$$

Čísla A^k nazýváme složky (souřadnice, koeficienty rozvoje) vektoru, objekty \mathbf{e}_k prvky báze. Různá poloha indexů naznačuje, že se složky vektorů transformují jinak než prvky báze. Následně budeme využívat *sumační konvenci*, ale sčítání bude vždy probíhat přes jeden index dolní (transformuje se jako prvky báze) a jeden index horní (transformuje se jako složky vektorů). Přes dvojici stejného horního a dolního indexu se automaticky sčítá, jde o tzv. němé indexy. Poloha volných indexů (přes které se nesčítá) musí zůstat na obou stranách rovnosti vždy stejná. Přejdeme od jedné báze k nějaké jiné, „vlnkované“ bázi:

$$\{\mathbf{e}_k\} \rightarrow \{\tilde{\mathbf{e}}_k\}. \quad (28)$$

Vektor \mathbf{A} je objekt, jehož vyjádření nemůže záviset na volbě báze, tj. musí platit

$$\mathbf{A} = \tilde{A}^k \tilde{\mathbf{e}}_k = A^k \mathbf{e}_k. \quad (29)$$

Složky vektorů se mezi dvěma bázemi budou transformovat za pomoci nějaké matice \mathbf{S} :

$$\tilde{A}^k = S^k_l A^l. \quad (30)$$

Všimněte si, že se sčítá přes němý index l (jeden je nahoře a druhý dole). Volný index k je na obou stranách rovnosti nahoře. I u matic tak musíme rozlišovat horní a dolní indexy. Transformační matici prvků báze označme \mathbf{U} :

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = U^l_k \mathbf{e}_l. \quad (31)$$

Vyzkoušejte si, že jde o jedinou možnost, při které se sčítá přes jeden horní a jeden dolní index, volný index k má stejnou polohu na obou stranách rovnosti a transformační matice \mathbf{U} má stejně jako matice \mathbf{S} první index nahoře a druhý dole. Zjistíme nyní, jaký je vztah mezi oběma transformačními maticemi \mathbf{S} a \mathbf{U} . Vyjdeme z vyjádření vektoru \mathbf{A} v nové bázi (31):

$$\mathbf{A} = \tilde{A}^k \tilde{\mathbf{e}}_k = S^k_l A^l U^n_k \mathbf{e}_n = U^n_k S^k_l A^l \mathbf{e}_n.$$

Je zřejmé, že v nové bázi musí být výsledek $A^l \mathbf{e}_l$ nebo $A^k \mathbf{e}_k$, chcete-li. Toho lze ale dosáhnout jediným způsobem: v posledním výrazu musí platit

$$U^n_k S^k_l = \delta^n_l, \quad (32)$$

kde jsme označili δ^n_l Kroneckerovo delta. V maticovém zápise tato podmínka říká, že

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{1}. \quad (33)$$

Je zřejmé, že matice \mathbf{U} a \mathbf{S} jsou navzájem inverzní. To je patrné již přímo z rozkladu vektoru \mathbf{A} (29) do obou bází. Má-li být výsledek stejný, musí se složky vektorů (horní indexy) transformovat „opačně“ než prvky báze (dolní indexy). Jedině tak dají kombinace (29) výsledek nezávislý na volbě báze (vektor \mathbf{A}). Horní indexy budeme nazývat *kontravariantní*. Tyto indexy se transformují stejně jako složky vektoru, tj. pomocí transformační matice \mathbf{S} . Dolní indexy budeme nazývat *kovariantní*. Tyto indexy se transformují stejně jako prvky báze, tj. pomocí transformační matice \mathbf{U} . Indexů může být i více, například ze složek dvou vektorů můžeme sestavit výraz

$$T^{kl} \equiv A^k B^l; \quad \tilde{T}^{kl} \equiv S^k_o S^l_p T^{op}, \quad (34)$$

kteřý se musí transformovat jako součin složek vektorů. Za pomoci T^{kl} , můžeme vytvořit opět objekt nezávislý na souřadnicové soustavě, tzv. tenzor druhého řádu:

$$\tilde{\mathbf{T}} \equiv T^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (35)$$

Symbol $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ nazýváme diadický (tenzorový) součin, jde o uspořádanou dvojici prvků báze. Výraz $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ tak chápeme jako objekt se složkami, které tvoří matici $A^k B^l$:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A^k B^l \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (36)$$

Skalární součin, zvyšování a snižování indexů

Předpokládejme, že je na našem lineárním vektorovém prostoru definován skalární součin dvou vektorů $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, který splňuje základní vlastnosti skalárního součinu. Rozvineme-li oba vektory do báze, získáme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^k B^l \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = g_{kl} A^k B^l, \quad (37)$$

kde jsme označili

$$g_{kl} \equiv \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l \quad (38)$$

tzv. metrické koeficienty (metriku). Vidíme, že výsledek skalárního součinu dvou libovolných vektorů můžeme určit, pokud známe metrické koeficienty, tj. výsledek skalárních součinů všech prvků báze mezi sebou.

Označme inverzní matici k metrice

$$g^{kl} \equiv (g_{kl})^{-1}; \quad g^{kl} g_{lm} = \delta^k_m. \quad (39)$$

Zavedme nyní pomocné (duální) objekty

$$\mathbf{e}^k \equiv g^{kl} \mathbf{e}_l; \quad A_k \equiv g_{kl} A^l. \quad (40)$$

Nejde o skutečné prvky báze ani o skutečné komponenty vektoru, ale o formální lineární kombinace dané metrikou. Vždy platí, že index nahoře znamená transformaci pomocí stejné matice, jakou se transformují složky vektorů, a index dole znamená transformaci pomocí stejné matice, jakou se transformují prvky báze. Za pomoci metriky tak můžeme indexy libovolně snižovat nebo zvyšovat, stačí jen dodržet pravidlo, že sčítáme přes jeden horní a jeden dolní index (to zajistí invarianci součtu vzhledem k transformaci báze). Volné indexy zachovávají vždy svou polohu. Uvedme příklad:

$$g_{lo} T^{klm} = T^k_o{}^m.$$

Prostřední index jsme snížili za pomoci metriky. Skalární součin nyní můžeme zapsat několika způsoby:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{kl} A^k B^l = A^k B_k,$$

kde jsme druhý index snížili za pomoci metriky. Mohli jsme ale také snížit první index:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{kl} A^k B^l = A_l B^l = A_k B^k.$$

Platí tedy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{kl} A^k B^l = A^k B_k = A_k B^k. \quad (41)$$

Kontravariantní (horní) složka je skutečnou složkou vektoru, kovariantní (dolní) v sobě obsahuje metriku. Definici inverzní metriky (39) můžeme chápat také jako snižování či zvyšování indexů:

$$\begin{aligned} g^{kl} g_{lm} &= \delta^k_m; \\ g^{kl} g_{lm} &= g^k_m; \end{aligned} \Rightarrow g^k_m = \delta^k_m. \quad (42)$$

Metrika a Kroneckerovo delta jsou tak jediným objektem. Pokud jsou oba indexy dole, jde o metrické koeficienty. Pokud jsou oba indexy nahoře, jde o inverzní matici k metrickým koeficientům a pokud jsou indexy smíšené, jde o Kroneckerovo delta, tedy prvky jednotkové matice. Metrika tak není nic jiného než jednotková matice s patřičně posunutými indexy. Za pomoci tenzorového zápisu můžeme psát

$$\mathbf{1} = \delta^k_l \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^l = g_{kl} \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l = g^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (43)$$

Čtyřvektory, Minkowského metrika

Už víme, že ve speciální relativitě se událost transformuje (stejně tak rozdíl blízkých událostí) podle Lorentzovy matice:

$$\tilde{x}^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta; \quad d\tilde{x}^\alpha = A^\alpha_\beta dx^\beta; \quad A^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

kde A^α_β je Lorentzova transformační matice. Ve speciální relativitě nazýváme každou čtveřici veličin, jež se transformuje Lorentzovou transformací (tedy stejně jako událost nebo infinitesimální rozdíl událostí), čtyřvektor:

$$\tilde{V}^\alpha = A^\alpha_\beta V^\beta. \quad (45)$$

K základním čtveřicím patří *událost* (časová a prostorová souřadnice události), *čtyřhybnost* (energie a hybnost), *vlnový čtyřvektor* (úhlová frekvence a vlnový vektor), *čtyřpotenciál elektromagnetického pole* (skalární a vektorový potenciál), *čtyřtok* (zdrojové členy Maxwellových rovnic – hustota a tok náboje) nebo *čtyřgradient*. V soustavě SI musíme zajistit, aby všechny 4 složky měly stejný rozměr. To můžeme učinit nejjednodušeji vynásobením nebo vydělením časové složky univerzální konstantou c (rychlostí světla ve vakuu):

$$\begin{aligned} x^\mu &\equiv \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & P^\mu &\equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}; & k^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; \\ A^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; & j^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; & \partial_\mu &\equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial ct \\ \partial/\partial \mathbf{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (46)$$

Poznámky:

- Řeckými indexy budeme značit zásadně jen čtyřvektory (index 0 odpovídá časové části, indexy 1, 2, 3 prostorové části).
- U čtyřgradientu jde o kovariantní (dolní) index, protože

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

tedy skutečné složky vektorů jsou ve jmenovateli, pokud zapisujeme index v čitateli, musí mít opačnou polohu, neboť se transformační matice změní na inverzní!

Z podmínky konstantní rychlosti světla ve všech inerciálních soustavách

$$\frac{dl}{dt} = c \quad (47)$$

plyne

$$dl = c dt \quad \Rightarrow \quad \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = c dt \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2 &\Rightarrow -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \Rightarrow \\ -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Poslední řádek je rovnicí šíření světla ve speciální relativitě a můžeme z něho odečíst metriku speciální relativity, tzv. Minkowského metriku. Značíme ji $\eta_{\alpha\beta}$. Je diagonální a v časové části má minus. Totéž platí i pro inverzní matici (metriku s horními indexy). Metrika se smíšenými indexy je jednotková matice, tj. její prvky jsou Kroneckerovy symboly delta:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; & \eta^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; \\ \eta^\mu{}_\nu &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; & \eta_\mu{}^\nu &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (49)$$

Zjednodušeně se často Minkowského metriku píše jako $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Rovnici (48) můžeme za pomoci Minkowského metriky napsat jako

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (50)$$

Za pomoci metriky nyní snadno určíme kovariantní složky běžných čtyřvektorů a kontravariantní složku čtyřgradientu:

$$\begin{aligned} x_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & P_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}; & k_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; \\ A_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; & j_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\rho c \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; & \partial^\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\partial/\partial ct \\ \partial/\partial \mathbf{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (51)$$

Skalární součin dvou čtyřvektorů je definován jako

$$A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3. \quad (52)$$

Najděme některé typické skalární součiny:

$$k \cdot x = k^\mu x_\mu = k^0 x_0 + k^1 x_1 + k^2 x_2 + k^3 x_3 = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x},$$

nalevo je součin čtyřvektorů, poslední člen napravo je běžný součin v \mathbb{R}^3 . Obdobně určíme výsledky dalších příkladů

$$ds^2 \equiv dx \cdot dx = dx_\mu dx^\mu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

$$j \cdot A \equiv j_\mu A^\mu = -\rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0;$$

$$\square f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu f = 0.$$

Často se používá zkrácený zápis, při kterém se derivace píše za čárku. Indexy před čárkou jsou skutečnými indexy, indexy za čárkou jsou derivacemi:

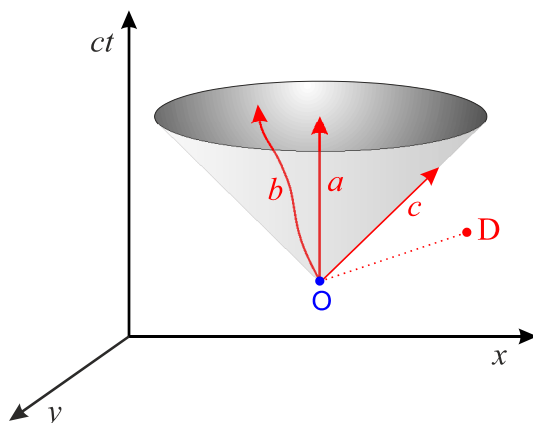
$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu V^\mu \equiv V^\mu{}_{,\nu}.$$

Jde vlastně o nejúspornější zápis derivace vůbec, ze kterého je zřejmé na první pohled, jak se derivace ve speciální relativitě transformuje. Uvedme další příklady:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} &\equiv \partial^\mu \varphi \equiv \varphi^{,\mu}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} &\equiv \partial_\mu \varphi \equiv \varphi_{,\mu}; \\ \frac{\partial^2 T^\alpha{}_\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} &\equiv \partial_\mu \partial^\nu T^\alpha{}_\beta \equiv T^\alpha{}_{\beta,\mu}{}^\nu; \\ \square f &\equiv \partial_\mu \partial^\mu f \equiv f_{,\mu}{}^\mu. \end{aligned}$$

Interval, vlastní čas a další čtyřvektory

Události jsou reprezentovány body v časoprostorovém diagramu. Na následujícím obrázku jsou například události O a D. Posloupnost událostí souvisící s jedním objektem se nazývá světočára objektu. Světočára a přísluší stojícímu objektu, objekt pohybující se proměnnou rychlostí má světočáru b a světlo světočáru c . Událost D není příčinně (kauzálně) spojená s událostí O, objekt spojující obě události by se musel pohybovat nadsvětelnou rychlostí. Uvnitř znázorněného kužele leží možná budoucnost události O a současně veškeré události, které může událost O ovlivnit. Hovoříme o tzv. kuželu budoucnosti.



Interval $ds^2 = dx \cdot dx = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ vyjadřuje časoprostorovou vzdálenost mezi dvěma blízkými (infinitesimálními) událostmi. Pokud obě události leží na libovolné světočáře (například a), je $ds^2 < 0$ (časová část převládne, jde o tzv. časupodobný vektor odpovídající časovému vývoji) a události jsou kauzálně spojené. Pokud leží obě události na světočáře světla, je $ds^2 = 0$. Pro libovolné dvě události na spojnici O a D na obrázku je $ds^2 > 0$ a události nemohou mít příčinou souvislost. Interval je invariantem Lorentzovy transformace, tedy ať ho spočítáme v kterékoli souřadnicové soustavě, dostaneme vždy stejný výsledek. Tento fakt zajišťuje, že příčina a důsledek jsou události, jejichž pořadí nelze zaměnit volbou jiné souřadnicové soustavy. Pokud spojíme dvě události s letící částicí, můžeme interval vyjádřit jak v laboratorní soustavě, tak v soustavě spojené s částicí ($dx = 0, t = \tau$):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 d\tau^2, \tag{53}$$

kde τ je tzv. vlastní čas, tj. čas plynoucí u částice samotné. Zřejmě platí

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2, \tag{54}$$

tedy vlastní čas je také invariantem Lorentzovy transformace. Jaký je vztah mezi vlastním časem τ a souřadnicovým časem t ? Abychom to zjistili, vyjádříme interval ve vlastní soustavě částice a v obecné souřadnicové soustavě. Odsud dostaneme vztah mezi oběma časy:

$$\begin{aligned} -c^2 d\tau^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \Rightarrow \\ c^2 d\tau^2 &= dt^2 \left(c^2 - (dx/dt)^2 - (dy/dt)^2 - (dz/dt)^2 \right) \quad \Rightarrow \end{aligned} \quad (55)$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}} dt.$$

Mezi oběma časy platí tedy vztah

$$dt = \gamma d\tau; \quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma. \quad (56)$$

Nejde o nic jiného než o vztah pro dilataci času. Ve vlastní soustavě plyne čas nejrychleji, doba mezi dvěma vlastními události bude nejkratší možná. Pokud chceme zavést správně čtyřrychlost, nemůžeme derivovat událost podle souřadnicového času. Takto definovaná čtyřrychlost by se netransformovala za pomoci Lorentzovy matice. Čtyřrychlost je nutné zavést za pomoci vlastního času, tedy

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (57)$$

Vlastní čas zde vystupuje jako parametrizace pohybu částice, tj. $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Vlastní čas nelze jako parametr použít pro světlo, neboť se nelze „odstěhovat“ do soustavy spojené se světlem (v této soustavě by se světlo nepohybovalo, což není možné). Dráhu fotonu je nutné parametrizovat jinak, například vlastní délkou λ uletěné trajektorie. Snadno nalezneme vztah čtyřrychlosti k běžné rychlosti částice:

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \gamma = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Pro pomalé pohyby je časová složka čtyřrychlosti dominantní. Čtyřhybnost zavedeme za pomoci čtyřrychlosti tak, že ji vynásobíme klidovou hmotností částice, tj.

$$P^\mu \equiv m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Transformační vlastnosti budou opět zachovány, čtyřhybnost je čtyřvektorem. Pokud zavedeme „pohybovou“ hmotnost vztahem

$$m \equiv \gamma m_0, \quad (60)$$

budeme pro čtyřhybnost mít jednoduchý vztah

$$P^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ m\mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Musíme mít ale na paměti, že označení m není skutečná hmotnost, ale jen zkratka pro součin γm_0 . Sám Einstein pohybovou hmotnost nezaváděl. Porovnáme-li vyjádření čtyřhybnosti (46) s vyjádřením (61), máme okamžitě známé vztahy

$$E = mc^2; \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}; \quad m \equiv \gamma m_0. \quad (62)$$

Čtyřzrychlením budeme rozumět čtyřvektor, který získáme derivováním čtyřrychlosti podle vlastního času, tj.

$$a^\mu \equiv \frac{dU^\mu}{d\tau}. \quad (63)$$

Nehledejte logiku v používání malých a velkých písmen, žádná zde není. Jediným kritériem je, aby bylo co nejméně konfliktů se značením v jiných částech učebnice.

Velikost čtyřvektoru

Velikostí čtyřvektoru chápeme ve speciální relativitě skalární součin čtyřvektoru se sebou samým,

$$V \cdot V = V_\mu V^\mu = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = -(V^0)^2 + (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2. \quad (64)$$

Ve skutečnosti tedy jde o kvadrát velikosti vektoru v běžném slova smyslu. Tato velikost může být záporná (čtyřvektor dominantně míří ve směru časové osy, je časupodobný), kladná (čtyřvektor dominantně míří ve směru prostorových os, je prostorupodobný), nebo nulová (čtyřvektor míří ve směru světelného kužele). Nalezneme velikost čtyřrychlosti

$$U_\mu U^\mu = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{-c^2 d\tau^2}{d\tau^2} = -c^2. \quad (65)$$

Čtyřrychlost je tedy časupodobným vektorem. Obdobně nalezneme velikost čtyřhybnosti:

$$P_\mu P^\mu = m_0^2 U_\mu U^\mu = -m_0^2 c^2. \quad (66)$$

Povšimněte si, že pro světlo jde o nulový čtyřvektor (s nulovou velikostí). Pokud pro levou stranu rovnosti využijeme vztah (51), získáme okamžitě tzv. Pythagorovu větu pro energii:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (67)$$

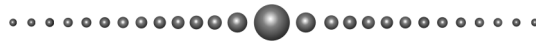
Pro částice s nulovou klidovou hmotou (například foton), dostaneme jednoduchý vztah mezi energií a hybností:

$$E = pc. \quad (68)$$

Ukažme nyní, že čtyřrychlost je kolmá na čtyřzrychlení ve smyslu skalárního součinu v Minkowského metrice. K tomu postačí derivovat dle vlastního času velikost čtyřrychlosti:

$$\begin{aligned} U_\mu U^\mu = -c^2 &\quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} (U_\mu U^\mu) = 0, \\ a_\mu U^\mu + a^\mu U_\mu = 0 &\quad \Rightarrow \quad 2a^\mu U_\mu = 0, \\ a^\mu U_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Čtyřvektory definované v této kapitole budeme používat i v obecné relativitě, tedy i v případě, když je skalární součin dán obecnou metrikou $g_{\alpha\beta}$.



3. PRINCIP EKVIVALENCE

Hmotnost tělesa se na první pohled zdá být bezproblémovou záležitostí, ale tak jednoduché to není. Hmotnost můžeme definovat dvojím způsobem a to, zda si obě hmotnosti jsou rovny, je zcela principiální záležitostí. Etalon hmotnosti je uložen v Mezinárodním úřadu měř a vah v Sèvres v blízkosti Paříže. Jde o poslední etalon, který v budoucnu musí být nahrazen vhodnější definicí, neboť při každém čištění se počet atomů v etalonu zmenší, a definice kilogramu se proto neustále mění.

Setrvačná a gravitační hmotnost

Hmotnost tělesa můžeme definovat buď podle jeho setrvačných účinků, nebo z gravitačního působení na ostatní tělesa.

Setrvačná hmotnost

Podle Newtonova pohybového zákona je zrychlení tělesa přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné jeho hmotnosti. Tuto hmotnost nazýváme setrvačná hmotnost a lze ji definovat například takto:

Setrvačná hmotnost je schopnost tělesa zachovávat svůj pohybový stav (klid nebo rovnoměrný přímočarý pohyb).

Míč má malou setrvačnou hmotnost. Snadno ho zachytíme (změníme jeho pohyb na klid) a stejně snadno ho hodíme (změníme jeho klid na pohyb). Naopak vlak má z pohledu člověka velkou setrvačnou hmotnost – holýma rukama vlak ani nezastavíme, ani nerozpohybujeme. Setrvačnou hmotnost můžeme měřit například přímo z Newtonova zákona za pomoci zrychlení, které daná síla udělí určitému tělesu.

Gravitační hmotnost

Podle gravitačního zákona se všechna tělesa navzájem přitahují, a to přímo úměrně jejich hmotnostem a nepřímo úměrně kvadrátu jejich vzdálenosti. Tuto hmotnost nazýváme gravitační hmotnost a lze ji definovat například takto:

Gravitační hmotnost je schopnost těles se vzájemně přitahovat.

Slunce má větší gravitační hmotnost než malý kámen. Gravitační hmotnost můžeme měřit vážením, kdy porovnáváme přitahování předmětů naší Zemí oproti referenčnímu závaží.

Pokud za etalon obou hmotností zvolíme jeden a tentýž objekt, bude roven jeden kilogram setrvačné hmotnosti jednomu kilogramu gravitační hmotnosti. Bude tomu tak ale i pro větší množství látky? Bude setrvačná hmotnost libovolného objektu rovna hmotnosti gravitační? Jsou setrvačné a gravitační účinky shodné?

Princip ekvivalence

Představme si jednoduché pohyby v tíhovém poli, které jsou popsány rovnicí

$$m_s \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}, \quad (70)$$

kde \mathbf{F} je tíhová síla daná předpisem $\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}$. V tomto vztahu vyjadřuje hmotnost schopnost tělesa být přitahováno Zemí, proto jde o gravitační hmotnost. Celková pohybová rovnice má proto tvar

$$m_s \ddot{\mathbf{x}} = m_g \mathbf{g}. \quad (71)$$

Pokud jsou si hmotnosti rovny (postačila by i jejich úměrnost), lze je zkrátit a výsledný pohyb nebude záviset na hmotnosti tělesa. Skleněná kulička se bude pohybovat po stejné dráze jako letící cihla; malý šroubek dopadne při pádu z věže na zem za stejnou dobu jako betonový panel. Takové tvrzení samozřejmě neplatí pro pírkó, kde má rozhodující vliv odpor vzduchu, který jsme v rovnici (71) zanedbali. První logická úvaha, vedoucí k tomu, že pohyb těles nezávisí na jejich hmotnosti, pochází od Galilea Galileiho. Představme si například

padající cihlu. Pokud z ní odломíme například třetinu a obě části spojíme tenkým drátem (jeho hmotnost je zanedbatelná), budou obě části padat shodně jako původní cihla. Pokud drátek přestřihneme, na pohybu se nic nezmění a obě části budou opět padat stejně. Z této úvahy plyne, že by neměl volný pád záviset na hmotnosti tělesa. Nejde jen o tíhové pole, ale například i pohyb v okolí Slunce, jehož gravitační hmotnost označíme M_g . Pohybová rovnice těles v okolí Slunce bude

$$m_s \ddot{\mathbf{x}} = -G \frac{m_g M_g}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (72)$$

Pokud je setrvačná a gravitační hmotnost testovacího tělesa shodná, zkrátí se, a pohyb těles kolem Slunce nebude opět záviset na jejich hmotnosti. Planeta i šroubek uvolněný z raketo-plánu se kolem Slunce budou pohybovat po stejné trajektorii, pokud byly jejich počáteční polohy a rychlosti shodné. To nás vede k formulaci principu ekvivalence.

Slabý princip ekvivalence

Setrvačné a gravitační hmotnosti těles si jsou úměrné. Při volbě společného etalonu pro obě hmotnosti jde o rovnost. Setrvačné a gravitační účinky jsou při pohybu shodné. Zrychlený pohyb neodlišíme od lokálního účinku gravitace.

Silný princip ekvivalence

Elektromagnetické pole je nositelem energie, hybnosti i momentu hybnosti a dokáže zprostředkovat přenos těchto veličin. Energii elektromagnetického pole odpovídá dle vztahu $E = mc^2$ i určitá hmotnost. Předpoklad, že i tato hmotnost má jak setrvačné, tak gravitační účinky (tj. i elektromagnetické pole je schopné gravitačního přitahování) je obsahem *silného principu ekvivalence*.

Velmi silný princip ekvivalence

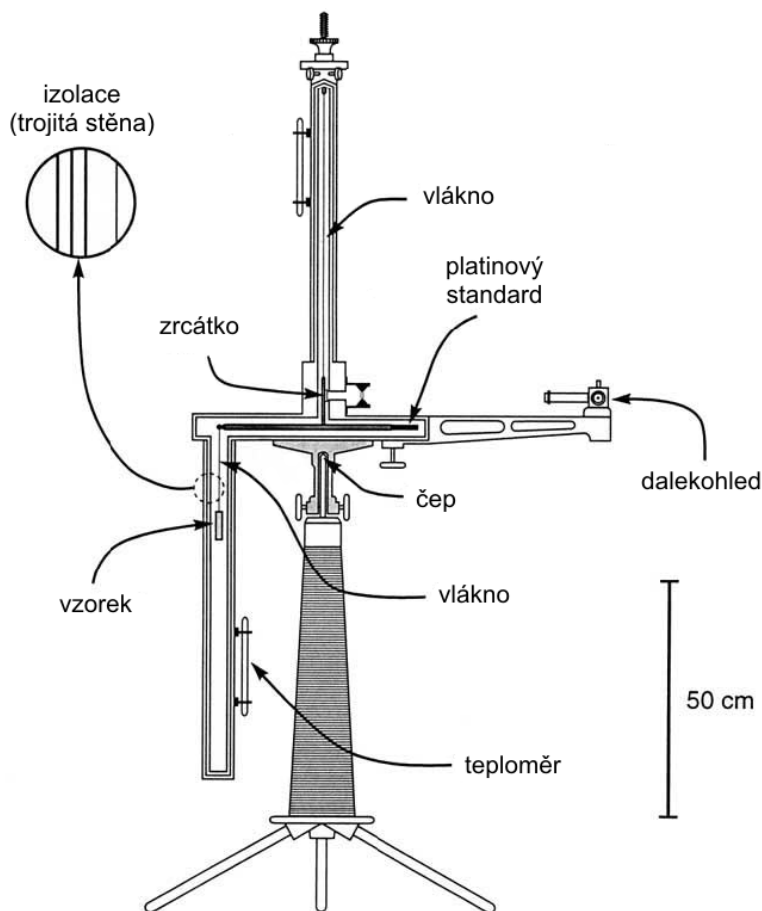
Velmi silný princip ekvivalence předpokládá, že i samo gravitační pole je nositelem energie a tím i hmotnosti, jež má setrvačné i gravitační účinky, které od sebe nelze odlišit.

Experimenty

Princip ekvivalence je zcela zásadním tvrzením, ať už v kterékoli své podobě. O jeho experimentální ověření se proto pokoušela řada fyziků. První přesnější experiment provedl maďarský fyzik Loránd Eötvös. Od roku 1885 experiment zpřesňoval, v roce 1909 dosáhli Loránd Eötvös, Jenő Fekete a Dezső Pekár ověření ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti s relativní přesností 5×10^{-9} . Podstatou experimentu byla dvě tělesa z různých materiálů umístěná na koncích vodorovné tyčky, která byla zavěšena na vláknech (jde o tzv. torzní váhy). Na tělesa působí jednak gravitační síla, která je dána gravitační hmotností těles, a jednak odstředivá síla rotace Země, která je dána setrvačnou hmotností zavěšených těles. Pokud by si obě hmotnosti nebyly úměrné, došlo by ke vzniku torzní síly, která by stočila tyčku mezi tělesy. Nic takového se ale nestalo i přes mnohá opakování experimentu s různými tělesy a na různých místech. Eötvösův experiment byl později mnohokrát opakován a zpřesňován dalšími autory. V roce 1964 Robert Dicke, Robert Krotkov a Peter Roll upravili experiment tak, že měřili i rozdíl zrychlení způsobený Sluncem. Pro kombinaci těles zlato/hliník dosáhli relativní přesnosti ověření principu ekvivalence 10^{-11} . V roce 1996 ověřil ekvivalenci mezi setrvačnou a gravitační hmotností z odrazu laserového paprsku od Měsíce (soustava Země-Měsíc v poli Slunce) Jean Dicke s relativní přesností 4×10^{-13} . V roce 2012 provedla skupina vědců z Washingtonské univerzity vedená Ericem Adelbergem experimenty s torzními vahami (beryllium/hliník, beryllium/titan), které ověřily princip ekvivalence s relativní přesností 3×10^{-14} .

Připravovaný gravitační experiment STEP (*Satellite Test of the Equivalence Principle*), který měl ověřit princip ekvivalence na oběžné dráze s relativní přesností 10^{-18} , byl pro nedostatek financí zrušen. Pravděpodobně se na tom podepsal neúspěch sondy Gravity Probe B, která měla testovat strhávání časoprostoru rotujícím tělesem, ale rušení slunečním plazmatem bylo

natolik silné, že byla měření sondy neprůkazná. Od roku 2013 se v Evropském středisku jaderného výzkumu CERN v experimentu AEGIS zjišťuje, zda gravitace působí stejně na hmotu i antihmotu. Podle předběžných výsledků platí princip ekvivalence jak pro hmotu, tak pro antihmotu.



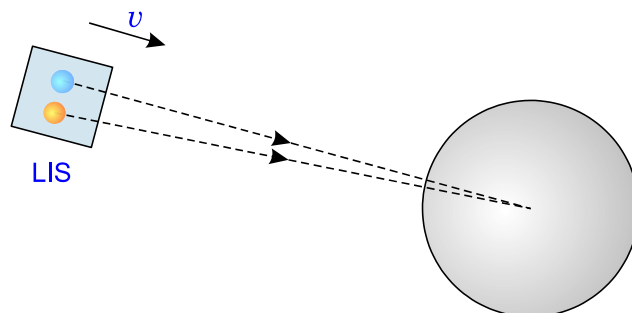
Náčrtek původních Eötvösových vah. Torzní pohyb byl sledován za pomoci zrcátka a dalekohledu. Originál je uložen v muzeu Geofyzikální observatoře v Tihani. Kresba Fischbach a Talmadge.

Lokálně inerciální soustava

Padající výtah

Přestavte si, že jedete výtahem a ten se utrhne. Představa to sice není nijak hezká, ale pokud jste fyzik tělem i duší, můžete si alespoň po krátkou dobu užívat inerciální soustavu, ve které platí speciální relativita. Pokud jste kuřák a údivem Vám vypadne nedopalek cigarety z úst, můžete pozorovat zajímavý jev. Z principu ekvivalence plyne, že vy, cigareta i výtah budou v tíhovém poli padat stejným způsobem. Cigareta tak zůstane jakoby zavěšena před vašimi očima. Vyndejte z kapsy klíče a položte je před sebe. Zůstanou tam stát. A pokud klíče hodíte, začnou se pohybovat po přímce konstantní rychlostí. V padajícím výtahu proto platí zákon setrvačnosti. Pokud na těleso nepůsobí síla, je buď v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Z principu ekvivalence tedy plyne, že v padajícím výtahu pocítujeme stav beztlíže a že gravitační efekty vymizí. Gravitační pole je možné eliminovat vhodně zrychleným pohybem. Platí to i naopak. Pokud není přítomno žádné gravitační pole a pojedeme ve zrychlující se kabině (kosmické lodi), zažijeme obdobný pocit, jako by na nás působila tíže. Setrvačné a gravitační jevy jsou si velmi blízké. S velikostí výtahu to ale nesmíme přehnat. Pokud by jeho velikost byla srovnatelná s naší Zemí, budeme vnímat nehomogenitu tíhového pole a objevíme odchylky od zákona setrvačnosti. Náš výtah tedy musí být dostatečně malý. Experimenty také nesmíme provozovat příliš dlouho, po delší době bychom pozorovali malé

přibližování těles padajících s námi, protože vše padá do centra Země a ve skutečnosti nejde o rovnoběžné trajektorie. Zákony speciální relativity platí ve volně gravitující kleci malých rozměrů, ve které provádíme experimenty po krátkou dobu. Taková klec je ideální inerciální souřadnicovou soustavou. Nazýváme ji lokální inerciální soustava (LIS).



Speciální a obecná relativita

Princip ekvivalence má i další závažný důsledek. Představme si pohyb těles v okolí našeho Slunce. Jejich trajektorie nezávisí na hmotnosti těles, ale jsou dány pouze počáteční polohou a rychlostí. Jsou tedy určeny jen centrálním tělesem (Sluncem) a nikoli obíhajícími tělesy. Odsud už je jen krůček k představě, že Slunce nějak pokrřivilo prostor a čas kolem sebe a ostatní tělesa v tomto pokrřiveném světě pohybují po nejrovnějších možných drahách. Takové pojetí gravitace přinesl Albert Einstein v roce 1916. Hovoříme o geometrické teorii gravitace neboli o obecné relativitě. Tato teorie dává do souvislosti existenci času a prostoru s přítomností těles. Každé těleso, nejenom Slunce, poněkud zakříví čas a prostor kolem sebe a tím přispěje svým malým vkladem k existenci těchto entit. Už nejde o vnější parametry pohybu, bez těles by čas a prostor neexistovaly. Základní úlohou obecné relativity je popsat, jak tělesa zakřívují čas a prostor a jak se v tomto světě pohybují.

Často může být užitečné řešit danou úlohu z hlediska LIS, kde platí speciální relativita a nalezené řešení transformovat do obecné souřadnicové soustavy. Není to sice přímočaré, ale často velmi názorné. Korektní řešení musí ovšem z rozložení hmoty a energie určit metrický tenzor a ze znalosti metrického tenzoru zjistit pohyb těles. Uvidíme, že obecná relativita byla historicky první teorií, která má v jediné sadě rovnic obsažen jak pohybový, tak polní zákon.



4. KOVARIANTNÍ DERIVACE

Při derivování čtyřvektoru se v časoprostoru také událost od události mění bázové vektory, proto musíme psát:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^\beta} = \partial_\beta (A^\alpha \mathbf{e}_\alpha) = A^\alpha{}_{;\beta} \mathbf{e}_\alpha + A^\alpha \mathbf{e}_{\alpha,\beta} \quad (73)$$

Derivace bázového vektoru $\mathbf{e}_{\alpha,\beta}$ musí být opět vektorem, tedy ji lze zapsat jako lineární kombinaci bázových vektorů:

$$\mathbf{e}_{\alpha,\beta} = \Gamma^\delta{}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\delta \quad (74)$$

Koeficienty lineární kombinace se nazývají *koeficienty afinní konexe*. Výraz pro derivaci čtyřvektoru lze snadno upravit na tvar

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^\beta} = (A^\alpha{}_{;\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} A^\xi) \mathbf{e}_\alpha. \quad (75)$$

Výraz v závorce se nazývá kovariantní derivací, první část je běžná parciální derivace, druhá je způsobena změnou bázových vektorů od místa k místu, tedy zakřivením časoprostoru. Tuto derivaci značíme středníkem:

$$A^\alpha{}_{;\beta} \equiv A^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} A^\xi. \quad (76)$$

Pro skalární funkci splývá tato derivace s běžnou derivací (skalár nepotřebuje k vyjádření bázové vektory, není, co by se měnilo):

$$\phi_{;\beta} = \phi_{,\beta}. \quad (77)$$

Vlastnosti koeficientů afinní konexe

Afinní konexe není tenzorovou veličinou, její indexy se netransformují podle tenzorových pravidel. V praxi to znamená, že tyto indexy nemůžeme zvyšovat a snižovat. Indexy $A_{;\mu}$ vytvořené kovariantním derivováním naopak mají tenzorový charakter a lze je zvyšovat a snižovat. Pro obyčejnou parciální derivaci $A_{,\mu}$ toto neplatí, chybí zde část derivace daná zakřivením časoprostoru.

Prototypem čtyřvektoru lokalizovaném v bodě časoprostoru je infinitezimální posunutí souřadnic

$$d\xi = dx^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \quad (78)$$

Bázové vektory a jejich derivace lze proto formálně zapsat jako

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} = \xi_{,\alpha}; \quad \mathbf{e}_{\alpha,\beta} = \xi_{,\alpha\beta}. \quad (79)$$

Pokud jde o časoprostor bez diskontinuit a torzních zkroucení, jsou druhé derivace záměnné, tj. platí $\mathbf{e}_{\alpha,\beta} = \mathbf{e}_{\beta,\alpha}$ a dolní indexy koeficientů afinní konexe musí být proto symetrické:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}. \quad (80)$$

V takovém případě tyto koeficienty nazýváme Christoffelovy symboly.

Kovariantní derivace tenzoru druhého řádu

Složky tenzorů druhého řádu se transformují jako součiny dvou vektorů, proto spočítáme kovariantní derivaci jakéhosi prototypu tenzoru druhého řádu $T^{\alpha\beta} \equiv A^\alpha B^\beta$:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} &= (A^\alpha B^\beta)_{;\gamma} = A^\alpha{}_{;\gamma} B^\beta + A^\alpha B^\beta{}_{;\gamma} = \\ &= (A^\alpha{}_{,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\gamma} A^\xi) B^\beta + A^\alpha (B^\beta{}_{,\gamma} + \Gamma^\beta{}_{\xi\gamma} B^\xi) = \end{aligned}$$

$$= \left(A^\alpha B^\beta \right)_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\xi\gamma} A^\xi B^\beta + \Gamma^\beta_{\xi\gamma} A^\alpha B^\xi$$

Odsud je zřejmé, že je u tenzoru druhého řádu nutné derivovat každou složku zvlášť:

$$T^{\alpha\beta}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\xi\gamma} T^{\xi\beta} + \Gamma^\beta_{\xi\gamma} T^{\alpha\xi}. \quad (81)$$

Toto pravidlo snadno zobecníme pro tenzor n -tého řádu:

$$T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_N}_{;\gamma} = T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_N}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha_1}_{\xi\gamma} T^{\xi\alpha_2\dots\alpha_N} + \Gamma^{\alpha_2}_{\xi\gamma} T^{\alpha_1\xi\dots\alpha_N} + \dots + \Gamma^{\alpha_N}_{\xi\gamma} T^{\alpha_1\alpha_2\dots\xi}. \quad (82)$$

Kovariantní derivace kovariantní složky

Vzhledem k tomu, že u Christoffelových symbolů nemůžeme snižovat a zvyšovat indexy, musíme derivaci kovariantních složek zjistit jinak. Velikost čtyřvektoru nezávisí na volbě souřadnic a její kovariantní derivace musí proto být nulová, tj.:

$$\begin{aligned} \left(A^\alpha A_\alpha \right)_{;\beta} = 0 &\quad \Rightarrow \quad A^\alpha_{;\beta} A_\alpha + A^\alpha A_{\alpha;\beta} = 0 \quad \Rightarrow \\ \left(A^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\xi\beta} A^\xi \right) A_\alpha + A^\alpha A_{\alpha;\beta} = 0 &\quad \Rightarrow \\ A^\alpha_{,\beta} A_\alpha + \Gamma^\alpha_{\xi\beta} A^\xi A_\alpha + A^\alpha A_{\alpha;\beta} = 0 \end{aligned}$$

V prvním výrazu převedeme derivaci k druhému součiniteli (pomocí derivace součinu), ve druhém výrazu zaměníme sčítací indexy:

$$\begin{aligned} -A^\alpha A_{\alpha;\beta} + \Gamma^\xi_{\alpha\beta} A^\alpha A_\xi + A^\alpha A_{\alpha;\beta} = 0 &\quad \Rightarrow \\ \left[-A_{\alpha;\beta} + \Gamma^\xi_{\alpha\beta} A_\xi + A_{\alpha;\beta} \right] A^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že uvedená rovnost musí platit pro každé A_α , musí být hranatá závorka nulová, a snadno již určíme derivaci kovariantní složky vektoru:

$$A_{\alpha;\beta} = A_{\alpha,\beta} - \Gamma^\xi_{\alpha\beta} A_\xi. \quad (83)$$

Před Christoffelovým symbolem je znaménko minus. Pro tenzor druhého řádu opět derivujeme jednotlivé indexy:

$$T_{\alpha\beta;\gamma} = T_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^\xi_{\alpha\gamma} T_{\xi\beta} - \Gamma^\xi_{\beta\gamma} T_{\alpha\xi}. \quad (84)$$

Kovariantní derivace metriky

V této části ukážeme, že metrika s jakkoli umístěnými složkami se vzhledem ke kovariantní derivaci chová jako konstanta, kovariantní derivace metriky je vždy nulová. Postačí si uvědomit, že metrika s kontravariantními indexy je inverzní maticí k metrice s kovariantními indexy:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma.$$

Napravo je Kroneckerův symbol, tj. prvky jednotkové matice, která je ve všech bázích stejná a její derivace je nulová:

$$\left(g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \right)_{;\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad g^{\alpha\beta}_{;\delta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma;\delta} = 0.$$

Všechny indexy mají tenzorový charakter a lze na ně uplatnit veškerá pravidla pro zvyšování a snižování indexů a pravidla pro záměnu indexů:

$$\begin{aligned} g^\alpha_{\gamma;\delta} + g^\alpha_{\gamma;\delta} = 0 &\quad \Rightarrow \quad 2g^\alpha_{\gamma;\delta} = 0 \quad \Rightarrow \\ g_{\alpha\beta;\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Vztah mezi Christoffelovými symboly a metrikou

Metrika kompletně určuje vlastnosti zakřiveného časoprostoru. Christoffelovy symboly je proto možné za pomoci metriky vyjádřit. Rozepíšeme-li kovariantní derivaci ve vztahu (85) podle vztahu (84), okamžitě máme:

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma} g_{\xi\beta} + \Gamma^{\xi}_{\beta\gamma} g_{\alpha\xi}. \quad (86)$$

Nyní je již jen algebraickým dosazením dokázat, že Christoffelovy symboly je možné ze známé metriky určit za pomoci jednoduchého vztahu:

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (g_{\xi\alpha,\beta} + g_{\xi\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\xi}). \quad (87)$$

Ve fyzice používáme často zkrácený zápis

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \quad (88)$$

Vlastnosti kovariantní derivace

Kovariantní derivace v sobě zahrnuje jak změnu samotných složek vektoru, tak změnu básových vektorů. Křivost se projeví v kovariantní derivaci členem s Christoffelovými symboly. Ty jsou určitelné z metriky. Pro součin a součet derivací platí stejná pravidla jako u obyčejné parciální derivace. Indexy vzniklé kovariantním derivováním mají charakter tenzorových indexů a lze je zvyšovat a snižovat. U Christoffelových symbolů lze indexy doplnit jednoznačným způsobem. Při derivaci horních (kontravariantních) indexů je před Christoffelovým symbolem znaménko plus, při derivaci dolních (kovariantních) indexů minus. Kovariantní derivace složek tenzorů vyššího řádu se provádějí pro každou složku zvlášť. Kovariantní derivace skalární funkce je shodná s parciální derivací. Kovariantní derivace metriky je nulová. Shrňme nyní tato pravidla do jednoduché tabulky:

$$\begin{aligned} (A^{\alpha} + B^{\alpha})_{;\beta} &= A^{\alpha}_{;\beta} + B^{\alpha}_{;\beta}, \\ (A^{\alpha} B^{\beta})_{;\gamma} &= A^{\alpha}_{;\gamma} B^{\beta} + A^{\alpha} B^{\beta}_{;\gamma}, \\ A^{\alpha}_{;\beta} &\equiv A^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\xi\beta} A^{\xi}, \\ A_{\alpha;\beta} &= A_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta} A_{\xi}, \\ T^{\alpha\beta}_{;\gamma} &= T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\xi\gamma} T^{\xi\beta} + \Gamma^{\beta}_{\xi\gamma} T^{\alpha\xi}, \\ T_{\alpha\beta;\gamma} &= T_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma} T_{\xi\beta} - \Gamma^{\xi}_{\beta\gamma} T_{\alpha\xi}, \\ \phi_{;\beta} &= \phi_{,\beta}, \\ g_{\alpha\beta;\gamma} &= 0, \\ \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} &= \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}, \\ \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (g_{\xi\alpha,\beta} + g_{\xi\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\xi}). \end{aligned} \quad (89)$$

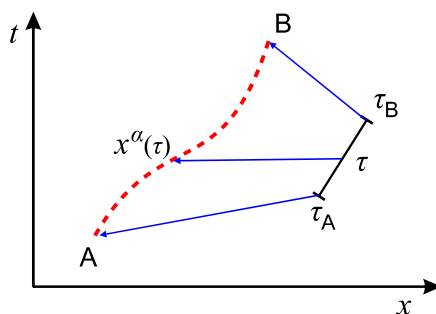


5. ROVNICE GEODETIKY

Částice se pohybuje po nejrovnější možné dráze v křivém v časoprostoru, tzv. *geodetice*. Rovnice geodetiky nahrazuje v obecné relativitě pohybové rovnice částice.

Úplná derivace vektorového pole

Představme si, že je v časoprostoru přítomno nějaké vektorové pole $A^\mu(x^\alpha)$, které se mění s časem i s prostorem. K dispozici máme také nějakou křivku nataženou mezi událostmi A a B, například světočáru částice. Tato křivka je parametrizována parametrem τ – v případě světočáry částice může jít o vlastní čas částice.



Parametrizace časoprostorové křivky mezi událostmi A a B za pomoci parametru τ .

Hledejme změnu našeho vektorového pole podél křivky:

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = A^{\mu, \nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (90)$$

Je zjevné, že jde o správnou změnu v rovném časoprostoru. V křivém časoprostoru musí být složky vektorového pole derivovány kovariantně, tj. tak, aby byly vzaty v úvahu i změny bázových vektorů a aby derivace složek pole tvořily tenzor druhého řádu. Proto zavedeme tzv. úplnou derivaci předpisem

$$\blacktriangleright \quad \frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv A^{\mu, \nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (91)$$

Nyní tvoří veličina $A^{\mu, \nu}$ složky tenzoru druhého řádu a v derivaci je obsažen i křivostní člen. Jaký je vztah mezi běžnou a úplnou derivací? Abychom to zjistili, rozepíšeme kovariantní derivaci dle vztahu (76):

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \left[A^{\mu, \nu} + \Gamma^{\mu}_{\xi\nu} A^\xi \right] \frac{dx^\nu}{d\tau} = A^{\mu, \nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\xi\nu} A^\xi \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (92)$$

První člen je běžnou derivací (90), proto máme

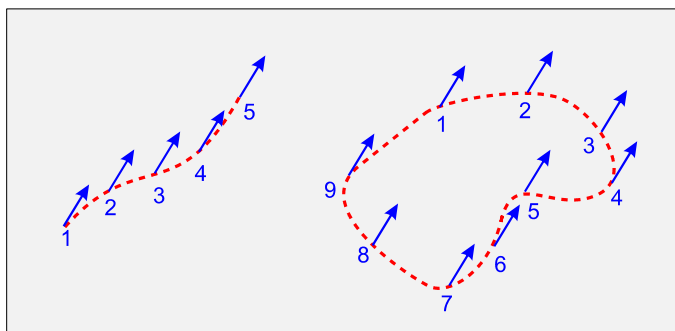
$$\blacktriangleright \quad \frac{DA^\mu}{D\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\xi\nu} A^\xi \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (93)$$

Interpretace je zřejmá: první člen je „obyčejnou“ derivací, druhý člen způsobilo zakřivení časoprostoru.

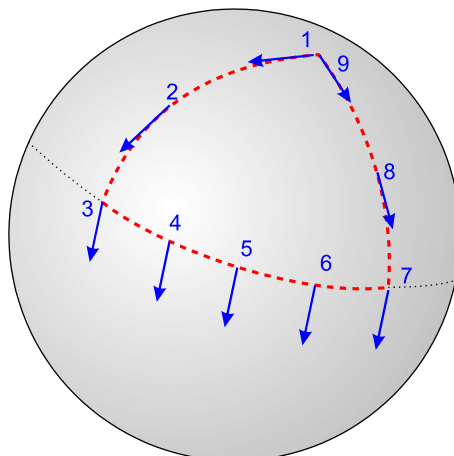
Paralelní přenos vektoru podél křivky

V rovném časoprostoru nazýváme *paralelním přenosem* postupné přesouvání vektoru podél křivky. Pokud přesuneme vektor podél uzavřené křivky, vrátí se po oběhu křivky do výchozího bodu v nezměněné podobě. V křivém prostoru to bude složitější. Představme si například paralelní přenos vektoru po povrchu koule, kde máme vytyčeny póly a rovník. Naše křivka půjde nejprve od pólu podél poledníku k rovníku. Poté bude pokračovat podél rovníku

a nakonec se po jiném poledníku vrátí zpět k pólu. Půjde tedy o uzavřenou křivku. Na pólu začneme s vektorem, který bude tečný k naší křivce a bude mířit směrem k rovníku. Po každém rovnoběžném posunutí podél poledníku budeme muset náš vektor sklopit (provést projekci) do tečné roviny v daném bodě, protože se musí transformovat jako infinitezimální vektor. Takto vektor dopravíme až na rovník a poté s ním budeme „cestovat“ podél rovníku. Nakonec ho podél jiného poledníku dopravíme zpět k pólu (opět ho budeme muset sklápět do tečné roviny). Výsledek je mimořádně zajímavý. Vektor, který jsme přepravovali podél naší křivky, změnil v průběhu své cesty směr!



Paralelní přenos vektoru v rovině podél otevřené a uzavřené křivky. Křivka leží v rovině, přesouvané vektory také.



Paralelní přenos vektoru po uzavřené křivce na povrchu koule.

V rovném časoprostoru popíšeme paralelní přenos jednoduchou rovnicí (vektor se při přenosu podél křivky nemění):

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = 0. \tag{94}$$

V pokřiveném časoprostoru bude rovnice stejně jednoduchá, jen musíme vzít v úvahu měnící se křivost a psát

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = 0. \tag{95}$$

Rozepíšeme tuto rovnici za pomoci kovariantní derivace a Christoffelových symbolů, viz (92):

$$\blacktriangleright \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\xi\nu} A^\xi \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{96}$$

Toto je hledaná rovnice paralelního přenosu vektorového pole A^μ podél křivky $x^\nu(\tau)$. Pokud bude časoprostor rovný a Christoffelovy symboly nulové, splyne tato rovnice s rovnicí (94) pro rovný časoprostor.

Rovnice geodetiky

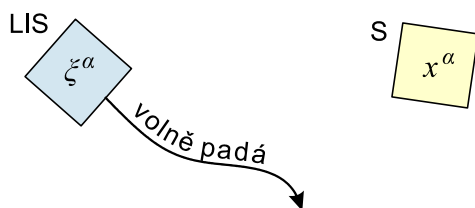
Pokud budeme sledovat nějaký zajímavý děj, může být vždy vodítkem to, jak děj probíhá v lokálně inerciální soustavě (LIS), tedy v soustavě, která po krátkou dobu v malé oblasti prostoru volně padá v gravitačních polích ostatních těles. V takové soustavě platí zákony speciální relativity, volný hmotný bod se pohybuje rovnoměrně přímočaře a metrický tenzor je dán Minkowského metrikou. Označíme-li souřadnice v LIS ζ^{α} , bude interval roven

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\zeta^{\alpha} d\zeta^{\beta}; \quad \eta_{\alpha\beta} \equiv \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (97)$$

V obecné souřadnicové soustavě S, ze které můžeme děj také pozorovat, bude platit

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \quad (98)$$

metrické koeficienty popisují pokrivení časoprostoru, souřadnice události v S jsou x^{α} .



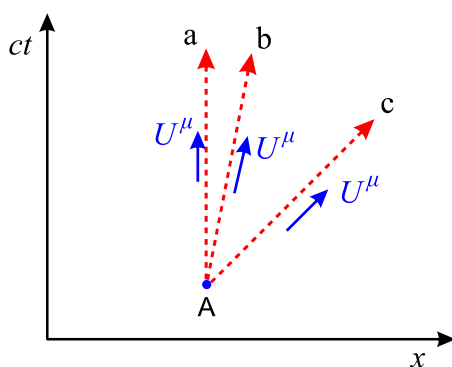
Zkonstruuje nejprve světočáru částice v LIS, kde platí zákony speciální relativity. Na následujícím obrázku jsou světočáry stojící částice (a), letící částice (b) a fotonu letícího rychlostí světla (c). Ve směru všech světočar vždy míří příslušná čtyřrychlost

$$U^{\mu} \equiv \frac{d\zeta^{\mu}}{d\tau} = \frac{d\zeta^{\mu}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (99)$$

Zkuste si zakreslit ve dvou dimenzích (čas a jedna prostorová souřadnice) čtyřvektory stojící částice, částice pohybující se rychlostí v a fotonu, jejich 2D čtyřrychlosti postupně budou

$$\begin{pmatrix} \gamma c \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma c \end{pmatrix} \quad (100)$$

Povšimněte si, že pro rychlosti malé ve srovnání s rychlostí světla je časová složka čtyřrychlosti podstatně větší než prostorové složky (ve 2D bude prostorová složka jediná).



Z obrázku je zřejmé, že ve speciální relativitě (v LIS) můžeme světočáry zkonstruovat postupným přenášením čtyřrychlosti. Postačí znát počáteční událost (A) a vždy posunout čtyřrychlost o malý úsek podél světočáry. Bude tedy platit

$$\frac{dU^{\mu}}{d\tau} = 0. \quad (101)$$

Jak je to možné? V LIS se volné hmotné body pohybují přímočaře (nepůsobí na ně síla), tedy platí jednoduchý vztah

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (102)$$

Vzhledem k tomu, že $U^\mu = d\xi^\mu/d\tau$, máme okamžitě $dU^\mu/d\tau = 0$, tj. rovnice (101) popisuje pohyb volného tělesa v LIS. V Souřadnicové soustavě S, kde je obecná metrika $g_{\mu\nu}$, bude mít rovnice paralelního přenosu čtyřrychlosti tvar:

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} = 0. \quad (103)$$

Rozeptišme tuto rovnici dle definice úplné derivace (93):

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\xi\nu} U^\xi \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (104)$$

S využitím definice čtyřrychlosti máme

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\xi\nu} \frac{dx^\xi}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (105)$$

Po vhodném přeznačení indexů získáme hledanou rovnici geodetiky ve tvaru:

$$\blacktriangleright \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (106)$$

Pokud jde o světlo, nemůže být parametrem světočáry vlastní čas, ale například vlastní délka křivky, tj.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (107)$$

Rovnici geodetiky také můžeme psát bez parametrizace (jako diferenciální formu):

$$d^2 x^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0. \quad (108)$$

Poznámka:

Rovnici geodetiky lze také odvodit z variačního principu. Z teoretické mechaniky víme, že Ldt musí být skalárem, tedy v relativitě nějakou funkcí ds^2 . Má-li být výraz úměrný času, musí jít o odmocninu, tj.

$$Ldt \approx \sqrt{-ds^2} \approx d\tau.$$

Interval je pro kauzálně spojené události záporný, proto je v odmocnině minus. Rovnici geodetiky lze potom odvodit z Hamiltonova variačního principu

$$\blacktriangleright \delta \int_A^B \sqrt{-ds^2} = 0. \quad (109)$$

Newtonovská limita

Jak souvisí rovnice geodetiky, která je základním pilířem obecné relativity, s Newtonovými pohybovými rovnicemi? Ukážeme, že v limitě slabých polí (malého zakřivení) a pomalých rychlostí přejde rovnice geodetiky na standardní pohybové rovnice v gravitačním poli. Newtonova pohybová rovnice má v gravitačním poli tvar

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla W_p, \quad (110)$$

kde W_p je potenciální energie, která závisí lineárně na hmotnosti testovacího tělíska m . Můžeme také zavést potenciál gravitačního pole

$$\phi \equiv W_p/m, \quad (111)$$

kteřý je nezávislý na hmotnosti tělesa. Pohybová rovnice potom přejde na jednodušší tvar

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi, \quad (112)$$

který reflektuje fakt, že pohyb těles v gravitačním poli nezávisí na jejich hmotnosti (to plyne z principu ekvivalence). V relativitě je výhodné zavést ještě bezrozměrný potenciál ϕ^* :

$$\begin{aligned} W_p; & \quad [W_p] = J, \\ \phi \equiv W_p/m; & \quad [\phi] = J/\text{kg} = (\text{m/s})^2, \\ \phi^* \equiv \phi/c^2; & \quad [\phi^*] = 1. \end{aligned} \quad (113)$$

Napišme nyní rovnici geodetiky za následujících předpokladů:

- 1) metrika je nezávislá na čase a je diagonální;
- 2) těleso se pohybuje malou rychlostí v porovnání s rychlostí světla;
- 3) gravitační pole je slabé, tj. zakřivení časoprostoru je malé.

Ad 1. Tento předpoklad není podstatný, ale zjednoduší výpočty. Vhodnou volbou souřadnicové sítě můžeme zařídit, aby metrika byla diagonální. Pokud souřadnicovou soustavu spojíme s tělesem, které generuje pole, bude metrika stacionární, tj.

$$g_{\alpha\beta,0} = 0. \quad (114)$$

Ad 2. Malá rychlost tělesa vzhledem k rychlosti světla znamená, že nemusíme rozlišovat mezi souřadnicovým a vlastním časem a že časová složka čtyřrychlosti je výrazně větší než prostorové složky, tj.:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1, \quad (115)$$

$$\left| \frac{dx^k}{d\tau} \right| \ll \frac{dx^0}{d\tau}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (116)$$

Ad 3. Slabé gravitační pole znamená, že se metrika bude jen málo odchylovat od Minkowského metriky, tj.:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (117)$$

kde $h_{\alpha\beta}$ jsou malé odchylky od Minkowského metriky. Malé v tom smyslu, že ve všech výrazech budeme zanedbávat jejich kvadráty. Metrika bude tedy mít finální tvar

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1+h_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+h_{33} \end{pmatrix}, \quad (118)$$

Inverzní matice bude

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (-1+h_{00})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+h_{11})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+h_{22})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+h_{33})^{-1} \end{pmatrix}, \quad (119)$$

Vzhledem k tomu, že poruchy h jsou malé, provedeme Taylorův rozvoj do prvního řádu, tj. využijeme $(1+x)^n \approx 1+nx$. Finální tvar kontravariantních složek metriky bude

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1-h_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h_{33} \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Zkuste si matice $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ mezi sebou vynásobit. Pokud zanedbáte kvadráty poruch h , dostanete jednotkovou matici.

Vraťme se nyní k rovnici geodetiky. Vzhledem k předpokladu (116) zůstanou ve druhém členu jen časové členy, tj.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0. \quad (121)$$

Vyjádríme-li derivace časových složek události z (115), dostaneme

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + c^2 \Gamma^\mu{}_{00} = 0. \quad (122)$$

K rozepsání rovnice geodetiky zbývá určit příslušné Christoffelovy symboly ze vztahu (87):

$$\Gamma^\gamma{}_{00} = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (g_{\xi 0,0} + g_{\xi 0,0} - g_{00,\xi}).$$

Podle předpokladu (114) jsou časové derivace nulové a zůstane jen

$$\Gamma^\gamma{}_{00} = -\frac{1}{2} g^{\gamma\xi} g_{00,\xi}.$$

Budou nás tedy zajímat čtyři složky Christoffelových symbolů. Při výpočtu využijeme nulovost nediagonálních členů a časových derivací:

$$\begin{aligned} \Gamma^0{}_{00} &= -\frac{1}{2} g^{0\xi} g_{00,\xi} = -\frac{1}{2} g^{00} g_{00,0} - \frac{1}{2} g^{01} g_{00,1} - \dots = 0, \\ \Gamma^1{}_{00} &= -\frac{1}{2} g^{1\xi} g_{00,\xi} = -\frac{1}{2} g^{11} g_{00,1} = -\frac{1}{2} (1-h_{11})(-1+h_{00})_{,x} \approx -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_{00}}{2} \right), \\ \Gamma^2{}_{00} &= \dots - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_{00}}{2} \right), \\ \Gamma^3{}_{00} &= \dots - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h_{00}}{2} \right). \end{aligned}$$

V rovnici geodetiky (121) můžeme zaměnit vlastní čas za souřadnicový, v našem přiblížení newtonovské limity se neliší. Časová složka je splněna triviálně a prostorové složky dají:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \nabla \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right). \quad (123)$$

Získali jsme tvar formálně shodný s Newtonovými pohybovými rovnicemi (112). Povšimněte si, že poruchy h jsou bezrozměrné, kvadrát rychlosti světla dává pravé straně rovnic (123) správný rozměr. Rovnice geodetiky splyne s Newtonovými rovnicemi, pokud platí

$$\blacktriangleright \quad h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} = -2\phi^*. \quad (124)$$

Dobře je patrné, že metrika souvisí s potenciálem pole. Derivace metriky, například Christoffelovy symboly, souvisí s intenzitou pole (ta je prostorovou derivací potenciálu. Interval má v newtonovské limitě tvar

$$ds^2 \approx g_{00}d(ct)^2 + g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 = -(1+2\phi^*)dt^2 + \dots \quad (125)$$

O prostorové části metriky zatím nic nevíme, ale časová část je zjevně deformována přítomností tělesa, které zakřivuje časoprostor (v řeči newtonovské fyziky přítomností gravitačního potenciálu). Pro kulově symetrický zdroj pole máme

$$\phi = -\frac{GM}{r} \tag{126}$$

a metrika je

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \dots \tag{127}$$

Ve velkých vzdálenostech od tělesa ($r \rightarrow \infty$) přejde metrika v Minkowského metriku. Největší zakřivení bude na povrchu tělesa a odchylku od Minkowského metriky můžeme podle (125) vyjádřit za pomoci bezrozměrného potenciálu ϕ^* na povrchu tělesa:

$$\phi^*(R) = -\frac{GM}{c^2 R}. \tag{128}$$

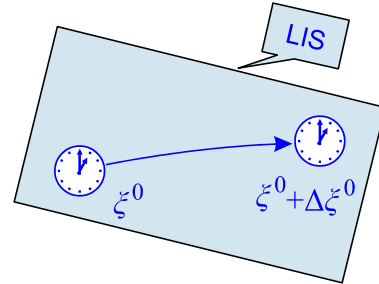
Pro proton vychází $\phi^* \sim 10^{-39}$, pro Zemi 10^{-9} , Slunce 10^{-6} , bílého trpaslíka 10^{-4} , neutronovou hvězdu 10^{-1} a černou díru 1. Je zjevné, že pro neutronovou hvězdu a černou díru nelze newtonovskou limitu použít a aproximace $g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ není správná.



6. DILATACE ČASU A ČERVENÝ GRAVITAČNÍ POSUV

Dilatace času

Představme si souřadnicový systém pevně spojený se zdrojem gravitačního pole (například se Zemí). V tomto systému budeme sledovat chod nepohybujících se hodin (jsou umístěny v místě A, například na polici). Metrika v našem souřadnicovém systému nebude záviset na čase a souřadnice lze zvolit tak, aby metrika byla diagonální (není to nutné, ale zjednoduší to naše výpočty).



Pro interval mezi dvojným tiknutím hodin lze v naší souřadnicové soustavě S, kde se hodiny nepohybují ($\Delta x^k=0$), psát

$$\Delta s^2 = g_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta = g_{00} c^2 \Delta t^2 + g_{kl} \Delta x^k \Delta x^l = g_{00} c^2 \Delta t^2. \quad (129)$$

Tytéž hodiny můžeme pozorovat v LIS. Vůči LIS se hodiny pohybují, takže platí

$$\Delta s^2 = \eta_{\alpha\beta} \Delta \xi^\alpha \Delta \xi^\beta = -(\Delta \xi^0)^2 + (\Delta \xi^1)^2 + (\Delta \xi^2)^2 + (\Delta \xi^3)^2. \quad (130)$$

Musíme rozlišovat tři časy: 1) souřadnicový čas t , který plyne v S spojené s hodinami a Zemí nebo jiným zdrojem pole – takový čas jsme nějak zvolili; 2) čas ξ^0 plynoucí v LIS, tj. čas v Minkowského metrice; 3) vlastní (přirozený) čas, pro který platí:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta \tau^2. \quad (131)$$

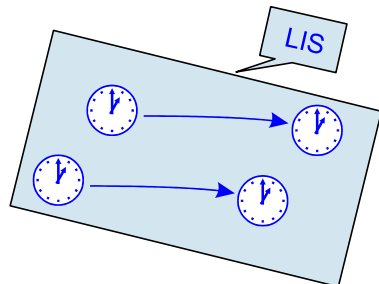
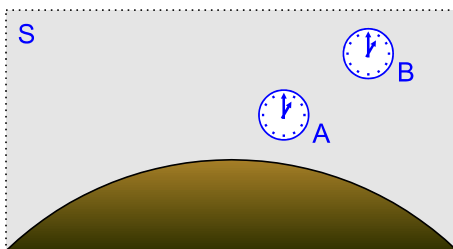
Ze vztahů (129) a (131) máme

$$\begin{aligned} -c^2 \Delta \tau^2 &= g_{00} c^2 \Delta t^2 \quad \Rightarrow \\ \Delta \tau &= \sqrt{-g_{00}(A)} \Delta t. \end{aligned} \quad (132)$$

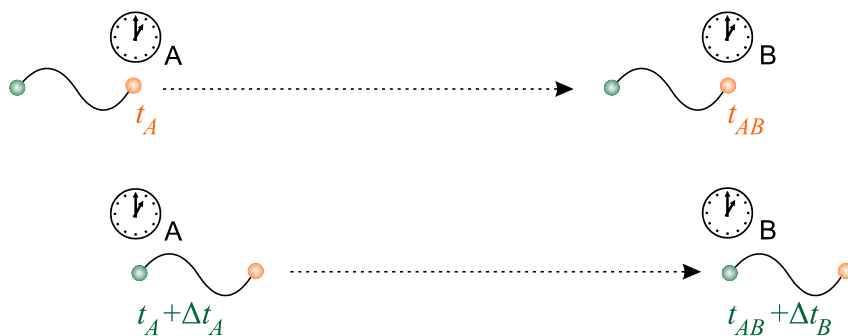
Vlastní čas je jediným „přirozeným“ časem u hodin, převrácená hodnota doby $\Delta \tau$ mezi dvěma tiknutími hodin je vlastní frekvencí hodin, tj.

$$\Delta \tau = \frac{1}{\nu_0} = \sqrt{-g_{00}(A)} \Delta t. \quad (133)$$

Dvoje hodiny



Mějme nyní v soustavě S dvoje nepohyblivé hodiny, jejichž chod budeme porovnávat. Z hodin v místě A vyšleme elektromagnetický signál do místa B. První foton bude totožný s tiknutím hodin v A, druhý s koncem kmitu (následujícím tiknutím)



Let fotonu bude dán jednoduchou rovnicí

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0. \quad (134)$$

Jde o kvadratickou rovnici pro dt . Pokud dt vyjádříme, nebude výsledek záviset na čase, neboť metrické koeficienty nejsou v naší souřadnicové soustavě S funkcemi času. Proto poletí foton z místa A do místa B stejně dlouho dnes, zítra i pozítří. Musí tedy platit

$$\Delta t_A = \Delta t_B = \Delta t. \quad (135)$$

Pro námi sledované tiknutí hodin A , které sledujeme v místě B , bude podle (133)

$$\frac{1}{\nu_B} = \sqrt{-g_{00}(B)} \Delta t_B. \quad (136)$$

Pokud vyšleme obdobný signál z hodin A do místa B , budeme pozorovat v místě A

$$\frac{1}{\nu_A} = \sqrt{-g_{00}(A)} \Delta t_A. \quad (137)$$

Vzhledem k tomu, že $\Delta t_A = \Delta t_B$, máme po vydělení posledních dvou vztahů

$$\blacktriangleright \quad \frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\sqrt{-g_{00}(A)}}{\sqrt{-g_{00}(B)}}. \quad (138)$$

Vztah (138) je zcela obecným vztahem pro změnu chodu času způsobenou přítomností gravitačního pole (zakřivením časoprostoru). Vztah lze také interpretovat jako posuv frekvence fotonu pohybujícího se z místa A do místa B (tzv. červený gravitační posuv). V limitě slabých polí (malého zakřivení časoprostoru) můžeme podle (125) psát

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\sqrt{1+2\phi^*(A)}}{\sqrt{1+2\phi^*(B)}} = (1+2\phi^*(A))^{1/2} (1+2\phi^*(B))^{-1/2} \approx 1 - (\phi^*(B) - \phi^*(A)) = 1 - \Delta\phi^*.$$

Pro posuv frekvence fotonu, který se pohybuje mezi místy s různým gravitačním potenciálem, proto platí v newtonovské limitě slabých polí jednoduchý vztah

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = 1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (139)$$

Pokud výraz vynásobíme ν_A a členy přeskupíme, dostaneme pro relativní změnu frekvence

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (140)$$

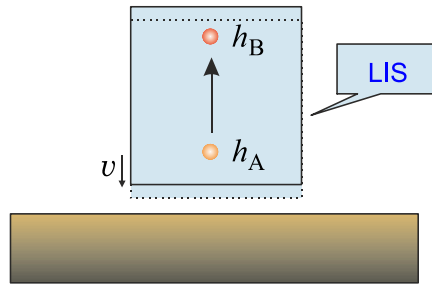
Relativní změna frekvence tedy jednoduše souvisí se změnou potenciálu gravitačního pole.

Různé pohledy na dilataci

„Vysvětlení“ z hlediska LIS

Představme si foton, který se pohybuje v tíhovém poli z místa A do vyššího místa B . Místa nejsou příliš vzdálená, takže je lze „obalit“ jediným výtahem, který začne padat v okamžiku

vyslání fotonu z místa A. Výtah představuje lokální inerciální soustavu, ve které se foton pohybuje po přímce konstantní rychlostí c .



V okamžiku, kdy foton doletí do B, se výtah už pohybuje rychlostí

$$v = g \Delta t = g \frac{\Delta h}{c}. \quad (141)$$

Pozorovatel ve výšce h_B bude pozorovat foton, který přilétá z pohybujícího se výtahu, tedy uvidí díky Dopplerově jevu frekvenci

$$\nu_B = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \nu_A = \left(1 - \frac{g \Delta h}{c^2}\right) \nu_A \quad (142)$$

Uvážíme-li, že gravitační potenciál tíhového pole je $\phi = gh$, máme

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = 1 - \frac{\Delta \phi}{c^2}, \quad (143)$$

což je stejný vztah, jako jsme odvodili z metriky v newtonovské limitě.

„Vysvětlení“ z hlediska zákona zachování energie

V tíhovém poli můžeme napsat, že potenciální energie plus energie fotonu je konstantní, tj.

$$m_A g h_A + \hbar \omega_A = m_B g h_B + \hbar \omega_B \quad (144)$$

Pohybovou hmotnost fotonu určíme z jeho energie ($m = E/c^2 = \hbar \omega/c^2$):

$$\frac{\hbar \omega_A}{c^2} g h_A + \hbar \omega_A = \frac{\hbar \omega_B}{c^2} g h_B + \hbar \omega_B \Rightarrow$$

$$\nu_A \left(1 + \frac{g h_A}{c^2}\right) = \nu_B \left(1 + \frac{g h_B}{c^2}\right) \Rightarrow \quad (145)$$

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \left(1 + \frac{g h_A}{c^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{g h_B}{c^2}\right)^{-1} \cong 1 - \frac{g(h_B - h_A)}{c^2} = 1 - \frac{\Delta \phi}{c^2}.$$

Opět jsme získali známý vztah plynoucí z newtonovské limity.

■ **Příklad:** Určeme změnu vlnové délky pro foton s $\lambda_0 = 500$ nm, který vylétl z povrchu hvězdy a doletěl do velké vzdálenosti od ní (do nekonečna):

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx -\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta \phi}{c^2}.$$

V tomto příkladu nemůžeme použít tíhové pole. Vzhledem k tomu, že se foton dostane do velké vzdálenosti, musíme použít Newtonův gravitační potenciál:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{\Delta \phi}{c^2}\right) = \lambda_0 \left[1 - G \frac{M}{c^2} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right)\right] = \lambda_0 \left(1 + \frac{GM}{R c^2}\right). \quad (146)$$

	M	R	$\Delta\lambda/\lambda = GM/Rc^2$	λ (nm)
Slunce	$1 M_S$	700 000 km	2×10^{-6}	500,001
bílý trpaslík	$1 M_S$	10 000 km	$1,5 \times 10^{-4}$	500,075
neutronová hvězda	$1 M_S$	20 km	0,074	537

Poundův-Rebkův experiment

První měření červeného gravitačního posuvu provedli v roce 1960 Robert Pound a Glen Rebka na Harvardské univerzitě. K měření využili věž, která je dodnes součástí Jeffersonovy laboratoře. V originálním článku Pound a Rebka uvádějí, že vzdálenost mezi vysílačem a přijímačem (detektorem) byla 74 stop, což odpovídá výšce 22,55 metru. Na tak malém výškovém rozdílu by podle obecné relativity měla být relativní změna frekvence

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\phi}{c^2} = -\frac{g(h_2 - h_1)}{c^2} \approx 2,5 \times 10^{-15} \quad (147)$$

Změřit tak nepatrnou změnu frekvence vyžadovalo mimořádnou experimentální zručnost spojenou se značnou zkušeností. Vzhledem k tomu, že měřený rozdíl frekvencí byl

$$\Delta\nu \approx 2,5 \times 10^{-15} \nu_0, \quad (148)$$

bylo nutné nalézt zdroj s co možná nejvyšší frekvencí. Nakonec byl použit radioaktivní kobalt $\text{Co } 57$ přimísený do železa $\text{Fe } 57$. Železo $\text{Fe } 57$ emitovalo gama fotony s přesně definovanou energií 14,4 keV (frekvence $3,5 \times 10^{18}$ Hz). Jako detektor byl použit absorber tvořený opět vrstvou $\text{Fe } 57$, který rezonančně pohlcovoval fotony s toutéž frekvencí. To, zda byly fotony v detektoru pohlceny, a nebo prošly, se zjišťovalo pomocí scintilačního krystalu NaI(Tl) a fotonásobiče. Krystal měl průměr 7,5 cm a tloušťku 6 mm. Zdroj a detektor tak byly naladěny na stejnou frekvenci, tj. detektor byl schopen absorbovat fotony jen s frekvencí přesně rovnou vysílané frekvenci. U normálních atomů by zpětný ráz při absorpci fotonu v detektoru ovlivnil přijímanou frekvenci, ale v krystalech díky Mössbauerovu jevu přebírá zpětný ráz celý krystal, a tak se frekvence absorbovaných fotonů nezměnila. K jediné změně frekvence došlo gravitačním posuvem (červeným, pokud byl zdroj dole a detektor nahoře a modrým při obrácené konfiguraci). Výsledkem gravitačního posuvu je, že by detektor neměl fotony s pozměněnou frekvencí absorbovat.

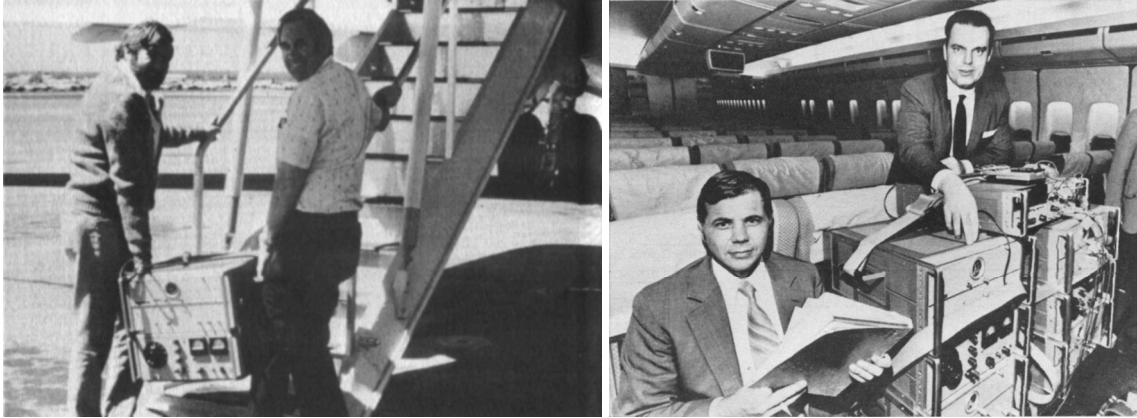


A zde přichází na scénu Dopplerův jev. Zdroj fotonů byl totiž připevněn k membráně reproduktoru, která s ním pohybovala ve svislém směru sem a tam s frekvencí 10÷50 Hz. Dopplerovým jevem se periodicky měnila frekvence vysílaných fotonů. Vzniklý posuv v určité fázi kompenzoval gravitační posuv a detektor absorboval fotony s nezměněnou frekvencí (resp. změněnou nadvakrát – na jednu stranu gravitačním posuvem a zpět Dopplerovým posuvem). Celá metoda je vlastně upravenou Mössbauerovou spektroskopií, která umožňuje přesné určení změny frekvence. Aby nedocházelo k nežádoucímu rozptylu fotonů v atmosféře, procházely fotony mezi zdrojem a detektorem trubicí z mylaru (o průměru 40 cm) vyplněnou héliem. Na fotografii je Robert Pound u dolního konce trubice. Výsledek experimentu byl pozitivní, Pound a Rebka potvrdili červený a modrý gravitační posuv s relativní přesností 0,1, tj.

10 %. Při pozdějších modifikacích experimentu se podařilo dosáhnout přesnosti ověření obecné relativity 0,01. Šlo o jeden z „velkých“ testů obecné relativity, který detekoval změnu chodu času způsobenou přítomností Země.

Hafele-Keatingův experiment

Další zajímavý experiment, který zjišťoval změnu chodu času způsobenou gravitací Země, připravili Joseph Hafele a Richard Keating v roce 1971. K měření času využili cesiové hodiny. Kontrolní hodiny byly umístěny na observatoři USNO (*United States Naval Observatory*). S dalšími hodinami obletěli Zemi ve východním směru a s posledními v západním směru. K obletu využívali běžné dopravní linky a hodiny překládali z letadla do letadla.



Hafele a Keating vezou na výlet cesiové hodiny

Čas na hodinách, které se pohybovaly v desetakilometrové výšce, potom porovnali s časem na kontrolních hodinách. Výsledná hodnota byla dána jak jevy speciální relativity (dilatací času), tak jevy obecné relativity. Letadlo je pohybující se systém, takže bude platit

$$\Delta s^2 = g_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta = g_{00} c^2 \Delta t^2 + g_{kl} \Delta x^k \Delta x^l = (g_{00} c^2 + g_{kl} v^k v^l) \Delta t^2 \quad (149)$$

Interval nalevo vyjádříme pomocí vlastního času a složku g_{00} za pomoci newtonovské limity:

$$-c^2 \Delta \tau^2 = \left(-(1 + 2\phi^*) c^2 + v^2 \right) \Delta t^2 \quad (150)$$

a tedy

$$\frac{1}{v} = \Delta \tau = \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t \quad (151)$$

Změna chodu času je tedy způsobena jak zakřivením času gravitací (člen s ϕ), tak speciálně-relativistickou dilatací času způsobenou pohybem letadla (člen s v). Porovnáme-li chod hodin v letadle a na povrchu Země (jeho rychlost pohybu je v_Z), máme

$$\frac{\Delta \tau_L}{\Delta \tau_Z} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\phi_L}{c^2} - \frac{v_L^2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\phi_Z}{c^2} - \frac{v_Z^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{\phi_L - \phi_Z}{c^2} - \frac{v_L^2 - v_Z^2}{2c^2}. \quad (152)$$

Po dosazení gravitačního potenciálu Země získáme jednoduchý vztah

$$\frac{\Delta \tau_L}{\Delta \tau_Z} = 1 - \frac{GM_Z}{(R_Z + h)c^2} + \frac{GM_Z}{R_Z c^2} - \frac{v_L^2 - v_Z^2}{2c^2}. \quad (153)$$

neboli

$$\Delta\tau_L - \Delta\tau_Z = \left(-\frac{GM_Z}{(R_Z + h)c^2} + \frac{GM_Z}{R_Z c^2} - \frac{v_L^2 - v_Z^2}{2c^2} \right) \Delta\tau_Z. \quad (154)$$

Letadla létala v průměrné výšce 8 900 m a oblet Země trval přibližně tři dni. Po výpočtu z aktuální letové dráhy a konkrétních rychlostí letadel vyšel rozdíl času mezi hodinami v letadle a na Zemi pro východní směr letu -40 ± 23 ns a pro západní směr letu 275 ± 21 ns. Naměřené hodnoty byly -59 ± 10 ns pro východní směr a $+273 \pm 10$ ns pro západní směr. Experiment potvrdil předpovědi obecné relativity s relativní přesností 10 % (10^{-1}). V roce 1976 byl experiment zopakován Univerzitou v Marylandu a potvrdil obecnou relativitu s přesností 1 % (10^{-2}).

Poznámka: V předchozích výpočtech jsme předpokládali, že je souřadnicový systém pevně spojený se zdrojem pole. V případě rotující Země tomu tak není, ale efekty způsobené zemskou rotací jsou vyššího řádu, než využíváme v newtonovské limitě.

● **Příklad:** Určete, o jakou maximální vzdálenost se rozejde poloha automobilu určovaná pomocí polohovacího systému GPS od skutečnosti za 24 hodin, pokud nebude prováděna oprava na rozdílný chod času na družici a v automobilu. Předpokládejte, že automobil jede po rovníku. GPS družice je ve výšce $h = 20\,200$ km. Poloměr Země je $R_Z = 6\,371$ km, hmotnost Země $M_Z = 5,97 \times 10^{24}$ kg, $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm²kg⁻².

Řešení: Vlastní rychlost automobilu je vzhledem k otáčení Země zanedbatelná. Nejprve určíme oběžnou rychlost povrchu Země na rovníku:

$$v_Z = R_Z \omega = R_Z \frac{2\pi}{T} \approx 463 \text{ m/s}. \quad (155)$$

Je jasné, že vlastní rychlost automobilu je zanedbatelná. Nyní určíme rychlost oběhu družice z rovnosti setrvačné odstředivé síly a gravitační síly:

$$\frac{mv_D^2}{R+h} = G \frac{mM_Z}{(R+h)^2} \quad \Rightarrow \quad v_D = \sqrt{\frac{GM_Z}{R+h}} \approx 3\,871 \text{ m/s}. \quad (156)$$

Nyní použijeme vztah (154), do kterého namísto rychlosti letadla v_L dosadíme rychlost družice v_D . Za jeden den, tj. za $\Delta\tau_Z = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$ vyjde rozdíl obou časů

$$\Delta\tau_D - \Delta\tau_Z = 38 \text{ } \mu\text{s}. \quad (157)$$

Vynásobíme-li tento údaj rychlostí světla, zjistíme, že chyba v určení polohy je

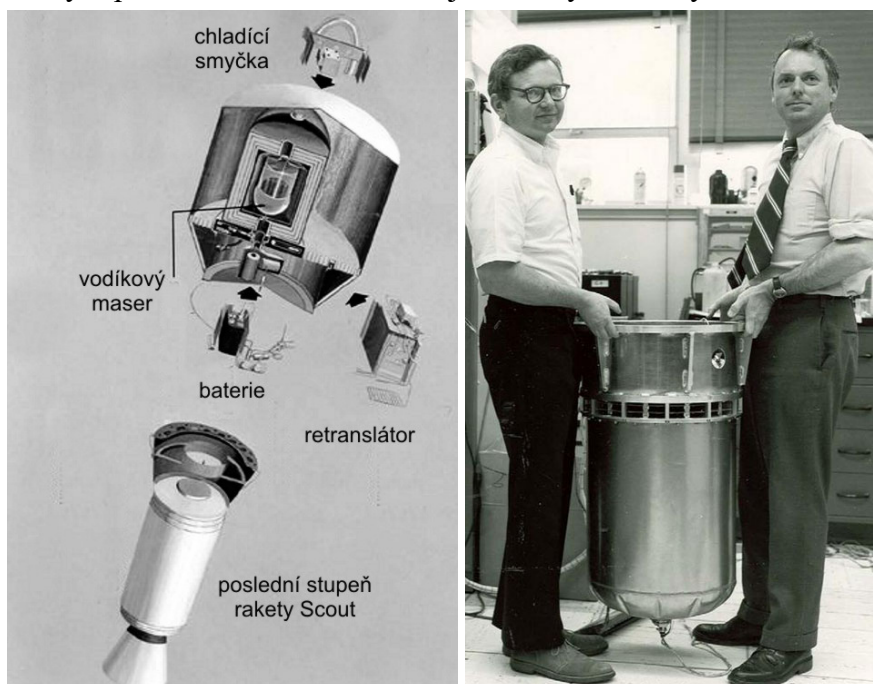
$$\Delta l = (\Delta\tau_D - \Delta\tau_Z) c \doteq 11 \text{ km}. \quad (158)$$

Z výpočtu je patrné, že bez započtení obecně relativistických jevů by bylo provozování polohovacího systému GPS zcela nemožné. ■

Gravity Probe A

Prvním velmi přesným experimentem na měření gravitačního posuvu byl balistický let sondy Gravity Probe A v roce 1976. Na přípravě experimentu se podíleli odborníci ze SAO (*Smithsonian Astrophysical Observatory*) a NASA. Vědecký tým řídili Martin Levine a Robert Vessot. Sonda měla hmotnost 100 kilogramů a byla vynesena z Wallopových ostrovů (Virginie) nosnou raketou Scout do výšky 10 000 km. Sonda záměrně nedosáhla únikové rychlosti, a tak po dosažení maximální výše padala zpět směrem k zemi a dopadla do Atlantického oceánu. Na palubě byl vodíkový maser, který sloužil jako zdroj radiového signálu s přesnou frekvencí (jako přesné hodiny). Za pomoci retranslátoru byl signál z průběhu celého letu přijímán na povrchu Země. Po odečtení Dopplerova jevu zůstal jen modrý gravitační posuv způsobený cestou signálu ze sondy na Zem. Poprvé se podařilo ověřit předpověď obecné relativity s relativní přesností 0,01 % (10^{-4}).

Sondu Gravity Probe A připravovali odborníci ze Stanfordské univerzity. Z jejich dílny také pocházela sonda Gravity Probe B, která měla za úkol změřit strhávání časoprostoru rotující Zemí a sonda STEP (*Satellite Test of Equivalence Principle*) pro ověření principu ekvivalence. Gravity Probe B startovala v roce 2004, ale měření byla do značné míry znehodnocena elektromagnetickým polem slunečního větru. Projekt sondy STEP byl zastaven.



Gravity Probe A. Nalevo je schéma sondy, napravo nesou Martin Levine a Robert Vessot vodíkový maser.

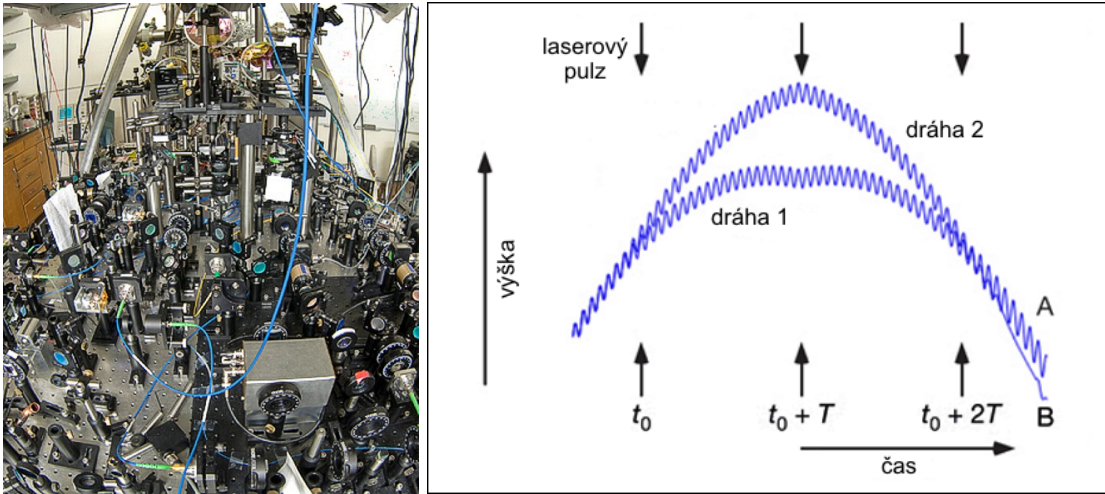
Berkeleyký experiment

Nejnovější způsob měření červeného gravitačního posuvu je zcela revoluční. Měří gravitační posuv pomocí kvantového jevu na výškovém rozdílu pouhých 0,1 mm! Ústřední postavou nové metody je Steven Chu, nositel Nobelovy ceny za laserové ochlazování. Chu byl dlouhá léta ředitelem proslulé vědecké laboratoře LBNL (*Lawrence Berkeley National Laboratory*). Napadlo ho, že k měření červeného posuvu by se namísto elektromagnetických vln mohly využít de Broglieovy vlny. Je přece jedno, zda čas měříme pomocí elektromagnetických kmitů nebo pomocí de Broglieových vln. Tyto vlny mají podstatně vyšší frekvenci, například pro cesiový atom ochlazený Chuovou metodou má de Broglieova vlna frekvenci 3×10^{25} Hz.

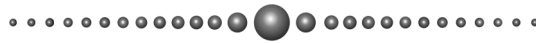
Této myšlenky se ujali Achim Peters (Humboldtova univerzita) a Holger Müller (UCB) a v únoru 2010 nově interpretovali experimenty Peterse z roku 1997. Tehdy Peters ochladil cesiové atomy Chuovou metodou na pouhých několik miliontin kelvinu a poté jim za pomoci laseru předal svislý impuls a sledoval jejich následný volný pád. Experimenty z roku 1997 měly ověřit princip ekvivalence. Stejný experiment může ale také sloužit k měření červeného gravitačního posuvu. Laserový impuls působící na shluk ochlazených cesiových atomů totiž připraví atomy ve směsici dvou stavů. Jeden stav reprezentuje nevychýlené atomy a druhý stav atomy vychýlené pulzem o cca 0,1 mm svisle. Pro cesiové atomy ve vychýleném stavu plyne čas jinak než pro nevychýlené. Za přibližně 0,3 s volného pádu vychýlených atomů se bude čas uplynulý v obou stavech lišit o $\times 10^{-20}$ s. Jde o neuvěřitelně krátký okamžik, ale vzhledem k vysoké frekvenci de Broglieových vln měřitelný za pomoci interference vln z obou stavů. Postačí, aby laserový pulz atakoval cesiové atomy třikrát. Poprvé udělí s 50 % pravděpodobností atomům svislý impuls a atomy se ocitnou v superpozici nevychýleného a vychýleného stavu. Atom se pohybuje v superpozici nízké dráhy (tu by měl nevychýlený atom) vyšší dráhy (tu by měl vychýlený atom). Druhý laserový impuls způsobí, že atomy na vyšší dráze se začnou přibližovat k těm na nižší dráze. V okamžiku, kdy se setkají, dojde

k interferenci de Broglieových vln obou stavů. Za pomoci třetího laserového pulzu lze změřit změnu fáze mezi oběma stavy. V podstatě jde o atomový interferometr mezi dvěma stavy.

Výsledky experimentů jsou fascinující – červený gravitační posuv se podařilo změřit s relativní přesností 7×10^{-9} , což je o čtyři řády přesnější než měření sondou Gravity Probe A.



Optická lavice, na které se uskutečnil experiment a jeho schéma. Zdroj: Nature.

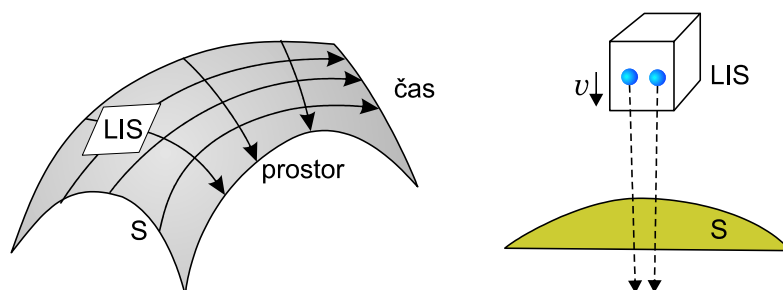


7. RIEMANNŮV TENZOR KŘIVOSTI

Pokud nějakým způsobem nalezneme metriku a je tvořena různými složitými funkcemi, nemůžeme na první pohled zjistit, zda je „divokost“ metriky způsobena křivostí zvoleného souřadnicového systému, nebo skutečným zakřivením časoprostoru. V této kapitole zkonstruujeme veličinu, podle které lze jednoznačně poznat, jak to s křivostí časoprostoru je.

Jak otestovat zakřivení?

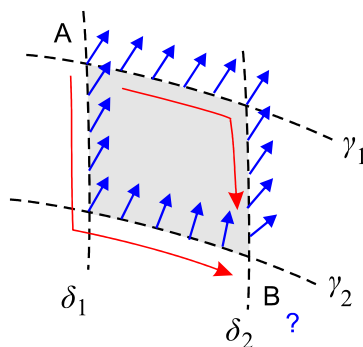
Zakřivení časoprostoru je v obecné relativitě vyjádřením gravitačního působení mezi tělesy. Víme ale již, že vždy můžeme zvolit lokální inerciální systém LIS (malou klec volně padající po krátkou dobu), kde projevy gravitačního působení vymizí. Na dvourozměrném papíru se nám nepodaří nakreslit čtyřrozměrný pokřivený svět. Pro jednoduchost ho proto nahradíme pokřivenou plochou, na které jedna souřadnice znamená čas a druhá prostor. Lokálně inerciální systém potom představuje tečnou rovinu vedenou v daném bodě k ploše.



Je dobře patrné, že tečná rovina LIS (časoprostorová nadplocha) přiléhá ke skutečné pokřivené ploše S (pokřivenému časoprostoru) jen v blízkosti zvoleného bodu. Proto musí být LIS lokální, malý v prostoru a pozorovaný po krátkou dobu („malý“ v čase), aby uvedená aproximace platila. V kleci volně padající k Zemi po dosti dlouhé době už poznáme, že nejde o skutečný inerciální systém, neboť se tělesa k sobě poněkud přibližují. V řeči matematiky jsme se na tečné rovině už vzdálili příliš daleko od bodu, ve kterém se dotýká křivé plochy. Pokud by plocha S byla rovná, bude s ní tečná rovina LIS totožná, a půjde vybudovat globální inerciální systém GIS, tj. časoprostor bude plochý a popsatelný Minkowského metrikou.

V newtonovské fyzice je přibližování kuliček v LIS dáno až nehomogenitami gravitačního pole, tj. prvními derivacemi pole a druhými derivacemi potenciálu. V řeči metriky koresponduje gravitační potenciál s metrikou, intenzita pole s prvními derivacemi metriky (Christoffelovými symboly) a nehomogenity pole až s druhými derivacemi metriky. Samotné pokřivení časoprostoru proto musí být popsatelné pomocí veličiny, která obsahuje druhé derivace metriky (jinak bychom konali experimenty na úrovni LIS, tj. tečné nadplochy).

Představme si dvourozměrnou souřadnicovou síť na křivé ploše. Pokud budeme paralelně přenášet vektor z bodu A do bodu B nejprve ve směru jedné osy, poté ve směru druhé osy, můžeme výsledek porovnat s pokusem provedeným v opačném pořadí:



Pokud se bude vektor přenesený po obou cestách shodovat, je naděje, že plocha je rovná, pokud ne, je jistojistě křivá. Přesun vektoru je dán kovariantní derivací, ta určuje jeho změnu, měli bychom proto sledovat rozdíl

$$A^\beta{}_{;\gamma\delta} - A^\beta{}_{;\delta\gamma}. \quad (159)$$

Pokud vyjde pro všechny možné hodnoty γ a δ nulový výsledek, bude časoprostor rovný; pokud bude jediná hodnota nenulová, bude časoprostor skutečně křivý, a tedy není možné zavést globální inerciální systém. Klíčem k otázce z nadpisu kapitoly je tedy vyčíslení rozdílu (159). Vzhledem k tomu, že jde o tenzorovou veličinu, můžeme všechny indexy snížit a počítat rozdíl

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = ? \quad (160)$$

Postupujme přímočaře, budeme vypisovat jen první část výrazu, druhá má opačné znaménko a zaměněné indexy δ a γ , což formálně zapíšeme symbolem $\gamma \leftrightarrow \delta$:

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = [A_{\beta;\gamma}]_{;\delta} - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (161)$$

Na pravé straně provedeme kovariantní derivaci podle δ tenzoru $A_{\beta;\gamma}$ se dvěma indexy:

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = [A_{\beta;\gamma}]_{;\delta} - \Gamma_{\beta\delta}^\xi A_{\xi;\gamma} - \Gamma_{\gamma\delta}^\xi A_{\beta;\xi} - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (162)$$

Třetí člen na pravé straně je symetrický v indexech γ a δ , ve složené závorce proto bude stejný člen s opačným znaménkem, který se s ním vyruší:

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = [A_{\beta;\gamma}]_{;\delta} - \Gamma_{\beta\delta}^\xi A_{\xi;\gamma} - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (163)$$

Nyní rozepíšeme obě zbývající kovariantní derivace:

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = [A_{\beta;\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\xi A_\xi]_{;\delta} - \Gamma_{\beta\delta}^\xi [A_{\xi;\gamma} - \Gamma_{\xi\gamma}^\eta A_\eta] - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (164)$$

Nyní provedeme parciální derivace prvního členu a roznásobíme druhý člen:

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = A_{\beta;\gamma\delta} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\xi A_\xi - \Gamma_{\beta\gamma}^\xi A_{\xi,\delta} - \Gamma_{\beta\delta}^\xi A_{\xi;\gamma} + \Gamma_{\beta\delta}^\xi \Gamma_{\xi\gamma}^\eta A_\eta - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (165)$$

První člen na pravé straně je symetrický v indexech γ a δ a ve složené závorce opět bude člen s opačným znaménkem. Totéž platí o součtu třetího a čtvrtého členu na pravé straně. Zbude

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = -\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\xi A_\xi + \Gamma_{\beta\delta}^\xi \Gamma_{\xi\gamma}^\eta A_\eta - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (166)$$

Máme tedy výsledek

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\xi A_\xi - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\xi A_\xi + \Gamma_{\beta\delta}^\xi \Gamma_{\xi\gamma}^\eta A_\eta - \Gamma_{\beta\gamma}^\xi \Gamma_{\xi\delta}^\eta A_\eta \quad (167)$$

Abychom mohli vytknout vektor A , změníme v prvních dvou členech sčítací index na η :

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = [\Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\eta - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\eta + \Gamma_{\beta\delta}^\xi \Gamma_{\xi\gamma}^\eta - \Gamma_{\beta\gamma}^\xi \Gamma_{\xi\delta}^\eta] A_\eta \quad (168)$$

Nalezený výraz zapíšeme takto:

$$\blacktriangleright A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = R^\eta{}_{\beta\gamma\delta} A_\eta; \quad (169)$$

$$\blacktriangleright R^\eta{}_{\beta\gamma\delta} \equiv \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\eta - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\eta + \Gamma_{\beta\delta}^\xi \Gamma_{\xi\gamma}^\eta - \Gamma_{\beta\gamma}^\xi \Gamma_{\xi\delta}^\eta, \quad (170)$$

kde $R^\eta{}_{\beta\gamma\delta}$ je Riemannův tenzor křivosti. Je klíčovou veličinou pro zjištění, zda je časoprostor plochý nebo křivý.

Plochosť časoprostoru

Ve fyzice se většinou pro Riemannův tenzor křivosti používá zkrácený zápis

$$R^\eta{}_{\beta\gamma\delta} \equiv R^\eta{}_{\beta\gamma\delta}. \quad (171)$$

Je to obdobné, jako u Christoffelových symbolů. Jak je patrné z definice (170), Riemannův tenzor obsahuje druhé derivace metrického tenzoru, neboť samotné Christoffelovy symboly obsahují první derivace. Z definice ovšem není zřejmé, že by mělo jít o tenzor, neboť Chris-

toffelovy symboly nemají tenzorová transformační pravidla. Tenzorový charakter $R^\eta{}_{\beta\gamma\delta}$ je nicméně dobře vidět ze vztahu (169). Proto můžeme jednotlivé složky libovolně zvyšovat a snižovat a můžeme zavést Riemannův tenzor s kovariantními složkami

$$\blacktriangleright \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv g_{\alpha\eta} R^\eta{}_{\beta\gamma\delta}. \quad (172)$$

Také snadno napíšeme komutátor druhých kovariantních derivací (169) pro kontravariantní složku vektoru:

$$\blacktriangleright \quad A^\beta{}_{;\gamma\delta} - A^\beta{}_{;\delta\gamma} = R_{\eta\gamma\delta}{}^\beta A^\eta; \quad (173)$$

Velmi užitečné jsou také zúženiny Riemannova tenzoru:

$$\blacktriangleright \quad R_{\alpha\beta} \equiv R^\xi{}_{\alpha\xi\beta}, \quad (174)$$

$$\blacktriangleright \quad R \equiv R^\xi{}_{\xi}. \quad (175)$$

První z nich se nazývá *Ricciho tenzor* a druhý *skalární křivost*. Pokud je R nebo $R_{\alpha\beta}$ nenulové, není časoprostor plochý. Pokud jsou nulové, prostor může být plochý, ale nemusí. Ke kompletnímu posouzení křivosti časoprostoru musíme vzít v úvahu všechny složky Riemannova tenzoru křivosti. Následující tvrzení jsou ekvivalentní a jsou jen různým vyjádřením plochosti časoprostoru.

Ekvivalentní podmínky plochosti časoprostoru

- Všechny složky Riemannova tenzoru jsou nulové.
- Časoprostor je plochý.
- Existuje globální inerciální souřadnicový systém.
- V časoprostoru lze zavést Minkowského metriku.
- Paralelním přenosem po libovolné křivce se vektor nezmění.

Vlastnosti Riemannova tenzoru

Riemannův tenzor je veličina se čtyřmi indexy, z nichž každý má čtyři hodnoty (jednu časovou a tři prostorové). Celkem jde má Riemannův tenzor 256 složek. Mezi těmito složkami platí různé symetrie, takže ve výsledku je nezávislých složek pouze 20. Riemannův tenzor je antisymetrický v první i druhé dvojici indexů a symetrický vůči záměně první dvojice za druhou dvojici a součet cyklických záměn posledních tří indexů je nulový (všechny vlastnosti lze ukázat přímo z definice):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}, \quad (176)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \quad (177)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = +R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad (178)$$

$$R_{\xi\alpha\beta\gamma} + R_{\xi\beta\gamma\alpha} + R_{\xi\gamma\alpha\beta} = 0. \quad (179)$$

Pokud se na první dva indexy budeme dívat jako na antisymetrickou matici 4×4 , jsou nezávislými členy jen prvky nad diagonálou. Na diagonále musí být u antisymetrické matice nuly, pod diagonálou dopočteme prvky z hodnot nad diagonálou. Celkový počet nezávislých prvků spojených s první dvojicí indexů je proto 6. Obdobná úvaha platí pro druhou dvojici indexů. Nahradíme-li první dvojici jedním indexem se šesti hodnotami a druhý index také, můžeme se na Riemannův tenzor dívat jako na matici 6×6 , která má 36 nezávislých hodnot. Podle (178) je ovšem tato matice symetrická, tj. prvky pod diagonálou můžeme spočítat z prvků nad diagonálou. Nezávislých prvků je proto jen $6+5+4+3+2+1 = 21$. Uvážíme-li, že mezi nimi platí ještě vztah (179), má Riemannův tenzor maximálně 20 nezávislých hodnot. Lze ukázat, že jich je právě 20.

Gravity Probe B

Již jsme se zmínili o balistické družici Gravity Probe A, která testovala změnu chodu času za pomoci časového standardu, který představoval vodíkový maser. Na Stanfordské univerzitě ale vyvinuli i další sondu, Gravity Probe B, která měla za pomoci setrvačnicku testovat a) zakřivení časoprostoru kolem Země; b) strhávání časoprostoru rotující Zemí. Osa rotujícího setrvačnicku představuje paralelně přenášený vektor. Setrvačnicku byly v sondě drženy v pouzdře magnetickým polem a vše bylo zařízeno tak, že se pohybovaly po geodetice (včetně celé družice). Pokud Země skutečně zakřivuje časoprostor, je Riemannův tenzor nenulový a směr osy rotace setrvačnicku by se měl změnit o $6,6''$ za rok. Ještě menší je efekt strhávání časoprostoru rotující Zemí, ten činí pouhých $0,042''$ za rok a změna úhlu je na polární dráze kolmá ke změně způsobené zakřivením časoprostoru.



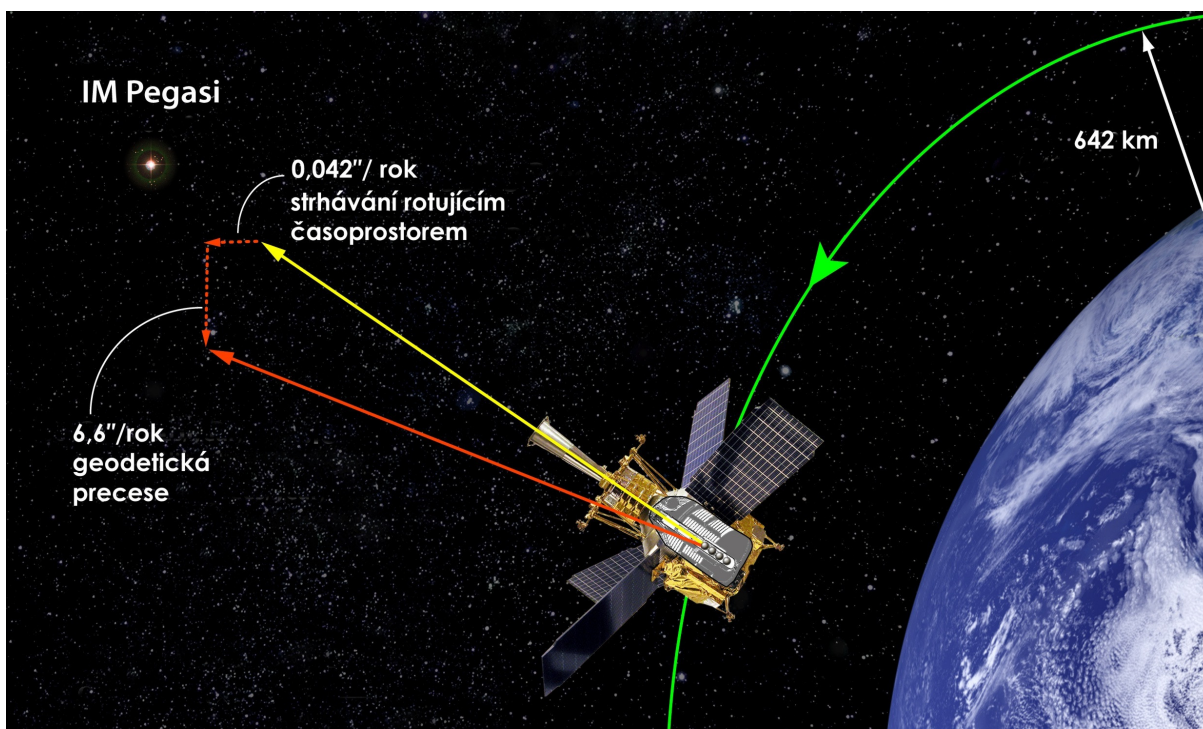
Družice měla hmotnost 3 400 kg a byla navedena na polární oběžnou dráhu dne 20. dubna 2004 z Vandenbergovy letecké základny v jižní Kalifornii. Zemí obíhala ve výšce 640 km. Základem družice byla Dewarova nádoba s $2,5 \text{ m}^3$ hélia, které po dobu jednoho roku chladilo pracovní prostor na teplotu 1,8 K. V ose Dewarovy nádoby bylo v oloveném plášti zabudováno pouzdro s měřicí aparaturou, která se skládala ze dvou pevně spojených částí: 53 cm dlouhého bloku taveného křemene se čtyřmi gyroskopy a naváděcího dalekohledu. Na vnější části Dewarovy nádoby byly namontovány panely slunečních baterií a protisluneční clona dalekohledu.

Srdcem družice byly čtyři gyroskopy skládající se z pouzdra a rotoru. Každý gyroskop byl umístěn v samostatném válcovém otvoru v bloku taveného křemene. Rotory gyroskopů připomínaly pingpongové míčky. Měly průměr 3,8 cm a jejich výrobě byla věnována mimořádná pozornost. Byly z taveného brazilského křemene a povrch měly vyleštěn s přesností pouhých čtyřiceti atomárních vrstev ($0,01 \mu\text{m}$). Na rotorech byla nanášena tenká vrstvička niobu, který byl za pracovní teploty supravodivý.

Otáčení supravodivého materiálu (niobu na povrchu rotorů) vytvořilo nenulový magnetický moment (Londonův jev), který byl měřen vodivou smyčkou zabudovanou v pouzdře gyroskopu. Smyčka byla spojena s měřicí elektronikou SQUID, která umožnila přesně zjistit osu rotace gyroskopu.

Blok taveného křemene, ve kterém jsou zabudovány gyroskopy, byl pevně spojený s malým naváděcím dalekohledem o průměru aperturní clony 14 cm a délce 36 cm. Dalekohled po celou dobu pozorování sledoval vybranou naváděcí hvězdu (IM Pegasi). K této hvězdě mířily i rotační osy všech gyroskopů, dva rotovaly v jednom směru a zbývající v opačném.

Družice byla výsledkem čtyř desetiletí pečlivých příprav. Testování obecné relativity pomocí rotujících gyroskopů navrhl v roce 1959 Leonard Schiff ze Stanfordské univerzity. Ta se také stala hlavním aktérem vyslání družice na oběžnou dráhu. Ve výpočetním centru v kampusu univerzity se zpracovávala všechna data vysílaná družicí. Při přípravě družice byly použity nejnovější známé technologie, družice byla sestavena v prostředí s čistotou třídy 10 podle amerických předpisů. Dokonale opracované součástky by mohly poškodit již mikrometrová zrnka prachu. Družice změřila změnu osy setrvačnicků způsobenou zakřivením časoprostoru, nepodařilo se jí ale díky opakovanému přerušení měření slunečními vzplanutími změřit změnu způsobenou strháváním časoprostoru rotující Zemí. Finanční podpora projektu byla ze strany NASA zastavena dne 21. května 2008.



8. EINSTEINŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

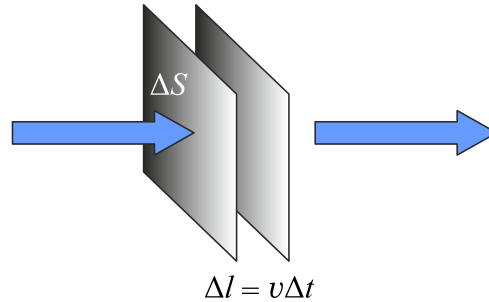
Einsteinův gravitační zákon řeší otázku, jakým způsobem látka zakřivuje časoprostor a jak se látka v tomto křivém časoprostoru pohybuje. V minulé kapitole jsme se naučili popsat pokrivený časoprostor. Nyní se budeme věnovat popisu rozložení hmoty a energie v časoprostoru. Za tím účelem si odvodíme zákon zachování energie a hybnosti v proudící ideální tekutině, na kterou nepůsobí žádné vnější síly. Budeme nejprve postupovat v rámci klasické fyziky.

Rovnice kontinuity v klasické fyzice

Uvažujme proudění aditivní veličiny A (roste s množstvím látky, například hmotnost, energie, hybnost, náboj). Proudění aditivní veličiny popisujeme čtyřmi veličinami (hustotou a tokem)

$$\rho_A \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta V}; \quad \mathbf{j}_A \equiv \rho_A \mathbf{v}. \quad (180)$$

Později v této kapitole uvidíme, že tyto čtyři veličiny tvoří relativistický čtyřvektor a transformují se za pomoci Lorentzovy matice – ρ_A nazýváme hustotou; \mathbf{j}_A nazýváme tokem veličiny A . Jaký je význam toku? Jako každý vektor má velikost a směr. Směr je zřejmý, jde o směr rychlosti, tedy o směr proudění veličiny A . Abychom zjistili velikost toku, postavme kolmo na tok myšlenou plochu ΔS , za čas Δt se tekoucí látka posune o Δl :



Velikost toku nyní určíme přímo z jeho definice, tj.

$$j_A = \rho_A v = \frac{\Delta A}{\Delta V} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta A}{\Delta S \Delta l} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta A}{\Delta S \Delta t}. \quad (181)$$

Velikost toku tedy je množství A proteklé jednotkovou plochou za jednotku času. Například tok náboje má jednotku $\text{Cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Jestliže se veličina A při proudění neztrácí, ani nepřibývá, musí časový úbytek veličiny z libovolného objemu být roven toku veličiny přes plochu ohraničující tento objem:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho_A dV = \int_{\partial V} \mathbf{j}_A \cdot d\mathbf{S}$$

Hranice objemu V je označena ∂V . Skalární součin napravo jen respektuje skutečnost, že kolmo k ploše teče veškerá látka, při toku podél plochy ji neprotéká žádná. Pomocí Gaussovy věty integrálního počtu převedeme plošný integrál na objemový a oba integrály spojíme:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_A \right) dV = 0.$$

Časovou derivaci jsme přemístili do integrálu, tam je ale $\rho_A = \rho_A(t, \mathbf{x})$ a máme při derivování možnost výběru, proto musíme použít parciální derivaci. Uvedený vztah musí při proudění platit v libovolném objemu, a to je možné jen, je-li argument integrálu roven nule:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_A = 0 \quad (182)$$

Odvozený vztah se nazývá rovnice kontinuity a na pravé straně je nula, pokud se veličina A při proudění zachovává. Nezachovává-li se, není na pravé straně nula. Rovnice kontinuity je tedy vyjádřením zákona zachování aditivní veličiny A .

Zákon zachování hmoty a energie v klasické fyzice

Pro hustotu (klidové) hmotnosti napíšeme rovnici kontinuity ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (\rho v_k) = 0. \quad (183)$$

Stejná rovnice platí i pro hustotu energie ($E = mc^2$, tj. $\rho_E = \rho_m c^2$) a vztahy se liší jen konstantou c^2 . Zavedeme-li čtyřvektor

$$J^\mu \equiv \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (184)$$

můžeme zákon zachování hmoty-energie zapsat v přehledném tvaru

$$\partial_\mu J^\mu = 0; \quad J^\mu_{,\mu} = 0, \quad (185)$$

ze kterého je patrné, že J^μ tvoří čtyřvektor popisující proudění hmoty a energie.

Zákon zachování hybnosti v klasické fyzice

Pro objekt o hmotnosti m platí Newtonova pohybová rovnice

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (186)$$

Pro proudící prostředí zavedeme hustotu síly

$$\mathbf{f} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V}. \quad (187)$$

V hustotách se rychlost \mathbf{v} jedné částice změní na rychlost proudění $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (188)$$

Po rozepsání derivace pro pole $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ získáme rovnici

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}. \quad (189)$$

Zbývá určit hustotu síly. U konzervativních polí míří síla k minimu potenciální energie:

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p \quad (190)$$

nebo v hustotách

$$\mathbf{f} = -\nabla w_p. \quad (191)$$

Tlaková energie je

$$W_p = \int F_p dl = \int p S dl = \int p dV, \quad (192)$$

hustota tlakové energie proto je $w_p = p$ a hustota síly způsobená tlakem vychází

$$\mathbf{f} = -\nabla p. \quad (193)$$

Pohybová rovnice (189) s hustotou síly způsobenou tlakem má proto tvar

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p. \quad (194)$$

Nalezneme nyní časový vývoj hustoty hybnosti (tj. budeme hledat zákon zachování hybnosti)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) = \frac{\partial \rho}{\partial t} v_k + \rho \frac{\partial v_k}{\partial t}.$$

Za časovou změnu hustoty dosadíme z rovnice kontinuity (183) a za časovou změnu hybnosti z pohybové rovnice (194):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) = -\partial_l(\rho v_l) v_k - \rho(v_l \partial_l) v_k - \partial_k p.$$

Všechny členy převedeme na levou stranu a upravíme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial(\rho v_l)}{\partial x_l} v_k + (\rho v_l) \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho v_l v_k) + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho v_k v_l + p \delta_{kl}) = 0.$$

Získali jsme zákon zachování hybnosti. V závorce v prostorových derivacích je tok hybnosti neboli tenzor tlaku. Sama hybnost je vektorová veličina a proto její tok tvoří tenzor druhého řádu. Symetrie tenzoru tlaku vzhledem k záměně indexů zajišťuje zachování momentu hybnosti v proudící tekutině. Tenzor tlaku se skládá ze dvou částí – tenzorové části související s prouděním tekutiny a skalární části, kterou tvoří normální tlak působící ve všech směrech stejně. Zákon zachování hybnosti můžeme napsat ve složkovém zápisu

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(T_{kl}) = 0; \quad T_{kl} \equiv \rho v_k v_l + p \delta_{kl}. \quad (195)$$

nebo v invariantním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{T} = 0. \quad (196)$$

Opět jsme získali tvar rovnice kontinuity. V časové části je hustota hybnosti, v prostorové části tok hybnosti. Ten je nyní tenzorem druhého řádu a výsledkem operace divergence je vektorová veličina.

Tenzor energie a hybnosti

Energie a hybnost tvoří čtyřvektor, a proto zákon zachování energie (183) a zákon zachování hybnosti (195) patří neoddělitelně k sobě. Rozepíšeme je po složkách:

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v_x) + \partial_y(\rho v_y) + \partial_z(\rho v_z) = 0,$$

$$\partial_t(\rho v_x) + \partial_x(\rho v_x^2 + p) + \partial_y(\rho v_x v_y) + \partial_z(\rho v_x v_z) = 0, \quad (197)$$

$$\partial_t(\rho v_y) + \partial_x(\rho v_y v_x) + \partial_y(\rho v_y^2 + p) + \partial_z(\rho v_y v_z) = 0,$$

$$\partial_t(\rho v_z) + \partial_x(\rho v_z v_x) + \partial_y(\rho v_z v_y) + \partial_z(\rho v_z^2 + p) = 0.$$

První řádek je zákon zachování energie, další řádky jsou složky zákona zachování hybnosti. Napišme tyto zákony zachování maticově:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \rho & \rho v_x & \rho v_y & \rho v_z \\ \rho v_x & \rho v_x v_x + p & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y & \rho v_y v_x & \rho v_y v_y + p & \rho v_y v_z \\ \rho v_z & \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z + p \end{pmatrix} = 0 \quad (198)$$

Zápis znamená 4 rovnice, vždy násobíme řádkovou matici nalevo sloupci čtvercové matice napravo. Povšimněte si, že pravá matice 4×4 je symetrická. Říkáme jí *tenzor energie a hybnosti*. Jeho relativistickou variantu budeme označovat symbolem $T^{\alpha\beta}$. Veličiny v prvním sloupci mají význam hustoty hmoty-energie ρ a hustoty jednotlivých složek hybnosti $\rho \mathbf{u}$. V prvním řádku má tatáž veličina $\rho \mathbf{v}$ význam toku hmoty. Upravme nyní maticový zápis tak, aby všechny prvky měly stejný rozměr (do obou matic dodáme vhodně rychlost světla c):

$$\left(\frac{\partial}{\partial ct} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v_x & \rho c v_y & \rho c v_z \\ \rho c v_x & \rho v_x v_x + p & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho c v_y & \rho v_y v_x & \rho v_y v_y + p & \rho v_y v_z \\ \rho c v_z & \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z + p \end{pmatrix} = 0. \quad (199)$$

Složka T^{00} byla původně ρ (hustota hmoty) a nyní je ρc^2 (hustota energie). V lokálně inerciální soustavě padající v daném okamžiku s látkou bude mít matice na pravé straně tvar $T^{\alpha\beta} = \text{diag}(\rho c^2, p, p, p)$. Stopa matice (součet diagonálních členů) bude $T^\alpha_\alpha = -\rho c^2 + 3p$. Ke změně znaménka v časové oblasti došlo vlivem snížení indexu. Stopa je důležitým invariantem matice a budeme požadovat, aby se tato stopa nezměnila ani u relativistického tvaru. Dodání c do členů nemá žádný vliv na výsledné rovnice (zákon zachování hmoty-energie a hybnosti). Prostorová část tenzoru má tvar

$$T_{kl} = \rho v_k v_l + p \delta_{kl}. \quad (200)$$

Ve speciální relativitě není třeba rozlišovat v prostorové části dolní a horní indexy. Jako přímé zobecnění k obecné metrice obecné relativity se zdá být výraz

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta + p g^{\alpha\beta}. \quad (201)$$

Proveďme nyní newtonovskou limitu, abychom zkontrolovali, zda zpětně dostaneme matici ve výrazu (199). Spočtíme si v newtonovské limitě čtyřrychlost a metriku:

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (202)$$

$$g^{\alpha\beta} \rightarrow \eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (203)$$

Pro prostorové složky dostaneme

$$T^{kl} = \rho U^k U^l + p g^{kl} \rightarrow \rho v_k v_l + p \delta_{kl}. \quad (204)$$

Opět jsme využili, že v Newtonově limitě není v prostorové části rozdíl mezi kontravariantními a kovariantními složkami. Časoprostorové složky budou

$$T^{0l} = \rho U^0 U^l + p g^{0l} \rightarrow \rho c v_l. \quad (205)$$

Oba výrazy přejdou v newtonovské limitě ve správné členy tenzoru ve výrazu (199). Problém ale bude se složkou T^{00} :

$$T^{00} = \rho U^0 U^0 + p g^{00} \rightarrow \rho c^2 - p. \quad (206)$$

Takový člen nekoresponduje s nerelativistickým výrazem, navíc by narušil správnou hodnotu stopy tenzoru energie a hybnosti, která je invariantem. Korektním zobecněním pro relativitu je výraz

$$\blacktriangleright \quad T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U^\beta + p g^{\alpha\beta}, \quad (207)$$

kde ρ je klidová hustota klidové hmotnosti. V limitě nízkých rychlostí je člen $p/c^2 \ll \rho$, tedy neovlivní newtonovskou limitu. V předpisu (207) přispívá ke klidové hustotě energie aditivně i tlakový člen, za něhož je zodpovědný chaotický pohyb částic. Člen T^{00} a stopa tenzoru při předpisu (207) dají v LIS ($\gamma = 1$), spojeném v daném čase a místě s látkou, správnou hodnotu:

$$T^{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^0 U^0 + p g^{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \gamma^2 c^2 - p = \rho c^2, \quad (208)$$

$$\text{Tr}(T) \equiv T^\alpha{}_\alpha = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U_\alpha + p g^\alpha{}_\alpha = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (-c^2) + 4p = 3p - \rho c^2. \quad (209)$$

Rozložení hmoty a energie v prostoru je tedy popsáno tenzorem hmoty a energie (207). Zákon zachování energie a hybnosti lze zapsat v úsporném maticovém tvaru

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0. \quad (210)$$

Příslušný kovariantní zápis v obecné relativitě je

$$\blacktriangleright \quad T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \quad (211)$$

Pro $\alpha = 0$ dostaneme zákon zachování energie a pro $\alpha = 1, 2, 3$ zákony zachování jednotlivých složek hybnosti. Z rovnice (211) ovšem plyne

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} T^{\xi\beta} + \Gamma^\beta{}_{\xi\beta} T^{\alpha\xi} = 0. \quad (212)$$

První výraz je rovnice kontinuity, další členy jsou způsobeny křivostí a zákon zachování porušují. Zákon zachování energie a hybnosti látky proto v obecné relativitě neplatí. Látka předává energii a hybnost gravitačnímu poli, tj. zakřivení časoprostoru. Teprve pro soustavu pole + částice (zakřivení + částice) by zákon zachování energie a hybnosti byl platný.

Einsteinův gravitační zákon

Nový gravitační zákon by měl mít tvar

$$G(\text{zakřivení časoprostoru}) = F(\text{rozložení hmoty a energie}), \quad (213)$$

neboť předpokládáme, že rozložení hmoty a energie způsobuje zakřivení časoprostoru a naopak zakřivení časoprostoru způsobuje změnu rozložení hmoty a energie. Rozložení hmoty a energie je popsáno tenzorem hmoty a energie, proto musíme na levé straně využít maximálně dvojindexové veličiny charakterizující zakřivení časoprostoru:

$$G(R^{\alpha\beta}, R, g^{\alpha\beta}) = F(T^{\alpha\beta}). \quad (214)$$

Budeme předpokládat, že hledaný zákon má co možná nejjednodušší tvar, tj. v úvahu přichází

$$c_1 R^{\alpha\beta} + c_2 R g^{\alpha\beta} + c_3 g^{\alpha\beta} = c_4 T^{\alpha\beta}. \quad (215)$$

V novém gravitačním zákonu jsou 4 neurčené konstanty. Jedné z nich se můžeme zbavit dělením celé rovnice konstantou c_1 :

$$R^{\alpha\beta} + d_1 R g^{\alpha\beta} + d_2 g^{\alpha\beta} = d_3 T^{\alpha\beta}. \quad (216)$$

Konstantu d_1 určíme z podmínky (211), tj. $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$. Rovnici (216) proto kovariantně derivujeme podle β :

$$R^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + d_1 (R g^{\alpha\beta}){}_{;\beta} + d_2 g^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = d_3 T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}.$$

Pravá strana je nulová, na levé straně je nulový poslední člen (kovariantní derivace metriky je vždy nulová, viz (89)). Z rovnice tedy zbude

$$R^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + d_1 (Rg^{\alpha\beta}){}_{;\beta} = 0.$$

Z této podmínky lze určit konstantu d_1 . Po výpočtu vyjde $d_1 = -1/2$ a tedy máme

$$R^{\alpha\beta} - 1/2 Rg^{\alpha\beta} + d_2 g^{\alpha\beta} = d_3 T^{\alpha\beta}. \quad (217)$$

Newtonovská limita

Nový gravitační zákon musí vést v limitě slabých polí a nízkých rychlostí na klasickou rovnici pro gravitační potenciál. Pro potenciální energii dvou nábojů interagujících elektrostaticky a dvou hmotností interagujících gravitačně máme formule:

$$W_{ES} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad W_G = -G \frac{mM}{r}. \quad (218)$$

Opačné znaménko koresponduje s faktem, že dva kladné náboje se odpuzují, zatímco dvě kladné hmoty se přitahují. Po vydělení vlastnostmi testovacího tělíska (q v elektrostatice a m v gravitaci) získáme tzv. potenciály:

$$\phi_{ES} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad \phi_G = -G \frac{M}{r}. \quad (219)$$

Definiční rovnice jsou shodné až na konstanty

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G. \quad (220)$$

Obdobné musí být i rovnice pro potenciály (v elektrostatice jde o notoricky známou Poissonovu rovnici)

$$\Delta\phi_{ES} = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}; \quad \Delta\phi_G = +4\pi G \rho_M. \quad (221)$$

V Newtonově limitě, kdy

$$g_{00} = -(1 + 2\phi/c^2), \quad (222)$$

bychom tedy očekávali, že rovnice (217) přejde v rovnici pro gravitační potenciál

$$\Delta\phi = +4\pi G \rho. \quad (223)$$

K tomu stačí rozepsat složku s indexy „00“ rovnice (217). Na levé straně skutečně dostaneme druhé derivace potenciálu a na pravé straně člen úměrný hustotě. Z požadavku, aby Einsteinův gravitační zákon (217) limitně přešel v Newtonův zákon (223), plyne $d_2 = 0$, $d_3 = 8\pi G/c^4$. Výsledná formule má tedy tvar

$$\blacktriangleright \quad R^{\alpha\beta} - 1/2 Rg^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \quad (224)$$

Někdy se píše ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}; \quad G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - 1/2 Rg^{\alpha\beta}, \quad (225)$$

kde $G^{\alpha\beta}$ je tzv. Einsteinův tenzor.

Význam nového zákona

Nový gravitační zákon představuje 10 diferenciálních rovnic pro metriku. Počet rovnic je dán tím, že obě strany jsou symetrickými tenzory, tj. $G^{\alpha\beta} = G^{\beta\alpha}$ a $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$. Rovnice jsou nelineární. Albert Einstein ho představil při přednášce před Pruskou akademií věd na podzim roku 1915. Jde historicky o první teorii, která obsahuje jak polní, tak pohybové rovnice. Že jde o polní rovnice, je patrné na první pohled. Ze znalosti rozložení hmoty a energie můžeme určit

metriku časoprostoru. Gravitační zákon v sobě obsahuje ale i rovnici geodetiky (Tak tomu není například v klasické elektrodynamice, kde jsou polními rovnicemi Maxwellovy rovnice, a pohyby částic počítáme z Lorentzovy rovnice).

Derivujme gravitační zákon (224) kovariantně podle β (přes tento index sčítáme, kovariantní derivace v sobě zahrnuje zakřivení časoprostoru). Levá strana bude nulová (tak jsme volili konstantu u druhého členu) a pravá strana dá zákony zachování energie a hybnosti

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad (226)$$

neboli

$$\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U^\beta + p g^{\alpha\beta} \right]_{;\beta} = 0 \quad (227)$$

Uvažujme nyní hmotný nekoherentní prach, jehož tlak je nulový:

$$\left[\rho U^\beta U^\alpha \right]_{;\beta} = 0 \quad (228)$$

Derivujme tento výraz jako součin

$$\left(\rho U^\beta \right)_{;\beta} U^\alpha + \rho U^\beta U^\alpha{}_{;\beta} = 0$$

První výraz je nulový, neboť $(\rho U^\beta)_{;\beta} = 0$ (rovnice kontinuity pro hmotu). Zbývá

$$U^\alpha{}_{;\beta} U^\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[U^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} U^\xi \right] U^\beta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$U^\alpha{}_{,\beta} U^\beta + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} U^\xi U^\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad U^\alpha{}_{,\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} U^\xi U^\beta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} U^\xi U^\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} \frac{dx^\xi}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

Vidíme, že v Einsteinově gravitačním zákoně je obsažena rovnice geodetiky. Einsteinův gravitační zákon by v principu mohl mít na levé straně i člen úměrný samotné metrice, tj.

$$\blacktriangleright \quad R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \quad (229)$$

Takový člen neovlivní zákony zachování (kovariantní derivace metriky je nulová), ale ovlivní v newtonovské limitě rovnici pro gravitační potenciál. Ta získá po vynechání aditivních konstant tvar

$$\Delta\phi + 2\Lambda\phi = 4\pi G\rho \quad (230)$$

Pro malé Λ se změna řešení projeví až na velkých vzdálenostech. Proto se přidanému členu říká kosmologický člen a konstantě Λ kosmologická konstanta. Albert Einstein věřil, stejně jako ostatní v té době, ve stacionární vesmír. Jeho rovnice bez kosmologického členu ale vedly k samovolnému kolapsu vesmíru, který byl homogenně vyplněn nekoherentním prachem. Proto Einstein do rovnic v roce 1917 přidal kosmologický člen, který kompenzoval kolaps a pro určitou hodnotu parametru Λ působil odpudivě, tedy proti gravitačnímu přitahování. Rovnice bez kosmologického členu umožňují jen kolabující nebo expandující řešení (v závislosti na počátečních podmínkách). V roce 1922 ukázal ruský matematik a meteorolog Alexandr Fridman (1888–1925), že kosmologický člen vizi stacionárního vesmíru nezachrání, neboť je rovnováha mezi přitažlivou gravitací a odpudivým kosmologickým členem nestabilní. Libovolná porucha nakonec způsobí buď kolaps, nebo expanzi vesmíru. Einstein uznal správnost Fridmanových úvah až v roce 1923. Když v roce 1929 Edwin Hubble objevil expanzi vesmíru, Einstein kosmologický člen z rovnic vyškrtl a prohlásil, že šlo o největší

omyl jeho života. Pro různé hodnoty Λ kosmologický člen buď expanzi brzdí (kompenzuje), nebo naopak zesiluje. Detailní analýzu rovnic s kosmologickým členem provedl holandský astronom Willem de Sitter (1872–1934). V roce 1998 Adam Riess a Saul Perlmutter objevili zrychlenou expanzi vesmíru, která nemůže být způsobena přitažlivou gravitační interakcí. Snad jsou za ni zodpovědné kvantové procesy probíhající ve vakuu. Zrychlená expanze znamenala znovuzavedení kosmologického členu do Einsteinova gravitačního zákona. Rozměr kosmologické konstanty je m^{-2} :

$$[\Lambda] = \frac{1}{m^2}. \tag{231}$$

Podle současných měření expanze vesmíru, zejména z projektu SPC (*Supernova Cosmology Project*), vychází hodnota kosmologické konstanty přibližně

$$\Lambda \approx 2,25 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}. \tag{232}$$

Pokud ale nepracujeme s kosmologickými vzdálenostmi, nemá smysl kosmologický člen do rovnic zavádět.



Einsteinův gravitační zákon je zvěčněn i na hřbitově lokomotiv v Bolívii. Opačné znaménko na pravé straně je dáno odlišnou konvencí $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.



9. GRAVITAČNÍ VLNY

Gravitační vlny jsou periodické záhyby časoprostoru šířící se rychlostí světla. Mají dvě nezávislé polarizace skloněné pod úhlem 45° . Jejich zdroji jsou buď periodické děje vznikající rotací objektů s kvadrupólovou nesymetrií, nebo katastrofické děje (splnutí černých děr nebo neutronových hvězd, nesymetrický kolaps hvězdy atd.).

Vlnová rovnice

Předpokládejme, že gravitační vlna je malou odchylkou od Minkowského metriky, tj.

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}. \quad (233)$$

Poruchy $h_{\alpha\beta}$ budeme považovat za veličiny prvního řádu, tj. jejich kvadráty budeme zanedbávat. Nejprve nalezneme z formule (89) Christoffelovy symboly

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\xi} (g_{\xi\beta,\gamma} + g_{\xi\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\xi}), \\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\xi} + h^{\alpha\xi}) (h_{\xi\beta,\gamma} + h_{\xi\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\xi}), \\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\xi} (h_{\xi\beta,\gamma} + h_{\xi\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\xi}), \\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} (h^{\alpha}_{\beta,\gamma} + h^{\alpha}_{\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma}^{\alpha}). \end{aligned} \quad (234)$$

Povšimněte si, že snižování a zvyšování indexů u veličin úměrných h postačí provádět jen přes Minkowského metriku, protože kvadráty h zanedbáváme. Nyní sestavíme Riemannův tenzor křivosti (170):

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} &= \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\xi}_{\beta\delta} \Gamma^{\alpha}_{\xi\gamma} - \Gamma^{\xi}_{\beta\gamma} \Gamma^{\alpha}_{\xi\delta}, \\ R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (h^{\alpha}_{\beta,\delta\gamma} + h^{\alpha}_{\delta,\beta\gamma} - h_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}) - \frac{1}{2} (h^{\alpha}_{\beta,\gamma\delta} + h^{\alpha}_{\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\gamma}^{\alpha\delta}), \\ R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (h^{\alpha}_{\delta,\beta\gamma} - h_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}) - \frac{1}{2} (h^{\alpha}_{\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\gamma}^{\alpha\delta}). \end{aligned} \quad (235)$$

Kvadratické členy v Γ se neuplatní, neboť jsou úměrné kvadrátům $h_{\alpha\beta}$. Nyní sestavíme Ricciho tenzor:

$$\begin{aligned} R_{\beta\delta} &= R^{\xi}_{\beta\xi\delta} = \frac{1}{2} (h^{\xi}_{\delta,\beta\xi} - h_{\beta\delta}^{\xi\xi}) - \frac{1}{2} (h^{\xi}_{\xi,\beta\delta} - h_{\beta\xi}^{\xi\delta}), \\ R_{\beta\delta} &= \frac{1}{2} h^{\xi}_{\delta,\beta\xi} - \frac{1}{2} \square h_{\beta\delta} - \frac{1}{2} s_{,\beta\delta} + \frac{1}{2} h_{\beta\xi}^{\xi\delta}, \\ R^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} h^{\xi\beta}{}_{,\xi}{}^{\alpha} - \frac{1}{2} \square h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} s^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h^{\alpha}_{\xi}{}^{\xi\beta}, \end{aligned} \quad (236)$$

kde jsme stopu tenzoru poruch metriky označili

$$s \equiv \text{Tr} \vec{\mathbf{h}} = h^{\xi}_{\xi}. \quad (237)$$

Jako poslední zbývá skalární křivost R :

$$R = R^{\eta}_{\eta} = \frac{1}{2} h^{\eta\xi}{}_{,\xi\eta} - \frac{1}{2} \square s - \frac{1}{2} \square s + \frac{1}{2} h^{\xi}_{\eta}{}^{\eta}{}_{,\xi} = h^{\eta\xi}{}_{,\xi\eta} - \square s. \quad (238)$$

Sestavme nyní Einsteinův gravitační zákon (229)

$$\frac{1}{2} h^{\xi\beta}{}_{,\xi}{}^{\alpha} - \frac{1}{2} \square h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} s^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h^{\alpha}_{\xi}{}^{\xi\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h^{\xi\eta}{}_{,\xi\eta} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \square s = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \quad (239)$$

Kalibrační volnost

Při výpočtu rovnic pro elektromagnetické potenciály se využívá jejich nejednoznačnost, ta umožní požadovat splnění Lorenzovy kalibrační podmínky $A^\alpha_{,\alpha} = 0$. S touto podmínkou získají rovnice pro elektromagnetické potenciály jednoduchý tvar – splynou s obyčejnou vlnovou rovnicí $\square A^\alpha = -\mu_0 J^\alpha$. Ani nyní ale nejsou elektromagnetické potenciály ještě určeny jednoznačně a lze na ně klást další podmínky, například nulovost skalárního potenciálu. Obdobně tomu je s rovnicí (239). Kalibrační volnost zde znamená možnost volby souřadnicového systému. Namísto x^α můžeme volit jiné souřadnice $x^\alpha + \xi^\alpha(x)$ a požadovat, aby $h^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$. Taková kalibrace vynuluje v rovnici (239) první, čtvrtý a pátý člen. Obdobně jako v elektromagnetickém případě můžeme ještě na poruchy metriky klást další podmínky. Lze požadovat, aby stopa tenzoru poruch byla nulová (v rovnici zmizí třetí a šestý člen). Obdobně jako můžeme v elektřině a magnetizmu kalibrací vynulovat skalární potenciál, můžeme i zde požadovat nulovost $h^{0\alpha}$. Výsledkem je vlnová rovnice doplněná o dodatečné podmínky:

$$\begin{aligned} \square h_{\alpha\beta} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}; \\ h^{\alpha\beta}_{,\beta} &= 0, \quad s = h^\alpha_\alpha = 0, \quad h^{0\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (240)$$

Vlastnosti gravitačních vln

Každé řešení vlnové rovnice ve vakuu můžeme napsat jako superpozici rovinných vln typu

$$\psi = A e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]} = A e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (241)$$

Skutečným řešením vlnové rovnice je pak samozřejmě reálná část výsledné poruchy. Rovinné vlny mají jednoduché vlastnosti vzhledem k derivování:

$$\partial^\gamma \psi = \partial^\gamma A e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]} = \partial^\gamma A e^{ik_\mu x^\mu} = ik^\gamma A e^{ik_\mu x^\mu} = ik^\gamma \psi.$$

Derivování tedy můžeme provádět symbolicky:

$$\partial^\gamma \psi = ik^\gamma \psi \quad \Rightarrow \quad \partial^\gamma \rightarrow ik^\gamma \quad (242)$$

Složení skutečné vlny za pomoci rovinných vlnoploch nazýváme Fourierovou transformací. U lineárních rovnic platí princip superpozice a můžeme se zabývat jen jednotlivými parciálními vlnami, pro které platí jednoduchý vztah (242). Představme si nyní, že gravitační vlna už nějakým mechanismem vznikla a šíří se prázdňým prostorem. Pak splňuje vlnovou rovnici

$$\square h_{\alpha\beta} = 0 \quad (243)$$

a její řešení lze složit z rovinných vln

$$h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} e^{ik_\alpha x^\alpha}. \quad (244)$$

Po dosazení rovinné vlny (244) do vlnové rovnice (243) dostaneme podmínku, za které je rovinná vlna řešením vlnové rovnice:

$$k_\mu k^\mu = 0. \quad (245)$$

Tato podmínka říká, že vlnový čtyřvektor je nulovým čtyřvektorem, tj. v časoprostoru míří ve směru světelného kužele. Podmínka (245) je současně disperzní relací (vztahem mezi úhlovou frekvencí a vlnovým vektorem). Po rozepsání do složek máme

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 = 0 \quad (246)$$

neboli

$$\omega = ck, \quad (247)$$

což je stejná disperzní relace, jakou mají elektromagnetické vlny ve vakuu. Gravitační vlna se, stejně jako elektromagnetická vlna, šíří rychlostí světla. Základní kalibrační podmínka vede na vztah

$$\blacktriangleright \quad h_{\alpha\beta}k^\beta = 0, \quad (248)$$

ze kterého je zřejmé, že gravitační vlny jsou *příčným vlněním* (poruchy jsou kolmé na vlnový čtyřvektor). Volme nyní souřadnicovou soustavu tak, aby vlnový vektor (prostorová část vlnového čtyřvektoru) mířil v první prostorové ose, tj.

$$k^\alpha = \begin{pmatrix} \omega/c \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (249)$$

Velikost časové složky vlnového čtyřvektoru lze snadno dopočítat z relace (245) nebo z faktu, že jde o nulový čtyřvektor. Pokud použijeme kalibrační podmínku ve tvaru (248), další kalibrační podmínky, nulovost stopy a symetrii poruch, musí pro amplitudy rovinných vln platit

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}k^\beta &= 0, & A_{0\beta} &= 0, \\ A_{11} + A_{22} + A_{33} &= 0, & A_{\alpha\beta} &= A_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (250)$$

Výsledkem je, že amplituda má jediné dva volné parametry, které zajistí splnění první rovnice (250) včetně dalších podmínek:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & B & -A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (251)$$

Gravitační vlnu tak můžeme rozdělit na dvě nezávislé polarizace

$$h = h_+ + h_\times = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} e^{ik_\alpha x^\alpha} + B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} e^{ik_\alpha x^\alpha}. \quad (252)$$

Do metrického tenzoru přispěje reálná část, tedy budeme mít

$$g_+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}; \quad h \equiv A \cos(kx - \omega t). \quad (253)$$

$$g_\times = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & h & 1 \end{pmatrix}; \quad h \equiv B \cos(kx - \omega t). \quad (254)$$

Odpovídající intervaly jsou

$$ds_+^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + (1+h)dy^2 + (1-h)dz^2, \quad (255)$$

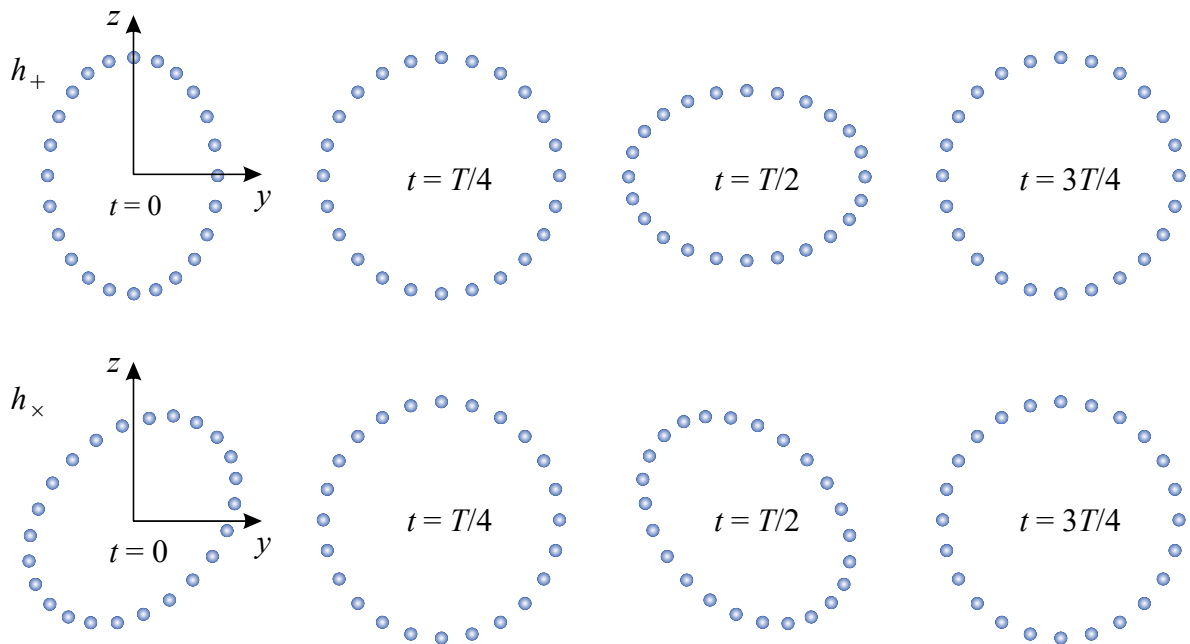
$$ds_\times^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2h dy dz. \quad (256)$$

Vlna se šíří ve směru osy x , deformace probíhají v rovině (yz) , jde tedy o vlnění příčné. Určeme nyní relativní deformaci ve směru osy y v prvním případě:

$$y = \sqrt{1+h} y_0 \quad \Rightarrow \quad y \approx (1+h/2)y_0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{h}{2}. \quad (257)$$

Porucha h je tedy řádově rovna relativní deformaci tělesa, přes které gravitační vlna prochází. Pokud by měla gravitační vlna v cestě kroužek z hmotných bodů, probíhala by jeho deformace podle následujícího obrázku, kde je také dobře patrné, že jsou obě polarizace stočeny pod úhlem 45° .



Zdrojem elektromagnetické vlny může být dipólové rozložení nábojů. Elektrický dipólový moment je dán vztahem

$$\mathbf{p}_E = \sum_a q_a \mathbf{r}_a. \quad (258)$$

Intenzita dipólového záření je potom

$$I \sim \ddot{\mathbf{p}}_E^2. \quad (259)$$

U gravitačních vln (gravitačního záření) by musela být provedena pečlivá obecně-relativistická analýza. Nicméně i ze zjednodušené úvahy je patrné, že zdrojem gravitačních vln nemůže být rotující těleso s dipólovou symetrií rozložení hmoty kolem osy rotace. Zaveďme gravitační dipólový moment

$$\mathbf{p}_G = \sum_a m_a \mathbf{r}_a. \quad (260)$$

Derivace takové veličiny je ale úměrná těžišťové rychlosti, která je konstantní, takže

$$I \sim \ddot{\mathbf{p}}_G^2 = 0. \quad (261)$$

Zdrojem gravitačních vln proto může být až kvadrupólová nesymetrie v rozložení látky. Shrňme na závěr důležité vlastnosti gravitačních vln:

Vlastnosti gravitačních vln

- 1) Gravitační vlny se šíří rychlostí světla.
- 2) Gravitační vlny jsou příčným vlněním.
- 3) Gravitační vlny mají dvě nezávislé polarizace stočené o 45°.
- 4) Zdrojem gravitačních vln je kvadrupólová nesymetrie látky.

Srovnání s elektřinou a magnetizmem

	elektřina a magnetismus	obecná relativita
veličina	A^α	$h^{\alpha\beta}$
vlnová rovnice v prostředí	$\square A^\alpha = -\mu_0 J^\alpha$	$\square h^{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}$
základní kalibrace	$\partial_\alpha A^\alpha = 0$	$\partial_\alpha h^{\alpha\beta} = 0$
další kalibrace	$A^0 = 0$	$h^{0\alpha} = 0; \quad s = 0$
vlnová rovnice ve vakuu	$\square A^\alpha = 0$	$\square h^{\alpha\beta} = 0$
vakuové řešení	$A^\alpha = A_{(0)}^\alpha e^{ik_\mu x^\mu}$	$h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} e^{ik_\mu x^\mu}$
podmínka řešitelnosti	$k_\mu k^\mu = 0$	$k_\mu k^\mu = 0$
FT kalibrační podmínky	$k_\alpha A^\alpha = 0$	$k_\alpha h^{\alpha\beta} = 0$
dipólový moment	$\mathbf{p}_E = \sum_a q_a \mathbf{r}_a$	$\mathbf{p}_G = \sum_a m_a \mathbf{r}_a$
intenzita dipólového záření	$I \propto \ddot{\mathbf{p}}_E^2$	$I \propto \ddot{\mathbf{p}}_G^2 = 0$

Nepřímá pozorování gravitačních vln

Podvojně neutronové hvězdy

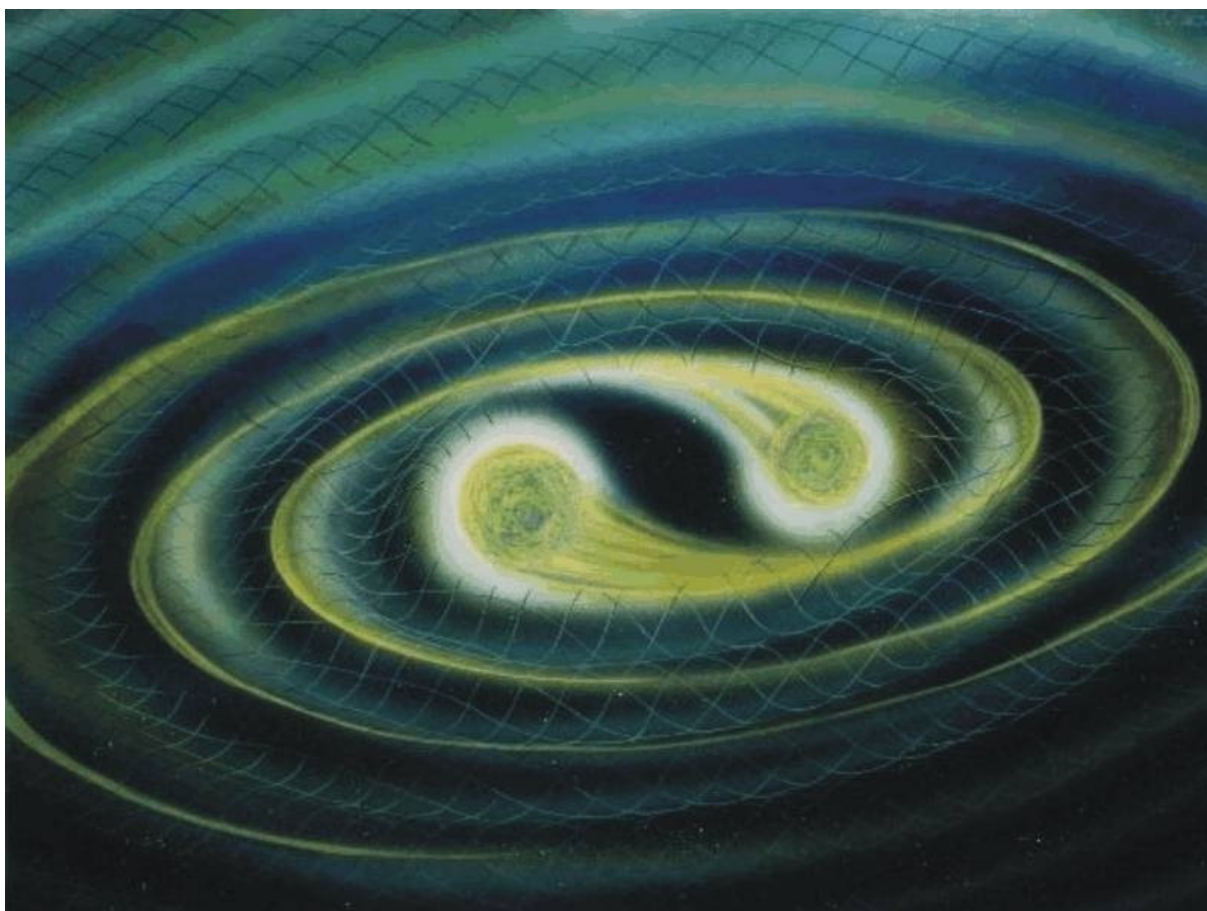
V roce 1974 byla objevena tehdy největším radioteleskopem světa v Arecibu podvojná neutronová hvězda PSR 1913+16, u které je jedna složka pulzarem s periodou pulsací 0,059 s. Rozměry obou složek i celého systému jsou tak malé, že systém je téměř ideální relativistickou laboratoří, kterou pro nás příroda připravila. Jde o dvě neutronové hvězdy v těsné blízkosti, takže zakřivení prostoru a času, na které složky reagují, je značné. Navíc v prostoru mezi složkami není žádný rozházený materiál, který by komplikoval interpretaci měřených veličin. Snadno si můžeme udělat představu o unikátnosti soustavy: Hmotnosti složek jsou o něco vyšší, než je hmotnost našeho Slunce (1,44 M_S a 1,39 M_S). Velikost těchto neutronových hvězd nepřesáhne několik desítek kilometrů. Vzdálenost obou složek je při největším přiblížení pouhých 700 000 km, tj. stejná jako poloměr našeho Slunce! Oběžná perioda podvojněho pulsaru činí 7 h 45 min.

V roce 1993 obdrželi za výzkum tohoto unikátního systému Nobelovu cenu za fyziku Russel Hulse a Joseph Taylor. Systém vykazoval celou řadu jevů předpovídaných obecnou relativitou. Například stáčení pericentra soustavy činí 4° za rok (stejný jev způsobuje stáčení dráhy Merkuru o pouhých 43" za století). Z dalších naměřených jevů upozorníme alespoň na relati-

vistický Dopplerův jev, červený gravitační posuv, dilataci času způsobenou vzájemným oběhem a stáčení světelných paprsků.

Nejznámějším se ale stal objev zkracování periody odpovídající ztrátě energie způsobené vyzařováním gravitačních vln. Za každý oběh se obě složky k sobě přiblíží přibližně o 3 milimetry, a oběžná perioda se proto zkracuje o 76 μs /rok. Russel Hulse a Joseph Taylor tak poprvé v historii nepřímo detekovali gravitační vlny. Šlo jen o měření důsledku vyzařování gravitačních vln, nikoli o jejich přímou detekci.

Později byly nalezeny podvojně neutronové hvězdy s ještě lepšími vlastnostmi. Například podvojný pulzar PSR 1534+12 nebo podvojný pulzar PSR J0737-3039A (objevený Lovellovým radioteleskopem v Jodrell Bank v roce 2003, stáčení pericentra zde činí 17° za rok) jsou vynikajícími relativistickými laboratořemi k ověřování jevů obecné relativity a samozřejmě i k nepřímé detekci gravitačních vln.



Gravitační vlny generované dvojicí navzájem se obíhajících hvězd. Souřadnicová síť představuje prostor i čas, můžeme například předpokládat, že jedna síť souřadnic je časová a druhá prostorová.

Detektory

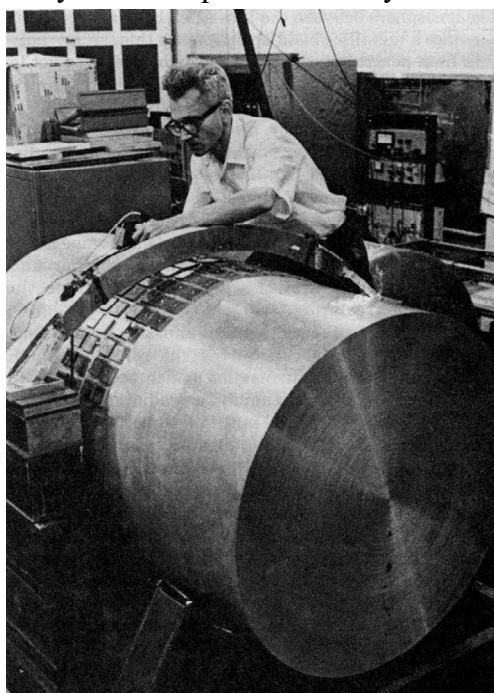
Přímá detekce gravitačních vln je mnohem složitější, než je tomu u elektromagnetických vln. Na elektromagnetické vlně se opačně nabitě částice zhoupnou v opačném směru a jejich pohyb snadno rozlišíme. Na gravitační vlně se dvě blízké částice zhoupnou stejným směrem a je třeba hledat až jevy vyšších řádů, tedy vzájemný pohyb dvou objektů vůči sobě. Existuje více možností přímé detekce: rezonanční detektory, interferometrické detektory, sledování fázového zpoždění referenčního signálu nebo otisk gravitačních vln do polarizace elektromagnetického záření. V budoucnosti se určitě objeví i kvantové detektory založené na změnách vlnové funkce mikroskopického objektu. Takové detektory ale budou fungovat jen pro velmi krátké vlnové délky a nebudou vhodné pro vesmírné zdroje gravitačních vln.

Rezonanční detektory

První známé pokusy detekce gravitačních vln pochází od Josepha Webera. O detekci se pokoušel pomocí dvou velkých hliníkových válců. Jeden z nich byl umístěn na Universitě v Marylandu v blízkosti Washingtonu, D.C. a druhý v Argonne National Laboratory v blízkosti Chicaga. Vzdálenost válců byla asi 1 000 km. To proto, aby případná detekce gravitační vlny byla potvrzena z nezávislého místa a nešlo jen o lokální poruchu. Válce se chovaly jako přirozené oscilátory naladěné na frekvenci 1660 Hz (očekávaná frekvence gravitačních vln z podvojných zdrojů je v kilohertzech). Byly vyrobeny z hliníku, měly hmotnost 1,4 tuny, průměr 66 cm a délku 153 cm. Každý válec byl zavěšen ve vakuu na kovovém vlákně a mechanicky zcela oddělen od okolí. Přibližně ve středu byl umístěn piezoelektrický snímač (je patrný na fotografii) propojený s elektronickými obvody citlivými na základní frekvenci oscilací válce. Při průchodu gravitační vlny by se válec měl rozkmitat na své vlastní frekvenci.

Válce byly zprovozněny v roce 1966 a v roce 1972 byla naměřena jediná koincidence, která se již nikdy nezopakovala. Dnes se soudí, že relativní citlivost $h \equiv \Delta/l \sim 10^{-15}$ tohoto zařízení nebyla dostatečná pro detekci gravitačních vln z běžných zdrojů, kde se očekává $h \sim 10^{-23}$. Weberovy válce měly další nevýhodu – měřily na jediné frekvenci, a tím nemohly nikdy pořídít ani spektrum gravitační vlny, ani časový vývoj její frekvence.

Následovníkem Weberova detektoru byl detektor Allegro provozovaný Louisanskou státní univerzitou v Baton Rouge od počátku 90. let 20. století do roku 2008. Hliníkový válec měl délku 3 m, hmotnost 2 300 kg a základní rezonanční frekvenci 904 Hz.



Interferometrické detektory

Většina dnešních systémů pro přímou detekci gravitačních vln je postavena na laserové interferometrii. Laserový svazek je polopropustným zrcadlem rozdělen do dvou kolmých ramen, na jejichž koncích jsou dokonale vybroušená odrazná zrcadla sloužící jako testovací tělesa, jejichž pohyb se sleduje. Odražené paprsky se rameny vrací přes rezonanční dutinu zpět, interferují a elektronicky jsou zaznamenávány změny interferenčního obrazce. Citlivost těchto zařízení závisí na velikosti ramen. V jednom směru dochází ke zkracování a v druhém k prodlužování, proto je citlivost značná.

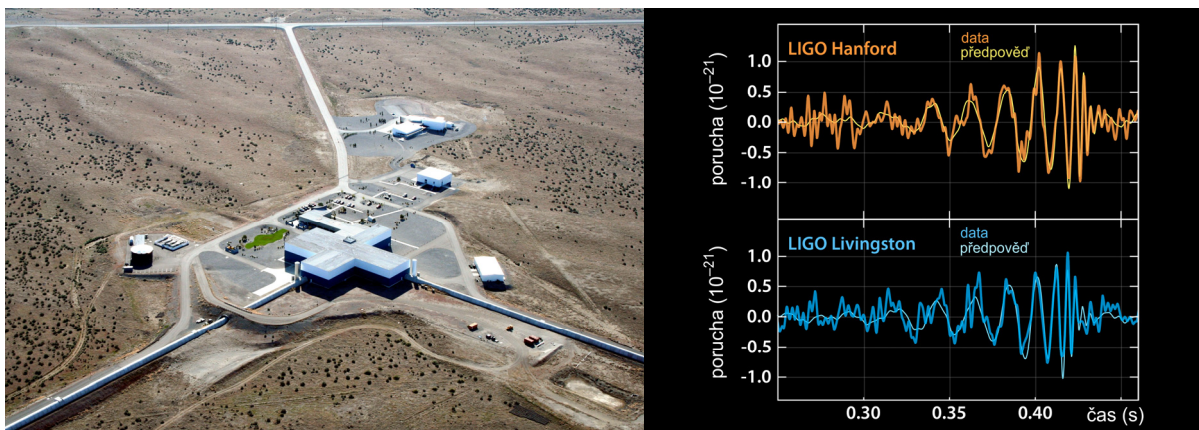
Největším systémem tohoto druhu na světě je LIGO (*Laser Interferometry Gravitational-Wave Observatory*). Projekt vznikl ve spolupráci univerzit Caltech a MIT. Byla postavena dvojice čtyřkilometrových detektorů vzdálená 3 000 km. První z nich se nachází v Hanfordu ve státě Washington a za jeho stavbu je zodpovědná universita Caltech. Druhý detektor je v Livingstonu ve státě Louisiana a stavba proběhla pod patronátem university MIT. Dva interferometry se staví proto, aby mohla být případná detekce gravitačních vln potvrzena koincencí ze dvou nezávislých zdrojů.

Interferometr byl zprovozněn v roce 2002, v letech 2010 až 2015 prošel rozsáhlou rekonstrukcí. Současné parametry přístroje jsou: délka každého ramene je 4 km, průměr 60 cm a pracovní tlak 10^{-9} torrů. Objem vakuového systému je 9 000 m³. (jde o největší vakuový systém na světě). Zdrojem paprsku o vlnové délce 1,06 μm je Nd:Yag laser, který může v budoucnu dosáhnout výkonu až 200 W. Přesnost zaměření polohy koncových testovacích zrcadel zavěšených na křemenných vláknách je 10^{-18} m, hmotnost zrcadel je 40 kg. Frekvenční rozsah, ve kterém je zařízení citlivé činí 10 Hz – 10 kHz, což odpovídá většině očeká-

vaných zdrojů gravitačních vln. Relativní přesnost měření změn délky je $h \sim 10^{-22}$, v oblasti stovek hertzů lepší než 10^{-23} . To je o osm řádů vyšší přesnost než u válců Josepha Webera.

Okamžitě po zprovoznění rekonstruovaného detektoru byl zachycen dne 14. září 2015 gravitační impulz se sloučením dvou černých děr. Každá z nich měla před splynutím hmotnost přibližně 30 Sluncí (29 M_{\odot} a 36 M_{\odot}). Nejistota určení hmotností je $\pm 4 M_{\odot}$. Hmotnost nově vzniklé černé díry není pouhým součtem hmotností původních černých děr. Je nižší, protože se na gravitační vlny přeměnila látka o hmotnosti rovné přibližně trojnásobku hmotnosti Slunce. Signál přišel ze vzdálenosti 1,3 miliardy světelných roků. Směrová charakteristika není příliš přesná, existuje jen odhad oblasti, ve které k této mimořádné události došlo. Jde o jižní oblohu v oblasti Magellanových oblaků (ta jsou ale samozřejmě mnohem blíže). Celý impulz trval necelé tři desetiny sekundy. Signál z Hanfordu i Livingstonu měl obdobný průběh, zpoždění mezi oběma pozorovacími stanicemi činilo 7 ms. Při přibližování obou složek narůstala frekvence z desítek hertzů na cca 300 hertzů v okamžiku splynutí děr. Dobře patrná byla také shoda signálu s teoretickou předpovědí získanou z numerických simulací.

Poprvé byly detekovány gravitační vlny přímo, poprvé bylo pozorováno splynutí dvou černých děr a poprvé byly pozorovány černé díry středních hmotností. Gravitační vlny jsou po elektromagnetickém oboru a neutronech třetím oknem pro pozorování dějů v blízkém i vzdáleném vesmíru.



Letecký pohled na centrální část detektoru LIGO (Hanford, 2008). Napravo je signál zachycený dne 14. září 2015. V okamžiku splynutí černých děr je amplituda a frekvence signálu nejvyšší, po splynutí signál utichá. Nejvyšší relativní deformace byla 10^{-21} , a to v okamžiku splynutí.

V Evropě existuje obdobný detektor VIRGO. Je umístěn u italské vesničky Cascina, 10 km od Pisy proslulé svou šikmou věží. VIRGO má ramena dlouhá 3 km. V letech 2010 až 2017 prošel detektor Virgo obdobnou rekonstrukcí jako LIGO a jeho parametry jsou srovnatelné s LIGO. Detektor Virgo se poprvé zapojil do společné pozorovací kampaně s detektory LIGO v srpnu 2017. První společné pozorování trvalo 25 dní. Trojice obřích interferometrů zachytila hned dva signály. První z nich už astronomy nepřekvapil – opět šlo o sloučení dvou velmi vzdálených černých děr.

Druhý záblesk ze 17. srpna 2017 pocházel ze sloučení dvou neutronových hvězd, což je děj, který generuje také intenzivní elektromagnetický signál nejrůznějšího původu – od gama záblesku z rozpadu velmi těžkých jader vznikajících v rázových vlnách až po rádiový signál související s interakcí výtrysků látky s okolním mezihvězdným prostředím. Jev tzv. *kilonovy* (tisíckrát jasnějšího úkazu, než je nova), byl poprvé pozorován jak v gravitačním, tak v elektromagnetickém okně, a to mnoha přístroji naráz. Dnes se detekce gravitačních záblesků stává rutinní astronomickou metodou pozorování vesmíru. Do roku 2024 bylo interferometricky detekováno přes sto záblesků.

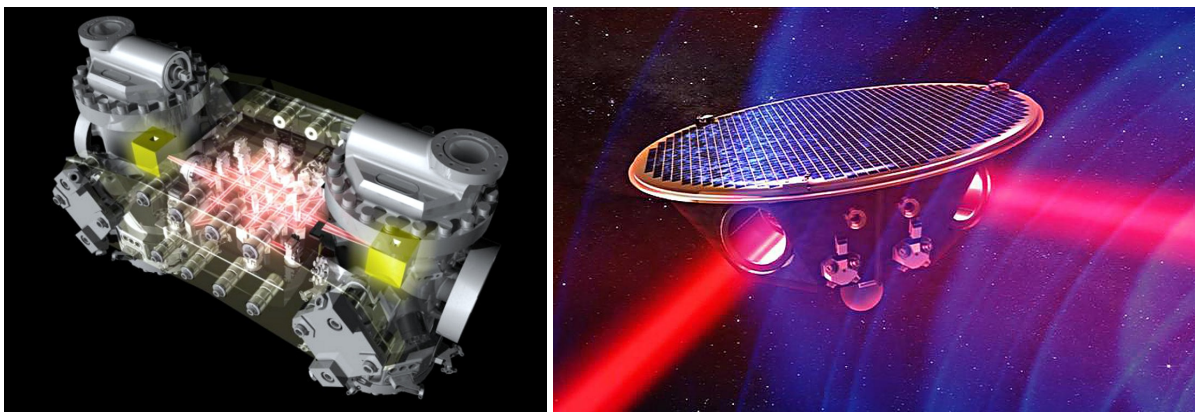


Jedno z ramen evropského detektoru VIRGO.

Budoucí detektory

Interferometrické detektory slaví jeden úspěch za druhým a mají před sebou skvělou budoucnost. Americké LIGO a evropské Virgo doplňuje japonský tříkilometrový podzemní detektor KAGRA (*KAmioka GRAVitational wave detector*) nacházející se v oblasti, kde je neutrinový detektor Super-Kamiokande. Jde o plně kryogenní systém (chlazený je celý tubus včetně koncových zrcadel). Detektor byl spuštěn v roce 2020, ke společnému pozorování s ostatními detektory se připojil v roce 2023. V Indii se usilovně staví další detektor LIGO, neboť chybí pozorování z oblasti Asie.

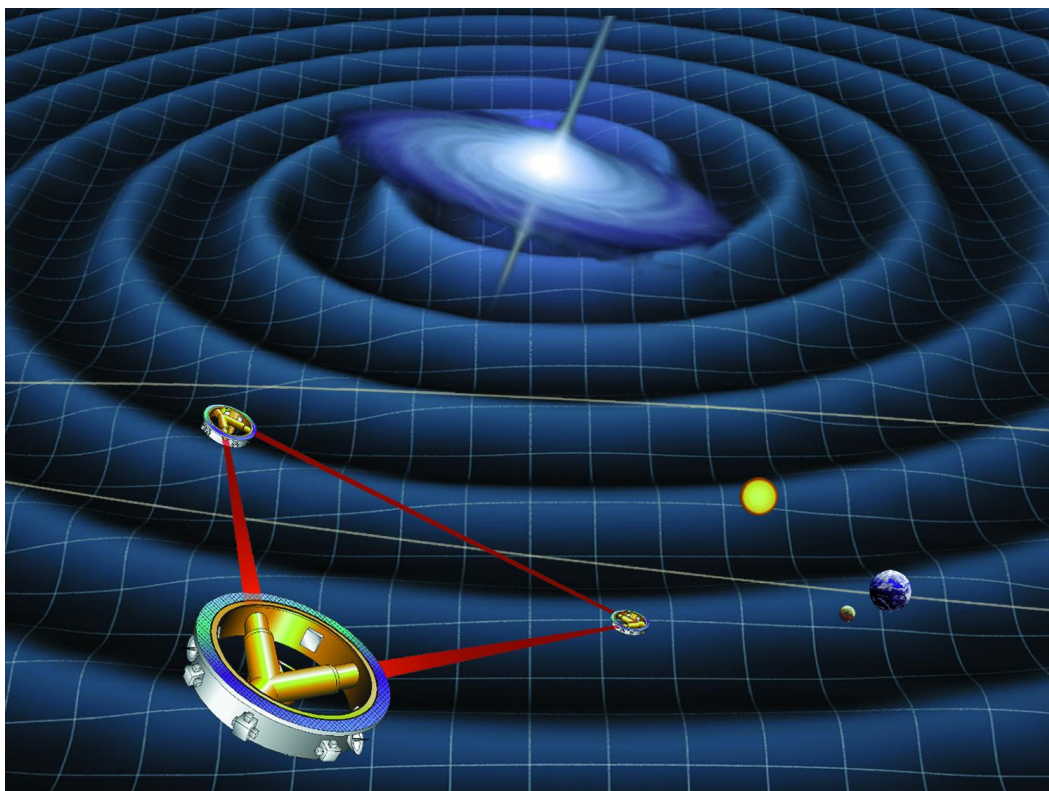
V Evropě se uvažuje o stavbě podzemního desetakilometrového detektoru Einstein se třemi rameny (ve tvaru trojúhelníku), který by měl být postaven někde v blízkosti trojmezí Německa, Holandska a Belgie. Definitivní místo ještě nebylo vybráno. Stavba by měla být započata někdy kolem roku 2028, se zprovozněním se počítá po roce 2035. Umístění detektorů do podzemí redukuje seismický šum a chlazení redukuje šum tepelný. Detektory tohoto typu mají maximální citlivost ve stovkách hertzů a mohou detekovat gravitační vlny z různých binárních systémů. Pro detekci reliktních gravitačních vln, které by měly vznikat v průběhu inflační fáze nebo obecně při samotném vzniku vesmíru, bude nutné zkonstruovat detektory pro mnohem delší vlnové délky, tedy s výrazně delšími rameny. Takové detektory je možné stavět jen ve vesmíru. Další možností je využít sledování změn fází pulzarů pomocí radioteleskopických sítí.



Nalevo: Nákres mise LISA Pathfinder (2015). Napravo: vize jedné ze sond projektu LISA (2037).

LISA

O stavbě obřího interferometru ve vesmíru se uvažuje už od konce 20. století. Projekt tří sond, které na sebe budou svítit laserovým paprskem na vzdálenost milionů kilometrů a zjišťovat aktuální polohu odrazné krychle – srdce sondy pohupující se na gravitačních vlnách – dostal název LISA, což je zkratka z anglického „*Laser Interferometer Space Antenna*“. Původní termín vypuštění byl rok 2016, ale společný projekt americké NASA a evropské vesmírné agentury ESA se potýkal s mnoha problémy, jak finančního, tak technického rázu. Američané z něho v roce 2011 z finančních důvodů odstoupili, projekt změnil jména, délku ramen i termín vypuštění a už se zdálo, že je odsouzen k zániku. Víru v úspěch mu vlila do žil evropská sonda LISA Pathfinder, která startovala v prosinci 2015. LISA Pathfinder byl jakýsi předskokan mise, který ověřil, že základní koncepce je správná, že dokážeme nejen dostatečně jemně manévrovat se sondou tohoto typu, ale i detekovat polohu odrazné krychle. Po ohlášení objevu gravitačních vln získaly události rychlý spád a v roce 2017 byl projekt obřího interferometru LISA schválen. Termín vypuštění je rok 2037.



Velkolepý plán vesmírného interferometru LISA

Jaká je tedy současná představa obřího interferometru LISA? Tři identické sondy poletí ve formaci trojúhelníku na samostatné dráze kolem Slunce, a to 20° za Zemí. Budou na sebe svítit infračervenými lasery na vzdálenost 2,5 milionů kilometrů. Laserové světlo se bude odrážet od vznášejících se krychlí ze slitiny zlata a platiny o hraně 46 milimetrů a hmotnosti 2 kilogramy. V každé sondě budou dvě takové krychle volně letící prostorem a pohupující se na gravitačních vlnách. Kolem testovací krychle bude klec s elektronikou, která bude sledovat její polohu vůči kleci. V ideálním případě by se krychle pohupovala na dráze spolu se sondou i klecí a stále plula v jejím středu. Jenže na sondu působí z venku mnoho negravitačních sil, například tlak slunečního záření, tlak slunečního větru, síly od nesymetrického tepelného vyzařování sondy i další. Jakmile se krychle přiblíží k měřicí kleci, musí sonda začít manévrovat tak, aby se krychle stále vznášela přesně uprostřed klece. Od jejích stěn budou krychli dělit pouhé dva milimetry. Manévrování bude zajištěno mikrotryskami vypouštějícími malé množství plynu. Nejjemnější navigaci zařídí koloidální mikrotrysky, z nichž budou unikat velmi malé nabitě kapičky ovládané elektrickým polem. Zpětný ráz nepatrně pohne sondou v kýženém směru.

K dalšímu vybavení patří optická lavice. Sondy budou mít pro sledování paprsku ze zbývajících sond dva dalekohledy o průměru 30 centimetrů. Z výkonu 2 wattů dodávaného laserem dopadne na sousední sondu pouhých 700 pikowattů, tj. 35 miliardtin procenta. Detektor LISA bude schopen zachytit gravitační vlny vzniklé pádem hvězdy do obří černé díry, gravitační vlny emitované dvojicemi bílých trpaslíků, šum pozadí dvojhvězd v naší Galaxii a samozřejmě gravitační vlny emitované vzájemným oběhem dvojic obřích černých děr. LISA se dostane na hranici parametrů pro detekci reliktních gravitačních vln, při troše štěstí by se to mohlo podařit, ale buďme raději skeptičtí, případná detekce nás pak může jen příjemně překvapit.

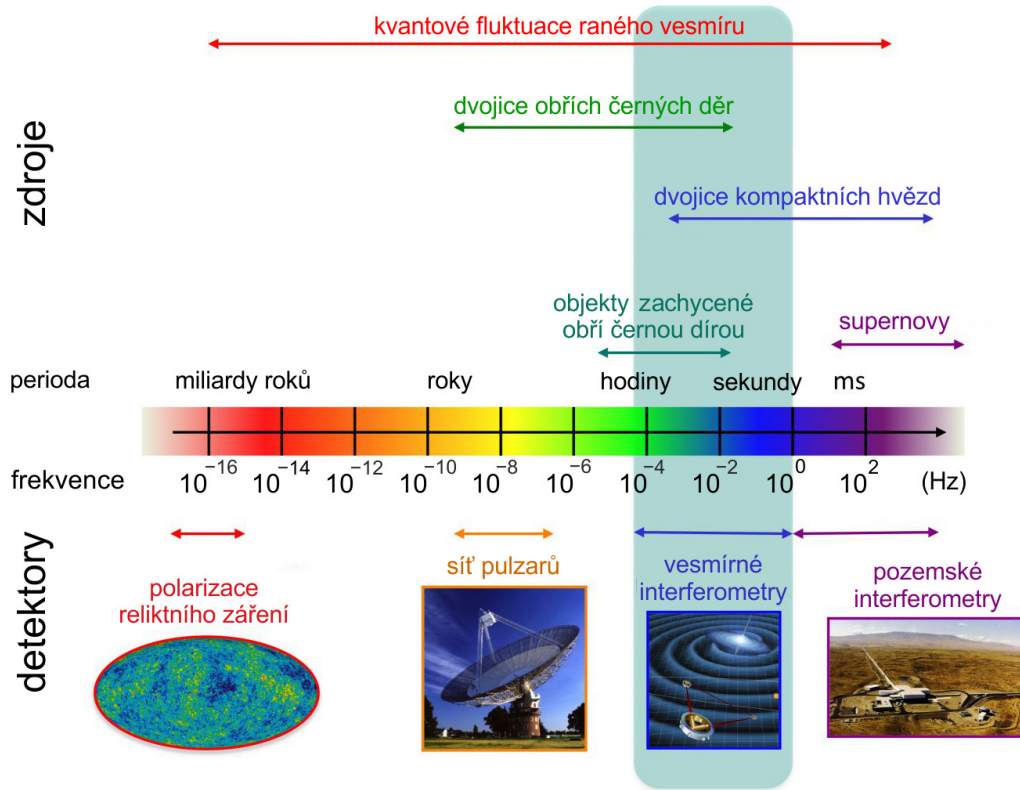
Pokud bude LISA fungovat jak má, bude na oběžnou dráhu kolem Slunce v následujících letech vypuštěno dokonce 12 identických sond svítících na sebe lasery. Název projektu je BBO (*Big Bang Observer, Pozorovatel Velkého třesku*). Vzdálenosti sond budou tentokrát menší, „pouhých“ 50 000 kilometrů, požadovaná citlivost bude zajištěna větším množstvím sond. Šum detekovaného signálu by měl být pouhé procento šumu detektoru LISA. Detektor BBO bude složen ze čtyř trojúhelníkových formací. Jedna poletí kolem Slunce v rovině ekliptiky (oběžné dráhy Země kolem Slunce), druhá bude na ekliptiku kolmá a zbylé dvě trojúhelníkové formace budou složeny do šestiúhelníku. Budou tak schopny snímat stochastické signály očekávané u reliktních gravitačních vln. Ty budou hlavním cílem detektoru BBO, který by měl mít dostatečné rozlišení, citlivost i rozsah vlnových délek pro jejich zachycení. Budoucnost interferometrických detektorů je tedy naplánována na desetiletí dopředu a máme se na co těšit.

Radioteleskopické detektory

Pokud chceme pozorovat extrémně dlouhé vlnové délky, potřebujeme zařízení s mimořádně velkými rozměry. Naše civilizace ale zatím nedisponuje takovými prostředky, aby postavila detektor velký jako Sluneční soustava nebo dokonce jako celá Galaxie. Přesto se ale jedna možnost naskytá. V naší Galaxii existuje řada pulzarů – neutronových hvězd, jejichž osa rotace není totožná s osou magnetického pole a díky tomu vydávají majákovým efektem velmi pravidelné pulzy. Představují téměř ideální hodiny rozmístěné napříč celou Galaxií. Signál pulzarů spadá většinou do rádiového oboru, a tak je možné je pozorovat radioteleskopy. Obří radioteleskopické sítě mají vynikající prostorové i časové rozlišení a jsou schopné detekovat i malá fázová posunutí signálu pulzarů přicházejícího z různých koutů Galaxie. Taková fázová posunutí vyvolává i průchod signálu přes gravitační vlnu. Sledovány jsou dvojice pulzarů – dva směry nahrazují interferometrická ramena pozemských detektorů. Pomocí statistické analýzy lze zrekonstruovat informace o gravitačních vlnách, kterými signál procházel.

Tato metoda detekce gravitačních vln se nazývá PTA (*Pulsar Timing Array, Pole pro měření časového signálu pulzarů*). První testy proběhly na australské síti radioteleskopů Parkes už v roce 2005. Australské radioteleskopy stály u zrodu radioastronomie a zajišťovaly v době programu Apollo spojení s posádkami letícími k Měsíci a zpět. Pozadu není ani evropská radioastronomie, metoda PTA se testuje na síti radioteleskopů, jimž vévodí stometrový Effelsberg na západě Německa, dalšími členy sítě jsou Lovellův radioteleskop v Jodrell Bank (jižně od anglického Manchesteru) s průměrem antény 76 metrů a radioteleskopy v nizozemském Westerborku a francouzském Nançay. Američané ověřují metodu PTA v Severoamerické nanohertzové observatoři, do které patří např. pohyblivý radioteleskop v Green Banku s rozměrem mísy 100×110 metrů. Součástí byl i slavný radioteleskop Arecibo, který byl v roce 2020 nevratně poškozen pádem ohniskové kabiny. V blízké budoucnosti se do hledání gravitačních vln touto metodou zapojí i v Austrálii a jižní Africe právě budované radioteleskopické pole SKA (*Square Kilometer Array*), které bude mít celkovou sběrnou plochu jeden kilometr čtvereční. SKA má jako jediný přístroj současnosti parametry dostačující pro detekci reliktních gravitačních vln a doufejme, že tato radioteleskopická síť bude úspěšná.

V červnu 2023 bylo oznámeno statistické pozorování gravitačního šumu detektory PTA v Americe, Evropě i v Austrálii. Jde o výsledek po čtvrt století sbírání dat. V budoucnosti se snad podaří oddělit signály od jednotlivých zdrojů.



Různé detektory a zdroje gravitačních vln v závislosti na jejich frekvenci. Jednou z dalších nepřímých metod hledání gravitačních vln je detekce změn polarizace reliktního záření způsobených procházející reliktní gravitační vlnou (zcela vlevo).

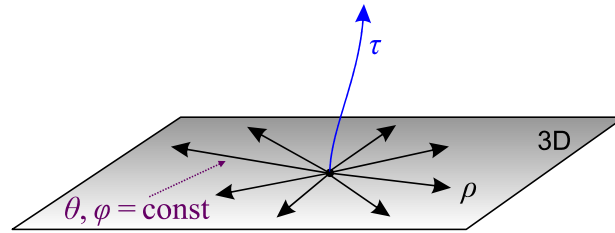


10. SCHWARZSCHILDovo ŘEŠENÍ

Schwarzschildovo řešení popisuje metriku pokriveného času a prostoru v okolí sféricky symetrického tělesa. Šlo o první ucelené řešení Einsteinova gravitačního zákona, které našel německý matematik a fyzik Karl Schwarzschild (1873–1916) hned v roce 1916, tj. v roce publikování obecné relativity. Řešení platí pro vnějšího pozorovatele, který je ve fixní vzdálenosti od objektu, kde je rozložení hmoty nulové, tj. prostor je prázdný (tenzor energie a hybnosti je nulový), tj. na pravé straně Einsteinova gravitačního zákona je nula.

Metrika v okolí sféricky symetrického tělesa

Na obrázku je světočára centra parametrizovaná vlastním časem τ centra. Pro $\tau = \text{const}$ je znázorněna řezná nadplocha, která je třírozměrným světem kolem centra. Skutečná radiální souřadnice je označena ρ a roste ve směru zakreslených souřadnicových čar, na kterých jsou konstantní úhlové proměnné θ a φ .



Předpokládejme diagonální metriku ve tvaru

$$ds^2 = -c^2 \alpha(\tau, \rho) d\tau^2 + \beta(\tau, \rho) d\rho^2 + \gamma(\tau, \rho) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (262)$$

Radiální souřadnice ρ budeme definovat tak, aby při konstantním τ , θ a φ platilo

$$ds^2 = d\rho^2. \quad (263)$$

Proto musí být $\beta = 1$ a nejobecnější tvar intervalu ve sférické geometrii bude obsahovat dvě neznámé funkce α a γ

$$ds^2 = -c^2 \alpha(\tau, \rho) d\tau^2 + d\rho^2 + \gamma(\tau, \rho) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (264)$$

V hranaté závorce jsou standardní úhlové souřadnice převzaté ze sférických souřadnic. Pomocí radiální souřadnice je možné měřit radiální vzdálenosti, ale nebude platit, že plocha koule je $4\pi\rho^2$. Zavedme místo souřadnic $(\tau, \rho, \theta, \varphi)$ jinou souřadnicovou síť (t, r, θ, φ) , kde t je běžný souřadnicový čas a r je sférická souřadnice, která zajistí, aby pro plochu koule platil nadále vztah

$$S = 4\pi r^2 \neq 4\pi\rho^2. \quad (265)$$

Tedy ρ je skutečná radiální vzdálenost a r je vzdálenost dopočtená ze vztahu pro plochu koule, tj. vzdálenost figurující u úhlového elementu, který bude mít v nových souřadnicích tvar:

$$ds^2 = -c^2 A(t, r) dt^2 + B(t, r) dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (266)$$

V těchto souřadnicích jsou v intervalu dvě neznámé funkce A a B , které bude třeba určit z Einsteinova gravitačního zákona. Znaménka jsou volena tak, aby odpovídala Minkowského metrice, do které musí metrika kolem tělesa přejít ve velké vzdálenosti (tzv. zákon setrvačnosti diferenciální formy). Hledaná metrika má tedy tvar

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 A(t,r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(t,r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (267)$$

Další postup je zdouhavý, ale relativně přímočarý. Nejprve určíme inverzní matici

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^{-2} A^{-1}(t,r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^{-1}(t,r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (268)$$

Dále určíme ze vztahu (87) Christoffelovy symboly, ze vztahu (170) Riemannův tenzor křivosti, zúžením najdeme Ricciho tenzor a skalární křivost a nakonec sestavíme rovnice Einsteinova gravitačního zákona

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} = 0. \quad (269)$$

Na pravé straně je nula, protože se nacházíme vně centrálního tělesa. Na první pohled by mělo jít o 16 diferenciálních rovnic pro metriku, ale vzhledem k symetrii výrazů jde jen o 10 rovnic. Z nich některé jsou typu $0=0$, jen 4 rovnice jsou netriviální a jen dvě nezávislé. Z rozboru těchto rovnic plyne, že funkce A a B jsou jen funkcemi souřadnice r , nikoli souřadnice t . Každé řešení v okolí sféricky symetrického tělesa je tedy nezávislé na čase. To mimo jiné znamená, že sféricky symetrické těleso nemůže generovat gravitační vlny. V případě jediné závislé proměnné vede gravitační zákon na obyčejné diferenciální rovnice, jejichž řešení má jednoduchý tvar

$$A(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}; \quad B(r) = \frac{1}{A(r)}, \quad (270)$$

kde c_1 a c_2 jsou integrační konstanty, které určíme z newtonovské limity – dosti daleko od tělesa musí platit

$$g_{00} = -c^2 \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right). \quad (271)$$

Odsud plyne

$$c_1 = 1; \quad c_2 = -\frac{2GM}{c^2}. \quad (272)$$

Výsledek tedy je

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (273)$$

Tuto metriku odvodil Karl Schwarzschild v roce 1916. Lze ji zapsat v přehlednějším tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 \left(1 - r_g/r \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - r_g/r \right)} + r^2 d\Omega^2; \\ r_g &\equiv \frac{2GM}{c^2}; \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (274)$$

Metrika platí vně sféricky symetrického tělesa pro nepohyblivého pozorovatele v konstantní vzdálenosti od tělesa. Schwarzschild ji odvodil v průběhu první světové války na východní frontě. Schwarzschild v Rusku těžce onemocněl a zemřel těsně po návratu do Německa. Po Schwarzschildovi je pojmenován kráter na Měsíci.

Některé vlastnosti Schwarzschildovy metriky

Pokud provedeme limitu $r \rightarrow \infty$, přejde Schwarzschildova metrika v Minkowského metriku. To je v pořádku, neboť dosti daleko od centrálního tělesa je časoprostor plochý.

Radiální vzdálenost

Z metriky je patrné, že mezi naší souřadnicí r (je určována z plochy koule ze vztahu $S = 4\pi r^2$) a radiální vzdáleností ρ platí jednoduchý vztah.

$$d\rho = \frac{dr}{(1 - r_g/r)^{1/2}}. \quad (275)$$

Vzdálenost určená přímým měřením není stejná jako poloměr určený z plochy odpovídající koule. Za to může pokřivení prostoru kolem centrálního tělesa.

Divergence metriky

Pokud provedeme limitu $r \rightarrow r_g$, metrický koeficient u radiální souřadnice diverguje. Pro běžná tělesa nemůže taková situace nastat. Veličina r_g , kterou nazýváme Schwarzschildův poloměr, má pro naše Slunce hodnotu 3 km a pro naši Zemi pouze 9 mm. Abychom mohli divergence pozorovat, musela by být veškerá hmotnost Slunce stlačena do koule o poloměru 3 km a v případě Země do oblasti o poloměru 9 mm. Takový objekt nazýváme černá díra, a jak uvidíme později, z oblasti pod Schwarzschildovým poloměrem z takového tělesa nemůže nic uniknout, dokonce ani světlo. Černé díry jsou závěrečným stádiem vývoje velmi hmotných hvězd (například pětinašobku nebo desetinášobku hmotnosti Slunce). Velmi hmotné černé díry (s hmotností milionů až miliard Sluncí) také nacházíme v centrech většiny galaxií. Divergence metriky není skutečnou fyzikální divergencí, je způsobena volbou souřadnicové soustavy. Při volbě jiných souřadnic (pokrytí prostoru jinými souřadnicovými plochami) divergence vymizí. Lze to ukázat na příkladu tzv. *izotropních souřadnic*, kdy přejdeme od čtveřice (t, r, θ, φ) k souřadnicím (t, R, θ, φ) za pomoci transformace

$$r = R \left(1 + \frac{r_g}{4R} \right)^2; \quad dr = \left(1 + \frac{r_g}{4R} \right) \left(1 - \frac{r_g}{4R} \right) dR. \quad (276)$$

Přesvědčte se, že vztah pro diferenciál získáme derivováním prvního výrazu. Z definice souřadnice R je také patrné, že

$$r = r_g \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{r_g}{4}. \quad (277)$$

Po dosazení za r a dr do Schwarzschildovy metriky dostaneme

$$\blacktriangleright \quad ds^2 = -c^2 \frac{(1 - r_g/4R)^2}{(1 + r_g/4R)^2} dt^2 + (1 + r_g/4R)^4 [dR^2 + R^2 d\Omega^2]. \quad (278)$$

Na první pohled je patrné, že v těchto souřadnicích žádná divergence pro $R = r_g/4$ nenastává. Proto hovoříme o tzv. odstranitelné divergenci. Pokud by pozorovatel padal do černé díry, na Schwarzschildově poloměru by nic zajímavého neviděl (možná by byl potrápen slapovými silami). Po průchodu přes Schwarzschildův poloměr by ale již neexistovala cesta zpět. Z pohledu vnějšího pozorovatele jde o jakýsi horizont, za který není možné vidět. Izotropní souřad-

nice zavedl německý matematik Hermann Weyl (1885–1955) v roce 1917. Existují i transformace k jiným souřadnicím, které mají také zajímavé vlastnosti. Metrika se například vůbec nezmění při transformaci

$$R \rightarrow R' \equiv r_g^2/16R. \quad (279)$$

Záměna souřadnic

Pokud by těleso bylo lokalizováno dokonce v oblasti menší než Schwarzschildův poloměr, bude metrický koeficient u radiální souřadnice záporný a u časové kladný. Čas a prostor si jakoby vyměnily místo. To je dáno tím, že čas musí být veličinou plynoucí jedním jediným směrem (monotónní funkcí). Jedinou takovou funkcí je ale radiální vzdálenost, která se bude pod Schwarzschildovým poloměrem stále zmenšovat a roli času tak „převzme“ radiální souřadnice. Vnější pozorovatel ale nemá žádné informace o dění pod Schwarzschildovým poloměrem a pozorovatel pod tímto poloměrem nemá žádnou možnost vyslat signál k vnějšímu pozorovateli. Jde o dva světy oddělené horizontem (oblastí ve vzdálenosti Schwarzschildova poloměru). Řešení už nebude statické, ale bude obsahovat časovou souřadnici r .

Laplaceovo řešení

Historicky první úvahy o možné existenci objektů, ze kterých nemůže uniknout ani světlo, pravděpodobně pochází od anglického filosofa Johna Michella (1724–1793) již z roku 1783. Tehdy hovořil o temných hvězdách (*dark star*). Francouzský matematik a fyzik Pierre Simon Laplace v roce 1798 odvodil na základě představ Newtonovy mechaniky rozměry tohoto hypotetického tělesa ze vztahu pro únikovou rychlost

$$v = \sqrt{2GM/r}, \quad (280)$$

do kterého dosadil namísto únikové rychlosti rychlost šíření světla c a spočetl poloměr, který by těleso muselo mít:

$$r = 2GM/c^2 = r_g, \quad (281)$$

což je právě vztah získaný Karlem Schwarzschildem z obecné relativity.

Řešení za pomoci LIS

Schwarzschildovu metriku lze také odvodit (ne zcela korektně) z úvah o lokálně inerciálním systému, který padá do centrálního tělesa. Uvažujme souřadnicový systém S pozorovatele, který je nepohyblivý vzhledem k centrálnímu tělesu – takový systém je zjevně neinerciální. Představme si další systém LIS, tentokrát inerciální, který padá z nekonečna k centrálnímu tělesu. Jeho okamžitá rychlost vzhledem k centrálnímu tělesu je ve vzdálenosti r rovna

$$v = \sqrt{2GM/r}, \quad (282)$$

V padajícím LIS platí zákony speciální relativity a interval je roven ($\theta, \varphi = \text{const}$)

$$ds^2 = -c^2 dt_{\text{LIS}}^2 + dr_{\text{LIS}}^2. \quad (283)$$

Při pohledu z LIS na předměty a hodiny v soustavě S budeme pozorovat kontrakci délek a dilataci času, naopak při pohledu z naší soustavy S se nám budou jevit zkrácené tyče v LIS a dilatované časové intervaly naměřené hodinami v LIS:

$$dr = \sqrt{1-v^2/c^2} dr_{\text{LIS}}; \quad dt = \frac{dt_{\text{LIS}}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (284)$$

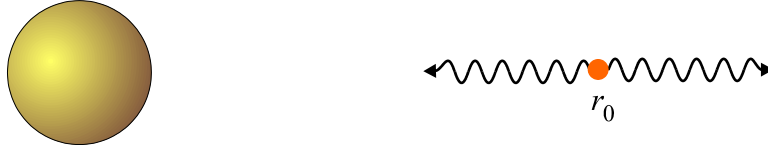
Za rychlost dosadíme z (282), určíme dr_{LIS} a dt_{LIS} a dosadíme do intervalu (283):

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + dr^2 / \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), \quad (285)$$

což je Schwarzschildova metrika pro konstantní úhlové souřadnice.

Pohyb světla v radiálním směru

Představme si, že ve vzdálenosti r_0 od centrálního tělesa vyšleme v čase t_0 v radiálním směru fotony (jeden ven a druhý směrem k centrálnímu tělesu):



Rovnice pohybu fotonu $ds^2 = 0$ dá při radiálním pohybu ($\varphi = \theta = \text{const}$) v případě Schwarzschildovy metricky vztah

$$\begin{aligned}
 -c^2(1-r_g/r) dt^2 + \frac{dr^2}{(1-r_g/r)} &= 0 \Rightarrow \\
 \frac{dr^2}{(1-r_g/r)^2} &= c^2 dt^2 \Rightarrow \\
 \frac{dr}{(1-r_g/r)} &= \pm c dt \Rightarrow \\
 \int_{r_0}^r \frac{dr}{(1-r_g/r)} &= \pm \int_{t_0}^t c dt,
 \end{aligned} \tag{286}$$

odkud integrací (čitatele i jmenovatele vynásobíme r a rozložíme na parciální zlomky, tj. odečteme a přičteme r_g) získáme

$$r - r_0 + r_g \ln \frac{r - r_g}{r_0 - r_g} = \pm c(t - t_0) \tag{287}$$

neboli

$$r = r_0 \pm c(t - t_0) - r_g \ln \frac{r - r_g}{r_0 - r_g}. \tag{288}$$

Znaménka představují fotony letící ven (+) nebo do (-) černé díry. Logaritmský člen je důsledkem zakřivení časoprostoru. Daleko od černé díry ($r, r_0 \rightarrow \infty$) je logaritmus na pravé straně nulový a jde o řešení speciální relativity. Určeme nyní dobu letu fotonu z r_0 do r :

$$\Delta t \equiv t - t_0 = \pm \frac{1}{c} \left(r - r_0 + r_g \ln \frac{r - r_g}{r_0 - r_g} \right). \tag{289}$$

Horní znaménko platí pro foton letící ven, dolní znaménko pro foton letící do černé díry. Spočtěme nyní dobu letu fotonu na Schwarzschildův poloměr ($r \rightarrow r_g$). Znaménko je záporné, logaritmus konverguje k $-\infty$ a časový interval je nekonečný. Pro vnějšího pozorovatele bude trvat pád fotonů (a samozřejmě i jiných těles) do černé díry nekonečně dlouho. Dilatace času je zde dovedena do extrému. Jakékoli těleso padající do černé díry do ní ve své soustavě dopadne v konečném čase. Pro vnějšího pozorovatele ale bude časový interval potřebný k pádu nekonečný.

Řešme nyní opačnou situaci. Pro foton vystupující z horizontu černé díry je $r_0 \rightarrow r_g$, platí kladné znaménko, logaritmus konverguje k $+\infty$ a časový interval je opět nekonečný, a to dokonce pro každé koncové r . Fotonu by únik z horizontu i do nepatrné vzdálenosti od něho trval nekonečně dlouho. Jinými slovy, žádný foton z horizontu nebo oblasti pod ním nemůže uniknout. Pokud počáteční nebo koncový stav neleží na horizontu (na Schwarzschildově poloměru), je doba putování fotonu konečná.

Diagramy vnoření

Čtyřrozměrný pokřivený svět si lze jen obtížně představit. Proto existuje matematická technika, která umožňuje zobrazit tento svět na dvojrozměrnou pokřivenou plochu. Hovoříme o tzv. diagramu vnoření (*embedding diagram*). V prvním kroku položíme dvě ze čtyř souřadnic konstantě. V intervalu tak zbudou už jen diferenciály a funkce dvou souřadnic. Zbylý interval chápeme jako kvadrát vzdálenosti na dvojrozměrné ploše vnořené do eukleidovského 3D světa. Celou proceduru si ukážeme na Schwarzschildově geometrii, kde nás nebude zajímat časová osa (položíme $t = t_0$) a úhel θ (položíme $\theta = \pi/2$, tj. budeme sledovat rovníkovou oblast):

$$ds^2 = \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)} + r^2 d\varphi^2. \quad (290)$$

V principu bychom mohli ponechat i časovou osu a jednu z prostorových (například u gravitačních vln, kde je vlnění v čase podstatné). Napišme nyní obecnou rovnici dvourozměrné plochy v kartézském prostoru:

$$z = f(x, y). \quad (291)$$

V našem případě sféricky symetrického tělesa nás budou zajímat jen rotační plochy $z = f(r)$. Pokud využijeme standardní polární/válcové souřadnice, bude v kartézské soustavě na naší pokřivené ploše platit

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 + f'^2 dr^2, \\ ds^2 &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + f'^2 dr^2, \\ ds^2 &= (1 + f'^2) dr^2 + r^2 d\varphi^2. \end{aligned} \quad (292)$$

Čárka znamená derivaci podle proměnné r . Vztahy (291) a (292) nijak nesouvisí s pokřiveným světem obecné relativity, jsou jen vyjádřením elementu délky rotační plochy $z = f(r)$ v 3D eukleidovském prostoru. Nyní budeme předpokládat, že je (290) koresponduje s nějakou plochou v kartézském prostoru (x, y, z) . Porovnáním s (290) s máme podmínku

$$1 + f'^2 = \frac{1}{1 - r_g/r}. \quad (293)$$

Snadno určíme, že

$$f' = \sqrt{\frac{r_g}{r - r_g}}. \quad (294)$$

A integrací máme

$$f(r) = \int \sqrt{\frac{r_g}{r - r_g}} dr. \quad (295)$$

$$f(r) = \sqrt{4r_g (r - r_g)}. \quad (296)$$

Jde o rovnici rotační plochy v 3D, která svým zakřivením odpovídá prostoru kolem černé díry. Povšimněte si, že pro $r \rightarrow \infty$ plocha správně přechází v rovný časoprostor a pro $r \rightarrow r_g$ plocha končí, dále není protažitelná (neexistuje pro $r < r_g$). Na druhou stranu pro $r = r_g$ není na ploše žádná singularita, jak bychom mohli očekávat z tvaru Schwarzschildovy metriky. Ze zavedení izotropních souřadnic už víme, že je tato singularita odstranitelná.

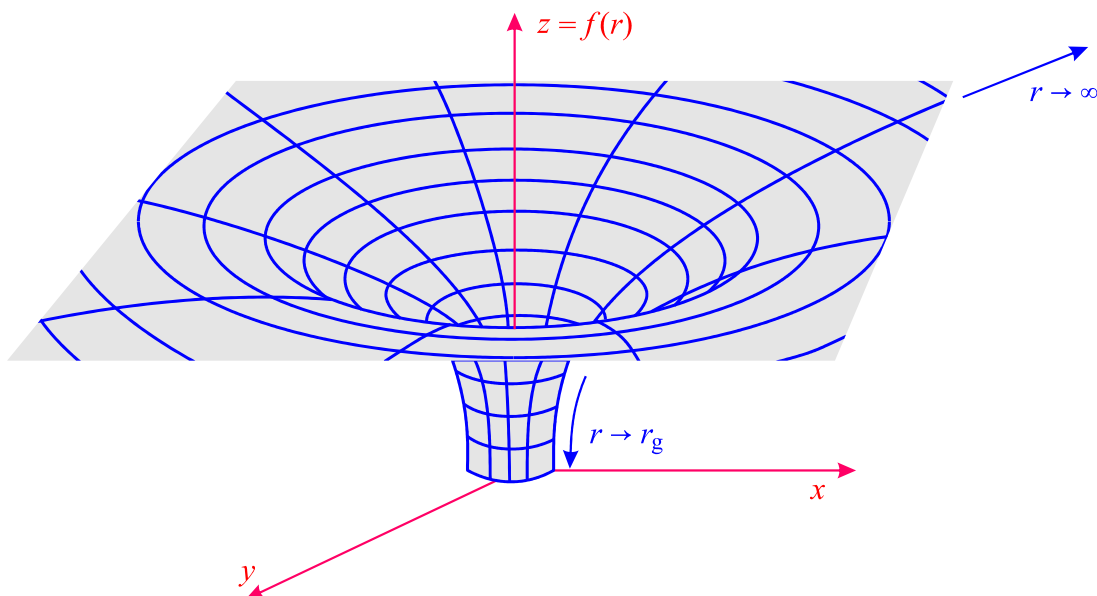


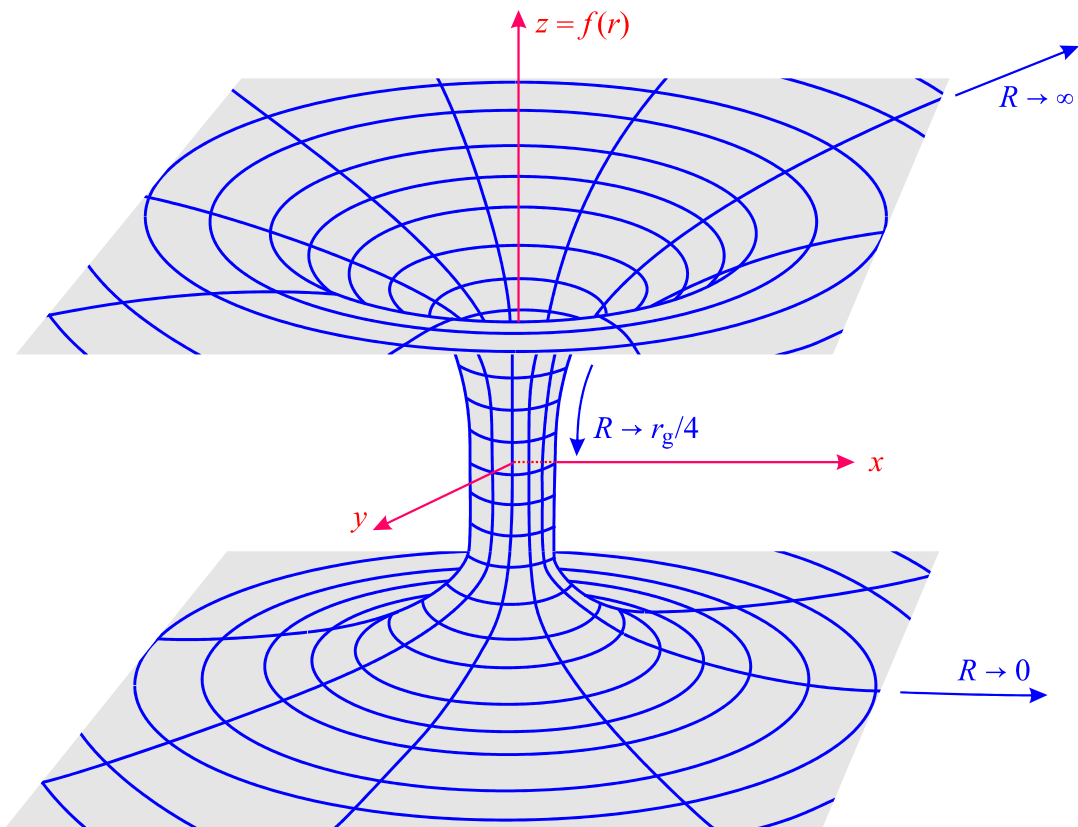
Diagram vnoření pro Schwarzschildovu geometrii

Einsteinův-Rosenův most

Pokud do vztahu (296) dosadíme izotropní souřadnice (276), bude stejná plocha popsána jako

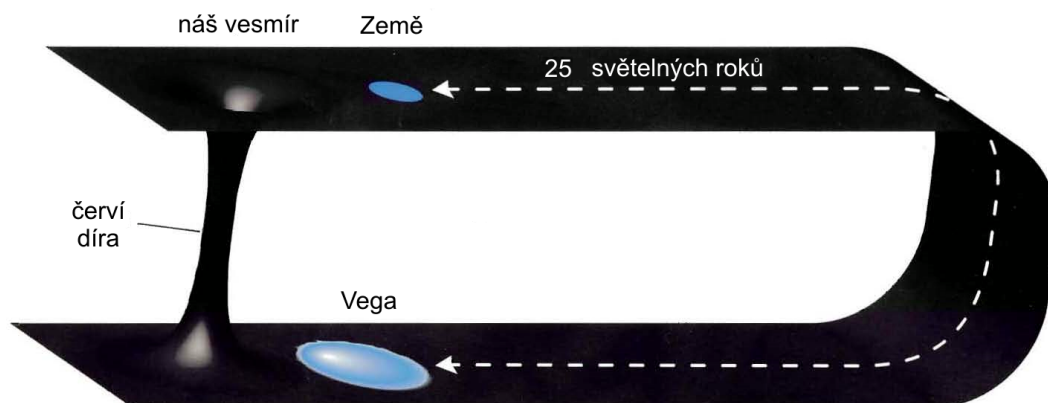
$$f(r) = \sqrt{4r_g R^2 \left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)^2} \tag{297}$$

Připomeňme, že $R = r_g/4$ odpovídá v původních souřadnicích horizontu, tj. $r = r_g$. Tato plocha již nemá omezení jen pro $R > r_g/4$, ale je možné ji zakreslit i pro parametr $R \in (0, \infty)$. Pro hodnoty $R \rightarrow \infty$ a $R \rightarrow 0$ plocha limitně přechází v rovný časoprostor:



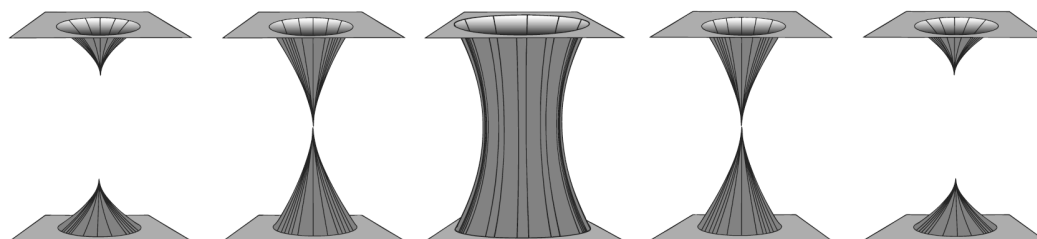
Einsteinův-Rosenův most

Takové řešení připomíná most mezi dvěma plochými časoprostory. Podrobně ho studovali v roce 1935 německý fyzik Albert Einstein (1879–1955) a americko-izraelský fyzik Nathan Rosen (1909–1995), proto se mu říká *Einsteinův-Rosenův* most (později se řešení začalo označovat jako *červí díra*). V principu by bylo možné, aby se těleso, které spadlo do černé díry, vynořilo v jiné oblasti časoprostoru, kterou nazýváme bílá díra. Tato časoprostorová zkratka by umožnila cestování mezi dvěma vzdálenými oblastmi vesmíru bez nutnosti překročit rychlost světla.



Einsteinův-Rosenův most jako časoprostorová zkratka

Uvedený diagram vnoření je ovšem řešením ve fixním čase. Jeho dynamickou analýzu provedli američtí fyzici Robert Fuller (*1936) a John Archibald Wheeler (1911–2008) v roce 1962. Ukázalo se, že jde o řešení nestabilní, které se zaškrtní rychleji, než jím prolétne nejrychlejší částice, tj. foton.



Dynamika Einsteinova-Rosenova mostu

Červí díry se staly natolik populárními, že bylo jen velmi obtížné se jich vzdát. Možná, že by kvantové procesy mohly umožnit protunelování částice z jedné oblasti do druhé. Z hlediska obecné relativity je ovšem červí díra postavená na Schwarzschildově metrice neprůchozí. Byla činěna řada pokusů s jinými metrikami, které sice vedou na průchozí červí díry, ale za nefyzikálních podmínek. Jedním z příkladů je jednoduchá metrika

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\rho^2 + (a^2 + \rho^2) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (298)$$

kde t je souřadnicový čas, ρ je skutečná radiální vzdálenost, θ a φ jsou sférické úhlové souřadnice a a je nějaká konstanta. Na první pohled je vidět, že metrika přechází pro $\rho \rightarrow \pm\infty$ v metriku plochého časoprostoru. Z rozboru dynamiky je zjevné, že se jedná o průchozí červí díru. Pokud spočteme Christoffelovy symboly, Riemannův tenzor křivosti a sestavíme Einsteinův gravitační zákon, zjistíme, že tato metrika vyžaduje nenulový tenzor energie a hybnosti se zápornou hustotou energie.

Poznamenejme na závěr, že v roce 2012 vyvinula skupina kolem amerického teoretika Kipa Thorna jinou techniku zobrazování zakřiveného časoprostoru, než jsou diagramy vnoření. Využívají k tomu soustavu dvou linií, tzv. vírových čar (*vortex lines*) a tahových čar (*tendex lines*). Vírové čáry znázorňují kroucení časoprostoru a tahové čáry jeho natahování a stlačování. Skupina tvrdí, že jejich „čáry“ názorně vystihují chování časoprostoru.

Černé díry

Velmi zajímavou předpovědí obecné relativity byla existence černých děr. Dnes známe takových objektů obrovské množství. Mohou vznikat v závěrečných fázích velmi hmotných hvězd, kdy hroucení hvězdy nezastaví ani tlak degenerovaného elektronového plynu (pak by výsledkem byl bílý trpaslík), ani degenerovaného neutronového plynu (pak by vznikla neutronová hvězda). Černé díry tohoto druhu mají typicky hmotnost v rozsahu $5 \div 10 M_{\odot}$, kde M_{\odot} je hmotnost Slunce 2×10^{30} kg. Ve středech galaxií existují obří černé díry (veledíry) s hmotností v rozsahu $10^6 \div 10^9 M_{\odot}$. Hmotnost černé díry ve středu naší Galaxie je $4 \times 10^6 M_{\odot}$, největší známou hmotnost ($7 \times 10^9 M_{\odot}$) má černá díra v centru galaxie M87 ze souhvězdí Panny. Původ černých děr ve středech galaxií není přesně znám.

Představa černé díry jako mrtvého neaktivního objektu není správná. Nad poslední stabilní orbitou mohou černou díru obíhat objekty stejným způsobem jako jakékoli jiné těleso o dané hmotnosti. Kolem černé díry ve středu naší Galaxie například obíhá celá hvězdokupa. V těsné blízkosti obíhá plyn a prach, který padá po spirále do černé díry. Vnitřním třením se obíhající materiál rozzhává a je v plazmatickém skupenství. Vytváří se tak tzv. *akreční disk*, který pronikavě září ve všech oborech spektra včetně rentgenového. Vně akrečního disku je plynoprachý torus. V akrečním disku bývá silné magnetické pole, které vytváří ve směru rotační osy černé díry (rotující černá díra je popsána Kerrovou metrikou) magnetické trubice, v nichž skončí část částic padajících do černé díry. Zachyceny jsou samozřejmě ještě nad Schwarzschildovým poloměrem a vyvrženy trubicemi od černé díry v podobě dvou výtrysků relativistických částic. Tyto výtrysky opět intenzivně září, interagují s okolním prostředím a na jejich koncích se vytvářejí typické radiové laloky.

První hvězdnou černou díru identifikoval anglický astronom Paul Murdin v roce 1971 v souhvězdí Labutě v blízkosti hvězdy γ Cyg. Zde byl již od roku 1964 znám intenzivní rentgenový zdroj. Nakonec se ukázalo, že původcem je černá díra o hmotnosti $8 M_{\odot}$, která se nachází ve vzdálenosti 6 000 ly. První galaktická černá díra byla nalezena Hubblovým vesmírným dalekohledem v roce 1992. Nachází se ve středu galaxie NGC 4261. Její hmotnost je přibližně $400 \times 10^6 M_{\odot}$, samotný akreční disk má hmotnost $10^5 M_{\odot}$, délka výtrysků je 88 000 ly, průměr 60 au, vzdálenost od nás 100×10^6 ly. První fotografii těsného okolí černé díry (v centru galaxie M87) pořídila radioteleskopická síť EHT (*Event Horizon Telescope*) v roce 2019 na vlnové délce 1,3 mm.

Černá díra si při vzniku ponechává jen informaci o hmotnosti, momentu hybnosti a náboji: M , b , $Q = \text{const}$. Všechny ostatní atributy hmoty (dipólové, kvadrupólové momenty, různá kvantová čísla) jsou při průchodu horizontem zapomenuty. Tento teorém poprvé zformulovali Brandon Carter, Werner Israel, David C. Robinson a Steven Hawking. Často se nazývá „*no hair*“ teorém (v českém překladu bychom mohli říci „černá díra nemá žádné vlasy“), tj. nepochová si ze svého původního života téměř žádné vlastnosti. Podle hodnot těchto tří atributů dělíme černé díry na:

1. *Schwarzschildovy černé díry*: Mají nenulovou hmotnost, nulový moment hybnosti a elektrický náboj. Každý zkolabovaný nerotující objekt se stane Schwarzschildovou černou dírou.
2. *Kerrové černé díry*: Mají nenulovou hmotnost a moment hybnosti. Jde o výsledek kolapsu rotujících objektů, typickým jevem je existence ergosféry – oblasti mezi statickou mezí (světlo ani částice se za ní nemohou pohybovat proti směru rotace) a Schwarzschildovým poloměrem. Metriku těchto objektů poprvé spočítal novozélandský matematik Roy Kerr.
3. *Reissnerovy-Nordströmovy černé díry*: Nejobecnější možná teoretická forma černé díry s nenulovým nábojem, metriku v okolí tohoto objektu spočetli německý fyzik Hans Reissner a finský fyzik Gunnar Nordström.

Ve vesmíru se převážně vyskytují Kerrový černé díry, tj. rotující černé díry. Není znám případ černé díry s nenulovým nábojem. Schwarzschildovo řešení limitně přechází do plochého časoprostoru. V roce 1933 řešení zobecnil britský matematik a kosmolog tureckého původu George McVittie. Jeho metrika přechází ve velké vzdálenosti do metriky expandujícího vesmíru. V roce 1993, ukázal irský matematik a teoretický fyzik Brien Nolan, že v McVittiově řešení není centrální singularita nutná. V roce 2019 se ukázalo, že forma látky uvnitř, která zabráni tvorbě singularity, by mohla být tvořena kvantovými fluktuacemi vakua. Všechna taková řešení mají ale nutně časově proměnnou hmotnost, neboť vakuové fluktuace se s expanzí nezřehdují, ale jejich energie či hmotnost se zvětšujícím se objemem roste. Zákon zachování energie v expandujícím vesmíru neplatí, je narušena symetrie vůči posunutí v čase. Nárůstu hmotnosti černých děr vlivem expanze se říká *kosmologická vazba* černých děr.

Skupina devatenácti vědců pod vedením Duncana Farraha ukázala v roce 2023, že by nárůst hmotnosti černých děr způsobený obyčejnou (zpomalující se) expanzí vesmíru měl dokonce vést ke zrychlené expanzi. Tým využil celkem pět souborů galaxií z celooblohových přehledů a pokusil se nárůst hmotnosti černých děr prokázat. Zdá se, že výsledky nejsou s tímto tvrzením v rozporu. Za jakou část zrychlené expanze by mohly být černé díry odpovědné, pokud vůbec za nějakou, není ale jasné.

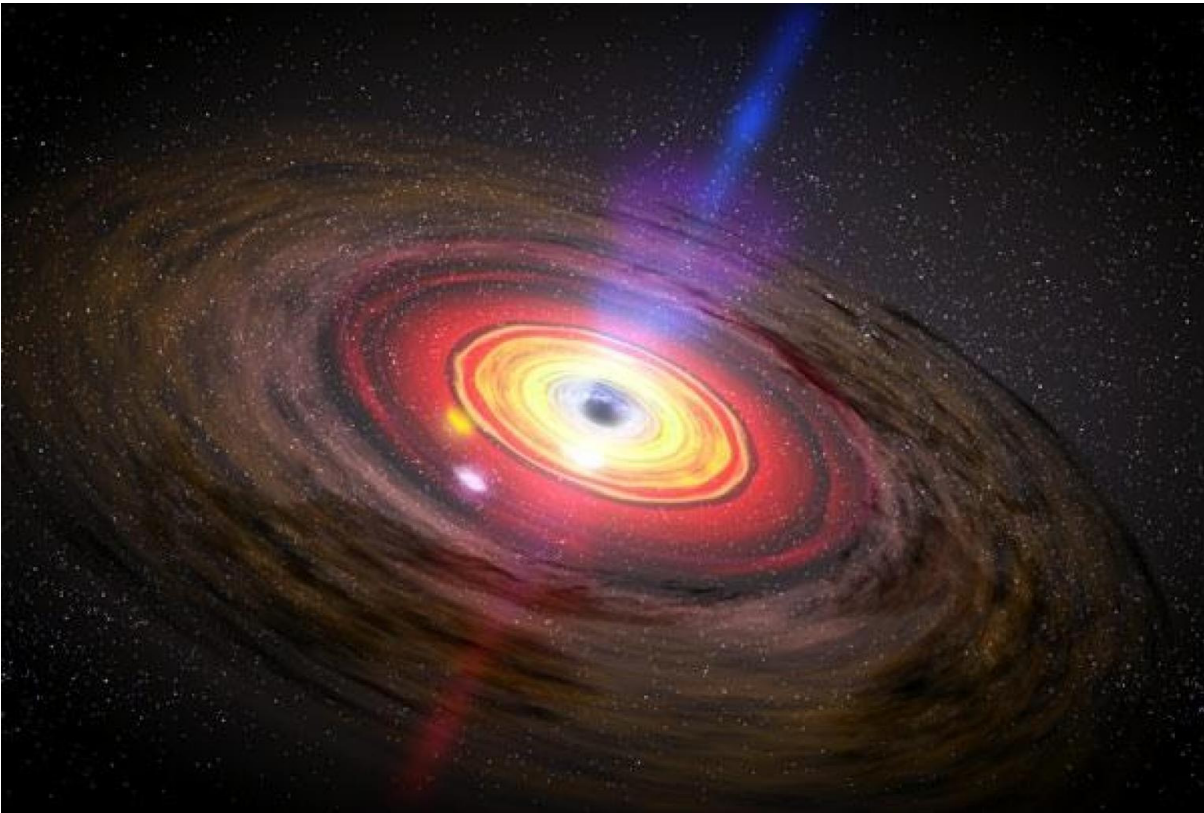
Černá díra je extrémním objektem z hlediska gravitačního působení. Hvězdné černé díry mají extrémní průměrnou hustotu. Toto ale nemusí platit o obřích černých děrách v centrech galaxií. Průměrnou hustotu černé díry můžeme odhadnout tak, že za rozměr dosadíme Schwarzschildův poloměr:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi r_g^3/3} = \frac{3M}{4\pi(2GM/c^2)^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \frac{1}{M^2}. \quad (299)$$

těleso	hmotnost	horizont	hustota	doba vypaření
kámen	1 kg	10^{-27} m	10^{76} g cm ⁻³	10^{-21} s
Země	6×10^{24} kg	9 mm	10^{27} g cm ⁻³	10^{46} let
Slunce	2×10^{30} kg	3 km	10^{16} g cm ⁻³	10^{62} let
jádro galaxie	$10^8 M_S$	2 AU	1.82 g cm ⁻³	10^{86} let
galaxie	$10^{11} M_S$	30 ly	10^{-6} g cm ⁻³	10^{95} let

Jde o průměrnou hustotu pro vnějšího pozorovatele. Vnější pozorovatel se nikdy neocitne pod horizontem černé díry, aby tuto hustotu vnímal. Hustota velmi hmotných černých děr může být nízká. Jejich extrémní vlastnosti jsou dány jejich celkovou hmotností a malými rozměry horizontu, nikoli hustotou.

Podle výpočtů Stephena Hawkinga by látka v černé díře nemusela být uvězněna na věky. Kvantové procesy mohou způsobit tunelování částice z černé díry do okolního prostoru. Tento jev lze z jiného úhlu pohledu popsat jako kreaci párů částice a antičástice vně horizontu černé díry, kdy posléze jeden z členů páru skončí v černé díře a druhý se vynoří nad horizontem. Oba pohledy (tunelování, páry) jsou ekvivalentní. Pro hvězdné i obří černé díry je takový proces velmi pomalý a vypaření černé díry by trvalo mnohonásobně déle, než je dnešní stáří vesmíru. Odhadované časy jsou v posledním sloupci tabulky. *Hawkingovo vypařování*, jak se jev nazývá, nebylo vzhledem k extrémně dlouhým časům kompletního vypaření černé díry dosud pozorováno a není jasné, zda jde o reálný jev. Pokud by fungovalo, nebude látka v černé díře uvězněna na věky.



Typická černá díra s plynoprachým torem (hnědě), akrečním diskem (žlutě) a dvěma výtrysky. Zdroj: NASA.



11. POHYBY VE SCHWARZSCHILDOVĚ GEOMETRII

Lagrangeova funkce

Pohyb částic bychom měli počítat z rovnice geodetiky. Tu lze upravit do tvaru Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (300)$$

Tečka znamená derivaci podle vlastního času τ , kterým je parametrizována světočára $x^\mu(\tau)$ částice. Pokud jde o fotony, lze jako parametr světočáry namísto vlastního času využít vlastní délku trajektorie λ . Potom mají Lagrangeovy rovnice tvar

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (301)$$

a tečka je derivace podle parametru λ . Lagrangeova funkce, která vede na správné pohybové rovnice, je jakýmsi zobecněním kinetické energie

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\lambda^2}. \quad (302)$$

Pokud jde o hmotnou částici, využijeme jako parametr vlastní čas, pokud jde o světlo, bude parametrem vlastní délka trajektorie. Potenciální energie se v Lagrangeově funkci nevyskytuje, protože gravitační působení je převedeno na zakřivení časoprostoru, tedy do metrických koeficientů $g_{\mu\nu}$. Hmotnost částice se v Lagrangeově funkci také nevyskytuje – pohyb v gravitaci na její hmotnosti nezáleží (pokud není tak veliká, aby sama výrazně zakřivovala časoprostor kolem sebe). Číselný koeficient $\frac{1}{2}$ vynecháme, tj. pro výpočet pohybu částic budeme používat Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{ds^2}{d\lambda^2}. \quad (303)$$

Někdy se využívá i jiná Lagrangeova funkce

$$\tilde{L} = \sqrt{\frac{-ds^2}{d\lambda^2}}. \quad (304)$$

Pokud je parametrizace volena tak, aby $ds^2/d\lambda^2$ bylo konstantní (to splňuje například vlastní čas, protože platí $ds^2/d\tau^2 = -c^2 d\tau^2/d\tau^2 = -c^2$), jsou obě funkce skalárem (konstantou) a vedou na stejné pohybové rovnice. Ukažme, že za tohoto předpokladu vede kvadrát Lagrangeovy funkce na stejné rovnice, jako funkce samotná:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{d\lambda} \left(2L \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - 2L \frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (305)$$

V následujících výpočtech budeme využívat jednodušší podobu Lagrangeovy funkce (303).

Efektivní potenciál a pohyby částic

Výpočet pohybu částice budeme provádět v rovině $\theta = \pi/2$. Interval a Lagrangeova funkce budou mít tvary

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\varphi^2, \quad (306)$$

$$L = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (307)$$

Pohybové rovnice světočáry $x^\mu(\tau)$ částice ve Schwarzschildově geometrii budou

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial L}{\partial t} &= 0; \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0; \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0; \end{aligned} \quad (308)$$

Cílem je určit funkce $t(\tau)$, $\varphi(\tau)$ a $r(\tau)$. První dvě rovnice povedou na zákony zachování. To je patrné už z tvaru Lagrangeovy funkce, kde jsou t a φ cyklické proměnné, tj. v L se nevyskytují. První dvě Lagrangeovy rovnice dají

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \text{const}; \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t} = k; \quad (309)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}; \quad \Rightarrow \quad r^2 \dot{\varphi} = \ell. \quad (310)$$

První rovnice je zobecněným zákonem zachování energie, druhá rovnice je zákonem zachování momentu hybnosti. Veličiny k , ℓ jsou konstanty, ℓ má význam momentu hybnosti vztáženého na jednotku hmotnosti. Lagrangeova rovnice pro radiální směr je diferenciální rovnicí druhého řádu, hybnost v radiálním směru se nezachovává. Tuto Lagrangeovu rovnici lze ale nahradit rovnicí $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, ze které máme pro vývoj radiální složky okamžitě

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = -c^2 \quad \Rightarrow \quad (311)$$

$$-c^2 \left(1 - r_g/r\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - r_g/r} + r^2 \dot{\varphi}^2 = -c^2. \quad (312)$$

Po dosazení za \dot{t} z (309) a za $\dot{\varphi}$ z (310) dostaneme:

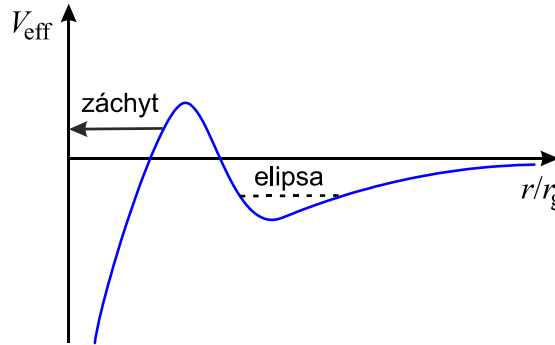
$$\blacktriangleright \quad \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = c^2(k^2 - 1); \quad (313)$$

$$\blacktriangleright \quad V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{\ell^2 r_g}{r^3} - c^2 \frac{r_g}{r}. \quad (314)$$

Vztah (313) je obdobou klasického zákona zachování energie. V efektivním potenciálu jsou zastoupeny (na rozdíl od klasické fyziky) členy $1/r$, $1/r^2$ a $1/r^3$. Snadno dopočteme poslední rovnici pro parametrický vývoj radiální souřadnice $r(\tau)$:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{c^2(k^2 - 1) - V_{\text{eff}}(r)}. \quad (315)$$

Je zřejmé, že se pohyb může konat jen tam, kde $c^2(k^2 - 1) \geq V_{\text{eff}}$. Tvar grafu efektivního potenciálu závisí na hodnotě momentu hybnosti ℓ . Pro střední hodnoty momentu hybnosti ℓ má efektivní potenciál dva extrémy. První z nich je maximum a znamená nestabilní orbitu.



Kolem černé díry zpravidla rotuje žhavý plazmatický materiál, který vytváří tzv. akreční disk. Poslední stabilní orbita se nachází na vnitřní straně tohoto akrečního disku. Druhý extrém je stabilní kruhová orbita v blízkosti černé díry. Z průběhu potenciálu je patrné, že zde existují i eliptické orbity. Pro malé hodnoty momentu hybnosti tomu tak ale není. Najděme nyní extrémy z podmínky

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\ell^2}{r^2} - \frac{\ell^2 r_g}{r^3} - c^2 \frac{r_g}{r} \right] = 0 \Rightarrow \quad (316)$$

$$c^2 r_g r^2 - 2\ell^2 r + 3\ell^2 r_g = 0$$

Odsud snadno nalezneme oba extrémy:

$$r_{1,2} = \frac{\ell^2 \pm \sqrt{\ell^4 - 3c^2 \ell^2 r_g^2}}{c^2 r_g}. \quad (317)$$

Menší z obou kořenů je nestabilní maximum. Větší z obou kořenů je stabilní kruhová orbita, která existuje za podmínky

$$\ell^2 \geq 3c^2 r_g^2. \quad (318)$$

Pro mezní hodnotu momentu hybnosti má poslední stabilní kruhová orbita poloměr

$$r_2 = \frac{\ell^2}{c^2 r_g} = \frac{3c^2 r_g^2}{c^2 r_g} = 3r_g. \quad (319)$$

Poslední stabilní kruhová orbita pohybu částic tedy existuje na $r = 3r_g$.

Pohyb světla

Pohyb světla na pozadí Schwarzschildovy geometrie budeme parametrizovat vlastní délkou trajektorie. Lagrangeova funkce bude mít opět tvar (307), nicméně tečka nyní znamená derivaci podle vlastní délky λ . Rovnice pro t a φ opět povedou na zákony zachování (309) a (310), ze kterých můžeme počítat parametrický vývoj těchto proměnných:

$$\blacktriangleright \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{k}{1 - r_g/r}; \quad (320)$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\ell}{r^2}. \quad (321)$$

Namísto poslední Lagrangeovy rovnice pro vývoj radiální souřadnice můžeme využít jednodušší rovnici pro pohyb světla

$$ds^2 = 0, \tag{322}$$

která po parametrizaci vlastní délkou λ vede na

$$-c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2 = 0. \tag{323}$$

Po dosazení za \dot{t} z (320) a za $\dot{\varphi}$ z (321) dostaneme:

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = c^2 k^2; \tag{324}$$

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{\ell^2 (1 - r_g/r)}{r^2}. \tag{325}$$

Efektivní potenciál má o něco jednodušší podobu než u hmotné částice. Pro vývoj polohy máme z (324) rovnici:

$$\blacktriangleright \quad \frac{dr}{d\lambda} = \pm \sqrt{c^2 k^2 - V_{\text{eff}}(r)}. \tag{326}$$

Z rovnic (320), (321) a (326) je možné vhodnou numerickou metodou dopočítat světočáru pohybu světla ve Schwarzschildově metrice. Vztah (324) je opět obdobou zákona zachování energie. Z rovnice (326) je zřejmé, že se pohyb může konat jen tam, kde $c^2 k^2 \geq V_{\text{eff}}$.

KRUHOVÁ ORBITA FOTONŮ

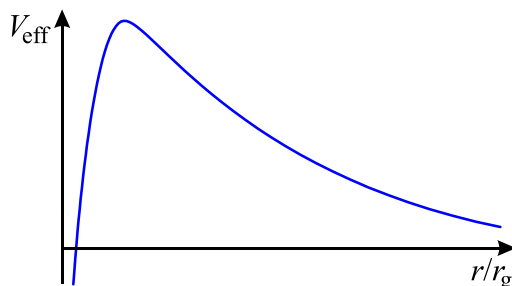
Kruhovou orbitu nalezneme z podmínky

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0, \tag{327}$$

ze které plyne

$$r = \frac{3}{2} r_g. \tag{328}$$

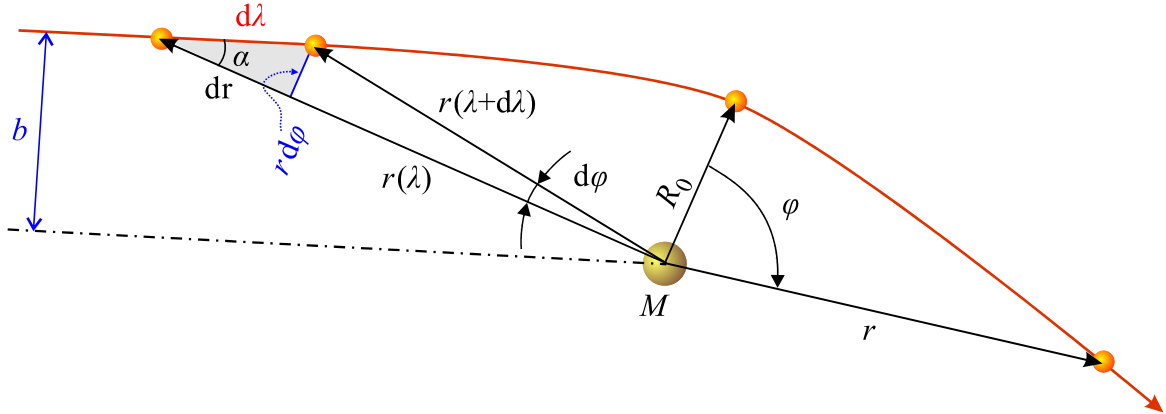
Zjevně jde o nestabilní trajektorii, neboť efektivní potenciál má v tomto místě maximum.



Ve Schwarzschildově geometrii se fotony ve vzdálenosti $1,5 r_g$ od centra budou pohybovat po nestabilních kruhových orbitách. Při jakékoli poruše začnou buď po spirále padat do černé díry, nebo se naopak vzdalovat. Řešme nyní skutečný pohyb fotonů v okolí hmotného tělesa, například našeho Slunce.

OHYB SVĚTLA

Pohyb fotonu v okolí hmotného středu M popíšeme polárními souřadnicemi $r(\lambda)$ a $\varphi(\lambda)$. Souřadnice r je vzdálenost fotonu od hmotného středu a souřadnice φ je úhel odečítaný od pericentra. Nejbližší vzdálenost fotonu od hmotného středu označíme R_0 a záměrný parametr b .



Z obrázku je patrné, že

$$\cos \alpha = \frac{dr}{d\lambda}, \quad (329)$$

$$\sin \alpha = \frac{r d\varphi}{d\lambda}. \quad (330)$$

Pokud nás bude zajímat jen prostorová trajektorie fotonu, vystačíme s pohybovými rovnicemi

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\ell}{r^2} \quad (331)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm \sqrt{c^2 k^2 - V_{\text{eff}}(r)}. \quad (332)$$

Význam integračních konstant k a ℓ dopočteme přímo z pohybových rovnic. Vzhledem k tomu, že jde o konstanty, můžeme si pro jejich výpočet vybrat kterýkoli bod trajektorie. Konstanty určíme v situaci, kdy je foton daleko a k ohybu ještě nedošlo ($t \rightarrow -\infty$, $r \rightarrow \infty$):

$$c^2 k^2 = \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 + 0 = 1. \quad (333)$$

$$\ell = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = r \frac{r d\varphi}{d\lambda} = r \sin \alpha = b. \quad (334)$$

Konstanta ℓ má tedy dva významy: jednak jde o moment hybnosti vztažený na jednotku hmotnosti, a jednak o záměrný parametr b . Výsledné pohybové rovnice fotonu jsou

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{b}{r^2}, \quad (335)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm \sqrt{1 - V_{\text{eff}}(r)}. \quad (336)$$

Rovnice můžeme samozřejmě řešit numericky, my ale najdeme analytické řešení alespoň v limitě slabých polí (malého ohybu paprsku). Ještě předtím ale nalezneme důležitý vztah mezi konstantami b , M a vzdáleností v pericentru R_0 . V pericentru je vzdálenost od centra nejmenší, tj. platí $dr/d\lambda = 0$ a z rovnice (336) máme okamžitě

$$V_{\text{eff}}(R_0) = 1, \quad (337)$$

po dosazení za efektivní potenciál (325) máme výsledný vztah

$$\blacktriangleright \quad b^2(1 - r_g/R_0) = R_0^2, \quad (338)$$

kde b je záměrný parametr, R_0 vzdálenost v pericentru a ve Schwarzschildově poloměru r_g je obsažena hmotnost tělesa, kolem kterého dochází k ohybu světla.

Pokud nás bude zajímat jen celkový úhel ohybu, nemusíme řešit obě rovnice (335) a (336). Z jejich podílu plyne

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{b/r^2}{\sqrt{1 - V_{\text{eff}}(r)}}. \quad (339)$$

Po separaci proměnných a následné integraci máme

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_\infty - \varphi_{-\infty} = 2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{b/r^2}{\sqrt{1 - V_{\text{eff}}(r)}} dr. \quad (340)$$

Pohyb paprsku je symetrický vzhledem k pericentru, proto prováníme integraci jen z pericentra do nekonečna a výslednou hodnotu zdvojnásobíme. Do vztahu nyní dosadíme efektivní potenciál a dostaneme

$$\Delta\varphi = 2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{1/r^2}{\sqrt{b^{-2} - \frac{1}{r^2} + \frac{r_g}{r^3}}} dr. \quad (341)$$

Ve vztahu jsou obsaženy konstanty R_0 a b , ty jsou ovšem navzájem převeditelné, proto je vhodné použít jen jednu z nich. Z (338) vyjádříme b^{-2} :

$$\Delta\varphi = 2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{1/r^2}{\sqrt{R_0^{-2} - r_g R_0^{-3} - \frac{1}{r^2} + \frac{r_g}{r^3}}} dr. \quad (342)$$

V integraci zavedeme substituci

$$u \equiv 1/r, \quad (343)$$

po níž integrál přejde do finálního vztahu

$$\blacktriangleright \quad \Delta\varphi = 2 \int_0^{1/R_0} \frac{du}{\sqrt{R_0^{-2} - r_g R_0^{-3} - u^2 + r_g u^3}}. \quad (344)$$

Integraci je možné samozřejmě provést numericky. Nicméně pro malé hmotnosti středového tělesa nalezneme i analytické řešení. Rozdíl úhlů závisí na hmotnosti tělesa, integrace má tvar

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{1/R_0} F(u, r_g) du. \quad (345)$$

Závislost na hmotnosti je obsažena ve Schwarzschildově poloměru r_g . Pro malé hmotnosti provedeme Taylorův rozvoj

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{1/R_0} F(u, 0) du + 2 \int_0^{1/R_0} F'(u, 0) r_g du + \dots, \quad (346)$$

kde čárka označuje parciální derivaci podle proměnné r_g . První příspěvek odpovídá situaci, kdy je hmotnost tělesa nulová, paprsek by se tedy měl pohybovat po přímce. Druhý příspěvek je lineární v hmotnosti tělesa. Po provedení derivace a dosazení $r_g = 0$ máme

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{1/R_0} \frac{du}{\sqrt{R_0^{-2} - u^2}} + r_g \int_0^{1/R_0} \frac{R_0^{-3} - u^3}{[R_0^{-2} - u^2]^{3/2}} du + \dots \quad (347)$$

Výrazy snadno upravíme:

$$\Delta\varphi = 2R_0 \int_0^{1/R_0} \frac{du}{\sqrt{1 - (R_0u)^2}} + r_g \int_0^{1/R_0} \frac{1 - (R_0u)^3}{[1 - (R_0u)^2]^{3/2}} du + \dots \quad (348)$$

V prvním integrálu provedeme substituci $\xi = R_0u$ a ve druhém $\sin \xi = R_0u$:

$$\Delta\varphi = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{r_g}{R_0} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{\cos^2 \xi} - \frac{\sin^3 \xi}{\cos^2 \xi} \right] d\xi + \dots \quad (349)$$

První integrál vede na $\arcsin \xi$, první člen druhého integrálu na $\operatorname{tg} \xi$, u posledního členu lze nalézt primitivní funkci další substitucí $t = \cos \xi$:

$$\Delta\varphi = [\arcsin \xi]_0^1 + \frac{r_g}{R_0} \left[\operatorname{tg} \xi - \frac{1}{\cos \xi} - \cos \xi \right]_0^{\pi/2} + \dots \quad (350)$$

Abychom se vyhnuli divergujícím výrazům, sloučíme první dva členy v druhé integraci:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{r_g}{R_0} \left[\frac{\sin \xi - 1}{\cos \xi} - \cos \xi \right]_0^{\pi/2} + \dots \quad (351)$$

Výsledek je

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{2r_g}{R_0} + \dots \quad (352)$$

První příspěvek odpovídá rovnému paprsku (nulová hmotnost tělesa, žádný ohyb). Druhý člen je způsoben ohybem paprsku, který prošel ve vzdálenosti R_0 od pericentra. Velikost úhlu ohybu paprsku kolem hmotného tělesa v limitě slabých polí tedy je

$$\chi = \frac{2r_g}{R_0} = \frac{4GM}{c^2 R_0}. \quad (353)$$

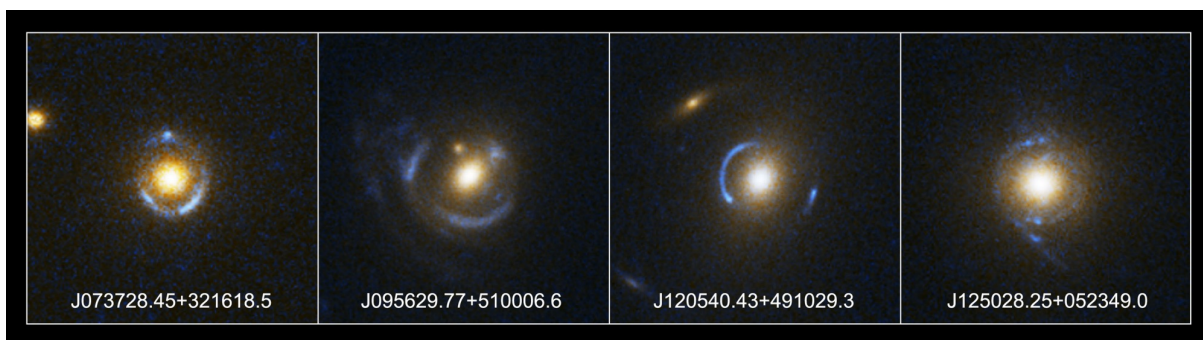
Vztah (353) je velmi důležitým důsledkem obecné relativity. Pokud bychom počítali ohyb paprsku za pomoci volně padajících lokálně inerciálních soustav nebo úvah založených na newtonovské fyzice, dostali bychom poloviční hodnotu. Pro paprsky vzdálených hvězd procházejících těsně nad povrchem našeho Slunce ($R_0 = 700\,000$ km, $M = 2 \times 10^{30}$ kg) vyjde hodnota

$$\chi = 1,745'' . \quad (354)$$

Polohy hvězd v blízkosti slunečního disku je možné měřit na snímcích pořízených při zatmění Slunce. Poté je třeba je porovnat s polohami změřenými v období, kdy Slunce v dané oblasti není (například po půl roce, kdy je daná oblast na noční obloze). První takové měření provedl sir Arthur Stanley Eddington (1889–1953) v roce 1919. Uspořádal expedici za zatměním Slunce, jejíž jedna část měřila na Princově ostrově v západní Africe a druhá v Sobralu v Brazílii. Platnost obecné relativity Eddington ověřil s relativní přesností 20 %.

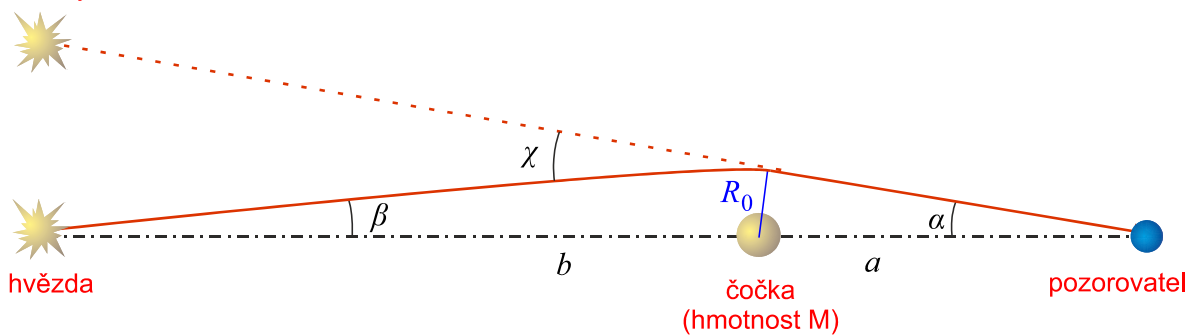
Gravitační čočky

Vhodný objekt mezi námi a zobrazovaným předmětem, například hvězdou nebo galaxií, může způsobit ohyb světla. Mezilehlý objekt funguje jako gravitační čočka. Myšlenka gravitačních čoček pochází od ruského fyzika Oresta Chvolsona (1852–1934), který o nich uvažoval v roce 1924 a jako první publikoval možnost jejich existence. V roce 1936 provedl orientační výpočty týkající se gravitačních čoček český astronom a pedagog František Link (1906–1984). Svou práci publikoval ve francouzském časopise, který ale komunita zabývající se obecnou relativitou nečetla. Ve 30. letech o gravitačních čočkách přemýšlel také český inženýr Rudi W. Mandl (1894–1948), který na možnost jejich existence upozornil Alberta Einsteina. Albert Einstein spočítal v roce 1936, že se takový objekt zobrazí jako vícenásobný, v ideálním případě jako prstenec. Výpočty Einstein na žádost Mandla publikoval na konci roku 1936 v časopise Science. Sám Einstein nevěřil, že by podobný jev mohl být někdy pozorovatelný. Einstein o existenci gravitačních čoček uvažoval už v roce 1912, jak dokládá jeho pracovní denník, ale výpočty tehdy nepublikoval.



Einsteinovy prstence fotografované Hubbleovým dalekohledem.
Žlutý objekt uprostřed je mezilehlá čočkující galaxie.

zdánlivý obraz



Hvězdu, která by byla v zákrytu za objektem o hmotnosti M , uvidíme podle obrázku jako prstenec s úhlovým poloměrem α . Všechny úhly jsou malé, proto můžeme psát

$$\alpha = \frac{R_0}{a}, \tag{355}$$

$$\beta = \frac{R_0}{b}, \tag{356}$$

Pro úhel ohybu platí

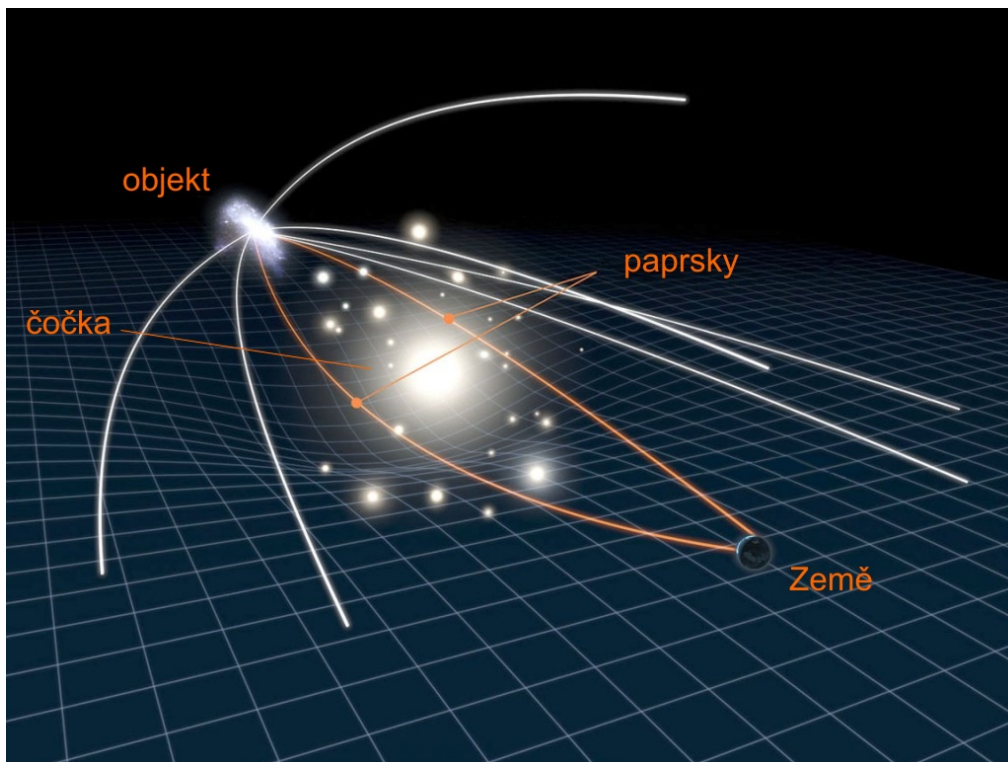
$$\chi = \frac{4GM}{c^2 R_0}, \tag{357}$$

$$\chi = \alpha + \beta. \tag{358}$$

Poslední 4 rovnice můžeme chápat jako soustavu rovnic pro proměnné α , β , χ , R_0 . Postupnou eliminací proměnných β , χ , R_0 získáme finální vztah pro úhlový poloměr Einsteinova prstence

$$\alpha = \sqrt{\frac{b}{a(a+b)} \frac{4GM}{c^2}}. \quad (359)$$

Pokud nejsou objekty na přímce nebo má čočkovácí objekt složitější tvar, objeví se vícenásobné obrazy či oblouky. První gravitační čočka byla objevena v roce 1979 při pozorování kvazaru QSO 0957+561. Objekt měl magnitudu 17, červený kosmologický posuv $z = 1,405$ a jeho obraz byl efektem gravitační čočky rozdvojený. Objekt objevil anglo-americký tým (Dennis Walsh, Robert Carswell a Ray Weyman) dvoumetrovým dalekohledem Arizonské observatoře na Kitt Peaku. První Einsteinův prstencem byl objeven v roce 1988 u radiového zdroje MG 1131+0456. Časté jsou obrazy galaxií zdeformovaných mezilehlou kupou galaxií do charakteristických oblouků. Dnes se gravitační čočkování využívá k rekonstrukci rozložení temné hmoty, která deformuje obrazy vzdálených galaxií nebo k objevu exoplanet, které spolu s mateřskou hvězdou charakteristicky deformují světlo vzdálenější hvězdy, pokud procházejí mezi ní a námi (tzv. efekt gravitační mikročočky).



Čočkování mezilehlou kupou galaxií. Zdroj: NASA/ESA.



12. STRHÁVÁNÍ ČASOPROSTORU ROTUJÍCÍM TĚLESEM

Chování časoprostoru v okolí rotujícího tělesa poprvé z Einsteinových rovnic obecné relativity hledal rakouský fyzik Hans Thirring v roce 1918. Později mu s výpočty pomáhal rakouský matematik Josef Lense. Řešení hledali v rámci linearizované teorie, tj. s metrikou ve tvaru

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (360)$$

Úlohu nejprve řešili pro infinitezimální rotující hmotnou slupku. Vnitřek této slupky byl prázdný. Řešení uvnitř dalo Minkowského metriku plochého časoprostoru, ale k velkému údivu obou vědců se tato metrika otáčela. Jde o jistou manifestaci Machova principu, podle kterého jsou za setrvačnost těles zodpovědná všechna tělesa ve vesmíru. Rotující slupka tak ovlivnila stav časoprostoru uvnitř ní. Později našli řešení pro rotující kouli a ukázali, že vně koule je časoprostor rotujícím tělesem strháván a v jeho blízkosti se otáčí. Jev se dnes nazývá Lenseův-Thirringův jev.

Analogie s elektrostatikou

Mezi elektrostatickým polem a gravitačním polem existuje velmi silná analogie, většina rovnic má obdobný tvar. Uvedme vztahy pro sílu, intenzitu, potenciální energii a potenciál obou polí v případě pohybu testovacího tělesa (q, m) v poli centrálního tělesa (Q, M):

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{F}_G = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad (361)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{E}_G = -G \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad (362)$$

$$W = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad W_G = -G \frac{mM}{r}; \quad (363)$$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \phi_G = -G \frac{M}{r}. \quad (364)$$

V případě, že pole budí soustava částic, platí pro potenciály obou polí v diskrétním a spojitým případě známé vztahy (\mathbf{r}_a jsou polohy diskrétních zdrojů pole, \mathbf{r}' je průběžná poloha elementu zdroje pole, \mathbf{r} je poloha pozorovatele, ρ_M je hustota hmoty a ρ_Q hustota náboje):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_a \frac{Q_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}, \quad \phi_G(\mathbf{r}) = -G \sum_a \frac{M_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}; \quad (365)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \phi_G(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (366)$$

Ve statickém případě nebo v případě pomalých pohybů zdrojů si vystačíme s Laplaceovou-Poissonovou polní rovnicí. Pokud jsou pohyby zdrojů podstatné, přejde Laplaceův operátor v D'Alembertův vlnový operátor:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}, \quad \Delta\phi_G = 4\pi G\rho_M; \quad (367)$$

$$\square\phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}, \quad \square\phi_G = 4\pi G\rho_M. \quad (368)$$

Řešením polních rovnic (367) jsou vztahy (366). Pokud budeme uvažovat rovnice s vlnovým operátorem, museli bychom v řešeních (366) použít retardovaný čas, tj. korigovat čas pozorovatele o dobu šíření signálu od zdroje k pozorovateli.

Gravitoelektrické pole

U rotujícího tělesa již nelze požadovat diagonálnost metriky. Kalibrační volnost nám opět umožní, abychom požadovali $h^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$. To je ale vše. Stopa poruch $s = h^\alpha{}_\alpha$ již nebude nulová a nulové nebudou ani hodnoty h_{0k} . Linearizovaná rovnice (240) bude mít nyní obecnější tvar:

$$\square \left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} s \eta_{\alpha\beta} \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}; \quad (369)$$

$$h^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0, \quad s \equiv h^\alpha{}_\alpha.$$

Na pravé straně budeme uvažovat tenzor energie a hybnosti nekoherentního prachu

$$T_{\alpha\beta} = \rho_M \mathcal{U}_\alpha \mathcal{U}_\beta. \quad (370)$$

Pro rotující těleso budou prostorové složky čtyřrychlostí nenulové. Vraťme se ale ještě na chvíli ke Schwarzschildově metrice nerotujícího tělesa a přepíšme si její interval do lineárního přiblížení (360):

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\Omega^2; \quad (371)$$

$$ds^2 \approx \left(-1 + \frac{r_g}{r} \right) d(ct)^2 + \left(1 + \frac{r_g}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Pro poruchy $h_{\mu\nu}$ platí

$$h_{00} = h_{11} = \frac{r_g}{r} = -\frac{2\phi_G}{c^2}. \quad (372)$$

Hledejme nyní řešení rovnic (369) v tzv. izotropních souřadnicích, kde platí

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} \equiv h_0. \quad (373)$$

Stopa tenzoru poruch bude

$$s = h^\alpha{}_\alpha = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = -h_0 + h_0 + h_0 + h_0 = 2h_0. \quad (374)$$

Z rovnice (369) máme pro složku 00:

$$\square \left(h_{00} - \frac{1}{2} s \eta_{00} \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho_M \mathcal{U}_0 \mathcal{U}_0;$$

$$\square (h_0 + h_0) = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho_M c^2; \quad (375)$$

$$\square h_0 = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho_M.$$

V Newtonově limitě je $h_0 = -2\phi_G/c^2$ a pro gravitační potenciál máme rovnici

$$\square \phi_G = 4\pi G \rho_M. \quad (376)$$

Vidíme, že z Einsteinova gravitačního zákona jsme získali správnou polní rovnici pro gravitační potenciál. Pro pomalé pohyby můžeme v lineární aproximaci okamžitě pro dané rozložení hmoty napsat řešení ve tvaru (366):

$$\blacktriangleright \quad h_0 = h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = -\frac{2\phi_G(\mathbf{r})}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (377)$$

Poruchu h_0 pro její podobnost s elektrickým potenciálem nazýváme gravitoelektrický potenciál a jí odpovídající pole nazýváme *gravitoelektrické pole*. Odpovídající interval bude

$$ds^2 = (-1+h_0)d(ct)^2 + (1+h_0)d\mathbf{r}^2 + 2h_{0k}d(ct)dx_k. \quad (378)$$

Koeficient 2 u nediagonálních členů reflektuje symetrii tenzoru poruch, tj. $h_{0k} = h_{k0}$.

Gravitomagnetické pole

Přístupme nyní k výpočtu nediagonálních poruch h_{0k} . Z Einsteinova gravitačního zákona (369) máme pro pomalé pohyby zdrojů pole

$$\begin{aligned} \square h_{0k} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{0k}, \\ \square h_{0k} &= -\frac{16\pi G}{c^4} \rho_M \mathcal{U}_0 \mathcal{U}_k, \\ \square h_{0k} &= +\frac{16\pi G}{c^4} \rho_M c v_k. \end{aligned} \quad (379)$$

Polní rovnice pro nediagonální poruchy má tedy tvar

$$\begin{aligned} \square h_k &= +\frac{16\pi G}{c^3} j_k^{(M)}; \\ h_k &\equiv h_{0k}; \quad j_k^{(M)} \equiv \rho_M v_k, \end{aligned} \quad (380)$$

kde \mathbf{j}_M je tok hmoty. Vlnový operátor můžeme pro pomalé pohyby nahradit Laplaceovým operátorem a rovnice zapsat ve vektorové podobě:

$$\Delta \mathbf{h} = \frac{16\pi G}{c^3} \mathbf{j}_M. \quad (381)$$

Zde se nabízí analogie s magnetostatikou, ve které platí pro vektorový potenciál magnetického pole vztahy

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}_Q, \quad (382)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (383)$$

V gravitaci máme namísto toku náboje tok hmoty, jinak jsou vztahy zcela analogické. Poruchy h_0 a h_k tak hrají v gravitaci obdobnou roli, jakou má skalární a vektorový potenciál v elektřině a magnetizmu. Řešení Laplaceovy rovnice můžeme zapsat analogicky, jako tomu bylo u vztahu (366), tj.

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = -\frac{4G}{c^3} \int_V \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (384)$$

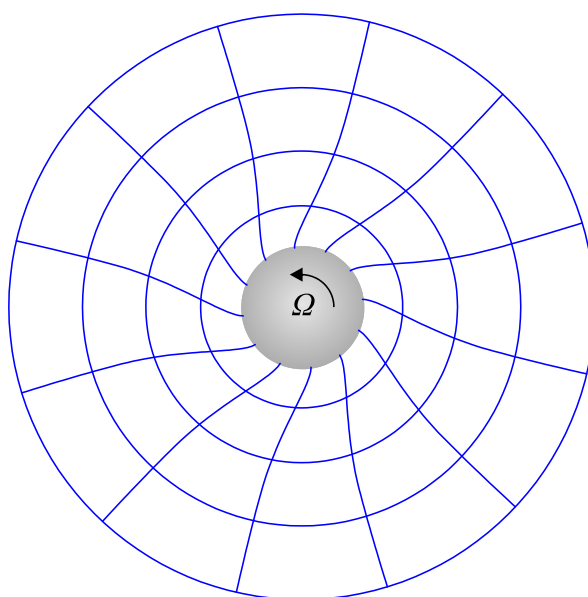
Zkontrolujte si, že výsledek je skutečně bezrozměrný (lineární poruchy $h_{\mu\nu}$ jsme zavedli jako bezrozměrné veličiny). Kompletní metriku pro pomalý rotační pohyb centrálního tělesa tedy můžeme zapsat ve finálním tvaru

$$ds^2 = (-1 + h_0) d(ct)^2 + (1 + h_0) d\mathbf{r}^2 + 2(\mathbf{h} \cdot d\mathbf{r}) d(ct);$$

$$\blacktriangleright \quad h_0(\mathbf{r}) = \frac{2G}{c^2} \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (385)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = -\frac{4G}{c^3} \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}') \mathbf{v}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Člen mixující časovou složku s prostorovými je zodpovědný za strhávání časoprostoru rotujícím tělesem. Zakřivení časoprostoru dané poruchou \mathbf{h} nazýváme díky analogii s magnetickým polem *gravitomagnetické pole*.



Deformace časoprostoru kolem rotujícího tělesa. Za jev jsou zodpovědné nediagonální prvky metriky.

Lenseův-Thirringův jev

Obdobně jako zavádíme pomocí vektorového potenciálu magnetické pole vztahem

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (386)$$

můžeme zavést gravitomagnetické pole

$$\mathbf{K} = \text{rot } \mathbf{h}. \quad (387)$$

V magnetickém poli dochází k precesnímu pohybu magnetických dipólů. Úhlová frekvence precesního pohybu je úměrná magnetickému poli. Díky analogii mezi magnetickým a gravitomagnetickým polem jsme naši úlohu převedli na magnetostatiku. Pro úhlovou frekvenci precese setrvačnicku můžeme podle této analogie použít vztah

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{LT}} = \frac{c}{2} \text{rot } \mathbf{h} \quad (388)$$

Po výpočtu integrálů (385) dostaneme pro okamžitou precesi setrvačnicku v okolí rotující koule jednoduchý vztah

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{LT}} = \frac{2G}{c^2} \frac{J}{r^3} \left[-\boldsymbol{\Omega} + \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \right]. \quad (389)$$

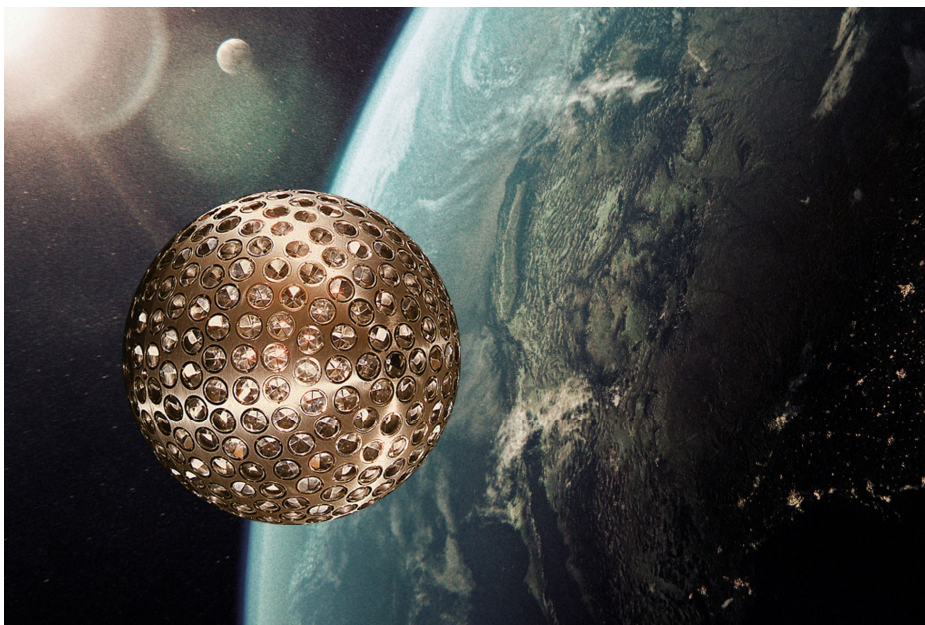
kde J je moment setrvačnosti rotující koule. Pokud má rotující koule konstantní hustotu, můžeme pro moment hybnosti psát

$$J = \frac{2}{5} MR^2. \quad (390)$$

Precesní úhlová frekvence potom bude

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{LT}} = \frac{4GM}{5c^2} \frac{R^2}{r^3} \left[-\boldsymbol{\Omega} + \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \right] = \frac{4}{5} \frac{r_g}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \left[-\boldsymbol{\Omega} + \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \right]. \quad (391)$$

Okamžitá precesní frekvence závisí na „zeměpisné“ šířce a ubývá se třetí mocninou vzdálenosti od rotujícího tělesa. Družice obíhající na polární dráze se nad rovníkem po jednom oběhu nedostane do stejného místa. Díky strhávání časoprostoru rotující Zemí nebude trajektorie uzavřená a družice se při každém oběhu v rovníkové oblasti posune řádově o milimetrovou vzdálenost. Osa rotujícího setrvačnicku se bude také měnit. Lenseův-Thirringovo strhávání časoprostoru bylo měřeno z neuzavřených drah družic LAGEOS 1 a LAGEOS 2 (název je zkratkou z *LAser GEOdynamics Satellites*). Družice připravovala italská kosmická agentura ASI spolu s americkou NASA. Hlavním cílem obou družic bylo měření tvaru Země. LAGEOS 1 startovala v roce 1976, LAGEOS 2 v roce 1992. Družice jsou bronzové koule s hliníkovým povrchem o průměru 60 cm a hmotnosti přibližně 400 kg a slouží jako pasivní odražeče laserového paprsku. Lenseův-Thirringův jev byl změřen s přesností 5 %. S vyšší přesností se tento jev pokusila změřit v roce 2006 americká družice Gravity Probe B, která měla na palubě 4 setrvačnicku. Při sledování změn jejich osy rotace došlo k nežádoucímu rušení plazmoidy slunečního větru a měření byla neúspěšná. V současnosti je možné Lenseův-Thirringův jev studovat za pomoci družic evropského polohovacího systému Galileo.



Družice LAGEOS, Zdroj NASA/ASI.



13. KOSMOLOGIE

V roce 1922 odvodil ruský fyzik Alexandr Fridman (1888–1925) z Einsteinova gravitačního zákona metriku vesmíru vyplněného nekoherentním prachem s konstantní hustotou. Ukázalo se, že je prostorová část metriky obdobná jako metrika na povrchu koule, jen je vynásobena faktorem $a(t)$, kterému se říká expanzní funkce.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]; \quad (392)$$

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho a^2 = -c^2 k. \quad (393)$$

Koeficient k je tzv. Gaussova křivost, která může být kladná (jako na povrchu koule, záporná (jako sedlo koně) nebo nulová. Pro $a \rightarrow 1$ a $k \rightarrow 0$ přejde Fridmanova metrika v Minkowského metriku plochého časoprostoru. Obdobné řešení našel ve stejné době i belgický kněz George Lemaître a další. Je důležité si uvědomit, že pozorovatel je součástí vesmíru, tj. Fridmanova metrika popisuje pohled na vesmír v souřadnicové soustavě, která se pohybuje spolu s vesmírem (anglicky *comoving coordinates*).

Rovnice pro expanzní funkci má na levé straně dva členy. První je kinetický a popisuje expanzi vesmíru. Druhý souvisí s gravitačním přitahováním a popisuje kontrakci vesmíru. V reálném vesmíru jsou oba členy velmi veliké, ale přibližně sobě rovny. Výsledkem je, že pravá strana je velmi malá a celková křivost vesmíru blízká nule.

V roce 1929 zjistil Edwin Hubble, že většina pozorovaných galaxií má červený posuv spektrálních čar, a to tím větší, čím jsou od nás dále. Objevil tak expanzi vesmíru, při které platí přímá úměra mezi rychlostí vzdalování objektu a jeho vzdáleností

$$v \sim d. \quad (394)$$

Koeficient úměrnosti se nazývá Hubblova konstanta, tj.

$$v = Hd; \quad H = (68 \pm 3) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (395)$$

Hubblova konstanta je konstantou prostorovou, tj. předpokládáme, že je ve všech místech vesmíru stejná. S časem se ovšem v průběhu historie vesmíru měnila.

Objev expanze vesmíru a Hubblova zákona ale nepřísluší jen Edwinu Hubbleovi samotnému. Červené posuvy tzv. extragalaktických mlhovin naměřil na Lowellově observatoři americký astronom Vesto Slipher (1875–1969) už v roce 1912. I když byl jen malý krok od objevu expanze vesmíru, svá měření bohužel nijak neinterpretovat, a to ani později, po objevu obecné relativity. Mnohem dále se dostal belgický kněz abbé Lemaître (1894–1966), celým jménem Georges Henri Joseph Édouard Lemaître, který studoval na Katolické univerzitě v Lovani, kde se později stal profesorem. Z obecné relativity odvodil (obdobně jako Fridman) expanzi vesmíru a dva roky před Hubblem dokázal, že rychlost objektů měřená v konkrétním místě bude růst lineárně se vzdáleností. Výsledky publikoval v roce 1927 v belgickém časopise *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*. Lemaître dokonce na základě Slipherových měření červených posuvů odhadl hodnotu Hubblové konstanty ještě dříve, než ji Hubble zavedl. Vzhledem k tomu, že neznal přesné vzdálenosti objektů, vyšla mu o řád vyšší hodnota, než udáváme dnes. Lemaître si představoval, že vesmír vznikl z malé horké a husté oblasti, kterou nazýval prvotním atomem či zárodečným vejcem. Můžeme ho tedy považovat nejen za objevitele Hubblova zákona, ale také za autora teorie Velkého třesku. Místní časopis, ve kterém své objevy publikoval, nebyl mezi astronomy znám, a tak o Lemaîtreových výsledcích nevěděli. Existenci červeného posuvu spektra galaxií v důsledku expanze vesmíru také nezávisle předpověděl (z obecné relativity) americký matematik a fyzik Howard Percy Robertson (1903–1961) v roce 1928. V rámci historické pravdy je proto třeba říci, že o expanzi vesmíru a jejích důsledcích uvažovalo před Hubblem více fyziků a Hubblův

zákon zformuloval abbé Lemaître už dva roky před Edwinem Hubblem. Hubble o těchto výpočtech pravděpodobně nevěděl. V roce 1929 Hubble správně interpretoval červené posuvy galaxií, experimentálně prokázal expanzi vesmíru a nezávisle objevil lineární vztah mezi rychlostí expanze a vzdáleností. Detailní analýzu všech možných způsobů expanze vesmíru provedl na základě matematické teorie grup anglický matematik Arthur Geoffrey Walker (1909–2001) až v roce 1936.

Hubblovu konstantu lze také vyjádřit jako poměr časové změny expanzní funkce ku expanzní funkci:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (396)$$

Samotnou rovnici pro expanzní funkci (393) snadno přepíšeme do tvaru

$$H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{c^2 k}{a^2}. \quad (397)$$

Pokud převládne první (kinetický) člen, bude vesmír stále expandovat a křivost na pravé straně musí být záporná. Pokud převládne záporný člen (gravitační), bude vesmír v budoucnu opět kolabovat do malé prostorové oblasti a jeho křivost bude kladná. Pokud budou oba členy vyrovnané, bude expanze stále pokračovat, ale limitně se zpomalovat k nule (analogie kamene vyhozeného s únikovou rychlostí). Tento mezní případ bude mít nulovou křivost a tzv. kritickou hustotu

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (398)$$

Ze známé hodnoty Hubblovky konstanty vychází kritická hustota na několik protonů v jednom metru krychlovém. Skutečná hustota vesmíru je přibližně kritická. Ukažme nyní, že prostorová část Fridmanovy metriky má obdobný tvar jako metrika na povrchu čtyřrozměrné koule.

Metrika na povrchu 4D koule

Víme-li, že rovnice popisující povrch koule o poloměru R umístěné ve středu kartézských souřadnic je $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, můžeme obdobný vztah pro čtyřrozměrnou kouli napsat ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2, \quad (399)$$

kde w je čtvrtá prostorová souřadnice a platí, že $x \perp y \perp z \perp w$. Pro element délky v těchto souřadnicích bude platit (Pythagorova věta)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2. \quad (400)$$

Proměnnou w z předchozího vzorce můžeme vyloučit, neboť pro popis trojrozměrné „plochy“ nám stačí tři souřadnice. Spočítáme totální diferenciál rovnice (399)

$$2x dx + 2y dy + 2z dz + 2w dw = 0 \quad \Rightarrow$$

$$dw = -\frac{x dx + y dy + z dz}{w} \quad (401)$$

a výsledek dosadíme do vztahu (400), přičemž w si vyjádříme z rovnosti (399):

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(x dx + y dy + z dz)^2}{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad (402)$$

Takto získanou metriku přepíšeme pomocí lokálních sférických souřadnic r, θ, φ

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi \sin \theta, \\
 y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\
 z &= r \cos \theta.
 \end{aligned}
 \tag{403}$$

Příslušné diferenciály pak mají tvar

$$\begin{aligned}
 dx &= dr \cos \varphi \sin \theta - r \sin \varphi d\varphi \sin \theta + r \cos \varphi \cos \theta d\theta, \\
 dy &= dr \sin \varphi \sin \theta + r \cos \varphi d\varphi \sin \theta + r \sin \varphi \cos \theta d\theta, \\
 dz &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta.
 \end{aligned}
 \tag{404}$$

Dosazením těchto vztahů do jednotlivých členů vzorce (402) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
 dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \\
 xdx + ydy + zdz &= r dr, \\
 R^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= R^2 - r^2,
 \end{aligned}
 \tag{405}$$

takže metrika (402) třírozměrného povrchu čtyřrozměrné koule vyjádřená pomocí sférických souřadnic má tvar

$$\begin{aligned}
 dl^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} = \\
 &= \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2
 \end{aligned}
 \tag{406}$$

a pokud zavedeme novou veličinu $k = 1/R^2$, dostaneme metriku (406) ve tvaru

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2.
 \tag{407}$$

Jedná se o prostorovou část Fridmanovy metriky homogenního izotropního vesmíru – ta je ještě vynásobena expanzní funkcí vyjadřující dynamiku vesmíru.

Vlastnosti Fridmanovy metriky

Objem vesmíru

Pro kladné zakřivení vesmíru ($k > 0$) můžeme psát jako $k = 1/R^2$ a využít substituci

$$\begin{aligned}
 r &= R \sin \chi; \\
 \chi &\in (0, \pi).
 \end{aligned}
 \tag{408}$$

Prostorová část metriky získá tvar:

$$\begin{aligned}
 dl^2 &= a^2 R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) = \\
 &= a^2 R^2 d\chi^2 + a^2 R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2 + a^2 R^2 \sin^2 \chi d\theta^2.
 \end{aligned}
 \tag{409}$$

Prostorová část metrického tenzoru proto je

$$\begin{pmatrix}
 a^2 R^2 & 0 & 0 \\
 0 & a^2 R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta & 0 \\
 0 & 0 & a^2 R^2 \sin^2 \chi
 \end{pmatrix}
 \tag{410}$$

Výsledný objem pak snadno určíme z metriky

$$\begin{aligned}
 V &= \int \sqrt{\det g} \, d\chi \, d\theta \, d\varphi = \\
 &= a^3 R^3 \left(\int_0^\pi \sin^2 \chi \, d\chi \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) =. \quad (411) \\
 &= a^3 R^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\pi^2 a^3 R^3 .
 \end{aligned}$$

Vesmír s kladnou křivostí má tedy konečný objem, je uzavřený sám do sebe, a byť nemá žádnou hranici, je ve smyslu objemu konečný. Jinak je tomu v případě vesmíru se zápornou křivostí. ($k < 0$; $R^2 = 1/|k|$). Metrika má tvar

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 + (r/R)^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (412)$$

Tentokrát lze výhodně použít substituci

$$\begin{aligned}
 r &= R \operatorname{sh} \chi ; \\
 \chi &\in (0, \infty)
 \end{aligned} \quad (413)$$

při níž nabývá metrika tvaru

$$dl^2 = a^2 R^2 \left(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi \, d\Omega^2 \right). \quad (414)$$

Podobným postupem jako u modelu s kladnou křivostí nyní pro objem dostáváme $V \rightarrow \infty$. Tento model vesmíru má nekonečný objem. Ve Fridmanově geometrii vedou prostory s kladnou křivostí na konečný objem vesmíru, modely se zápornou a nulovou křivostí na nekonečný objem. To ale platí jen pro vesmíry jednoduše souvislé („bez děr“). Vesmír, kterému by ve dvou dimenzích odpovídal například toroid nebo dvojtoroid již není jednoduše souvislý. Upustíme-li od požadavku na jednoduchou souvislost, může existovat vesmír s konstantní zápornou křivostí a přesto konečným objemem.

Kosmologický princip

To, že expanze probíhá podle Hubbleova zákona (úměrně vzdálenosti) neznamená, že bychom museli být ve středu expanze. Z lineárního vztahu totiž plyne, že stejný typ expanze bude vnímat každý pozorovatel ve vesmíru tzv. *kosmologický princip*). Předpokládejme, že body A, B a C jsou na přímce a platí $AB = BC$.

$$\begin{array}{ccc}
 & & + \\
 & + & B \\
 + & & C \\
 A & &
 \end{array}$$

Z homogenity vesmíru na velkých měřítcích plyne vztah $\mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_{CB}$. Pro rychlost \mathbf{v}_{CA} platí:

$$\mathbf{v}_{CA} = \mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C - \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{CB} + \mathbf{v}_{BA} = 2 \mathbf{v}_{BA}. \quad (415)$$

Odsud okamžitě plyne lineární vztah

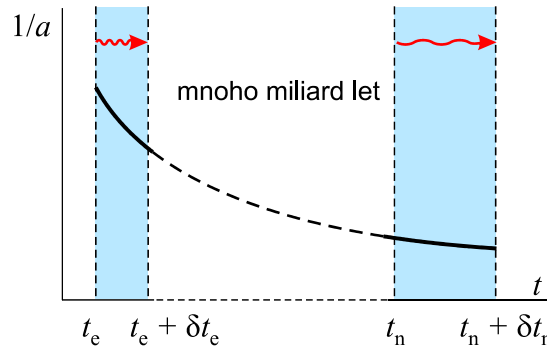
$$v = Hd. \quad (416)$$

Kosmologický červený posuv

Uvažujme šíření světelného pulsu ve vesmíru a jeho změny vlivem Fridmanovy metriky (392). Pro světlo je $ds^2 = 0$, souřadnicový systém zvolíme tak, aby vymizely úhlové závislosti, a proto

$$\frac{c dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (417)$$

Impuls se začal šířit v místě r_e , v čase t_e a trval dobu δt_e . K pozorovateli dolétl po mnoha miliardách let do místa r_n , v čase t_n a trvá δt_n .



Pro šíření počátku impulsu platí

$$\int_{t_e}^{t_n} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{r_e}^{r_n} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (418)$$

a pro šíření „posledního“ fotonu impulsu platí

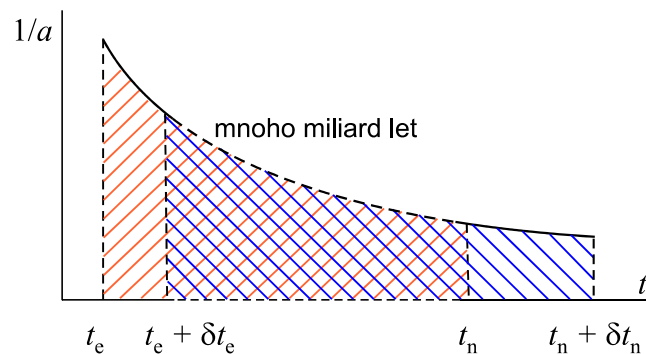
$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_n+\delta t_n} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{r_e}^{r_n} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (419)$$

Nás zajímá délka impulsu a její změny, tedy rozdíl dvou posledních vztahů:

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_n+\delta t_n} \frac{c dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_n} \frac{c dt}{a(t)} = 0. \quad (420)$$

Oba integrály probíhají přes obrovský časový úsek, v průběhu kterého se expanzní funkce změnila mnohonásobně. Uvědomíme-li si ale, že integrál má význam plochy pod křivkou $1/a$, odečte se při integraci společná plocha obou integrálů a zbude

$$\int_{t_n}^{t_n+\delta t_n} \frac{c dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{c dt}{a(t)} = 0 \quad (421)$$



Tyto integrály jsou již jen přes dobu trvání impulsu, nikoli přes celou dobu šíření. Protože je doba impulsu nesrovnatelně menší než doba trvání vesmíru, je možno považovat expanzní funkci $a(t)$ v době vyslání impulsu za konstantní a v době přijetí také:

$$\int_{t_n}^{t_n+\delta t_n} \frac{c dt}{a_n} - \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{c dt}{a_e} = 0. \quad (422)$$

Nyní jde o integrály z konstanty a řešení je jednoduché:

$$\begin{aligned} \frac{c \delta t_n}{a_n} - \frac{c \delta t_e}{a_e} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{c \delta t_e}{a_e} &= \frac{c \delta t_n}{a_n} \Rightarrow \\ \frac{\lambda_e}{a_e} &= \frac{\lambda_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (423)$$

Vyslaný impuls se tedy natahuje tak, jak se mění expanzní funkce. Stručně lze říci, že při putování vesmírem se vlnová délka záření natahuje přesně tak, jak se „nafukuje“ vesmír. Jako míra změny vlnové délky se zavádí červený posuv

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a - a_e}{a_e}. \quad (424)$$

Největší měřené červené posuvy mají hodnotu kolem 10. Natahování vlnové délky synchronně s expanzní funkcí probíhá jen pro částice s nulovou klidovou hmotou ($ds^2 = 0$). Hmotové vlny částic s nenulovou klidovou hmotou tuto vlastnost nemají.

Vlastnosti expanzní funkce

Expanzní funkce pro různé entity

Hustota (je jedno, zda energie či hmoty) běžné látky klesá se třetí mocninou expanzní funkce. Hustota energie záření klesá se čtvrtou mocninou, protože

$$\rho_{\text{rad}} = \frac{E}{V} \sim \frac{1/\lambda}{a^3} \sim \frac{1/a}{a^3} \sim \frac{1}{a^4}. \quad (425)$$

Hustota vakuových fluktuací je dokonce na expanzní funkci nezávislá. Připusťme, že je vesmír vyplněný obecnou entitou, která na expanzi reaguje podle vztahu

$$\rho_E = \frac{K}{a^\alpha}, \quad (426)$$

kde ρ_E je hustota energie. Z rovnice pro expanzní funkci (393) (malý člen na pravé straně zanedbáme) máme

$$\dot{a} \sim a^{\frac{2-\alpha}{2}}. \quad (427)$$

Po separaci proměnných máme

$$\int \frac{da}{a^{(2-\alpha)/2}} = \int dt. \quad (428)$$

Po jednoduché integraci máme

$$a(t) \sim \begin{cases} t^{\frac{2}{\alpha}}, & \alpha \neq 0, \\ e^{\chi t}, & \alpha = 0. \end{cases} \quad (429)$$

Pro vesmír vyplněný zářením (počáteční období, částice s nulovou klidovou hmotou) je $a(t) \sim t^{1/2}$, pro vesmír vyplněný látkou (od 400 000 roku, částice s nenulovou klidovou hmotou) je $a(t) \sim t^{2/3}$ a pro vesmír dominantně zaplněný kvantovými fluktuacemi vakua (snad od 7 miliard let) je $a(t) \sim e^{\chi t}$. Z definice $H \equiv \dot{a}/a$ nalezneme H pro různé průběhy expanzní funkce:

bez expanze:	$a = 1$	$H = 0$
záření:	$a \sim t^{1/2}$	$H = 1/2t$
látka	$a \sim t^{2/3}$	$H = 2/3t$
vakuum	$a \sim e^{\chi t}$	$H = \chi$

Pro vesmír vyplněný zářením a látkou klesá Hubblova konstanta nepřímo úměrně času. Převrácená hodnota Hubblové konstanty se nazývá *Hubblův čas* (řádový odhad stáří vesmíru při nahrazení expanze lineární závislostí).

Horizont částic

Horizontem částic nazýváme maximální vzdálenost, ze které k nám doletly částice za dobu existence vesmíru. Této vzdálenosti se také někdy říká *horizont pozorovatelného vesmíru*, protože do větší vzdálenosti není možné dohlédnout, i když tam také částice jsou. Jejich světlo k nám ale za dosavadní dobu existence vesmíru nestihlo ještě dolétnout. Za částice vezmeme fotony (pohybují se nejrychleji). Šíření světla je v souřadnicích unášených expandujícím vesmírem dáno rovnicí

$$-c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0. \quad (430)$$

Separací získáme v integrální podobě rovnici šíření světla za celou dobu existence vesmíru:

$$\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_{r_0}^{r_t} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (431)$$

Horizont částic je dán vztahem

$$R_H(t) = \int_{r_0}^{r_t} dl = \int_{r_0}^{r_t} \frac{a(t) dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t) \int_{r_0}^{r_t} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (432)$$

Poslední integrál vyjádříme ze vztahu (431):

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}. \quad (433)$$

Vidíme, že horizont částic přirozeným způsobem závisí na průběhu expanzní funkce. V našem vesmíru po většinu jeho existence dominovala látka a tak můžeme odhadnout (při stáří 14 miliard let), že $R_H = 3 \times 14 \times 10^9 \text{ ly} \approx 42$ miliard ly.

Parametr w

Nalezneme stavovou rovnici entity, která při expanzi mění hustotu energie s expanzní funkcí jako K/a^α . Objem přitom roste se třetí mocninou expanzní funkce, tj. $V \sim a^3$. Pro danou entitu napíšeme první větu termodynamickou v adiabatickém přiblížení (diferenciál tepla je nulový, vesmír nevyměňuje teplo s okolím).

$$\begin{aligned}
dU + p dV &= 0 \\
d(\rho_E V) + p dV &= 0 \\
d\left(\frac{K}{a^\alpha} a^3\right) + p da^3 &= 0
\end{aligned} \tag{434}$$

$$\begin{aligned}
(3-\alpha)Ka^{2-\alpha}da + 3pa^2da &= 0 \\
(3-\alpha)\frac{K}{a^\alpha} + 3p &= 0,
\end{aligned} \tag{435}$$

$$\begin{aligned}
p &= \left(\frac{\alpha}{3}-1\right)\frac{K}{a^\alpha}, \\
p &= w\rho_E; \quad w \equiv \left(\frac{\alpha}{3}-1\right).
\end{aligned} \tag{436}$$

Výsledkem je lineární vztah mezi tlakem a hustotou energie s koeficientem w , který je jedním ze základních kosmologických parametrů. Shrňme veškeré dosavadní výsledky do tabulky:

koeficient α ($\rho \sim 1/a^\alpha$)	expanzní funkce	Hubbleova konstanta	horizont částic	stavová rovnice	parametr w	entita
$\alpha = 4$	$C t^{1/2}$	$\frac{1}{2t}$	$2ct$	$p = \rho/3$	$+ 1/3$	záření ($m_0 = 0$)
$\alpha = 3$	$C t^{2/3}$	$\frac{2}{3t}$	$3ct$	$p = 0$	0	látka ($m_0 \neq 0$)
$\alpha = 2$	$C t$	$\frac{1}{t}$	$ct \ln(t/t_0)$	$p = -\rho/3$	$-1/3$	křivost ($k < 0$)
$\alpha = 0$	$C e^{\chi t}$	χ	$c \left(\frac{e^{\chi t} - 1}{\chi}\right)$	$p = -\rho$	-1	projevy vakua

Podstatná je hodnota parametru w pro temnou energii. Aby docházelo k pozorované zrychlené expanzi vesmíru, musí podle rovnic obecné teorie relativity platit, že $w < -1/3$. Pro vakuovou energii spojenou s kvantově mechanickými procesy ve vakuu je $w = -1$ a expanzní funkce roste exponenciálně. Pokud by dokonce bylo $w < -1$ ($\alpha < 0$), bude expanze natolik překotná, že zasáhne samotnou strukturu látky a rozerve v budoucnu samotná atomová jádra. Této situaci říkáme *big rip* – velké rozervání. Z měření WMAP, CBI, 2dF a SDSS vychází, že parametr w se pro temnou energii nachází v intervalu hodnot $< -1; -0,78$.

Kosmologická konstanta

V roce 1998 byla objevena zrychlená expanze vesmíru (Adam Riess, Saul Perlmutter) a na levé straně Einsteinova gravitačního zákona přibyl kosmologický člen s nenulovou kosmologickou konstantou:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \tag{437}$$

Původ kosmologického členu není dosud znám, snad souvisí s kvantovými fluktuacemi vakua, pro které platí

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \rho_{\text{vakua}} g^{\mu\nu} \tag{438}$$

a člen na levé straně by mohl mít původ v tenzoru energie a hybnosti kvantového vakua. Rovnice pro expanzní funkci se změni na

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G \rho a^2 - c^2 \frac{\Lambda}{3} a^2 = -c^2 k. \quad (439)$$

Po vydělení kvadrátem expanzní funkce, zavedení Hubbleovy konstanty a rozdělení hustoty energie na záření a látku máme:

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho_{\text{rad}} + \frac{8}{3}\pi G \rho_{\text{mat}} + c^2 \frac{\Lambda}{3} - \frac{c^2 k}{a^2}. \quad (440)$$

Na pravé straně jsou entity různě reagující na expanzi. První člen klesá se čtvrtou mocninou expanzní funkce, druhý se třetí mocninou, třetí s nultou (kosmologický člen) a poslední s druhou mocninou (křivostní člen, ten je ale v našem vesmíru přibližně nulový). Pokud je Hubbleova konstanta nenulová, můžeme rovnici vydělit jejím kvadrátem a získat tak jednoduchou relaci

$$1 = \Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\text{mat}} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k ;$$

$$\Omega_{\text{rad}} \equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{\text{rad}} ;$$

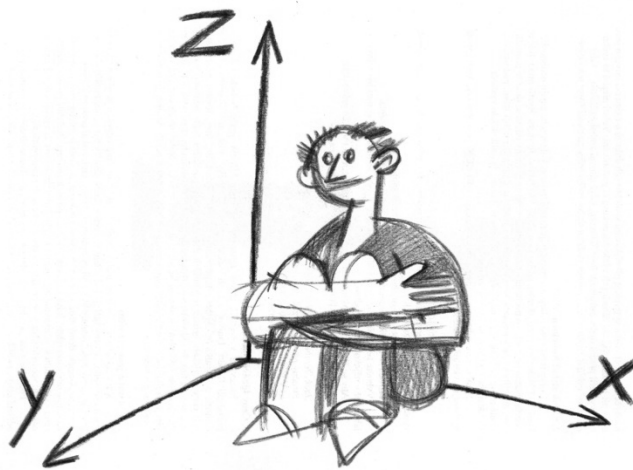
$$\Omega_{\text{mat}} \equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{\text{mat}} ; \quad (441)$$

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{c^2 \Lambda}{3H^2} ;$$

$$\Omega_k = -\frac{c^2 k}{a^2 H^2} .$$

Příspěvek křivostního členu je podle současných měření zanedbatelný. Zářivý člen má v současnosti hodnotu přibližně $\Omega_{\text{rad}} \approx 0,05\%$. Příspěvek látky je cca $\Omega_{\text{mat}} \approx 32\%$, z toho činí 5 % atomární látka a 27 % temná hmota. Příspěvek kosmologického členu (temné energie) je přibližně 68 %. Samotná kosmologická konstanta má hodnotu $2,25 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$. Éra záření dominovala do 400 000 roků, éra látky do poloviny stáří vesmíru a dnes žijeme v éře temné energie. Detailní popis jednotlivých entit a jejich výzkumu může čtenář nalézt v učebnicích specializovaných na tuto problematiku.





Petr Kulhánek
TF4: Obecná relativita



Každá část této publikace může být šířena jakýmkoli způsobem.
Cílem není restrikce, ale vzdělávání co nejširšího okruhu čtenářů.

Autor: Prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.

Odborná recenze: průběžná, studenti kurzu

Formát: elektronické skriptum, pdf, A4, 94 stran

Nakladatelství: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)

Sazba: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)

Vydání: první, 2016/2024, průběžně aktualizované

Ikona videa: freepik.com CC BY 3.0

