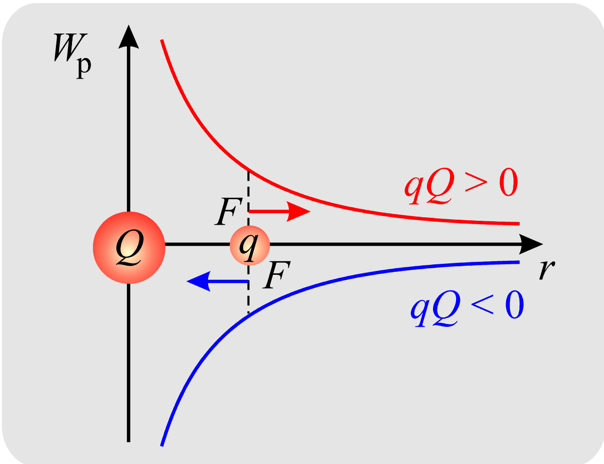
# FYZIKA I




## STUDIJNÍ TEXT

PETR KULHÁNEK

FEL ČVUT Praha, 2020

verze: 22. 4. 2024

# OBSAH

# 1 ÚVOD

Fyzika je vědní disciplína, která se pokouší popsat děje v přírodě. Musíme si ale uvědomit, že každý popis přírody, ať jde o prostou formulku nebo složitou teorii, je pouhým zjednodušením skutečnosti. Světu za našimi okny odpovídají naše představy o jeho fungování jen do určité míry. Daný jev můžeme dokonce často popsat několika věrohodnými způsoby. Jediným kritériem oprávněnosti našeho modelu přírody je jeho souhlas s pozorováním.

## Fyzikální veličiny

Při popisu dějů používáme fyzikální veličiny (elektrický proud, hustota, délka). Každá fyzikální veličina se skládá z číselné hodnoty a rozměru. Vzdálenost 3 centimetry je jiná než vzdálenost 3 stopy. Rozměry fyzikálních veličin jsou nesmírně důležité a nesmíme na ně nikdy zapomínat. Rozměr veličiny značíme hranatými závorkami. Například zápis

$$[I] = \mathrm{A} \tag{1.1}$$

znamená, že rozměrem elektrického proudu ($I$) je ampér (A). Povšimněte si, že proměnné značíme šikmým řezem písma a jednotky svislým řezem písma. Ke správnému zápisu vztahů se ještě vrátíme.

**◖ Příklad 1.1**

Pokud v zápise rozměr zapomenete, může dojít k zajímavým absurditám:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{6}{3} = 2\ \mathrm{ms}^{-1} \tag{1.2}$$

Zdánlivě nevinný výpočet rychlosti jako podílu dráhy a času je nesmyslný. U červeně označených hodnot chybí rozměry. Pokud bychom vzali v úvahu poslední rovnost, máme

$$\begin{gathered} \frac{6}{3} = 2\ \mathrm{ms}^{-1} \quad \Rightarrow \\ 2 = 2\ \mathrm{m/s} \quad \Rightarrow \\ 1 = \mathrm{m/s} \quad \Rightarrow \\ \mathrm{s} = \mathrm{m}\,. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Docházíme tak ke zcela jistě nepravdivému tvrzení, že sekunda je totéž co metr. Dejte si proto pozor a nezapomeňte psát všude jednotky.

◗

**◖ Příklad 1.2**

**Zadání:** Odhadněte na základě rozměrové analýzy tvar vztahu pro úhlovou frekvenci kmitů matematického kyvadla.

**Řešení:** Předpokládejme, že frekvence kmitů bude záviset na délce závěsu $l$, na hmotnosti zavěšené kuličky $m$ a na tíhovém zrychlení $g$, tj.

$$\omega = \omega(l, m, g)\,. \tag{1.4}$$

Dále předpokládejme, že vztah pro úhlovou frekvenci je jednoduchý a lze ho zapsat jako většinu fyzikálních vztahů za pomoci mocninných závislostí:

$$\omega = l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma} . \tag{1.5}$$

Na první pohled se zdá úloha neřešitelná. Máme totiž jedinou rovnici pro tři neznámé $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Ve fyzice je každá rovnice nejen rovností číselných hodnot, ale i rovností rozměrů. Pokud zapíšeme rozměry všech veličin na levé a pravé straně rovnosti, dostaneme

$$\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{m}^{\alpha} \mathrm{kg}^{\beta} (\mathrm{m/s}^2)^{\gamma} . \tag{1.6}$$

V posledních dvou vztazích si opět povšimněte, že proměnné jsou sázeny šikmým a jednotky svislým řezem písma. Nyní porovnejme mocninné koeficienty u sekundy, kilogramu a metru na obou stranách rovnosti:

$$\begin{aligned} \mathrm{m}: \qquad & 0 = \alpha + \gamma, \\ \mathrm{kg}: \qquad & 0 = \beta, \\ \mathrm{s}: \qquad & -1 = -2\gamma. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Rovnice (1.6) je skutečně řešitelná. Snadno zjistíme, že $\beta = 0$, $\gamma = ½$, $\alpha = -½$. Úhlová frekvence kyvadla tedy je:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} . \tag{1.8}$$

◗

**Poznámky:**

- K odvození vztahu (1.8) jsme nepotřebovali znát žádné fyzikální mechanizmy. Pouhá rozměrová analýza určila jediný možný tvar fyzikálního zákona.
- Odvodili jsme pouze tvar zákona, nikoli číselný koeficient před ním. Před odmocninou by mohla být jakákoli bezrozměrná konstanta, například 2, 3, $\pi$. V našem případě je koeficient před odmocninou skutečně roven jedné. K určení koeficientu by postačil jeden jediný experiment. Kdybychom ale chtěli experimentálně odvodit celý vztah, museli bychom provádět sady měření s různými délkami závěsů, různými hmotnostmi těles a v různých tíhových zrychleních.
- Výsledný vztah nezávisí na hmotnosti tělesa. Tělesa všech hmotností kývají na konkrétním závěsu se stejnou frekvencí. To není náhoda. Jde o velmi důležitou vlastnost gravitace. Všechna tělesa se v gravitaci pohybují stejným způsobem. Například malá kulička a cihla dopadnou na zem při volném pádu za stejný čas. K této vlastnosti gravitačního pole se ještě vrátíme.

### ◖ Příklad 1.3

**Zadání:** Nalezněte takové kombinace konstant $c$, $G$, $\hbar$ (rychlosti světla, gravitační konstanty a Planckovy konstanty), které dají přirozenou jednotku pro délku, čas, hmotnost a energii.

$$\begin{aligned} c &= 3\times10^{8}\ \mathrm{ms}^{-1} , \\ G &= 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^{3}\mathrm{s}^{-2} , \\ \hbar &= 1.05\times10^{-34}\,\mathrm{kg\,m}^{2}\,\mathrm{s}^{-1} . \end{aligned} \tag{1.9}$$

**Řešení:** Pokusíme se vytvořit výraz pro délku $l_0$, čas $t_0$, hmotnost $m_0$ a energii $E_0$. Začneme délkou tak, že napíšeme součin výše uvedených tří konstant, s neznámými exponenty $\alpha$, $\beta$, $\gamma$:

$$l_0 = c^{\alpha} G^{\beta} \hbar^{\gamma} . \tag{1.10}$$

Tato rovnice ve skutečnosti představuje čtyřnásobnou rovnost: rovnost číselnou a rovnost rozměrovou v metrech, kilogramech a sekundách. Napíšeme nyní rozměrové části vytvořeného výrazu:

$$\mathrm{m}^1\mathrm{kg}^0\mathrm{s}^0 = \mathrm{m}^{\alpha}\mathrm{s}^{-\alpha}\mathrm{kg}^{-\beta}\mathrm{m}^{3\beta}\mathrm{s}^{-2\beta}\mathrm{kg}^{\gamma}\mathrm{m}^{2\gamma}\mathrm{s}^{-\gamma}\ . \tag{1.11}$$

Nyní zapíšeme soustavu rovnic pro exponenty u metru, kilogramu a sekundy:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + 3\beta + 2\gamma\ , \\ 0 &= -\beta + \gamma\ , \\ 0 &= -\ \alpha - 2\beta - \gamma\ . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Řešením této soustavy získáme jednoznačné řešení pro exponenty

$$\alpha = -3/2\ ; \qquad \beta = 1/2\ ; \qquad \gamma = 1/2\ .$$

Tyto exponenty jednoznačně až na násobící číselný faktor určují velikost Planckovy délky. Zcela analogickým způsobem můžeme odvodit vztahy pro ostatní Planckovy veličiny. Výsledky jsou:

$$\begin{aligned} l_0 &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}\ \mathrm{m}\ , \\ t_0 &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-43}\ \mathrm{s}\ , \\ m_0 &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{-8}\ \mathrm{kg}\ , \\ E_0 &= \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 10^{19}\ \mathrm{GeV}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

◗

**Poznámka**: Planckovy škály jsou přirozené jednotky pro náš Vesmír. V Planckově čase se oddělovala gravitační interakce od ostatních interakcí a vesmír poprvé získal vlastnosti podobné dnešním vlastnostem. V tomto čase měl vesmír komplikovanou prostorovou strukturu, jejímž základním elementem byla vlákna o rozměrech Planckovy délky. Průměrná pohybová hmotnost (energie) částic v té době byla rovna Planckově hmotnosti (energii).

**Zapamatujte si:**

- Každá fyzikální veličina se skládá z hodnoty a rozměru. Rozměry nikdy nesmíme vynechávat, jsou stejně důležité jako číslo samotné.
- Rozměry fyzikálních veličin v sobě nesou důležité informace a mnohdy určují možný tvar fyzikálních zákonů.
- Veškeré matematické funkce musí mít bezrozměrné argumenty, například sin($\omega t$), log($I/I_0$) atd.

## Typografie

Při psaní výrazů je nutné dodržovat některá pravidla, která zajišťují, aby vztahy byly čitelné a jednoznačné pro každého.

**Zapamatujte si:**

- Proměnné (lze do nich dosadit) píšeme vždy šikmým řezem písma, a to i proměnné označené řeckými písmeny (poloměr $r$, plocha $S$, frekvence $\mathit{\Omega}$, složka vektoru $x_k$).
- Vše ostatní píšeme základním řezem písma. Jde o jednotky ($S = 14\ \mathrm{m}^2$, $R = 2\ \Omega$, $T = 14\ °\mathrm{C}$, $T = 2\ \mathrm{K}$), zkratky ($x_{\mathrm{max}}$, teplota elektronů $T_{\mathrm{e}}$), čísla ($120\ \mathrm{m}^2$, $x_1$, ale $x_k$), matematické funkce ($\sin x$, $\exp \varphi$, $\mathrm{mod}\ a$), operace ($\mathrm{d}/\mathrm{d}x$), označení částic a prvků ($\mathrm{He}$, $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{p}$, $\mathrm{n}$, $\mathrm{e}^-$) a pomocné symboly (<, >, [, ], {, }, /).
- Vektory, tenzory či složitější objekty značte tučným řezem písma, ve výjimečných případech (například na tabuli) je možné použít šipku nad objektem ($\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$, $C = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$, $\mathrm{div}\,\mathbf{B}$).

Nezaměňujte matematické symboly s „běžnými“ znaky: krát (×) s písmenem „x“, znak pro úhlové vteřiny s uvozovkami (14″, nikoli 14” nebo 14“), znak pro úhlové minuty s apostrofem (14′, nikoli 14‘ nebo 14’ nebo 14ʽ), tečku ve skalárním součinu s tečkou za větou (**A**·**B**, nikoli **A**.**B**) atd. Znak minus musí být stejně dlouhý a ve stejné výši jako znak plus (+ −, nikoli + – - _).

**◖ Příklad 1.4**

**Zadání:** Nalezněte počty chyb v typografii těchto výrazů

1: $2\ Kg$

2: $2\ \mathrm{kg}$

3: $\chi = A_{\mathrm{max}} \cosh^{-2}\left[\frac{\mu_0 \mu_{\mathrm{B}} g H}{2kT}\right]$

4: $\chi = A_{max} \cosh^{-2}\left[\frac{\mu_0 \mu_{\mathrm{B}} g H}{2kT}\right]$

5: $\mathrm{R} = 2\ \mathit{\Omega}$

6: $R = 2\ \Omega$

7: $w = \psi^{*} \psi$

8: $w = \mathrm{\psi}^{*} \mathrm{\psi}$

9: $W_{\mathrm{int}} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = -p_0 E \cos\theta = 14\ \mathrm{J}$

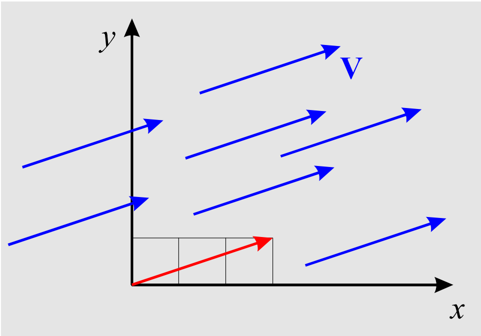
10: $W_{int} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = -p_{0} E\ cos\ \theta = 14\ J$

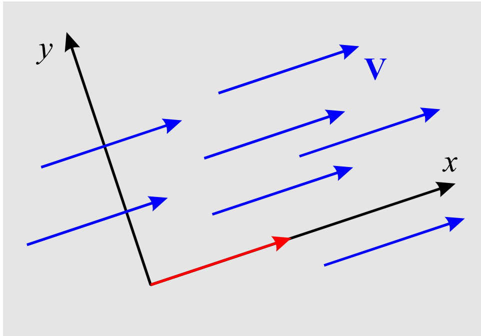
**Řešení:** Počty chyb jsou uvedeny v závorkách – 1(2), 2(0), 3(0), 4(2), 5(2), 6(0), 7(0), 8(2), 9(0), 10(4).

◗

## Vektor a jeho vlastnosti

Vektor si můžeme představit jako orientovanou tyčku (rozlišujeme počátek a konec). Rovnoběžně posunuté tyčky považujeme za stále stejný vektor. Pokud vektor posuneme do počátku, můžeme z polohy koncového bodu „odečíst" tzv. souřadnice neboli složky vektoru. Na obrázku nalevo dostaneme hodnotu $\mathbf{V} = (3,1,0)$. V jiné souřadnicové soustavě v pravé části obrázku bude mít tentýž vektor souřadnice $\mathbf{V} = (10^{1/2},0,0)$. Vidíme, že souřadnice závisí na volbě soustavy.




Souřadnice vektoru můžeme psát různým způsobem, například $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ nebo také $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$. S vektory umíme provádět dvě operace:

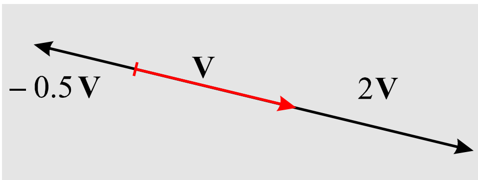
**1. natahování reálným koeficientem:**

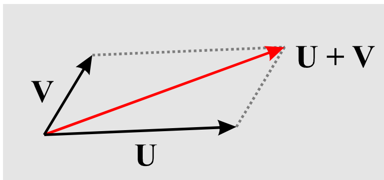
$$\alpha \mathbf{V} \equiv (\alpha V_1, \alpha V_2, \alpha V_3)\,, \tag{1.14}$$

**2. skládání:**

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} \equiv (U_1 + V_1, U_2 + V_2, U_3 + V_3)\,. \tag{1.15}$$

Jak natahování, tak skládání provádíme se všemi složkami. Výsledkem natahování je vektor stejného ($\alpha > 0$) nebo opačného ($\alpha < 0$) směru, který je $\alpha$ krát delší. Výsledkem skládání dvou vektorů je vektor, který vznikne jako úhlopříčka rovnoběžníku nataženého na oba vektory:




◖ **Příklad 1.5**

**Zadání:** Vyzkoušejte si natahování a skládání vektorů na konkrétních vektorech $\mathbf{U} = (1, 2)$, $\mathbf{V} = (4, 0)$. Zkuste je natáhnout dvakrát a minus dvakrát. Také zkuste oba vektory složit a zakreslete všechny vektory **U**, **V**, 2**U**, 2**V**, –2**U**, –2**V**, **U** +**V**.

◗

◖ **Příklad 1.6**

**Zadání:** Ověřte, že platí jednoduchá pravidla

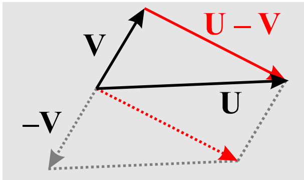
| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{U}$, | $\mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = (\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W}$, |
| 2) | $\alpha\,(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \alpha\,\mathbf{U} + \alpha\,\mathbf{V}$, | $(\alpha + \beta)\,\mathbf{U} = \alpha\,\mathbf{U} + \beta\,\mathbf{U}$, |
| 3) | $\alpha\,(\beta\,\mathbf{U}) = (\alpha\,\beta)\,\mathbf{U}$, | $1\,\mathbf{U} = \mathbf{U}$, |
| 4) | $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W} \;\Rightarrow\; \mathbf{V} = \mathbf{W}$. | |

◗

◖ **Příklad 1.7**

**Zadání:** Promyslete si, co znamená rozdíl dvou vektorů.

**Řešení:** Rozdíl dvou vektorů zapíšeme takto: $\mathbf{U} - \mathbf{V} = \mathbf{U} + (-\mathbf{V})$. Tedy k vektoru **U** přičteme vektor V mířící na opačnou stranu. Výsledný vektor posuneme tak, že spojuje koncové body vektorů **U** a **V**. Hovoříme o tzv. relativním vektoru.




◗

**Zapamatujte si:**

- Vektorem rozumíme uspořádanou trojici čísel, jejíž hodnoty závisí na volbě souřadnicové soustavy, tj. v různých soustavách jsou hodnoty různé.
- Vektor si můžeme představit jako orientovanou úsečku, kterou lze libovolně posouvat.
- Vektory umíme natahovat a skládat. Obě operace provádíme po složkách. Výsledkem obou operací je opět vektor.
- Rozdíl dvou vektorů je vektor spojující jejich koncové body.

## Stupně abstrakce

V průběhu svého vývoje prošlo lidstvo třemi stupni abstrakce:

1. **oddělení čísla od předmětů.** Malé dítě počítá různé předměty: tři hrušky, dva domy, pět lidí. Číslo je vždy spojeno s nějakým předmětem a čtyři domy jsou něco jiného než čtyři limonády. V určitém věku začne ale dítě chápat číslo 4 samostatně. Ukáže ho na prstech a ví, že jde o čtyři výskyty jakéhokoli předmětu a netrvá již na tom, aby byl dotyčný předmět jmenován. V tuto chvíli si každý z nás prodělal první stupeň abstrakce – oddělení čísla od pojmu. Číslo nahradilo předměty.
2. **zavedení zástupných symbolů.** Tento stupeň abstrakce jste pravděpodobně zažili na základní škole při počítání obsahu obdélníka. Nejprve paní učitelka kreslila různě veliké obdélníky na čtvercové síti a počítali jste jejich obsah podle počtu čtverečků. Po určité době jste se dopracovali ke vztahu $S = ab$. Čísla zmizela. Zůstaly zástupné symboly $a$, $b$ pro velikost stran obdélníka a písmenko $S$ označující jeho plochu. Čísla byla nahrazena proměnnými.
3. **oddělení vlastností od matematických objektů.** Před malou chvílí jsme se zabývali vektory. Představili jsme si je jako tyče, které jsme se naučili natahovat a skládat. Ve skutečnosti jde ale o jednoduché operace s trojicemi čísel. Tyto operace mají zajímavé vlastnosti, které jste si mohli vyzkoušet v příkladu 1.6. Například složit dvě tyče a poté je natáhnout je totéž jako natáhnout každou z nich zvlášť a poté je složit. Ve třetím stupni abstrakce se přestaneme zabývat konkrétními matematickými objekty, jako byly naše pokusné tyče. Zajímat nás budou jen vlastnosti těchto objektů. Bude nám jedno, zda jde o tyče, jablka, matice, funkce či cokoli jiného. Ať je objektem cokoli, naučíme se ho nata-

hovat a skládat s jiným podobným objektem tak, aby tyto operace měly stejné vlastnosti jako u tyčí, na kterých jsme si to vyzkoušeli.

Při třetím stupni abstrakce mizí matematické objekty a zůstávají jen vlastnosti. Hovoříme o zavedení tzv. *lineárního vektorového prostoru*. Takovým prostorem rozumíme jakékoli matematické objekty (vektory, matice, funkce, řešení diferenciálních rovnic), které umíme natahovat a skládat tak, jako jsme to dělali s původními tyčemi. Projít si tímto stupněm abstrakce bude jedním z nejdůležitějších úkolů na počátku vašeho studia a bude to proces velmi bolestný, co se přemýšlení týče. Některým se to podaří, jiným nikoli. Těm prvním se otevře zcela nový svět, ve kterém budou schopni do hloubky porozumět Fourierově frekvenční analýze, pochopí jak hledat řešení soustav diferenciálních rovnic, jak zjednodušovat složité úlohy za pomoci linearizace a naučí se mnoho dalších dovedností. Ti druzí budou pasivně počítat různé úlohy, aniž by někdy porozuměli jejich podstatě. Pevně věřím, že u většiny z vás zvítězí touha po poznání nad pasivitou a probojujete se do první skupiny.

**Zapamatujte si:**

- V prvním stupni abstrakce oddělujeme čísla od skutečných předmětů.
- V druhém stupni abstrakce nahrazujeme čísla zástupnými symboly – matematickými objekty, kterým říkáme proměnné.
- Ve třetím stupni abstrakce nás přestanou zajímat i matematické objekty samotné a zaměříme se jen na vlastnosti operací, které s nimi provádíme.

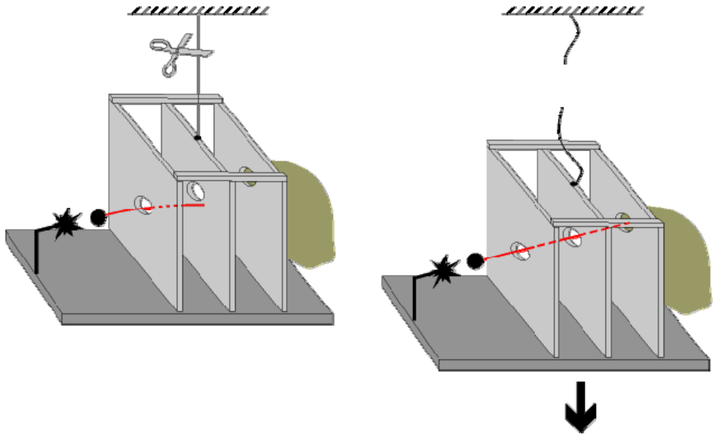
## Inerciální souřadnicová soustava

Souřadnicová soustava, to není několik neumělých čar na tabuli. Pokud chceme opravdu měřit polohu těles, musíme zkonstruovat skutečnou souřadnicovou soustavu. Vezmeme si dostatečně tuhé tyče opatřené měřícími ryskami a svaříme z nich tři navzájem kolmé měřící osy. Už toto je nadlidský úkol. Tyče by se neměly prohýbat, neměly by vibrovat ani podléhat jiným deformacím. Zkrátka měly by to být ideálně tuhé tyče. Takové tyče ale neexistují. Pokud bychom udeřili do jednoho konce ideálně tuhé tyče, druhý konec by se okamžitě posunul. Informace z jednoho konce na druhý by se šířila nekonečnou rychlostí. A to samozřejmě není možné. Ideálně tuhé tyče tedy neexistují a musíme se smířit s tyčemi konečné tuhosti. Samozřejmě vybereme to nejlepší, co máme k dispozici, a svaříme k sobě základní trojici měřících tyčí.

Kam ji ale umístíme? Na stůl v posluchárně. Získáme tak souřadnicovou soustavu, která bude sice fungovat, ale k dokonalosti bude mít daleko. Vržený předmět se v ní bude pohybovat nerovnoměrně a po křivce. Příčinou je naše Země, její přitažlivost a rotace. Abychom získali ideální soustavu, museli bychom ji umístit velmi daleko od všech těles. Tak bychom získali ideální soustavu, tzv. *inerciální soustavu*, ve které se tělesa budou pohybovat konstantní rychlostí po přímkách.

Takový ideál ale neexistuje. Nikdy nemůžeme být dostatečně daleko od všech těles, neboť všude ve vesmíru nějaká tělesa jsou. Pokud se s vámi v mrakodrapu utrhne výtah a poletíte volným pádem k zemi, nezoufejte. Na malou chvíli zažijete skutečný inerciální systém. Pokud vám v údivu vypadne z ruky cokoli, daný předmět buď zůstane nehybně stát vedle vás (samozřejmě, že bude spolu s vámi vzhledem k Zemi padat volným pádem) nebo se bude vůči vám pohybovat konstantní rychlostí po přímce. Volně padající klec je tedy oním ideálním inerciálním souřadnicovým systémem. Hovoříme o tzv. volně gravitující kleci neboli LIS (lokálně inerciální soustavě). Může to být například vesmírná sonda, které došlo palivo. Naše souřadnicová soustava musí být ale lokální („malá“) v prostoru i v čase. Pokud by náš padající výtah byl veliký miliony kilometrů, vešla by se do něho Země i s Měsícem a kouzlo inerciální soustavy by pominulo.

Nejlépe snad lze zavedení LIS pochopit v experimentu Harolda Waaga. Představme si tři propojené rovnoběžné desky s otvory na přímce. K první desce je připojeno zařízení vrhající kuličku, k poslední pytel, který ji zachytí. Je-li zařízení v klidu vzhledem k povrchu Země (stojí na Zemi, visí na laně), kulička díky tíhovému poli neproletí do pytle na pravé straně. Je to tím, že systém není inerciální a tělesa se nepohybují rovnoměrně přímočaře. Přestřihneme-li závěs a zařízení bude padat volným pádem, stává se lokálním inerciálním systémem (LIS), tělesa se pohybují po přímkách a kulička dopadne do záchytného pytle vpravo.



**Zapamatujte si:**

- Inerciální souřadnicová soustava je taková soustava, ve které se volný hmotný bod (malé těleso) pohybuje po přímce konstantní rychlostí. Název soustavy pochází z latinského slova *inertia* (setrvávat) – těleso setrvává v rovnoměrném přímočarém pohybu.
- Ideální inerciální soustava neexistuje. Musela by být dostatečně daleko od všech těles. Takové místo ale ve vesmíru nenajdeme.
- Snadno můžeme realizovat lokální inerciální soustavu. Je jí po krátkou dobu volně gravitující malá klec – kabina bez jakéhokoli pohonu, která bloumá vesmírem. V ní se malá tělesa budou skutečně pohybovat konstantní rychlostí po přímkách.

# 2 POLOHA, RYCHLOST, ZRYCHLENÍ

Vektory umíme nejen natahovat a skládat, ale provádíme s nimi i další užitečné operace. Ve fyzice se velmi často budeme setkávat se skalárním a vektorovým součinem. Pojďme si je proto nyní definovat a podívat se na jejich vlastnosti.

## Skalární součin

Skalární součin dvou vektorů **U** a **V** je definován jednoduchým vztahem:

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} \equiv U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3 \,. \tag{2.1}$$

Prostě jen sečteme součiny obou prvních složek, obou druhých složek a obou třetích složek. Tři čárky namísto rovnítka znamenají definiční vztah. Tečka uprostřed mezi proměnnými znamená skalární součin. Ukažme si to na jednoduchém příkladu:

◖ **Příklad 2.1**

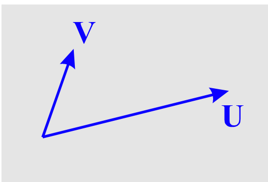
**Zadání:** Nalezněte skalární součin vektorů **U** = (1, 2, 3), **V** = (4, 5, 6).

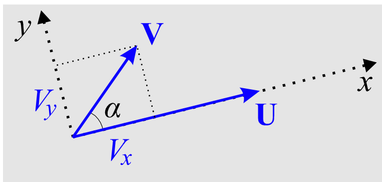
**Řešení:** Vyjdeme přímo z definice:

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} \equiv U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3 = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32 \,.$$

◗

Povšimněte si, že výsledkem skalárního součinu je obyčejné číslo. Takové číslo nezávisí na volbě souřadnicové soustavy a výsledek skalárního součinu bude vždy stejný, ať ho počítáme v kterékoli soustavě. Vezměme si dva libovolné vektory **U**, **V** a zvolme souřadnicovou soustavu co nejjednodušeji. Osu $x$ necháme mířit ve směru prvního vektoru, osu $y$ v rovině obou vektorů a osu $z$ kolmo na ně (volba soustavy vždy závisí na nás a nikdo nám do ní nebude kecat!): α




Označíme-li velikosti vektorů $u$, $v$ a úhel mezi nimi $\alpha$, budou jejich souřadnice

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (U_1, U_2, U_3) = (u, 0, 0)\,; \\ \mathbf{V} &= (V_1, V_2, V_3) = (v\cos\alpha, v\sin\alpha, 0)\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Snadno nyní nalezneme skalární součin obou vektorů podle definice:

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} \equiv U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3 = uv\cos\alpha \,. \tag{2.3}$$

Skalární součin dvou vektorů je tedy roven součinu jejich velikostí a kosinu sevřeného úhlu. To je velmi důležité. Zopakujme si ještě, že tento výsledek bude vždy stejný, bez ohledu na volbu souřadnicové soustavy.

A k čemu je skalární součin dobrý? Později budeme za jeho pomoci počítat například mechanickou práci vykonanou pohybujícím se tělesem. Nyní ho využijeme k určení úhlu mezi dvěma vektory:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{uv}. \tag{2.4}$$

Snadné je také určit velikost vektoru. Postačí oba vektory ve vztahu (2.3) položit stejné a dostaneme $\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} = u^2$. Odsud snadno určíme velikost (je dána odmocninou ze skalárního součinu vektoru se sebou samým)

$$u = \sqrt{\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}}\,. \tag{2.5}$$

◖ **Příklad 2.2**

**Zadání:** Nalezněte velikost a vzájemný úhel vektorů **U** = (1, 3, 0), **V** = (2, 2, 0).

**Řešení:** Nejprve nalezneme velikosti obou vektorů:

$$u = \sqrt{\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}} = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10}\,;$$
$$v = \sqrt{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}\,.$$

Nyní již snadno nalezneme úhel mezi oběma vektory:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{uv} = \frac{U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z}{\sqrt{10}\sqrt{8}} = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 2 + 3\cdot 0}{\sqrt{10}\sqrt{8}} = \frac{8}{\sqrt{80}} \doteq 0{,}89\,.$$

Odpovídající úhel je přibližně 27°. Nakreslete si oba vektory a zkontrolujte výpočet graficky. ◗

**Zapamatujte si:**

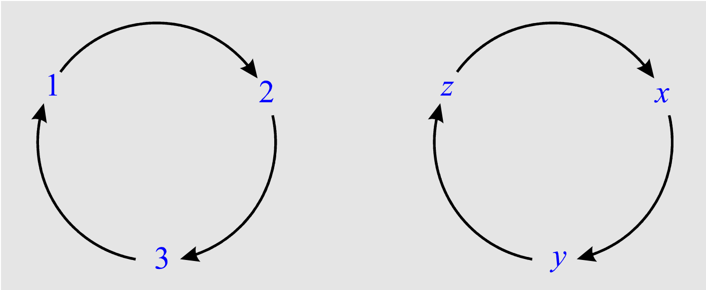
- Skalární součin je dán vztahem $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} \equiv U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3$.
- Skalární součin lze také zapsat jako $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = uv\cos\alpha$.
- Skalární součin je číslo, které nezávisí na volbě souřadnicové soustavy.
- Ze skalárního součinu můžeme spočítat úhel mezi dvěma vektory.
- Velikost vektoru je vždy rovna $u = \sqrt{\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}}$.

## Vektorový součin

Vektorový součin dvou vektorů **U** a **V** je definován vztahem:

$$\begin{aligned} &\mathbf{C} = \mathbf{U}\times\mathbf{V}\,;\\ &C_1 = U_2V_3 - U_3V_2\,,\\ &C_2 = U_3V_1 - U_1V_3\,,\\ &C_3 = U_1V_2 - U_2V_1\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Na první pohled vypadá tato definice možná poněkud děsivě, ale ve skutečnosti je jednoduchá. Stačí si zapamatovat vztah pro první složku. Po jedničce na levé straně jdou indexy dva a tři na pravé straně (minus obráceně). Pokud si zapamatujete tento vztah, máte vyhráno. Vše ostatní dostanete cyklickou záměnou: po jedničce jde dvojka, po dvojce trojka a po trojce zase jednička. Nebo po $x$ jde $y$, poté $z$ a po něm zase $x$:




Vektorový součin značíme křížkem, jeho výsledkem je opět trojice čísel, která má velmi podobné vlastnosti vektorům. Někdy tomuto útvaru říkáme *pseudovektor*.

### ◖ Příklad 2.3

**Zadání:** Nalezněte vektorový součin vektorů $\mathbf{U} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{V} = (4, 5, 6)$.

**Řešení:** Vyjdeme přímo z definice:

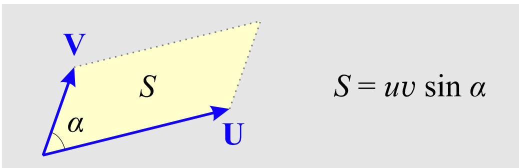
$$\begin{aligned}\mathbf{U}\times\mathbf{V} &\equiv (U_2V_3 - U_3V_2, U_3V_1 - U_1V_3, U_1V_2 - U_2V_1) = \\ &= (2\cdot 6 - 3\cdot 5, 3\cdot 4 - 1\cdot 6, 1\cdot 5 - 2\cdot 4) = (-3, 6, -3)\end{aligned}.$$

◗

Nalezněme nyní význam vektorového součinu. K tomu použijeme stejnou souřadnicovou soustavu, jako tomu bylo u skalárního součinu, tj. vektory budou mít složky (2.2). Pro vektorový součin potom podle definice vyjde

$$\mathbf{U}\times\mathbf{V} = (0, 0, uv\sin\alpha) \tag{2.7}$$

Vektorový součin má složku jen v ose $z$, tedy míří kolmo na oba původní vektory. Jeho velikost je rovna $uv \sin \alpha$, tj. ploše rovnoběžníku „nataženého" na oba vektory.




**Pravidlo vývrtky:** *Přiložíme-li vývrtku na víno hrotem do průsečíku vektorů a otočíme s ní od prvního k druhému, bude se vývrtka pohybovat ve směru vektorového součinu. Pomocí tohoto pravidla můžeme snadno určit, který ze dvou možných kolmých směrů je ten správný.*

A k čemu je vektorový součin dobrý? Pomocí vektorového součinu snadno nalezneme kolmici ke dvěma vektorům. Vektorový součin je také užitečný k výpočtu plochy rovnoběžníku. Později použijeme vektorový součin k popisu momentu hybnosti tělesa nebo při pohybu elektricky nabité částice v magnetickém poli.

### ◖ Příklad 2.4

**Zadání:** Nalezněte plochu rovnoběžníku nataženého na vektory $\mathbf{U} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{V} = (4, 5, 6)$.

**Řešení:** Z předchozího příkladu víme, že vektorový součin těchto vektorů je $(-3, 6, -3)$. Velikost tohoto vektoru (hledaná plocha) je $(9+36+9)^{1/2}$, tj. přibližně 7,35.

◗

**Zapamatujte si:**

- Vektorový součin je dán vztahem
  $\mathbf{U}\times\mathbf{V} \equiv (U_2V_3 - U_3V_2, U_3V_1 - U_1V_3, U_1V_2 - U_2V_1)$.
- Vektorový součin je kolmý na oba vektory **U**, **V**.
- Velikost vektorového součinu je plocha čtyúhelníku se stranami **U**, **V**.
- Pomocí vektorového součinu můžeme snadno vytvářet kolmice.

## Časová změna

Chceme-li určit rychlost tělesa, můžeme zjistit, kde se těleso nachází v čase $t$ a poté zjisti jeho polohu o $\Delta t$ později. Symbolem $\Delta$ budeme vždy označovat konečný přírůstek. Rychlost tělesa potom je rovna rozdílu obou drah dělenému rozdílem obou časů:

$$\bar{v} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \tag{2.8}$$

Takto určená rychlost je jen jakousi průměrnou rychlostí na měřeném úseku. Pokud chceme změřit rychlost předněji, musíme zmenšit měřený úsek, tj. zmenšit časový interval $\Delta t$ mezi oběma měřeními. Okamžitou rychlost dostaneme, pokud bude tento časový interval velmi, velmi malý, tj. v ideálním případě nekonečně (infinitezimálně) malý:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \tag{2.9}$$

Tuto operaci nazýváme časovou derivací a její zápis lze výhodně zkrátit. Místo čitatele můžeme napsat změnu dráhy jako $\Delta s$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2.10}$$

Vypadá to lépe, ale ještě to není ono. Namísto konečných rozdílů $\Delta$ můžeme zavést nekonečně malé rozdíly (tedy i s limitou), které označujeme písmenkem d:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{2.11}$$

Kdykoli narazíte na malé písmeno d (sázené svisle, není to proměnná), jde o nekonečně malý přírůstek. Rychlostí tedy chápeme časovou změnu dráhy za nekonečně malý časový úsek. Zápis (2.11) je už velmi jednoduchý, ale fyzikové jsou pohodlní, a tak pro časovou derivaci zavedli ještě kratší označení – zapisují ji tečkou nad písmenem, tedy pro rychlost máme:

$$v = \dot{s}. \tag{2.12}$$

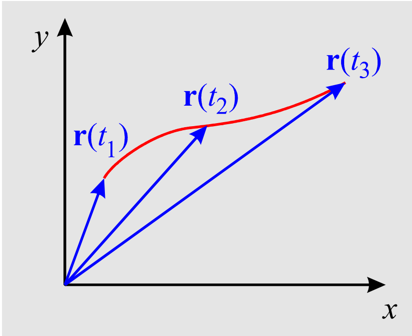
Kdykoli nad písmenem naleznete tečku, znamená to časovou změnu dané veličiny, tedy nějakou rychlost. Časová změna polohy ($\dot{s}$) je rychlost, časová změna plochy ($\dot{S}$) je plošná rychlost, časová změna úhlu ($\dot{\alpha}$) je úhlová rychlost, časová změna náboje ($\dot{Q}$) proteklého ampérmetrem je elektrický proud (rychlost tečení náboje).

**Zapamatujte si:**

Časovou změnu označujeme tečkou nad písmenem. Jde o časovou derivaci dané veličiny.

## Polohový vektor, rychlost, zrychlení

Tělesa se při pohybu přemísťují z místa na místo. Jejich okamžitou polohu popisujeme tzv. polohovým vektorem, který spojuje počátek souřadnicové soustavy s aktuální polohou tělesa:



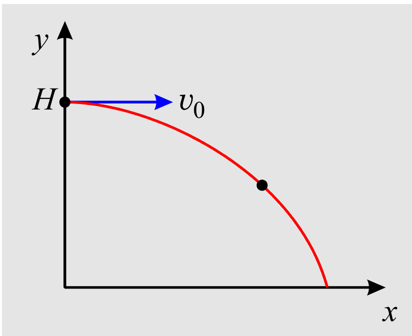

Polohový vektor je funkcí času. Pokud tuto funkci známe, můžeme snadno zjistit, kde se těleso v daném okamžiku nachází:

$$\begin{aligned} &\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)\,; \qquad \text{neboli} \\ &x = x(t)\,, \\ &y = y(t)\,, \\ &z = z(t)\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

◖ **Příklad 2.5**

**Zadání:** Zapište trajektorii tělesa při vodorovném vrhu rychlostí $v_0$ z výšky $H$.

**Řešení:** Situace je zakreslená na následujícím obrázku. Pohyb rozložíme na vodorovný pohyb s rychlostí $v_0$ a volný pád ve svislém směru:




◗

$$\begin{aligned} &x(t) = v_0 t\,, \\ &y(t) = H - gt^2/2\,, \\ &z(t) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

V každém čase můžeme nyní zjistit polohu letícího tělesa. Například v čase 0 má souřadnice $(0, H, 0)$. Také není problémem určit vzdálenost letícího tělesa od počátku – je to velikost polohového vektoru $r = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{1/2}$.

◗

Rychlost pohybu můžeme nyní počítat pro každou složku zvlášť:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\,,$$
$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}\,, \tag{2.15}$$
$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z}\,.$$

Souhrnně můžeme všechny tři vztahy zapsat za pomoci vektorového formalizmu

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}\,. \tag{2.16}$$

Tučná písmena znamenají vektory, tedy trojice čísel. Jak vypadá rychlost jako vektor? Představte si, že jste na hokejovém stadionu a hráč právě udeřil do puku. Na stadionu jsou tři čidla. Jedno je na dlouhé straně stadionu a měří rychlost $v_x$ ve směru mantinelu. Druhé je na krátké straně stadionu a měří rychlost $v_y$. Třetí čidlo měří rychlost ve svislém směru, tedy $v_z$. V každém okamžiku lze puku přiřadit trojici rychlostí $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Pokud budete chtít určit velikost rychlosti puku, jednoduše naleznete velikost vektoru rychlosti:

$$v = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,. \tag{2.17}$$

Rychlost tělesa se může při pohybu měnit. Změnu rychlosti tělesa s časem nazýváme zrychlení:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x = \ddot{x}\,,$$
$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_y = \ddot{y}\,, \tag{2.18}$$
$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_z = \ddot{z}\,.$$

Zrychlení je první časovou derivací rychlosti neboli druhou časovou derivací polohy. Uvedené vztahy můžeme opět zapsat kompaktněji za pomoci vektorového formalizmu:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\mathbf{r}}\,. \tag{2.19}$$

Velikost zrychlení tělesa nalezneme opět jako velikost vektoru:

$$a = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{2.20}$$

**◖ Příklad 2.6**

**Zadání:** Nalezněte velikost rychlosti a velikost zrychlení vodorovně vrženého tělesa.

**Řešení:** Využijeme znalost polohy z minulého příkladu:

$$x(t) = v_0 t\,,$$
$$y(t) = H - gt^2/2\,,$$
$$z(t) = 0\,.$$

Rychlosti určíme jako první časové derivace:

$$v_x(t) = \dot{x} = v_0 \ ,$$
$$v_y(t) = \dot{y} = -gt \ ,$$
$$v_z(t) = \dot{z} = 0 \ .$$

Vidíme, že ve vodorovném směru se těleso pohybuje s konstantní rychlostí $v_0$, ve svislém směru rychlost narůstá lineárně s časem a je rovna $-gt$. Velikost rychlost v libovolném okamžiku se mění s časem a je rovna

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \ .$$

Obdobně určíme zrychlení jako druhou časovou derivaci dráhy podle času nebo první časovou derivaci rychlosti:

$$a_x(t) = \ddot{x} = 0 \ ,$$
$$a_y(t) = \ddot{y} = -g \ ,$$
$$a_z(t) = \ddot{z} = 0 \ .$$

Na těleso působí zrychlení jedině ve svislém směru, a to směrem dolů (znaménko minus). Snadno zjistíme, že velikost zrychlení je $g$.

◗

**Zapamatujte si:**

- Rychlost je časovou derivací polohy, tj. $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ .
- Zrychlení je časovou derivací rychlosti, tj. $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ .
- Velikost rychlosti a zrychlení určíme jako velikosti příslušných vektorů.

# 3 TEČNÉ A NORMÁLOVÉ ZRYCHLENÍ

Nejprve se budeme zabývat nejjednoduššími pohyby – pohybem rovnoměrným přímočarým a rovnoměrným pohybem po kružnici. Na těchto pohybech se seznámíme s tečným a normálovým zrychlením.

## Rovnoměrný přímočarý pohyb

Rovnoměrný přímočarý je pohyb tělesa po přímce s konstantní (neměnnou) rychlostí. Takový pohyb můžeme snadno popsat v jediné dimenzi a pro dráhu uraženou tělesem můžeme psát

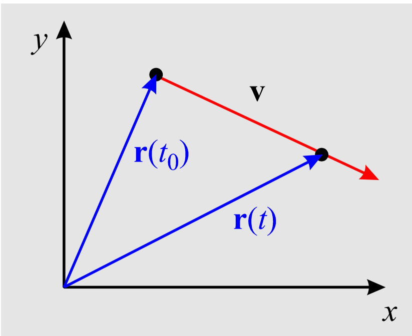
$$s(t) = s(t_0) + v_0(t - t_0)\,, \tag{3.1}$$

kde $s(t)$ je dráha v čase $t$, $s(t_0)$ je počáteční dráha v čase $t_0$. Ve třech dimenzích můžeme psát obdobný vektorový vztah

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}_0(t - t_0)\,, \tag{3.2}$$

který také můžeme rozložit na jednotlivé složky

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + v_{0x}(t - t_0)\,, \\ y(t) &= y(t_0) + v_{0y}(t - t_0)\,, \\ z(t) &= z(t_0) + v_{0z}(t - t_0)\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$




První časová derivace vztahu (3.3) dá rychlost tělesa, druhá derivace jeho zrychlení:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = v_{0x}\,, & a_x &= \ddot{x} = 0\,, \\ v_y &= \dot{y} = v_{0y}\,, & a_y &= \ddot{y} = 0\,, \\ v_z &= \dot{z} = v_{0z}\,, & a_z &= \ddot{z} = 0\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pohyb se děje s konstantní rychlostí a s nulovým zrychlením.

## Nerovnoměrný přímočarý pohyb

I u přímočarého pohybu je možné, aby se měnila rychlost. V tomto případě se bude měnit velikost rychlosti, nikoli její směr. Pohyb bude mít nenulové zrychlení. Jeho velikost bude rovna změně velikosti rychlosti a mířit bude ve směru pohybu, tedy ve směru rychlosti:

$$\mathbf{a}_\mathrm{t} = \text{velikost} \times \text{směr} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}\,; \qquad \boldsymbol{\tau} \equiv \frac{\mathbf{v}}{v}\,. \tag{3.5}$$

Tomuto zrychlení říkáme tečné zrychlení, neboť míří tečně ke směru dráhy. Stejný vztah lze použít i při výpočtu tečného zrychlení po křivočaré dráze. Tečné zrychlení je možné určit i alternativním způsobem, a to jako projekci zrychlení do směru rychlosti:

$$\mathbf{a}_\mathrm{t} = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} \tag{3.6}$$

**Zapamatujte si:**

- Rovnoměrný přímočarý pohyb se děje po přímce s konstantní rychlostí. Jeho zrychlení je nulové.
- Nerovnoměrný přímočarý pohyb se děje po přímce s proměnnou rychlostí. Zrychlení je nenulové, míří ve směru pohybu a jeho velikost je rovna časové změně velikosti rychlosti, tj. $a_\mathrm{t} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$.
- V obecném případě určíme tečné zrychlení buď ze vztahu $\mathbf{a}_\mathrm{t} = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)\,\boldsymbol{\tau}$, nebo z projekce $\mathbf{a}_\mathrm{t} = (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau})\,\boldsymbol{\tau}$.

◖ **Příklad 3.1**

**Zadání:** Nalezněte tečné zrychlení vodorovně vrženého tělesa.

**Řešení:** Budeme postupovat jako v příkladě 2.6. Nejprve určíme složky rychlosti a potom velikost rychlosti:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t\,, \\ y(t) &= H - gt^2/2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_x(t) &= \dot{x} = v_0\,, \\ v_y(t) &= \dot{y} = -gt\,, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}\,.$$

Velikost tečného zrychlení tedy bude

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}\,.$$

Po dosazení konkrétního času nalezneme snadno velikost tečného zrychlení v tomto čase. Je zřejmé, že se velikost tečného zrychlení s časem mění. Pokud bychom chtěli znát i jednotlivé složky tečného zrychlení (vodorovnou a svislou, použijeme jeho definici (3.5):

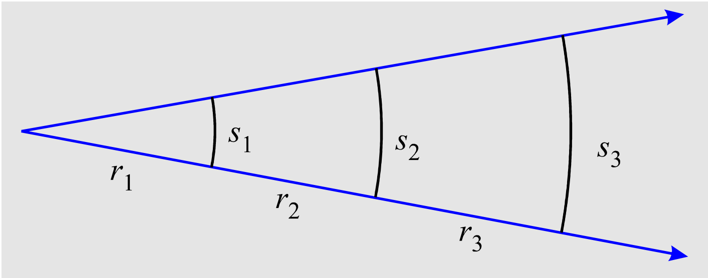
$$\begin{aligned} a_{\mathrm{t}x} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{v_x}{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{v_0 g^2 t}{v_0^2 + g^2 t^2}\,; \\ a_{\mathrm{t}y} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{v_y}{v} \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \frac{-gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = -\frac{g^3 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2}\,. \end{aligned}$$

◗

## Rovnoměrný pohyb po kružnici

Předpokládejme nyní, že se těleso pohybuje konstantní rychlostí po kružnici. Nejprve si zopakujme, co to je úhel. Úhlem chápeme prostor mezi dvěma polopřímkami. Základní vlastností úhlu je, že podíl oblouku a příslušného poloměru je neměnný:

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{s_3}{r_3} = \cdots \tag{3.7}$$




Velikost úhlu můžeme definovat třemi způsoby – ve stupních, gradech a radiánech. Ve stupních je pravému úhlu přiřazena hodnota 90°. Z hlediska desítkové soustavy je toto číslo „nehezké“, proto vznikla stupnice v gradech, která pravému úhlu přiřazuje hodnotu $100^g$. K definici úhlu můžeme využít i jeho základní vlastnost (3.7) a úhel definovat jako podíl oblouku a poloměru:

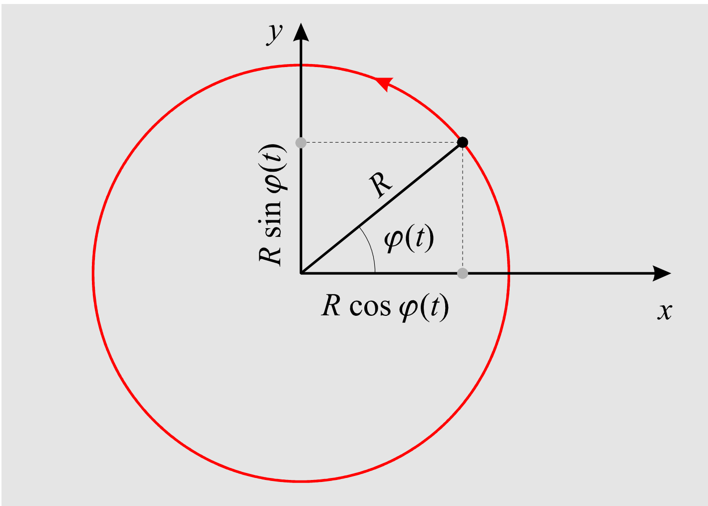
$$\varphi \equiv \frac{s}{R}. \tag{3.8}$$

Této jednotce říkáme radiány a pravému úhlu přísluší hodnota π/2 radiánu. Ze vztahu (3.8) se většinou vypočítává velikost oblouku, a tak je výhodné si ho pamatovat i ve tvaru

$$s = R\varphi. \tag{3.9}$$

Při pohybu po kružnici je poloměr $R$ konstantní a úhel $\varphi(t)$ i dráha $s(t)$ narůstají s časem. Derivováním (3.9) podle času získáme jednoduchý vztah mezi dráhovou a úhlovou rychlostí:

$$v = R\omega; \qquad v \equiv \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}; \qquad \omega \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{3.10}$$




Úhel $\varphi$ bude u rovnoměrného pohybu narůstat lineárně s časem, konstantou úměrnosti bude úhlová rychlost:

$$\varphi = \omega t. \tag{3.11}$$

Pokud tento vztah derivujete podle času, opět vám vyjde, že úhlová rychlost je časová změna úhlu. Polohový vektor obíhajícího tělesa bude podle obrázku mít souřadnice:

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos\varphi(t) = R\cos\omega t, \\ y(t) &= R\sin\varphi(t) = R\sin\omega t. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Složky rychlosti budou mít hodnotu

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -R\omega\sin\omega t, \\ v_y &= \dot{y} = +R\omega\cos\omega t. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Určeme nyní velikost rychlosti:

$$v(t)=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{R^2\omega^2\left(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t\right)}=R\omega . \tag{3.14}$$

Jiným způsobem jsme opětovně ukázali, že dráhová rychlost je rovna součinu poloměru a úhlové rychlosti. Při rovnoměrném kruhovém pohybu se nemění velikost rychlosti, ale dochází ke změně jejího směru. Proto bude změna rychlosti nenulová a pohyb bude mít nenulové zrychlení:

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = -R\omega^2 \cos\omega t , \\ a_y &= \ddot{y} = -R\omega^2 \sin\omega t . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Toto zrychlení míří kolmo na dráhu pohybujícího se tělesa, směrem do středu kružnice. Kolmost dokážeme snadno. Stačí nalézt skalární součin vektoru rychlosti (3.13) a vektoru zrychlení (3.15). Ihned je patrné, že je nulový a vektor zrychlení je vždy kolmý na okamžitý směr rychlosti. Nalezněme nyní velikost tohoto zrychlení – říkáme mu normálové, působí ve směru normály (kolmice) k dráze:

$$a_{\mathrm{n}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=R\omega^2 . \tag{3.16}$$

Velikost normálového zrychlení můžeme také vyjádřit za pomoci dráhové rychlosti (3.10):

$$a_{\mathrm{n}}=R\omega^2=\frac{v^2}{R}. \tag{3.17}$$

Pokud bychom chtěli vyjádřit normálové zrychlení jako vektor, zapíšeme ho jako součin velikosti a směru:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{n}}=\text{velikost}\times\text{směr}=\frac{v^2}{R}\left(\frac{-\mathbf{R}}{R}\right)=-\frac{v^2}{R}\frac{\mathbf{R}}{R}. \tag{3.18}$$

**Zapamatujte si:**

- Rovnoměrný pohyb po kružnici má neměnnou velikost rychlosti, její směr se ale mění.
- Úhlovou rychlostí nazýváme změnu úhlu s časem, $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$.
- Mezi dráhovou a úhlovou rychlostí platí jednoduchý vztah: $v = R\omega$.
- Na těleso působí nenulové normálové zrychlení, které míří kolmo na dráhu tělesa a má velikost $a_{\mathrm{n}} = v^2/R$.

## Obecný pohyb

Předpokládejme nyní, že se těleso pohybuje po zcela obecné dráze. Může jít o automobil jedoucí po křivolaké silnici. Kdykoli sešlápneme plynový pedál, zvýšíme rychlost automobilu a udělíme mu tečné zrychlení (ve směru dráhy) jehož velikost je $a_{\mathrm{t}} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. Jakmile se automobil dostane do zatáčky, působí na něho normálové zrychlení s velikostí $a_{\mathrm{n}} = v^2/R$. V tomto vztahu je $R$ poloměr zatáčky, v daném okamžiku bychom museli najít kružnici, která se nejlépe přimyká dráze (říkáme ji oskulační kružnice). Pro obecný pohyb můžeme vždy psát

$$\mathbf{v}=v\boldsymbol{\tau} , \tag{3.19}$$

tedy rychlost zapíšeme jako velikost rychlost a její směr. Časová změna rychlosti proto bude

$$\mathbf{a}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{a}_{\mathrm{t}}+\mathbf{a}_{\mathrm{n}}. \tag{3.20}$$

Interpretace obou členů je zjevná. První člen souvisí se změnou velikosti rychlosti a jde tedy o tečné zrychlení. Druhý člen naopak souvisí se změnou směru rychlosti a jde o normálové zrychlení. Při výpočtu normálového zrychlení podle vztahu (3.17) si vždy musíme dát pozor na význam veličiny $R$. Nejde totiž o velikost polohového vektoru, ale o poloměr oskulační kružnice. Ten u většiny pohybů neznáme, a tak je jednodušší normálové zrychlení dopočítat jako rozdíl celkového a tečného zrychlení:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{n}}=\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\mathrm{t}}. \tag{3.21}$$

**Zapamatujte si:**

- U obecného pohybu na těleso působí jak tečné, tak normálové zrychleni.
- Tečné zrychlení souvisí se změnou velikosti rychlosti, $a_{\mathrm{t}} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$.
- Normálové zrychlení souvisí se změnou směru rychlosti, $a_{\mathrm{n}} = v^2/R$.
- Normálové zrychlení můžeme určit z vektorového vztahu $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathrm{t}} + \mathbf{a}_{\mathrm{n}}$.

◖ **Příklad 3.2**

**Zadání:** Nalezněte normálové zrychlení vodorovně vrženého tělesa.

**Řešení:** Využijeme příkladu 3.1, ve kterém jsme určili tečné zrychlení

$$a_{\mathrm{t}x}=\frac{v_0 g^2 t}{v_0^2+g^2t^2};$$
$$a_{\mathrm{t}y}=-\frac{g^3t^2}{v_0^2+g^2t^2}.$$

Celkové zrychlení při volném pádu je (buď ho určíme jako druhou derivaci polohy podle času nebo víme, že jde o tíhové zrychlení:

$$a_x=0;$$
$$a_y=-g.$$

Nyní již snadno určíme obě složky normálového zrychlení:

$$a_{\mathrm{n}x}=a_x-a_{\mathrm{t}x}=-\frac{v_0 g^2 t}{v_0^2+g^2t^2};$$
$$a_{\mathrm{n}y}=a_y-a_{\mathrm{ty}}=-g+\frac{g^3t^2}{v_0^2+g^2t^2}.$$

◗

# 4 POHYBOVÉ ZÁKONY

V dosavadních příkladech jsme měli zadán pohyb tělesa a z něho počítali jeho rychlost a zrychlení. V praxi nás bude zajímat přesně opačný postup – ze znalosti sil působících na těleso zjistit, po jaké trajektorii se bude pohybovat v budoucnosti (predikce) nebo kde se nacházelo v minulosti (retrodikce).

## Stav tělesa

Staven tělesa rozumíme veškeré údaje o tělese, za pomoci kterých můžeme předpovědět jeho budoucí pohyb. Pokud je na stole položená křída a budeme znát její polohu, k určení stavu to ještě nestačí. Křída může na stole nehybně ležet, nebo může daným místem právě prolétat s nějakou rychlostí. V teoretické mechanice jednoduchá tělesa nahrazujeme hmotnými body – malými tělísky, která nemají žádné vlastní rozměry. Stav takového tělesa je určen jeho polohou a rychlostí v nějakém čase:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}(t_0)\,;\\ \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}(t_0)\,.\end{aligned} \tag{4.1}$$

K určení stavu hmotného bodu tedy postačí šestice čísel: tři polohy a tři rychlosti. Těmto údajům také někdy říkáme *počáteční podmínky*. Pokud těleso nelze nahradit hmotným bodem, mohou být podstatné i další údaje. Například u naší Zeměkoule nás může zajímat nejenom kudy letí kolem Slunce, ale i jak se vyvíjí její rotace a tvar. Stav skutečných těles může být popsán větší skupinou parametrů a jejich časových derivací. V mikrosvětě, kde objekty podléhají kvantovým zákonům, je určení jejich stavu ještě komplikovanější. Není zde například možné určit současně polohu a rychlost takového objektu a kvantová mechanika musí postupovat jinými cestami. Pro účely Vašich prvních krůčků s předpovědí pohybu těles si vystačíme s určením stavu za pomoci polohy a rychlost v určitém čase.

**Zapamatujte si:**

Stavem tělesa rozumíme znalost jeho polohy a rychlosti v nějakém čase. Někdy se k určení stavu tělesa používá poloha a hybnost (s tou se seznámíme později).

## Hmotnost tělesa

Dalším klíčovým pojmem, se kterým se musíte seznámit, je hmotnost tělesa. Hmotnosti těles nejčastěji zjišťujete vážením. Aniž byste si to uvědomovali, při vážení využíváte vzájemnou přitažlivost Zeměkoule a váženého tělesa. Zjištěnou hmotnost proto nazýváme gravitační hmotnost.

*Gravitační hmotnost* je mírou schopnosti tělesa se vzájemně přitahovat s jinými tělesy. Etalon (těleso, kterému přisuzujeme jednotkovou schopnost se přitahovat, tj. hmotnost 1 kg) je uložen v Mezinárodním úřadu měr a vah v Sevres u Paříže a do roku 2019 na něm byla založena definice kilogramu. Od roku 2019 je kilogram definován za pomoci Planckovy konstanty. Pomocí tohoto etalonu posuzujeme přitažlivé schopnosti všech ostatních těles.

Naše Země má větší schopnost se přitahovat s jinými tělesy než kilogramový etalon, její gravitační hmotnost je $5\times10^{24}$ kg. Slunce má tuto schopnost ještě větší, $2\times10^{30}$ kg. Při pohybu těles nás ale zajímá ještě jiná hmotnost, říkáme jí setrvačná hmotnost.

*Setrvačná hmotnost* vyjadřuje schopnost těles setrvávat v daném pohybovém stavu. Fotbalový míč snadno uvedeme do pohybu a také ho snadno chytíme, tj. zastavíme v letu. Pohybový stav míče (let, klid) snadno změníme. Zkuste ale roztlačit stojící vlak. Nebo naopak zastavit jedoucí vlak. Schopnost vlaku setrvávat v daném pohybovém stavu je podstatně větší než u míče a našimi lidskými silami se nám pohybový stav vlaku těžko podaří změnit.

Jak lze měřit schopnost těles setrvávat v daném pohybovém stavu? Opět si musíme vybrat nějaké těleso, o kterém budeme předpokládat, že má tuto schopnost jednotkovou. A klidně to může být ten samý etalon, kterým měříme gravitační hmotnost. Zkrátka si zvolíme, že jeden kilogram gravitační hmotnosti bude roven jednomu kilogramu setrvačné hmotnosti. Ale bude totéž tvrzení platit i o dvou kilogramech? Na to musíme začít experimentovat. Zjistit, jakou sílu musíme vynaložit k zastavení dvou etalonů z určité rychlosti nebo naopak k jejich uvedení do pohybu. Taková měření vedla na poznatek, že obě hmotnosti jsou si úměrné a pokud pro jejich měření zvolíme stejný etalon, budou dokonce stejné. Tomuto tvrzení se říká princip ekvivalence a je na něm postavena současná teorie gravitace – obecná relativita.

**Zapamatujte si:**

- *Gravitační hmotnost* je schopnost těles se vzájemně přitahovat. Tuto schopnost měříme vážením.
- *Setrvačná hmotnost* je schopnost tělesa neměnit svůj pohybový stav. Tuto schopnost zjišťujeme za pomocí síly, kterou je nutné vynaložit ke změně pohybového stavu tělesa.
- *Princip ekvivalence*: Z experimentů plyne, že gravitační a setrvačné schopnosti těles jsou si vzájemně úměrné. Pokud pro obě hmotnosti zvolíme stejný etalon, budou vycházet číselně shodné.

## Zákon setrvačnosti

Zákony, kterými se řídí pohyby těles, zkoumali v 17. století Galileo Galilei a později je přesně specifikoval Isaac Newton ve svém slavném díle Principia (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*). Toto dílo vyšlo jedině díky soustavnému úsilí Edmonda Halleye, který Newtona k publikaci nakonec donutil a vydání financoval. Newton sám prý publikoval výsledky své práce velmi nerad a postačilo mu, že jevy pochopil a korektně popsal. Zákon setrvačnosti lze vyjádřit velmi jednoduše:

**Zapamatujte si:**

Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud na něho nepůsobí síla.

V této jednoduché větě je skryta velmi hluboká myšlenka. Pohybový stav těles mohou měnit jen silové účinky jiných těles. Samo od sebe těleso vzhledem k inerciální souřadnicové soustavě buď stojí, nebo se pohybuje po přímce s konstantní rychlostí. Ze zkušenosti víme, že se rozjetý automobil po určité době sám zastaví. To je ale způsobeno třením mezi automobilem a okolním vzduchem a valivým třením mezi automobilem a podložkou. Pokud půjde o raketu, bude se dále řítit prázdným prostorem rychlostí, kterou jsme jí udělili. I Měsíc obíhající kolem Země by se sám o sobě pohyboval po přímce s konstantní rychlostí. Působení Země ale jeho pohyb zakřivuje a nutí Měsíc obíhat kolem Země po elipse.

Pohyb je tělesům vlastní a tělesa zůstávají v pohybovém stavu, jaký získali předtím. Jejich pohybový stav můžeme změnit jen působením síly, tedy za pomoci jiných těles.

## Newtonův pohybový zákon

Působí-li na těleso síla, může změnit jeho pohybový stav, tj. změnit jeho rychlost, tedy udělit mu zrychlení:

$$\mathbf{a} \propto \mathbf{F} \,. \tag{4.2}$$

Udělené zrychlení je přímo úměrné působící síle. Čím větší síla působí, tím větší změnu rychlosti (zrychlení) má za následek. Symbolem $\propto$ vyjadřujeme v matematice přímou úměrnost. Této změně pohybového stavu, jak už víme, brání setrvačná hmotnost tělesa, tj.

$$\mathbf{a} \propto \frac{1}{m_\mathrm{s}} \,. \tag{4.3}$$

Setrvačná hmotnost není nic jiného než konstanta úměrnosti ve vztahu (4.2). Obě dvě úměrnosti můžeme zapsat do jediné rovnosti:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_\mathrm{s}} \tag{4.4}$$

Zrychlení, které získá těleso je úměrné působící síle a nepřímo úměrné jeho hmotnosti. Tento zákon je současně nástrojem pro předpověď pohybu těles. Uvědomíme-li si, že zrychlení je druhou časovou derivací polohového vektoru, můžeme psát

$$m_\mathrm{s}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \,. \tag{4.5}$$

Takovému zápisu říkáme *pohybové rovnice* (jsou tři, v každé ose jedna). Z matematického hlediska jde o soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, ze které je možné určit trajektorii tělesa $\mathbf{r}(t)$, pokud známe jeho pohybový stav v počátečním čase, tj. počáteční podmínky $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{v}_0$. a víme, jaké síly na těleso působí (tedy známe pravé strany pohybových rovnic).

**◖ Příklad 4.1**

**Zadání:** Nalezněte trajektorii vodorovně vrženého tělesa z jeho pohybové rovnice.

**Řešení:** Na těleso bude působit jediná síla, a to tíže v ose $y$, tedy $\mathbf{F} = (0, -m_\mathrm{g}g, 0)$. Pohybová rovnice proto bude

$$m_\mathrm{s}\ddot{x} = 0 \,,$$
$$m_\mathrm{s}\ddot{y} = -m_\mathrm{g}g \,,$$
$$m_\mathrm{s}\ddot{z} = 0 \,.$$

Pokud platí princip ekvivalence a obě hmotnosti jsou si rovné, můžeme je na obou stranách rovnosti zkrátit a pohybové rovnice se zjednoduší na tvar

$$\ddot{x} = 0 \,,$$
$$\ddot{y} = -g \,,$$
$$\ddot{z} = 0 \,.$$

Po první integraci můžeme určit rychlosti tělesa

$$\dot{x} = c_1 \,,$$
$$\dot{y} = -gt + c_2 \,,$$
$$\dot{z} = c_3 \,.$$

Integrační konstanty určíme tak, aby pro $t = 0$ byla rychlost rovna $\mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0)$, tedy:

$$c_0 = v_0\,, \qquad c_1 = 0\,, \qquad c_2 = 0\,.$$

Další integrací určíme trajektorii tělesa:

$$x = v_0 t + c_4\,,$$
$$y = -\frac{gt^2}{2} + c_5,$$
$$z = c_6\,.$$

Konstanty určíme tak, aby pohyb v čase $t = 0$ začínal v souřadnicích $\mathbf{r}_0 = (0, H, 0)$, tj.

$$c_4 = 0\,, \qquad c_5 = H\,, \qquad c_6 = 0\,.$$

Výsledkem řešení pohybových rovnic pro vodorovný vrh je vztah

$$x = v_0 t\,,$$
$$y = H - \frac{gt^2}{2},$$
$$z = 0\,,$$

který již delší dobu používáme.

◗

**Zapamatujte si:**

- Pohybové rovnice $m_s \mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}t^2 = \mathbf{F}$ nám umožňují ze známých sil spočítat trajektorii tělesa a předpovědět tak jeho budoucí pohyb nebo dopočíst pohyb minulý.
- Integrační konstanty vzniklé při řešení pohybové rovnice určíme z počátečních podmínek, tj. z polohy a rychlosti tělesa v počátečním čase.
- Při pohybu v tíhovém nebo v gravitačním poli se setrvačná hmotnost zkrátila s gravitační hmotností. Výsledný pohyb tedy nezávisí na hmotnosti tělesa. Planeta se bude kolem Slunce pohybovat po stejné dráze jako matka upuštěná kosmonautem na Mezinárodní kosmické stanici. Cihla puštěná z okna domu dopadne na chodník za stejnou dobu jako malá kulička.
- V dalším textu budeme setrvačnou i gravitační hmotnost značit jen symbolem $m$.

### ◖ Příklad 4.2

**Zadání:** Kulička spadla do kádinky s vodou s rychlostí $v_0$. Na kuličku bude působit tíže a odpor vody, který je úměrný rychlosti kuličky, ale má opačný směr. Nalezněte rychlost, se kterou bude kulička padat kapalinou.

**Řešení:** Na těleso budou působit dvě síly: tíže $\mathbf{F}_1 = (0, -mg, 0)$ a odpor vody $\mathbf{F}_2 = (0, -\alpha v, 0)$. Počáteční podmínky jsou: $\mathbf{r}_0 = (0, H, 0)$, $\mathbf{v}_0 = (0, -v_0, 0)$. Ve svislém směru $y$ máme:

$$m\ddot{y} = -mg - \alpha\dot{y}\,.$$

Opět jde o obyčejnou diferenciální rovnici, kterou můžeme přepsat do tvaru

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} = -g\,.$$

Nalevo jsme soustředili neznámou $y(t)$, koeficient u nejvyšší derivace upravili tak, aby byl roven jedné. Jde o lineární diferenciální rovnici s pravou stranou, kterou se později naučíme řešit. V tuto chvíli nám hlavně jde o sestavení správné pohybové rovnice. Bez složitějšího výpočtu ale snadno určíme rovnovážnou rychlost, se kterou se po dosti dlouhé době bude kulička snášet kapalinou. Tehdy už bude totiž mít nulové zrychlení a bude platit

$$\frac{\alpha}{m}v = -g \qquad \Rightarrow \qquad v = -\frac{mg}{\alpha}.$$

◗

## Zákon akce a reakce

**Zapamatujte si:**

*Zákon akce a reakce*: V uzavřené soustavě dvou těles jsou vždy síly, kterými na sebe tělesa vzájemně působí stejně veliké, ale opačně orientované.

Pokud budete na loďce odstrkovat druhou loďku, budete sice na ni působit určitou silou, ale stejná (opačně orientovaná) síla bude působit i na vás. Pokud budete střílet z pistole, bude její mechanizmus působit silou na střelu. Stejnou sílu pocítí vaše tělo jako zpětný ráz. Na principu akce a reakce jsou založené i raketové motory. Plyny unikající tryskou vytvářejí reakci, která pohání raketu.

## Problém síly

Velice zajímavá je síla vystupující na pravé straně pohybových rovnic. Může jít o tíži, odpor prostředí, sílu pružiny, sílu, kterou působí elektrické nebo magnetické pole na nabitou částici, sílu způsobenou třením atd. Tuto sílu chápeme jako matematický předpis, který nám po vyřešení pohybových rovnic umožní nalézt trajektorii tělesa. Sílu měříme v newtonech, to je jednotka, jejíž rozměr snadno určíme z levé strany pohybové rovnice:

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}. \tag{4.6}$$

Pokud se ale pokusíme sílu nějak logicky definovat, narazíme na nepřekonatelné problémy. Většina pokusů o definici síly končí v kruhu. Sílu můžeme například chápat jako součin hmotnosti a zrychlení. Zrychlení je změna rychlosti s časem, rychlost je změna dráhy s časem. Dráhu budeme měřit ve vhodné souřadnicové soustavě, například inerciální. Ta je definována tak, že volný hmotný bod se pohybuje rovnoměrně přímočaře. A co je to volný? Takový, na který nepůsobí síla.

Klasická definice kruhem, kdy definujeme sílu za pomocí síly. Fyzika popisující děje na základní úrovni se bez síly obejde. Současnou teorií gravitace je obecná relativita, která místo síly používá zakřivený prostor a čas. Každé těleso zakřivuje čas a prostor kolem sebe a v tomto pokřiveném světě se tělesa pohybují po nejrovnějších možných drahách, tzv. geodetikách. Země obíhá kolem Slunce po elipse nikoli proto, že by na ni Slunce působilo gravitační silou, ale proto, že Slunce takto pokřivilo svět kolem sebe. Ostatní přírodní interakce (elektromagnetickou, slabou a silnou) popisujeme pomocí kvantové teorie pole. Ani ta pojem síly nepoužívá, ale vzájemnou interakci těles chápe jako vyměňování polních (mezipůsobících) částic. Interakce elektronu s elektronem je například způsobena výměnou fotonů.

V běžných výpočtech je ale pojem síly velmi užitečný. Pokud budete počítat pohyb automobilu, rakety nebo nabité částice mezi nabitými deskami, bude popis za pomoci sil velmi jednoduchý, každý jiný by byl zbytečně složitý.

## Diferenční schéma, ukázka

Po sestavení pohybové rovnice je třeba nalézt její řešení. Jen v jednoduchých situacích se vám podaří najít řešení analyticky. Ve většině případů se hledá řešení numericky na počítači. Pro pochopení principu sestavíme jednoduché diferenční schéma pro volný pád. Numerické řešení provedeme ve čtyřech krocích:

1. Sestavíme pohybovou rovnici,
2. pohybovou rovnici převedeme na soustavu rovnic prvního řádu,
3. derivace nahradíme diferencemi,
4. vypočteme nové hodnoty za pomoci starých.

Pohybová rovnice pro volný pád vyplývá z 2. Newtonova pohybového zákona

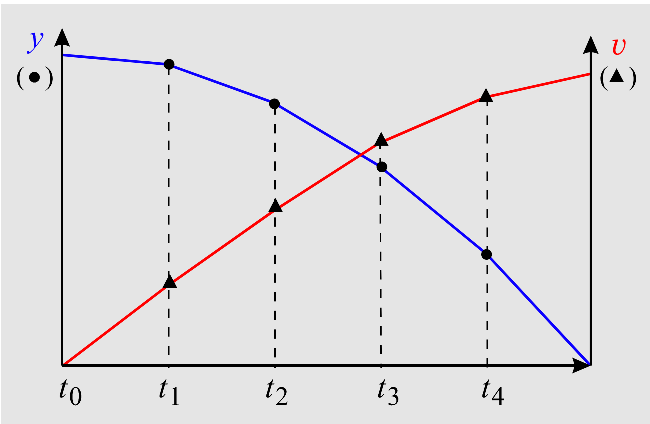
$$m\ddot{y} = -mg \,. \tag{4.7}$$

Výsledná diferenciální rovnice $\ddot{y} = -g$ je mimořádně jednoduchá a její řešení bychom snadno mohli najít analyticky. Tvorbu diferenčního schématu si proto ukážeme právě na takto jednoduché rovnici. Stejný postup můžete aplikovat i na složitější rovnice, které již nemají analytické řešení. Nejprve převedeme diferenciální rovnici druhého řádu na soustavu rovnic prvního řádu (ve fyzice k tomu využijeme definice rychlosti jako první derivace hledané proměnné podle času):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= v \,, \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -g \,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Nebudeme nyní hledat řešení v každém čase (diferenciální rovnice), ale jen v některých časech (diferenční rovnice). V praxi to znamená nahrazení skutečného řešení lomenou čarou. Budou nás tedy zajímat jen hodnoty

$$\begin{aligned} y_n &= y(t_n) \,, \\ v_n &= v(t_n) \,. \end{aligned} \tag{4.9}$$




Skutečné derivace nahradíme konečnými rozdíly:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \cong v_n \,,$$

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \cong -g \,.$$

Nyní vypočteme hodnoty $n$ + 1 pomocí hodnot $n$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\cong y_n + v_n \,\Delta t \,, \\ v_{n+1} &\cong v_n - g\,\Delta t \,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Získali jsme tak diferenční schéma, podle kterého počítáme jednotlivé hodnoty

$$y_0, v_0 \quad \Rightarrow \quad y_1, v_1 \quad \Rightarrow \quad y_2, v_2 \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad . \tag{4.11}$$

Je zřejmé, že k numerické konstrukci řešení postačí znát počáteční výšku a rychlost (počáteční podmínky), například $y_0 = H$, $v_0 = 0$.

◖ **Příklad 4.3**

**Zadání:** Navrhněte diferenční schéma pro kuličku padající v kapalině z příkladu 4.2.

**Řešení:** Pohybovou rovnici $\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} = -g$ převedeme na soustavu rovnic prvního řádu:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha}{m} v - g \,.$$

Nyní nahradíme derivace diferencemi

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \cong v_n \,,$$

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \cong -\frac{\alpha}{m} v_n - g \,,$$

a vypočteme nové hodnoty za pomoci starých:

$$y_{n+1} \cong y_n + v_n \Delta t \,,$$

$$v_{n+1} \cong v_n - \frac{\alpha}{m} v_n \Delta t - g \Delta t \,.$$

◗

**Zapamatujte si:**

- Pohybovou rovnici můžeme řešit numericky za pomoci diferenčního schématu.
- Numerické řešení je jen přibližné řešení a uvedené Newtonovo schéma je velmi jednoduché a výsledek bude zatížen numerickou chybou, kterou můžete zmenšit volbou menšího časového kroku.
- Pro skutečné řešení pohybových rovnic se používají složitější a účinnější schémata, základní princip je ale stejný.

# 5 ZÁKLADNÍ MECHANICKÉ VELIČINY

Prvními velmi důležitými pojmy jsou mechanická práce a potenciální energie. Pojďme si nyní tyto pojmy zavést, nejde o nic složitého.

## Mechanická práce

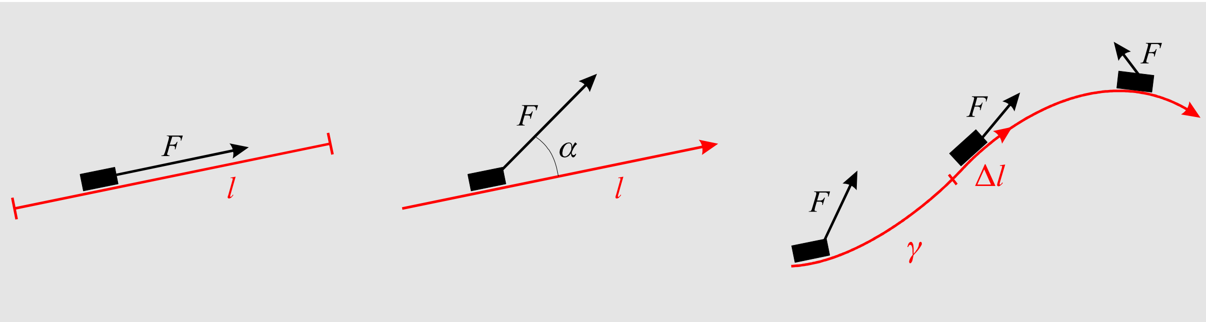
Na základní škole jste mechanickou práci chápali jako součin síly působící na těleso a uražené dráhy:

$$A = Fl\,; \qquad [A] = \mathrm{J} = \mathrm{N\,m} \tag{5.1}$$

Takto jednoduchý vztah platí, pokud je síla konstantní a míří ve směru pohybu tělesa. Mechanickou práci měříme v joulech, jde o součin newtonu a metru. Na střední škole jste již připustili, že síla nemusí mířit ve směru pohybu tělesa, výsledný vztah vypadal takto:

$$A = Fl\cos\alpha\,. \tag{5.2}$$

Síla je opět konstantní, ale směr jejích působení svírá se směrem pohybu úhel a. Pokud je úhel nulový, získáme předchozí vztah, pokud je 90°, tedy síla působí kolmo na dráhu, práce se nekoná.




Pokud budeme sílu a dráhu chápat jako vektory, je výraz (5.2) součinem velikosti jednoho vektoru, velikosti druhého vektoru a kosinem sevřeného úhlu, tedy nejde o nic jiného než o skalární součin:

$$A = \mathbf{F}\cdot\mathbf{l} = F_x l_x + F_y l_y + F_z l_z\,. \tag{5.3}$$

Uvažujme nyní nejobecnější příklad, kdy se těleso pohybuje po obecné křivce a síla mění jak svůj směr, tak svou velikost. Na malém úseku dráhy, který je možný považovat za rovný, se vykoná mechanická práce

$$\Delta A \doteq F\Delta l\cos\alpha = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{l} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z\,. \tag{5.4}$$

Takový vztah je samozřejmě jen přibližný. Přesný bude, pokud element zvolené dráhy bude infinitezimálně malý, tedy

$$\mathrm{d}A \doteq F\,\mathrm{d}l\cos\alpha = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z\,. \tag{5.5}$$

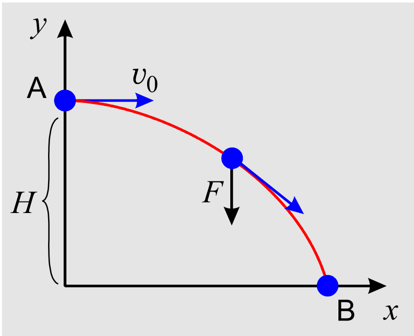
Celkovou vykonanou mechanickou práci získáme integrací podél celé křivky $\gamma$:

$$A = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_\gamma F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z\,. \tag{5.6}$$

Takový integrál se v matematice nazývá křivkový integrál druhého druhu. Nelekejte se, že obsahuje tři diferenciály. Výpočet není nijak složitý, pokud máte křivku zadánu parametricky. V mechanice může být parametrem například čas. Ukažme si výpočet na jednoduchém, příkladu vodorovného vrhu (postupně se na tomto příkladu učíme všechny nové věci, takže si pravděpodobně rovnice pro vodorovný vrh už pamatujete:

$$
\begin{aligned}
x &= v_0 t\,, \\
y &= H - \frac{1}{2} g t^2.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Tyto rovnice jsou parametrickým zadáním paraboly, po které se těleso pohybuje. Jde o naši křivku $\gamma$, na které budeme počítat mechanickou práci.




Povšimněte si, že úhel mezi působící silou (tíží) a směrem pohybu se místo od místa mění. Diferenciály křivky potřebné do integrace (5.6) snadno získáme ze vztahu (5.7):

$$
\mathbf{dl} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (v_0\,\mathrm{d}t,\, -gt\,\mathrm{d}t) \tag{5.8}
$$

Působící silou je tíže

$$
\mathbf{F} = (F_x, F_y) = (0, -mg) \tag{5.9}
$$

Nyní již snadno sestavíme potřebný integrál pro výpočet mechanické práce vykonané mezi body A a B:

$$
A = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \int_\gamma F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y = \int_{t_A}^{t_B} 0\cdot v_0\,\mathrm{d}t + (-mg)(-gt)\,\mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} mg^2 t\,\mathrm{d}t \tag{5.10}
$$

V obecnějším případě by byl nenulový i první sčítanec a integrál by mohl obsahovat i příspěvek v ose $z$. Povšimněte si, že z původních tří diferenciálů zůstane po dosazení křivky jeden jediný, a to diferenciál času. Integrál se tak stane běžným určitým integrálem. Integrace je nyní snadná ($t_\mathrm{A} = 0$)

$$
A = \left[ mg^2 t^2/2 \right]_0^{t_B} = mg^2 t_B^2/2 \tag{5.11}
$$

Čas dopadu snadno zjistíme z rovnice (5.7), dosadíme-li $y = 0$:

$$
t_B = \sqrt{\frac{2H}{g}} \tag{5.12}
$$

Pro vykonanou práci máme

$$
A = mg^2 t_B^2/2 = mgH\,. \tag{5.13}
$$

**Zapamatujte si:**

- Mechanická práce je integrálem $A = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_\gamma F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z$ .
- Integrál se počítá po křivce, po níž se pohybuje těleso. Křivku zadáme parametricky, vypočteme diferenciály d$x$, d$y$, d$z$, a tím převedeme integraci na standardní integrál s určitými mezemi.

## Potenciální energie a síla

Mechanická práce se zpravidla koná na úkor potenciální energie tělesa, kterou proto můžeme definovat takto

$$\mathrm{d}W_\mathrm{p} \equiv -\mathrm{d}A = -F_x \mathrm{d}x - F_y \mathrm{d}y - F_z \mathrm{d}z \tag{5.14}$$

Sama potenciální energie je funkcí polohy, a tak její diferenciál můžeme vyjádřit jako

$$\mathrm{d}W_\mathrm{p} \equiv \frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{5.15}$$

Porovnáním obou posledních výrazů získáme důležitý vztah mezi silou a potenciální energií:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial x}, \\ F_y &= -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial z}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Sílu získáme jako záporně vzaté parciální derivace potenciální energie. Tento zápis se často zkracuje, možností zápisu je několik:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial \mathbf{r}} = -\operatorname{grad} W_\mathrm{p} = -\nabla W_\mathrm{p} . \tag{5.17}$$

Všechny zápisy jsou jen zkratkou původních tří rovnic (5.16). Operace $\nabla$ se nazývá gradient, symbolu obráceného písmene delta říkáme „nabla“. Název zavedl skotský matematický fyzik Peter Guthrie Tait (1831–1901) podle trojúhelníkového tvaru asyrské harfy ze 7. století př. n. l. Asýrie byla v severní Mezopotámii. Slovo nabla (Nbl) je z aramejštiny, která ho upravila z hebrejského Nev(b)el. Stejný nástroj už ale znali Sumerové v období 3 100 př. n. l. James Clerk Maxwell razil pro tento operátor název „slope“ z anglického slova znamenajícího spád či sklon. Návrh Taita ale zvítězil.

Operace působí na skalární funkci a jejím výsledkem je vektor

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{5.18}$$

Takový vektor míří k maximu funkce $f$. Vztah (5.17) je tedy jen matematickým vyjádřením faktu, že síla vždy míří k minimu potenciální energie.

**Poznámky:**

- To, že síla míří do minima potenciální energie, nám umožní určit správné znaménko potenciální energie, pokud váháme. Například, je-li osa $y$ orientována svisle vzhůru, z možných znamének potenciální energie $\pm mgy$ musíme vybrat znaménko +, jinak by síla působila směrem vzhůru.
- V okolí minima potenciální energie můžeme očekávat kmitavý pohyb, neboť síla vždy míří do minima, těleso setrvačností minimum prolétne a začne na něho působit vratná síla. Pokud má minimum parabolický průběh, hovoříme o harmonických oscilacích.
- Potenciální energie nemusí k danému silovému poli vždy existovat. Jinými slovy nemusí se nám podařit nalézt takovou funkci, aby síla byla jejím záporně vzatým gradientem. Silové pole, pro které existuje potenciální energie, nazýváme konzervativní silové pole (patří sem například tíže, gravitace, elektrostatické pole). Naopak tření není konzervativní silou.
- Pro konzervativní pole je integrál ze síly po určité křivce roven

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_\gamma -\nabla W_\mathrm{p}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_\gamma \left(\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial x}\cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial y}\cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial z}\cdot \mathrm{d}z\right) = \\ = -\int_A^B \mathrm{d}W_\mathrm{p} = W_\mathrm{p}(A) - W_\mathrm{p}(B)\,.\end{aligned} \tag{5.19}$$

  a je tedy závislý jen na jejím koncovém a počátečním bodě. Integrál po uzavřené křivce je nulový.
- Vždy je výhodnější si pamatovat jednu veličinu (potenciální energii) než všechny tři složky síly. Z potenciální energie je snadno můžeme zrekonstruovat jako záporně vzatý gradient potenciální energie.

**Zapamatujte si:**

- Konzervativním silovým polem nazýváme takové pole, pro které existuje potenciální energie a sílu lze vyjádřit jako záporně vzatý gradient potenciální energie.
- Síla míří vždy do minima potenciální energie.
- V okolí minima potenciální energie vykonává soustava kmitavý pohyb.
- Mechanická práce v konzervativním poli závisí jen na koncovém a počátečním bodě, nikoli na tvaru křivky.

### ◖ Příklad 5.1

**Zadání:** Nalezněte sílu k potenciální tíhové potenciální energii dané předpisem $W_\mathrm{p} = mgy$.

**Řešení:** Síla je minus gradientem, tedy

$$\mathbf{F} = -\nabla W_\mathrm{p} = \left(-\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial x}, -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial y}, -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial z}\right) = (0, -mg, 0)\,. \tag{5.20}$$

◗

## Křivkové integrály

Představme si, že máme parametricky zadánu nějakou křivku $\gamma$:

$$\gamma: \quad \begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t) \\ z = z(t)\,. \end{cases} \tag{5.21}$$

Parametrem může být čas nebo nějaká jiná proměnná. Vektorovým elementem křivky nazveme její diferenciály

$$\mathbf{dl} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\,. \tag{5.22}$$

Skalárním elementem nazveme výraz

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathbf{dl}\cdot\mathbf{dl}} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.23}$$

Křivkovým integrálem prvního druhu potom nazveme integraci skalární funkce přes skalární element:

$$I_1 = \int_\gamma f\,\mathrm{d}l\,. \tag{5.24}$$

Tento typ integrálu můžeme využít k výpočtu hmotnosti drátu ($f$ je pak délkovou hustotou) nebo k výpočtu délky křivky ($f = 1$). Křivkovým integrálem druhého druhu nazveme integrál z vektorové funkce přes vektorový element:

$$I_2 = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl}\,. \tag{5.25}$$

Příkladem může být výpočet mechanické práce, který jsme se před chvílí naučili.

◖ **Příklad 5.2**

**Zadání:** Nalezněte obvod kružnice.

**Řešení:** Kružnici zadáme parametricky

$$x = R\cos\varphi\,, \qquad y = R\sin\varphi\,; \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi)\,.$$

Nyní nalezneme vektorový a skalární element:

$$\mathbf{dl} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (-R\sin\varphi,\, R\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,;$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{R^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = R\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Obvod kružnice spočteme jako křivkový integrál prvního druhu:

$$o = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi = R\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi R\,.$$

◗

**Zapamatujte si:**

- Pokud chceme počítat křivkové integrály, musíme mít křivku zadanou parametricky.
- Pro křivku najdeme vektorový element $\mathbf{dl} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ a skalární element $\mathrm{d}l = (\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)^{1/2}$.
- Integrál prvního druhu je integrál ze skalární funkce a skalárního elementu.
- Integrál druhého druhu je integrál ze skalárního součinu vektorové funkce a vektorového elementu.

# 6 KONZERVATIVNÍ POLE A ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

Asi nejznámějším konzervativním polem je gravitační silové pole. Ke gravitační síle existuje potenciální energie taková, že gravitační síla je minus gradientem této energie.

## Gravitační zákon

Dvě tělesa se vždy vzájemně přitahují silou, která je přímo úměrná součinu jejich gravitačních hmotností. Tento fakt plyne přímo z definice gravitační hmotnosti jakožto schopnosti těles se vzájemně přitahovat:

$$F \propto m_1 m_2 \,. \tag{6.1}$$

Gravitační síla je , jak objevil Isaac Newton v 17. století, nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti mezi tělesy, tedy

$$F \propto \frac{1}{r^2} \,. \tag{6.2}$$

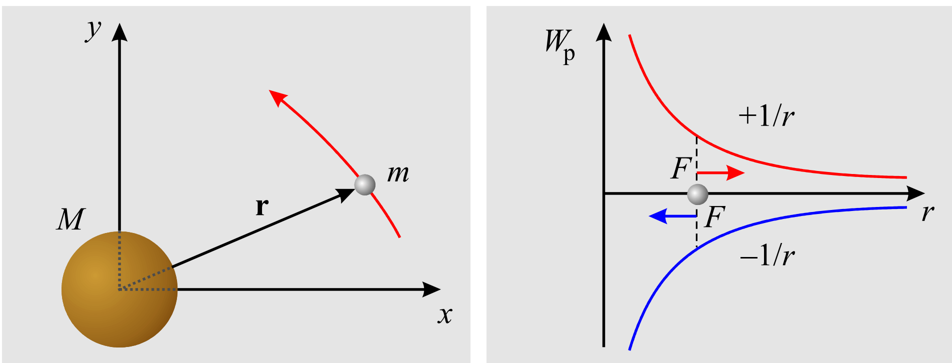
Oba dva vztahy můžeme sloučit do jednoho jediného zákona

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \,, \tag{6.3}$$

kde $G$ je koeficient úměrnosti, který nazýváme gravitační konstanta. Její první měření pochází od Henryho Cavendishe z roku 1798. Na vodorovném rameni zavěšeném na vlákně měl dvě olověné koule o hmotnostech přibližně 0,75 kg. K těm střídavě přibližoval velké olověné koule o hmotnosti 158 kilogramů a za pomoci zrcátka umístěného na svislém závěsu pozoroval zkroucení tohoto závěsu vlivem přitahování. Současná hodnota gravitační konstanty je

$$G = (6{,}6742 \pm 0{,}0010) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}}.$$

Gravitační konstanta je nejméně přesně změřenou fundamentální konstantou. Z komunistické éry přetrvalo v některých textech značení gravitační konstanty řeckým písmenem kapa ($\varkappa$). Často je uspořádání takové, že jedno z těles má výrazně větší hmotnost než ostatní (například sledujeme pohyb planet kolem Slunce nebo pohyb družic kolem Země). Hmotnější těleso pak umístíme do středu souřadnicové soustavy a předpokládáme, že menší těleso jeho pohyb ovlivní minimálně:




V silovém předpisu je nyní $r$ vzdálenost testovacího tělesa do počátku souřadnic. Vzhledem k tomu, že síla má být derivací potenciální energie, musí být potenciální energie úměrná $\pm 1/r$. Znaménko určíme tak, aby síla působila ve směru menších $r$, tj. bude platit modrá křivka

$$F = G \frac{mM}{r^2} \,; \qquad W_\mathrm{p} = -\,G \frac{mM}{r} \,. \tag{6.4}$$

Povšimněte si, že gravitační energie je záporná a se vzdalováním těles roste. To je na první pohled divné, očekávali bychom, že gravitační energie bude se vzdalováním slábnout. Pokud si ale povšimneme, že $W_\mathrm{p}$ sice roste, ale k nule, je vše v pořádku. V absolutní hodnotě skutečně gravitační potenciální energie slábne. Pokud budeme chtít opravdu řešit pohyb těles, nestačí nám jen znalost velikosti gravitační síly, ale musíme znát její jednotlivé složky. Vypočtěme z potenciální energie například $x$-ovou složku síly:

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-G\frac{mM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = GmM\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} =$$

$$= GmM(2x)(-1/2)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = -G\frac{mM}{r^3}x.$$

Analogicky určíme ostatní složky:

$$F_x = -G\frac{mM}{r^3}x\,,$$
$$F_y = -G\frac{mM}{r^3}y\,, \qquad (6.5)$$
$$F_z = -G\frac{mM}{r^3}z\,.$$

Pokud chceme sledovat pohyb tělesa o hmotnosti $m$, musíme řešit pohybové rovnice

$$m\ddot{x} = -G\frac{mM}{r^3}x\,,$$
$$m\ddot{y} = -G\frac{mM}{r^3}y\,, \qquad (6.6)$$
$$m\ddot{z} = -G\frac{mM}{r^3}z\,.$$

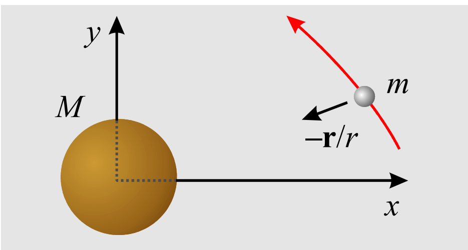
Nezapomeňme, že $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, soustava je tedy nelineární a nejvhodnější je numerické řešení. Povšimněte si, že hmotnost testovacího tělesa se na obou stranách pohybové rovnice vykrátí (pokud je jeho setrvačná hmotnost rovna gravitační) a výsledný pohyb nebude na hmotnosti tělesa záviset. Matka uvolněná z kosmické lodi se kolem Slunce bude pohybovat po stejné dráze jako celá planeta. Nalezněme velikost síly odpovídající složkám (6.5):

$$F = \sqrt{\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}} = \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2} = \sqrt{\frac{G^2m^2M^2}{r^6}\left(x^2+y^2+z^2\right)} = \sqrt{\frac{G^2m^2M^2}{r^4}} = G\frac{mM}{r^2}.$$

Velikost síly tedy vyjde tak, jak ji známe z gravitačního zákona. Vztah pro sílu (6.5) můžeme zapsat také ve tvaru

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (6.7)$$

Síla má velikost $GmM/r^2$ a míří ve směru jednotkového vektoru $-\mathbf{r}/r$, tedy směrem ke středu souřadnic.



**Zapamatujte si:**

- Gravitační síla je v poli centrálního tělesa dána předpisem

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}; \qquad F = G\frac{mM}{r^2}.$$

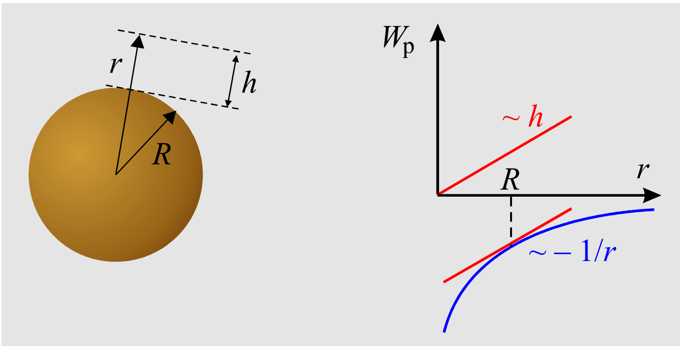
- Potenciální energie má tvar (je záporná a s rostoucí vzdáleností roste k nule)

$$W_\mathrm{p} = -G\frac{mM}{r}.$$

- Sílu můžete vždy získat jako záporně vzatý gradient potenciální energie.

## Tíže

Pokud probíhá pohyb v těsné blízkosti povrchu Země, nevyužijeme z gravitačního zákona celou křivku. Pohybujeme se maximálně několik kilometrů nad zemí nebo pod zemí. Pro takovéto pohyby postačí nahradit skutečnou závislost pouhou tečnou.




K tomu využijeme Lagrangeovu větu o přírůstku zapsanou pro potenciální energii:

$$\Delta W_\mathrm{p} \doteq W_\mathrm{p}'(R)\,h \qquad \Rightarrow$$

$$W_\mathrm{p}(R+h) \doteq W_0 + W_\mathrm{p}'(R)\,h = W_0 + G\frac{mM}{R^2}h. \tag{6.8}$$

Konstanta $W_0$ je nepodstatná, potenciální energii můžeme posunout o jakoukoli konstantu a síla působící na těleso se nezmění (je derivací potenciální energie). Rozdíl $r$–$R$ má význam výšky nad povrchem. Pro lineární závislost máme finální vztah

$$W_\mathrm{p} \doteq W_0 + mgh; \qquad g \equiv G\frac{M}{R^2}. \tag{6.9}$$

Jde o tíži, tíhové zrychlení na povrchu můžeme určit z hmotnosti a rozměru tělesa. Jiné nám vyjde na Zemi, jiné na Měsíci a jiné při povrchu Slunce.

**Zapamatujte si:**

- Tíže je lineární aproximací gravitace u povrchu tělesa.
- Tíže roste lineárně se vzdáleností. V nekonečnu by tíhová energie měla nekonečnou hodnotu, ale tam již tato aproximace neplatí.
- U rotujícího tělesa se do tíhového zrychlení zahrnují i odstředivé jevy.

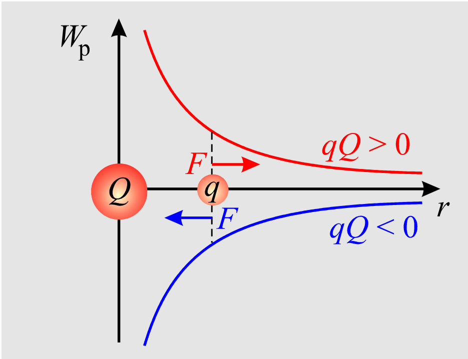
## Coulombův zákon

Vzájemné působení dvou nábojů je velmi podobné gravitaci. Síla je úměrná nábojům obou těles a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti. Potenciální energie je opět nepřímo úměrná vzdálenosti obou těles:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \qquad W_\mathrm{p} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{6.10}$$

Pro různé znaménko nábojů vyjde potenciální energie záporná, tedy přitažlivá, jako tomu bylo u gravitace. Pro shodná znaménka nábojů vyjde potenciální energie kladná a náboje se budou odpuzovat. Z historických důvodů je konstanta úměrnosti označena v soustavě SI jako $1/4\pi\varepsilon_0$, kde $\varepsilon_0$ se nazývá permitivita vakua

$$\varepsilon_0 = 8{,}854\times10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}} \tag{6.11}$$




Pokud je jeden náboj výrazně větší než druhý, můžeme ho opět umístit do počátku souřadnicové soustavy, $r$ potom bude mít význam vzdálenosti testovacího náboje $q$ od počátku souřadnic, kde je náboj $Q$. Vztah (6.10) přejde na

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \qquad \mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}; \qquad W_\mathrm{p} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{6.12}$$

Zkontrolujte si, že síla má pro dva souhlasné náboje správný směr (tedy od počátku souřadnicové soustavy).

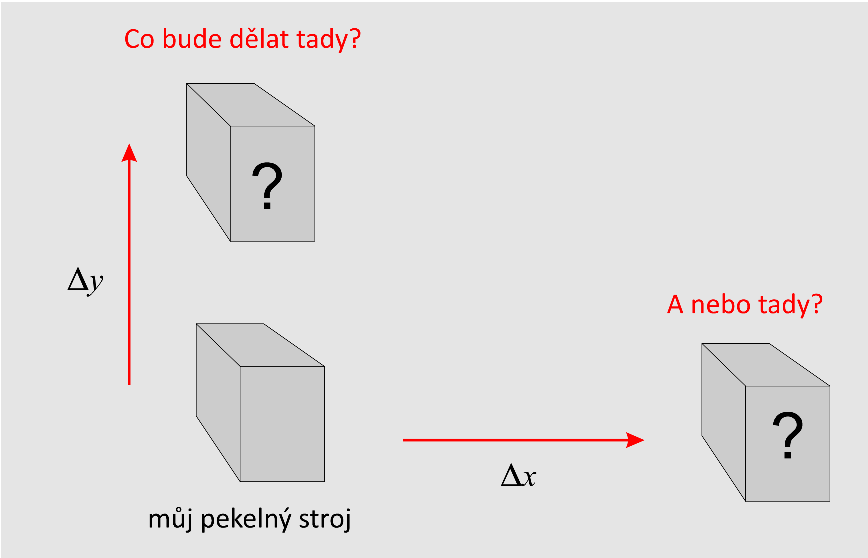
**Zapamatujte si:**

Coulombova síla je odpudivá pro shodné náboje a přitažlivá pro náboje opačných znamének. Tomu odpovídá vyjádření potenciální energie a síly pro centrální náboj:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \qquad \mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}; \qquad W_\mathrm{p} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

## Zákon zachování hybnosti

V roce 1915 přišla německo-americká matematička Emmy Noether (1882–1935) na zcela novou myšlenku. Matematicky dokázala, že každá zachovávající se veličina souvisí se symetriemi v přírodě. Zákon zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti jsou jen důsledky určitých symetrií. Jak si představit symetrii v přírodě? V matematice je to snadné. Pokud otočíme čtverec kolem kolmé osy o 90°, přejde sám v sebe. V přírodě nám jde o symetrie při konání experimentů. Představme si, že máme v nějaké skříňce sadu fyzikálních experimentů, které budou testovat různé situace. Budou tam kyvadélka zastupující gravitační interakci, lasery a zrcadla testující elektromagnetickou interakci, beta zářič testující slabou interakci a třeba miniaturní atomový reaktor testující jaderné síly. A s tímto přístrojem budeme konat naše experimenty. Symetrií nazveme takovou operaci, po které bude celá aparatura i nadále fungovat stejně. Například můžeme přístroj odsunout vodorovně o jeden metr a na jeho funkčnost by to nemělo mít vliv. Stejná symetrie ale neplatí vůči svislému posunutí. Přístroj se dostane výše, tedy do jiné gravitace a bude fungovat jinak.




Zkusme nejprve předpokládat, že při posunutí ve vodorovném směru $x$ bude přístroj nadále fungovat stejně jako předtím. Potenciální energie může být obecně funkcí času a polohy:

$$W_\mathrm{p} = W_\mathrm{p}(t, x, y, z)\,. \tag{6.13}$$

Pokud se přístroj po posunutí v ose $x$ má chovat stejně, nesmí se ve směru $x$ měnit potenciální energie, tedy $W_\mathrm{p}$ nebude záviset na proměnné $x$. Matematickým vyjádřením je

$$W_\mathrm{p} = W_\mathrm{p}(t, y, z) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial x} = 0\,. \tag{6.14}$$

Pohybová rovnice pro $x$-ovou složku bude mít nulovou pravou stranu:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{x} = 0 \qquad \Rightarrow$$
$$m\dot{x} = \mathrm{const}$$

Na počátku byla symetrie vzhledem k posunutí, na konci výpočtu je zachovávající se veličina. Nazýváme ji hybnost. Obdobnou úvahou můžeme zavést hybnost ve všech třech osách:

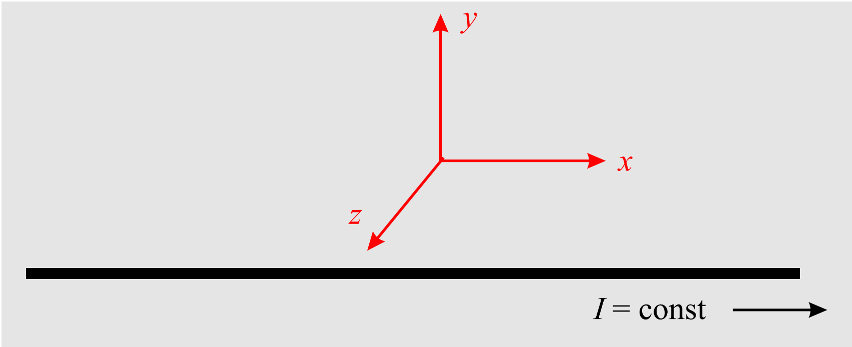
$$\begin{aligned} p_x &\equiv m v_x\,, \\ p_y &\equiv m v_y\,, \\ p_z &\equiv m v_z\,. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Jednotlivé složky se zachovávají jen, platí-li symetrie vzhledem k posunutí v daném směru. Už jsme se zmínili, že ve svislém směru symetrie vzhledem k posunutí neplatí. Neplatí proto ani zákon zachování svislé složky hybnosti. Pokud budete držet v ruce kámen, bude mít nulovou hybnost. Pak ho pusťte. Při dopadu na zem má zjevně hybnost nenulovou. Svislá složka hybnosti se nezachovává. Relaci (6.15) můžeme zapsat také vektorově:

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} \tag{6.16}$$

◖ **Příklad 6.1**

**Zadání:** Elektrickým vodičem protéká konstantní elektrický proud a souřadnicová soustava je definována dle obrázku. V okolí vodiče se nachází elektron. Rozhodněte, které složky jeho hybnosti se zachovávají a které nikoli.




**Řešení:** Naším „přístrojem" je elektron, který se nachází v magnetickém poli vodiče. Pokud elektron přesuneme ve směru osy $x$, nezmění se jeho vzdálenost od vodiče a nezmění se ani magnetické pole (pokud je vodič nekonečný). Pro elektron bude situace stejná, ať se pohne ve směru osy $x$ jakkoli. Proto se zachovává složka hybnosti $p_x$. Složky $p_y$ a $p_z$ se nezachovávají, neboť se elektron při pohybu ve směru osy $y$ nebo $z$ dostává do různé vzdálenosti od vodiče a tedy do různě silného magnetického pole.

◗

Pokud není hmotnost konstantní, je otázkou, kde se v pohybové rovnici má nacházet:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\,; \qquad \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\,. \tag{6.17}$$

Pro konstantní hmotnost jsou obě vyjádření ekvivalentní. Pokud se hmotnost mění (například jde o kropící vůz nebo raketu, která spotřebovává palivo), je správně (v souladu s přírodou) vyjádření druhé. Pro proměnnou hmotnost má pohybová rovnice tvar

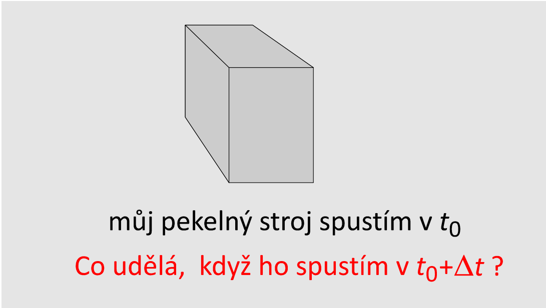
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\,. \tag{6.18}$$

**Zapamatujte si:**

- Hybnost souvisí se symetrií vzhledem k prostorovému posunutí. Hybnost je za pomoci této symetrie definována jako $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Daná složka hybnosti se zachovává jen tehdy, pokud platí symetrie vzhledem k posunutí v tomto směru.
- Jednoduchým vztahem $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ je hybnost definována v klasické mechanice konzervativních polí. Ve složitějších situacích není hybnost definována takto jednoduše.
- Pokud není hmotnost tělesa konstantní, je na levé straně pohybové rovnice časová změna hybnosti tělesa, tj. platí $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}$.

## Zákon zachování energie

Předpokládejme nyní, že náš „pekelný stroj“ nebudeme nikam posouvat, necháme ho na místě, ale zapneme ho nejprve v čase $t_0$ a poté o něco později, například v čase $t_0+\Delta t$. Otázka je stejná. Bude přístroj fungovat stejně nebo nikoli? Omezme se v našem odvození pro jednoduchost na jednu jedinou prostorovou dimenzi, tj. $W_\mathrm{p} = W_\mathrm{p}(t, x)$.




Pohybová rovnice pro sledované mechanické děje bude

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial W_\mathrm{p}}{\partial x}. \tag{6.19}$$

Pokud platí výchozí symetrie, tj. experiment spuštěný o něco později dopadne stejně, nemůže potenciální energie záviset na čase explicitně, tj. v našem případě bude funkcí jediné proměnné $x$ a parciální derivace se změní v úplnou:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}W_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}. \tag{6.20}$$

Přesuňme nyní diferenciál d$x$ z pravé strany rovnosti na levou (zacházíme s ním jako s malým přírůstkem):

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = -\mathrm{d}W_\mathrm{p}\,. \tag{6.21}$$

Na levé straně si povšimněme diferenciálu d$x$ v čitateli a d$t$ ve jmenovateli. Spolu dají rychlost, tj. budeme mít

$$m\,v\,\mathrm{d}v = -\mathrm{d}W_\mathrm{p}\,. \tag{6.22}$$

Obě strany snadno integrujeme:

$$\frac{mv^2}{2} = -W_\mathrm{p} + \mathrm{const}. \tag{6.23}$$

Po převedení potenciální energie na levou stranu dostáváme zákon zachování energie

$$\frac{mv^2}{2} + W_\mathrm{p} = \mathrm{const}. \tag{6.24}$$

Situace se opakuje, předpokládali jsme existenci nějaké symetrie (v tomto případě symetrie vzhledem k časovému posunutí) a získali jsme zákon zachování, tentokrát energie. Energie je touto symetrií definována. Má kinetickou (½ $mv^2$) a potenciální ($W_\mathrm{p}$) část. Zákon zachování energie platí, pokud platí symetrie vzhledem k posunutí v čase.

◖ **Příklad 6.2:** Zachovává se energie kyvadla zavěšeného na závěsu?

**Řešení:** Spustíme-li kyvadlo nyní, bude se nějak pohybovat. Pokud experiment zopakujeme po pěti minutách, dopadne stejně. Situace je symetrická vzhledem k posunutí v čase, a proto se energie kyvadla zachovává.

◗

◖ **Příklad 6.3:** Zachovává se energie balíku zavěšeného na jeřábu, který pomalu navíjí lano?

**Řešení:** Rozkýveme-li balík nyní, bude se nějak pohybovat. Pokud experiment zopakujeme po pěti minutách, bude mít lano jinou délku a balík se bude kývat jinak. Situace není symetrická vzhledem k posunutí v čase, a proto se energie balíku nezachovává. Příčina je zjevná, je zde přítomen motor, který způsobuje narušení zákona zachování energie balíku.

◗

◖ **Příklad 6.4:** Zachovává se energie elektronu v okolí vodiče protékaného konstantním elektrickým proudem?

**Řešení:** Nastřelíme-li elektron do magnetického pole vodiče nyní, bude se pohybovat určitým způsobem. Učiníme-li experiment o něco později, dopadne stejně, neboť se magnetické pole nezmění. Energie elektronu se bude zachovávat.

◗

◖ **Příklad 6.5:** Zachovává se energie elektronu v okolí vodiče protékaného proměnným elektrickým proudem?

**Řešení:** Nastřelíme-li elektron do magnetického pole vodiče nyní, bude se pohybovat určitým způsobem. Učiníme-li experiment o něco později, dopadne jinak, neboť se magnetické pole změnilo. Situace není symetrická vzhledem k posunutí v čase a energie elektronu se nebude zachovávat.

◗

◖ **Příklad 6.6:** Zachovává se celková energie ve vesmíru?

**Řešení:** Vesmír expanduje zrychlenou expanzí a situace zjevně není symetrická vůči posunutí v čase. Celková energie ve vesmíru se proto nezachovává.

◗

**Zapamatujte si:**

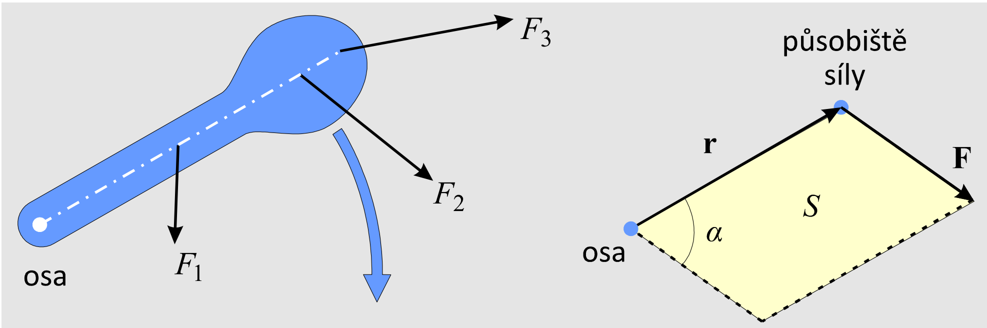
- Energie je v jednoduchých mechanických systémech součtem kinetické a potenciální energie.
- Ve třech dimenzích je kinetická energie dána vztahem $W_k = ½\, m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)$.
- Energie se zachovává jen tehdy, platí-li symetrie vzhledem k posunutí v čase.

# 7 ROTAČNÍ POHYBY

V této části se budeme zabývat jednoduchými rotačními pohyby a jejich popisem. Nejprve se seznámíme s pojmem momentu vektoru.

## Moment síly a moment hybnosti

Představte si, že chcete pootočit se starou zarezlou pákou. Jak to udělat, abyste se co nejméně nadřeli? Síla $F_1$: nic moc, blízko osy otáčení, malá a ve špatném směru. Síla $F_2$: jakž takž, kdyby mířila kolmo, bylo by to lepší. Síla $F_3$: úplně nanic, má špatný směr.




Vaše úsilí bude záviset na třech faktorech: 1) na velikost síly, kterou budete za páku tahat; 2) na vzdálenosti od osy, ve které budete silou působit (čím dále, tím lépe); 3) na směru, ve kterém budete za páku tahat (nejlépe kolmo na ni, nejhůře podél páky, to ji neotočíte nikdy). Ze všech těchto faktorů můžeme sestavit jednoduchou veličinu, která charakterizuje všechny tři faktory současně

$$M_F = rF\sin\alpha\,, \tag{7.1}$$

ve které je $r$ vzdálenost mezi osou otáčení a působištěm síly, $F$ je velikost působící síly a $\alpha$ je úhel mezi silou a spojnicí osy a působiště. Je-li úhel $\alpha$ nulový, pákou neotočíte. Je-li 90°, bude Vaše snaha nejúčinnější. Nově zavedená veličina je velikostí vektorového součinu

$$\mathbf{M}_F \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{F}\,, \tag{7.2}$$

který nazýváme *moment síly*. Moment síly míří kolmo na oba dva vektory a jeho velikost je rovná ploše vyznačené vpravo na obrázku. Čím větší je tato plocha, tím snadněji pákou otočíme. Obdobným vztahem můžeme zavést moment pro jakýkoli vektor **A**:

$$\mathbf{M}_A \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{A}\,, \tag{7.3}$$

Vektor **r** míří buď od osy otáčení, nebo z počátku souřadnic do působiště vektoru **A**. Velmi užitečný bude *moment hybnosti* definovaný vztahem

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{r}\times m\mathbf{v}\,. \tag{7.4}$$

Jak uvidíme za chvíli, moment hybnosti se bude v centrálních polích zachovávat.

**Zapamatujte si:**

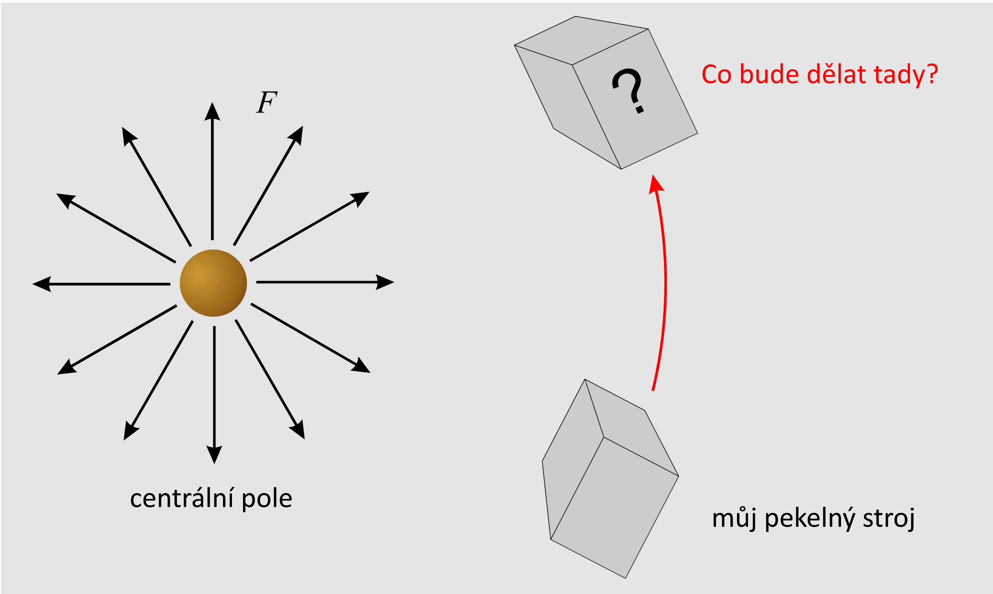
- Momentem vektoru nazýváme vektorový součin $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}\times\mathbf{A}$.
- Pro rotační pohyby jsou důležité momenty síly $\mathbf{M}_F = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ a hybnosti $\mathbf{b} = \mathbf{r}\times m\mathbf{v}$.
- Moment vektoru závisí na volbě počátku souřadnic. Zpravidla ho klademe do osy, kolem které se těleso otáčí.

## Zákon zachování momentu hybnosti aneb zákon ploch

Přepokládejme, že v prostoru působí *centrální silové pole*. Tak nazýváme síly, které míří symetricky z jediného (nebo do jediného) místa, do něhož umístíme počátek souřadnic. Příkladem může být prostor kolem Slunce nebo kolem kulově symetrického kladného či záporného náboje. Potenciální energie závisí jen na vzdálenosti od centra, tj.

$$W_\mathrm{P} \equiv W_\mathrm{P}(r)\,. \qquad (7.5)$$

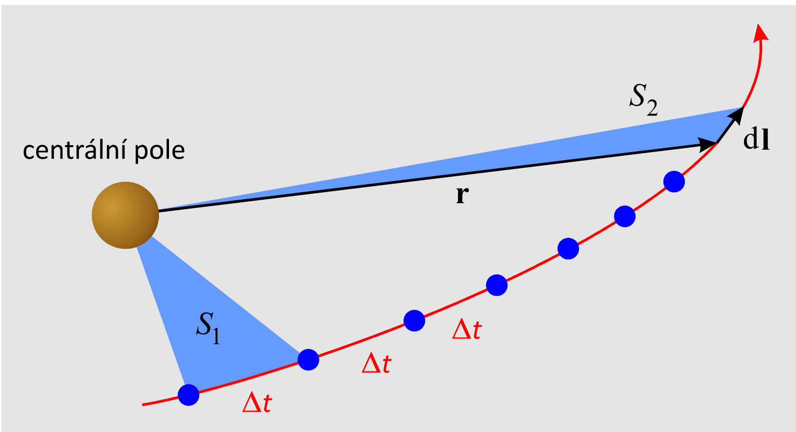
Opět jde o jistou symetrii v přírodě, které bude odpovídat nějaký zákon zachování. Jak si tuto symetrii představit? Náš „pekelný stroj“ můžeme otočit kolem centra v libovolné rovině a stroj se bude chovat i nadále stejně:




Pojďme nyní ukázat, že za předpokladu centrální symetrie se zachovává moment hybnosti. Najděme jeho časovou změnu (moment hybnosti derivujeme jako součin):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) = \mathbf{v}\times m\mathbf{v} + \mathbf{r}\times m\,\mathbf{a} = m\,\mathbf{v}\times\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0\,. \qquad (7.6)$$

První člen je nulový, protože jde o vektorový součin dvou stejných vektorů, druhý vektorový součin je nulový, protože v centrálním poli je síla rovnoběžná s polohovým vektorem (střed souřadnic je v centru). Se symetrií centrálního pole tedy souvisí zákon zachování momentu hybnosti. Ukažme si nyní, že tento zákon zachování není nic jiného než tzv. zákon ploch: *průvodič pohybujícího se tělesa opíše za stejnou časovou jednotku vždy stejnou plochu.*

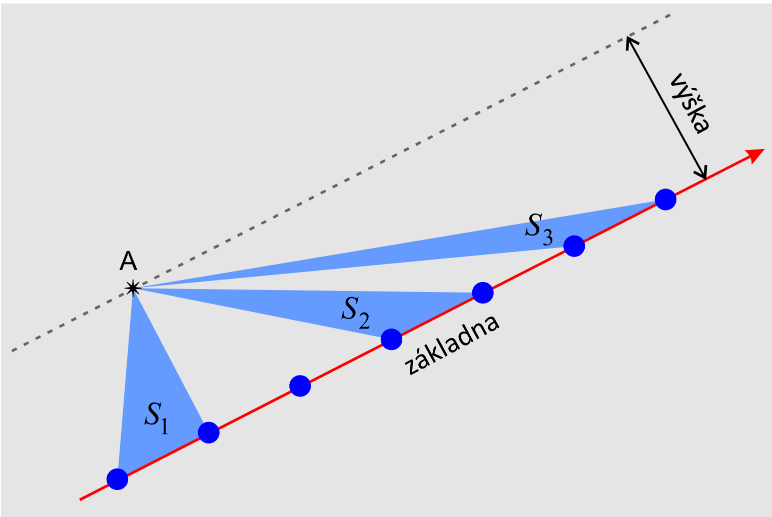


Spočtěme plošnou rychlost pohybujícího se tělesa, tedy změnu plochy za určitý čas. Plochu vyjádříme za pomoci vektorového součinu. Můžeme ji ponechat jako vektor, jehož velikost je rovna velikosti plochy a směr je kolmý na plochu (plochu charakterizujeme normálou). Už víme, že vektorový součin dvou vektorů má velikost rovnou ploše rovnoběžníku nataženého na tyto vektory. Plocha vyznačená na obrázku bude polovinou tohoto rovnoběžníku:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{1}{2}\,\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v} = \frac{1}{2m}\mathbf{r}\times m\,\mathbf{v} = \frac{1}{2m}\mathbf{b}\,. \tag{7.7}$$

Plošná rychlost je tedy úměrná velikosti momentu hybnosti! Pokud platí zákon zachování momentu hybnosti, plošná rychlost se nemění, tedy plocha opsaná průvodičem za jednotku času je stále stejná. Ve Sluneční soustavě se tomuto zákonu říká druhý Keplerův zákon neboli zákon ploch. Z něho plyne, že se planeta v přísluní (blízko u Slunce) pohybuje rychleji než v odsluní (daleko od Slunce).

Pokud není v systému přítomná žádná síla, tělesa se pohybují rovnoměrně přímočaře. Zákon zachování momentu hybnosti, resp. zákon ploch potom platí vzhledem ke kterémukoli bodu prostoru, neboť je situace symetrická vzhledem k otočení přístroje kolem jakéhokoli bodu. Na obrázku dole se těleso pohybuje po červené trajektorii. Bod A byl zvolen zcela náhodně. Všechny modré trojúhelníky zaujímají stejné plochy, neboť mají stejné základny (leží na trajektorii tělesa) a stejné výšky. Zákon ploch (a tedy i zákon zachování momentu hybnosti) opět platí, a to vzhledem k jakémukoli počátku.



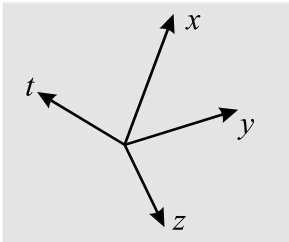

Co když není pole zcela symetrické a náš „pekelný stroj“ půjde beze změny situace otočit jen v jedné jediné rovině? Taková situace nastane například u vodiče protékaného konstantním elektrickým proudem. Situace je symetrická vzhledem k otočení kolem vodiče, tedy v rovině na něho kolmé, jinak nikoli. Jen v této rovině je pole centrální. Pohybujeme-li se v této rovině, míří $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ kolmo na tuto rovinu (ve směru vodiče), proto se bude zachovávat jen složka momentu hybnosti ve směru vodiče, tedy kolmá na rovinu symetrie.

**Zapamatujte si:**

- V centrálním poli se moment hybnosti vzhledem k počátku zachovává.
- Ze zákona zachování momentu hybnosti plyne zákon ploch: průvodič tělesa opíše za stejné časové úseky stejné plochy.
- Je-li situace symetrická vzhledem k otočení systému v určité rovině, zachová se složka momentu hybnosti, která je kolmá na tuto rovinu (míří ve směru osy otáčení).

## Poincarého skupina symetrií

Objevili jsme už některé symetrie a s nimi souvisící zákony zachování. Představme si čtyřrozměrný svět, který popíšeme jednou časovou osou a třemi prostorovými osami. Takový náš svět skutečně je, k popisu události musíme říci, kdy a kde událost nastala, potřebujeme k tomu tedy čtyři údaje. V čtyřrozměrném světě můžeme provést 4 translace (posuny) podél os. Tyto symetrie jsme už zkoumali a víme, že pokud platí symetrie vzhledem k časovému posunutí, zachovává se energie, pokud platí symetrie vzhledem k posunutím ve směru prostorových os, zachovávají se jednotlivé složky hybnosti. Ke čtyřem translacím tedy máme čtyři zákony zachování.




Nyní jsme přidali ještě rotace. Pokud je situace symetrická vzhledem k otočení v rovině $(x, y)$, zachová se složka momentu hybnosti $b_z$, pokud v rovině $(y, z)$, zachová se složka $b_x$ a pokud v rovině $(z, x)$, zachová se složka $b_y$. Jenže ve čtyřrozměrném světě existuje šest nezávislých rotací. Ještě bychom se mohli pootočit v rovinách $(t, x)$, $(t, y)$ a $(t, z)$. Tyto symetrie budete zkoumat ve fyzice II, jde o tzv. Lorentzovu symetrii a jejím důsledkem je existence a zachování spinu (vlastnosti částic velmi podobné momentu hybnosti). Existuje tedy deset základních symetrií a deset základních zákonů zachování. Zatím jsme probrali sedm z nich. Dohromady se této skupině symetrií říká Poincarého skupina symetrií podle významného francouzského matematika a teoretického fyzika Henriho Poincarého (1854–1912).

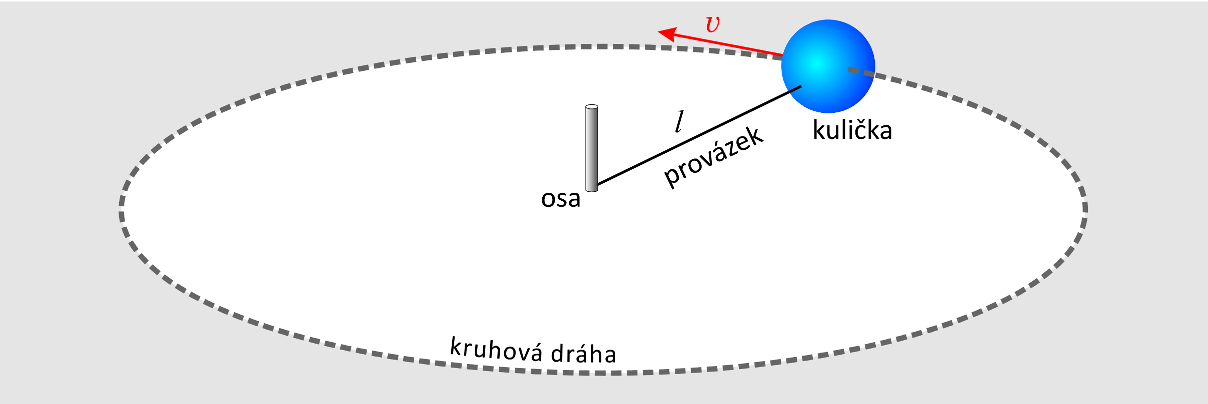
**Zapamatujte si základní symetrie a zákony zachování:**

| symetrie | zákon zachování | skupina symetrií |
|---|---|---|
| posunutí v čase o $\Delta t$ | energie $E$ | translace |
| posunutí v prostoru o $\Delta x$ | hybnost $p_x$ | |
| posunutí v prostoru o $\Delta y$ | hybnost $p_y$ | |
| posunutí v prostoru o $\Delta z$ | hybnost $p_z$ | |
| rotace v rovině $(x,y)$ o $\Delta\varphi_{xy}$ | moment hybnosti $b_z$ | prostorové rotace |
| rotace v rovině $(y,z)$ o $\Delta\varphi_{yz}$ | moment hybnosti $b_x$ | |
| rotace v rovině $(z,x)$ o $\Delta\varphi_{zx}$ | moment hybnosti $b_y$ | |
| rotace v rovině $(t,x)$ o $\Delta\varphi_{tx}$ | spin $s_x$ | časoprostorové rotace (Lorentzova symetrie) |
| rotace v rovině $(t,y)$ o $\Delta\varphi_{ty}$ | spin $s_y$ | |
| rotace v rovině $(t,z)$ o $\Delta\varphi_{tz}$ | spin $s_z$ | |

Poslední skupinu budeme probírat později.

## Kulička na provázku

Věnujme se nyní nejjednoduššímu rotačnímu pohybu. Představme si kuličku otáčející se kolem pevné osy na nehmotném závěsu délky $l$.




Určeme nejprve velikost momentu hybnosti a kinetickou energii kuličky. Výpočet je jednoduchý, protože rychlost pohybu je kolmá na průvodič:

$$b = \left| \mathbf{r} \times m\,\mathbf{v} \right| = lmv = lml\omega = ml^2\omega\,;$$
$$W_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2\,. \tag{7.8}$$

V obou výrazech se objevila stejná kombinace $ml^2$, která charakterizuje vlastnosti rotujícího sytému. Této veličině budeme říkat *moment setrvačnosti vzhledem k ose* a označovat ho budeme $J$:

$$J \equiv ml^2\,; \qquad [J] = \mathrm{kg\,m^2}. \tag{7.9}$$

S pomocí momentu setrvačnosti můžeme velikost momentu hybnosti a kinetickou energii kuličky na provázku napsat jako

$$b = J\,\omega\,;$$
$$W_\mathrm{k} = \frac{1}{2} J\omega^2\,. \tag{7.10}$$

Prohlédněte si dobře oba výrazy a porovnejte je s hybností a energií translačního pohybu. Výrazy jsou shodné, pokud nahradíme normální rychlost úhlovou rychlostí a hmotnost momentem setrvačnosti! Moment setrvačnosti má pro rotace stejný význam jako setrvačná hmotnost pro translace, je mírou schopnosti tělesa setrvávat v daném rotačním stavu. Čím je moment setrvačnosti větší, tím hůře se nám bude těleso roztáčet, a pokud už se točí, tím hůře se nám bude brzdit jeho pohyb.

**Zapamatujte si:**

- Moment setrvačnosti vzhledem k ose je mírou schopnosti tělesa setrvávat v daném rotačním stavu. Pro kuličku na provázku je roven $J = ml^2$.
- Moment hybnosti je pro kuličku na provázku $b = J\omega$.
- Kinetická energie kuličky rotující na provázku je $W_\mathrm{k} = J\omega^2/2$.

## Paralely mezi translačními a rotačními pohyby

U translačních pohybů stála na levé straně pohybové rovnice časová změna hybnosti. Nyní se pokusíme odvodit obdobnou pohybovou rovnici pro rotační pohyby. Za tím účelem nalezneme časovou změnu momentu hybnosti

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})=\mathbf{v}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times m\mathbf{a}=m\,\mathbf{v}\times\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{M}_F\ .$$

Postup je stejný jako u odvození zákona zachování momentu hybnosti u centrálního pole. První člen je zjevně nulový (vektorový součin dvou vektorů). Druhý člen dá v centrálním poli nulu (zákon zachování momentu hybnosti), v obecném poli jde o moment síly:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{M}_F\ . \tag{7.11}$$

Pokud zapíšeme tuto rovnici jen ve velikostech, dostaneme jednoduchou pohybovou rovnici pro otáčení v jediném úhlu

$$J\ddot{\varphi}=M_F \tag{7.12}$$

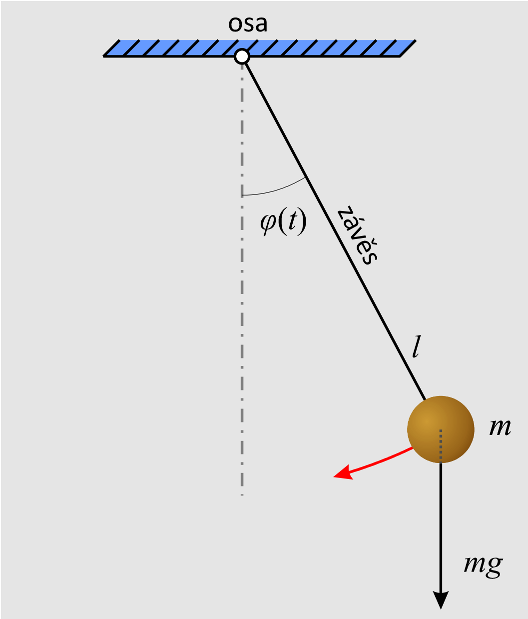
Mezi vztahy u rotačních a translačních pohybů je řada analogií. Na některé z nich jsme již přišli. Prohlédněte si pečlivě následující tabulku.

| translace | | rotace | |
|---|---|---|---|
| poloha | $x(t)$ | úhel | $\varphi(t)$ |
| rychlost | $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dot{x}$ | úhlová rychlost | $\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}$ |
| zrychlení | $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\ddot{x}$ | úhlové zrychlení | $\varepsilon=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\ddot{\varphi}$ |
| hmotnost | $m$ | moment setrvačnosti | $J$ |
| síla | $F$ | moment síly | $M_F$ |
| hybnost | $p = mv$ | moment hybnosti | $b = J\omega$ |
| kinetická energie | $W_\mathrm{k}=\frac{1}{2}mv^2$ | kinetická energie | $W_\mathrm{k}=\frac{1}{2}J\omega^2$ |
| pohybová rovnice | $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}$ | pohybová rovnice | $\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{M}_F$ |
| pohybová rovnice 1D | $m\ddot{x}=F$ | pohybová rovnice 1D | $J\ddot{\varphi}=M_F$ |

# 8 JEDNODUCHÉ PŘÍKLADY

V této části si spočteme některé jednoduché příklady na rotační pohyby a seznámíme se s několika užitečnými triky.

## Kyvadlo na nehmotném závěsu




◖ **Příklad 8.1:** Řešte pomocí diferenčního schématu pohyb kyvadla s obecnými počátečními podmínkami. Zanedbejte hmotnost závěsu, těleso na konci považujeme za malou kuličku.

**Řešení**:Vyjděme z pohybové rovnice rotujícího tělesa:

$$J\ddot{\varphi} = M_F \tag{8.1}$$

Za moment setrvačnosti dosadíme ze vztahu (7.9) a za moment síly ze vztahu (7.1)

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mg\,l\sin\varphi\,. \tag{8.2}$$

Znaménko minus na pravé straně vyjadřuje, že moment síly je vratnou silou, tedy při vzdalování z rovnovážné polohy působí proti pohybu. Rovnici můžeme upravit do standardního tvaru s klesajícím stupněm derivací a s koeficientem 1 u nejvyšší derivace:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0\,. \tag{8.3}$$

Povšimněte si, že hmotnost zmizela – už dříve jsme se zmínili o tom, že jde o důležitou vlastnost gravitačního (tíhového) pole. Odvozená rovnice pro kyvadlo je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu, která je nelineární, a proto velmi obtížně řešitelná. Pro malé rozkmity (přibližně do 5°) lze funkci sinus nahradit argumentem ($\sin x \approx x$) a rovnice přejde v jednoduchou lineární rovnici

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi \approx 0\,, \tag{8.4}$$

kterou se naučíme řešit později. Této aproximaci říkáme *matematické kyvadlo*, uvidíme, že vede na harmonické oscilace. Nyní řešme numericky původní nelineární rovnici (8.3) pro libovolné rozkmity. Nejprve rovnici převedeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu:

$$\dot{\varphi} = \omega\,,$$
$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\varphi\,. \tag{8.5}$$

Derivace nahradíme konečnými diferencemi

$$\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t} = \omega_n\,,$$
$$\frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} = -\frac{g}{l}\sin\varphi_n \tag{8.6}$$

a vypočteme nové hodnoty pomocí starých:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_n\,\Delta t\,,$$
$$\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{g}{l}(\sin\varphi_n)\,\Delta t\,. \tag{8.7}$$

Z odvozeného diferenčního schématu vypočítáme z hodnoty úhlu a úhlové rychlosti v čase $t_n$ nové hodnoty v čase $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. ◗

**Trik první**

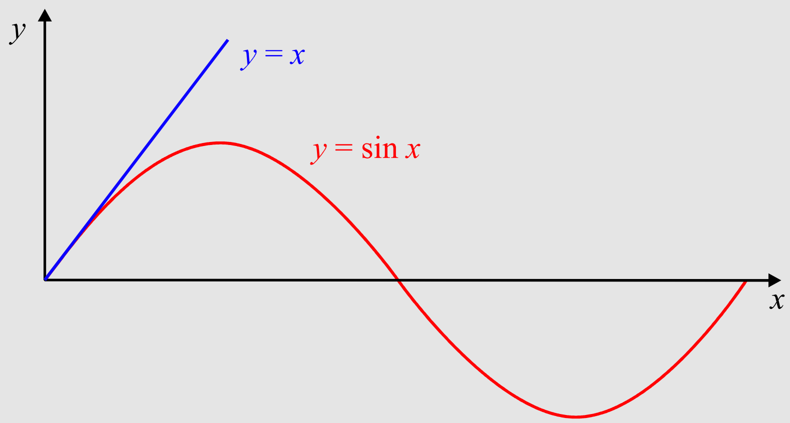
Složité nelineární výrazy můžeme často nahradit s malou ztrátou přesnosti lineárními výrazy. Pro malé argumenty funkcí ($x \ll 1$) lze psát

| | | |
|---|---|---|
| $\sin x \approx x$ , | $\cos x \approx 1$ , | $e^x \approx 1 + x$ , |
| $\sinh x \approx x$ , | $\cosh x \approx 1$ , | $\ln(1+x) \approx x$ , |
| $(1+x)^p \approx 1+px$ , | $(1+x)^2 \approx 1+2x$ , | $(1+x)^3 \approx 1+3x$ , |
| $(1+x)^{1/2} \approx 1+x/2$ , | $1/(1-x) \approx 1+x$ , | $1/(1+x) \approx 1-x$ . |

Posledních pět výrazů je jen aplikací formulky $(1+x)^p \approx 1+px$. Zkuste si nakreslit grafy několika prvních funkcí. Jejich lineární náhražky jsou rovnice tečen v počátku souřadnic. Určeme například sin 3°. Argument musíme převést na radiány:

$$\sin 3° \approx 3° \approx \frac{3°}{360°}2\pi \approx 0{,}0523598...$$

Přesná hodnota sin 3° = 0,052335956... a liší se od aproximace až ve čtvrté platné číslici.



## Ždímačka

◖ **Příklad 8.2:** Ždímačka rotuje s frekvencí $f$ = 1 500 ot/min. Poloměr bubnu je $R$= 30 cm. Při otevření se motor vypne a ždímačka se působením brzdy zastaví za 4 s. Po kolika otáčkách se zastaví buben? Jaký je průběh dostředivého zrychlení kapesníku na obvodu bubnu?

**Řešení:** Nejprve si zapišme počáteční podmínky úlohy, tj. počáteční úhlovou frekvenci (je dána otáčkami ždímačky) a úhel otočení v čase $t = 0$:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\,; \qquad f = \frac{1\,500}{1\ \mathrm{min}} = \frac{1\,500}{60\ \mathrm{s}} = 25\ \mathrm{Hz}\,; \qquad \varphi_0 = 0\,. \tag{8.8}$$

Nyní sestavíme pohybovou rovnici

$$J\ddot{\varphi} = M_F \tag{8.9}$$

Moment síly na pravé straně bude dán brzdným momentem $M$, bude působit proti pohybu, proto napíšeme $M_F = -M$ a provedeme první integraci (rovnice je lineární s konstantní pravou stranou)

$$J\ddot{\varphi} = -M \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{M}{J} \quad \Rightarrow$$

$$\omega(t) = -\frac{M}{J}t + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(t) = -\frac{M}{2J}t^2 + c_1 t + c_2\,.$$

Integrační konstanty určíme z počátečních podmínek $\omega(0)= \omega_0$, $\varphi(0) = 0$:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M}{J}t\,; \qquad \varphi(t) = \omega_0 t - \frac{M}{2J}t^2\,. \tag{8.10}$$

Zajímá nás situace na konci pohybu, tj. v koncovém čase $t_\mathrm{k} = 4$ s, kdy bude úhlová frekvence již nulová a úhel bude roven koncovému úhlu $\varphi_\mathrm{k}$:

$$0 = \omega_0 - \frac{M}{J}t_\mathrm{k}\,; \qquad \varphi_\mathrm{k} = \omega_0 t_\mathrm{k} - \frac{1}{2}\frac{M}{J}t_\mathrm{k}^2\,. \tag{8.11}$$

Z první rovnice můžeme spočítat neznámý podíl $M/J$ a poté z druhé koncový úhel $\varphi_\mathrm{k}$:

$$\frac{M}{J} = \frac{\omega_0}{t_\mathrm{k}}\,;$$

$$\varphi_\mathrm{k} = \omega_0 t_\mathrm{k} - \frac{1}{2}\frac{M}{J}t_\mathrm{k}^2 = \omega_0 t_\mathrm{k} - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{t_\mathrm{k}}t_\mathrm{k}^2 = \frac{1}{2}\omega_0 t_\mathrm{k}\,.$$

Hledaný počet otáček a průběh dostředivého zrychlení jsou:

$$N = \varphi_k / 2\pi = \frac{1}{2} \frac{\omega_0 t_k}{2\pi} = \frac{1}{2} f t_k = 50 \, .$$

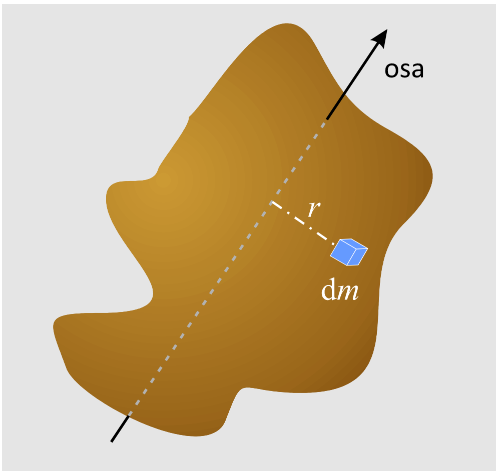
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 = R\left(\omega_0 - \frac{M}{J}t\right)^2 = R\left(\omega_0 - \frac{\omega_0}{t_k}t\right)^2 = R\omega_0^2\left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^2 .$$

Buben ždímačky vykoná ještě 50 otáček. Dostředivé zrychlení bude postupně slábnout z hodnoty $R\omega_0^2$ na nulu, které dosáhne v koncovém čase $t_k$.

◗

## Moment setrvačnosti obecného tělesa

Moment setrvačnosti vzhledem k ose jsme zatím zavedli jen pro kuličku na provázku. Uvažujme nyní rotaci obecného tělesa kolem osy. Představme si, že toto těleso složíme z malých elementů o hmotnosti d$m$ (objemu d$V$) a vzdálenosti od osy otáčení $r$, které přispějí k celkovému momentu setrvačnosti hodnotou d$J = r^2$d$m$.

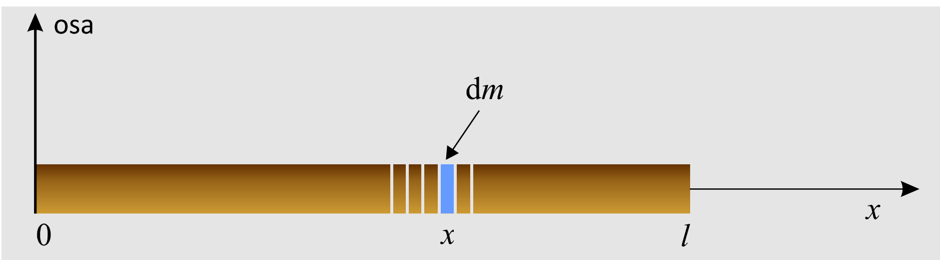



Celkový moment setrvačnosti bude součtem (integrálem) všech příspěvků:

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m \, . \tag{8.12}$$

Jak zvolíme hmotné elementy v praxi? Nejjednodušší je těleso rozřezat na kousky, jejichž všechny body budou všechny stejně vzdálené od osy otáčení. Poté hmotnost těchto elementů vyjádříme jako hustotu násobenou objemem a objem zapíšeme za pomoci vhodného diferenciálu. Ukažme si tento postup na jednoduchém příkladu rotující tyče uchycené na konci.

◖ **Příklad 8.3:** Rotující tyč




Tyč rozřežeme na svislé řezy (elementy), jak je naznačeno na obrázku. Jeden z řezů jsme vyznačili odlišnou barvou, jeho poloha je $x$. Pokud budou tyto svislé řezy infinitezimálně tenké (d$x$), mají všechny objem d$V = S$ d$x$ ($S$ je průřez tyče). Přes tyto řezy budeme integrovat od nuly (levý konec tyče) do $l$ (celková délka tyče):

$$J=\int_0^l x^2\mathrm{d}m=\int_0^l x^2\rho\mathrm{d}V=\int_0^l x^2\rho S\,\mathrm{d}x=\rho S\int_0^l x^2\,\mathrm{d}x=\rho S\frac{l^3}{3}.$$

Nyní vyjádříme hustotu za pomoci celkové hmotnosti tyče m a celkového objemu $V$.

$$J=\frac{m}{V}S\frac{l^3}{3}=\frac{m}{Sl}S\frac{l^3}{3}=\frac{1}{3}ml^2.$$

Získali jsme známý vztah pro moment setrvačnosti tyče otáčející se kolem konce:

$$J=\frac{1}{3}ml^2. \tag{8.13}$$

◗

**Poznámky:**

- Pokud by tyč byla kovová a roztavili bychom ji, pak z ní odlili kouli, a s touto koulí točili na velmi málo hmotném lanku, byl by moment setrvačnosti roven $ml^2$, tedy třikrát větší. Dobrý setrvačník má hmotnost rozloženou co možná nejdále od osy otáčení. Tím se zvýší jeho moment setrvačnosti (schopnost setrvávat v rotačním stavu pohybu).
- Moment setrvačnosti má vždy rozměr hmotnost násobené druhou mocninou délky. Je dobré si to u výsledku pokaždé zkontrolovat.

**Trik druhý**

Při výpočtu můžete těleso rozložit na libovolný počet částí a moment setrvačnosti počítat jako součet momentů jednotlivých částí. Těleso také můžeme rozdělit na infinitezimální elementy, celkový moment setrvačnosti je pak integrálem ($r$ je vzdálenost k ose otáčení)

$$J=\sum_k J_k\,; \qquad J=\int r^2\mathrm{d}m.$$

◖ **Příklad 8.4:** Nalezněte moment setrvačnosti kyvadla, jehož závěs lze považovat za tyč se stejnou hmotností $m$, jako má zavěšené těleso. Rozměry tělesa zanedbejte.

**Řešení:** Výsledný moment setrvačnosti bude součtem momentů závěsu a zavěšeného tělesa

$$J=J_{\text{závěs}}+J_{\text{těleso}}=\frac{1}{3}ml^2+ml^2=\frac{4}{3}ml^2.$$

Tento moment setrvačnosti bude vystupovat v pohybové rovnici (8.1) pro kyvadlo. ◗

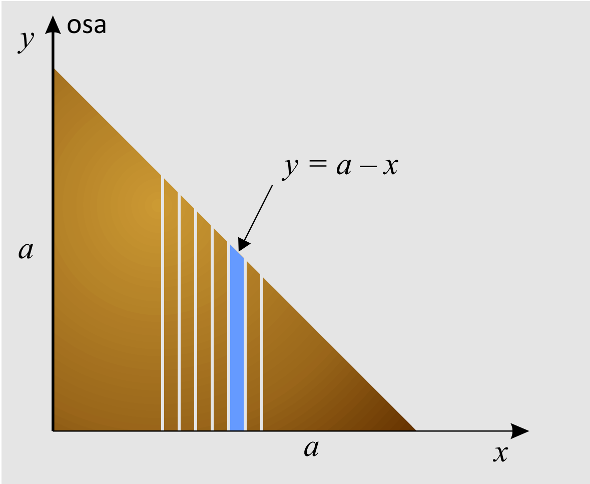
◖ **Příklad 8.5:** Spočtěte moment setrvačnosti rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku, který rotuje kolem jedné ze svých odvěsen (mají délku $a$).

**Řešení:** Trojúhelník bude mít plošnou hustotu

$$\sigma=\frac{m}{S}=\frac{m}{a^2/2}=\frac{2m}{a^2}.$$

Rozřežeme ho na elementy rovnoběžné s osou otáčení podle obrázku (hmotný element vyjádříme pomocí polohy elementu $x$)

$$\mathrm{d}m=\sigma\,\mathrm{d}S=\sigma y\,\mathrm{d}x=\sigma(a-x)\,\mathrm{d}x.$$



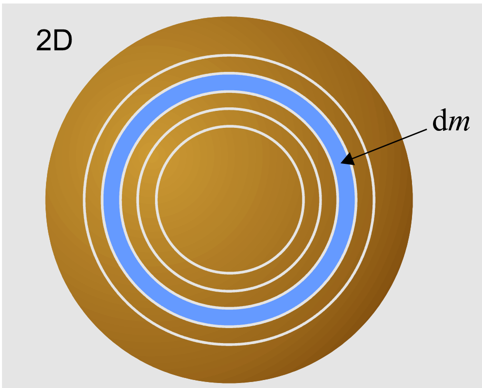

$$J=\int_0^a x^2\mathrm{d}m=\int_0^a x^2\sigma(a-x)\,\mathrm{d}x=\sigma\int_0^a\left(ax^2-x^3\right)\mathrm{d}x=\sigma\left[a\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a=$$

$$=\sigma\left(\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}\right)=\sigma a^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}\sigma a^4=\frac{1}{12}\frac{2m}{a^2}a^4=\frac{1}{6}ma^2.$$

Moment setrvačnosti zadaného trojúhelníku vzhledem k odvěsně je $ma^2/6$. ◗

◖ **Příklad 8.6:** Spočtěte moment setrvačnosti homogenního válce (kola, kruhu) o poloměru $R$ vzhledem k ose procházející středem.

**Řešení:** Kruh rozřežeme na soustředná mezikruží dle obrázku



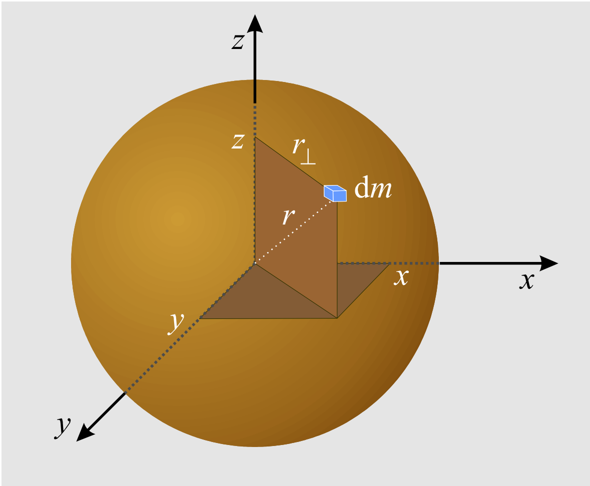

$$J=\int_0^R r^2\mathrm{d}m=\int_0^R r^2\sigma\,\mathrm{d}S=\sigma\int_0^R r^2\,2\pi r\,\mathrm{d}r=2\pi\sigma\frac{R^4}{4}=2\pi\frac{m}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}=\frac{1}{2}mR^2.$$ ◗

## Moment setrvačnosti koule

◖ **Příklad 8.7:** Spočtěte moment setrvačnosti homogenní koule hmotnosti $m$ a poloměru $R$ vzhledem k ose procházející středem.

**Řešení:** Počítejme například moment setrvačnosti vzhledem k ose $z$. Kouli bychom potřebovali rozřezat na soustavu válečků soustředných s osou $z$ (tak, aby body řezů měly stejnou vzdálenost od osy otáčení). Takový postup je sice možný, ale zbytečně složitý. Výpočet provedeme za pomoci jednoduchého triku. Vyberme si libovolný element uvnitř koule se souřadnicemi $(x, y, z)$. Vzdálenost elementu od osy rotace $z$ bude $r_\perp$, vzdálenost od počátku $r$:

$$r_\perp^2 = x^2 + y^2;$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{8.14}$$




Pro moment setrvačnosti vzhledem k ose $z$ bude platit

$$J_z = \int r_\perp^2 \,\mathrm{d}m = \int \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m. \tag{8.15}$$

Obdobně můžeme vyjádřit i momenty setrvačnosti vzhledem ke zbývajícím osám:

$$J_x = \int \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m;$$
$$J_y = \int \left(z^2 + x^2\right) \mathrm{d}m. \tag{8.16}$$

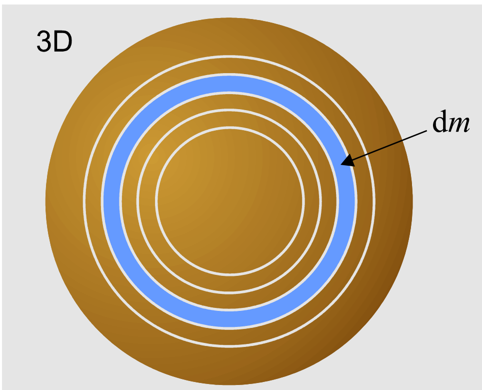
Výsledek všech tří integrací musí být stejný (setrvačné vlastnosti jsou shodné), tj. musí platit

$$J_x = J_y = J_z. \tag{8.17}$$

Výpočet každého z těchto integrálů je složitý, ale snadno dokážeme spočítat jejich součet. Na každý z integrálů pak zbude právě jedna třetina výsledku. Nalezněme tedy součet všech tří momentů setrvačnosti:

$$J = J_x + J_y + J_z = \int \left(2x^2 + 2y^2 + 2z^2\right) \mathrm{d}m = 2\int r^2 \,\mathrm{d}m.$$

V tomto integrálu má $r^2$ význam kvadrátu vzdálenosti od středu koule. Při integraci by tedy byly vhodné množiny, jejichž vzdálenost od středu je konstantní. Proto postačí rozřezat celou kouli na mnoho mezikulí o objemech $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}r = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$.



Následná integrace je již snadná:

$$J = 2\int r^2\,\mathrm{d}m = 2\int r^2\,\rho \mathrm{d}V = 2\int_0^R r^2 \rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r = 8\pi\rho \int_0^R r^4 \mathrm{d}r = 8\pi\rho \frac{R^5}{5}\,.$$

Za hustotu nyní dosadíme hustotu celé koule:

$$J = 8\pi \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{R^5}{5} = \frac{6}{5} mR^2\,.$$

Na moment setrvačnosti vzhledem k jedné jediné (libovolné) ose zbývá třetina, tj.

$$J_x = J_y = J_z = \tfrac{2}{5} mR^2\,. \tag{8.18}$$

Moment setrvačnosti homogenní koule vzhledem k ose procházející středem je $\frac{2}{5}mR^2$. ◗

> **Trik třetí**
>
> Při výpočtu momentu setrvačnosti koule vzhledem k ose se vyplatí spočíst součet momentů kolem všech tří os. Vzhledem k tomu, že jsou tyto momenty stejné, připadne na každý z nich třetina výsledku.

## Hmotný střed

Pro soustavu hmotných bodů bude mít celková hybnost hodnotu:

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k\,. \tag{8.19}$$

Pokusme se soustavu nahradit jediným tělesem se hmotností $M$ a rychlostí $\mathbf{v}$:

$$M\,\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k\,. \tag{8.20}$$

Integrací získáme polohu místa, které nahrazuje celou soustavu. Toto místo nazýváme hmotným středem. Lze ho chápat i jako působiště součtu všech sil působících na soustavu. V případě tíže hovoříme o těžišti. Po integraci máme:

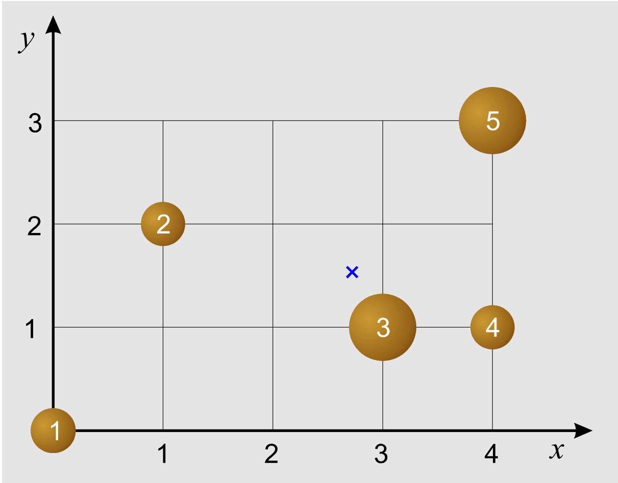
$$M\,\mathbf{r}_\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{r}_k \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{r}_\mathrm{S} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{r}_k}{M}\,. \tag{8.21}$$

Definici hmotného středu pro soustavu hmotných bodů a pro spojité těleso tedy je:

$$\mathbf{r}_\mathrm{S} \equiv \frac{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k m_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k}\,; \qquad \mathbf{r}_\mathrm{S} \equiv \frac{\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}\,. \tag{8.22}$$

Jde vlastně o váhovaný průměr přes hmotnost, ve jmenovateli je celková hmotnost všech těles nebo tělesa.

◖ **Příklad 8.8:** Spočtěte polohu hmotného středu pro soustavu těles dle obrázku (malé kuličky mají hmotnost 1 kg, velké kuličky 2 kg).




**Řešení:** Počítejme polohu hmotného středu podle vztahu (8.22):

$$\mathbf{r}_S \equiv \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2 + \mathbf{r}_3 m_3 + \mathbf{r}_4 m_4 + \mathbf{r}_5 m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5};$$

$$\mathbf{r}_1 = (0, 0); \quad \mathbf{r}_2 = (1\,\mathrm{m}, 2\,\mathrm{m}); \quad \mathbf{r}_3 = (3\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}); \quad \mathbf{r}_4 = (4\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}); \quad \mathbf{r}_5 = (4\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m}).$$

Souřadnice hmotného středu tedy budou:

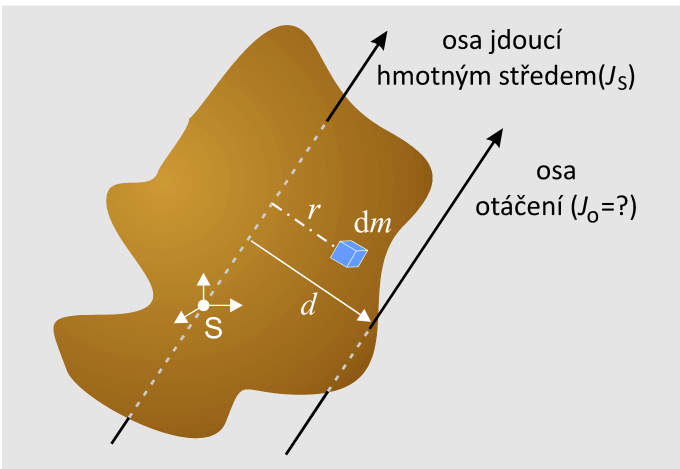
$$x_S \equiv \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{1 + 1 + 2 + 1 + 2}\,\mathrm{m} = \frac{19}{7}\,\mathrm{m},$$

$$y_S \equiv \frac{0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{1 + 1 + 2 + 1 + 2}\,\mathrm{m} = \frac{11}{7}\,\mathrm{m}.$$

◗

## Steinerova věta

Určeme moment setrvačnosti tělesa kolem obecné osy za pomoci momentu setrvačnosti kolem osy vedené hmotným středem, která je s námi zvolenou osou rovnoběžná. Hmotný střed bude v počátku souřadnicové soustavy, tj. $\mathbf{r}_S = (0, 0, 0)$. Situace je znázorněná na obrázku:



Moment setrvačnosti vzhledem k obecné ose můžeme zapsat takto:

$$J_o = \int (d-r)^2 \, dm = \int (\mathbf{d}-\mathbf{r})^2 \, dm =$$

$$= \int \mathbf{d}^2 dm - \int 2\mathbf{d}\cdot\mathbf{r} \, dm + \int \mathbf{r}^2 dm = d^2 \int dm - 2\mathbf{d}\cdot \int \mathbf{r} \, dm + \int r^2 dm .$$

První člen je snadno integrovatelný, druhý je nulový (integrál v něm vyjadřuje souřadnice hmotného středu, a ty jsou nulové) a třetí člen je momentem setrvačnosti vzhledem k hmotnému středu. Máme tedy jednoduchý vztah

$$J_o = md^2 + J_S , \tag{8.23}$$

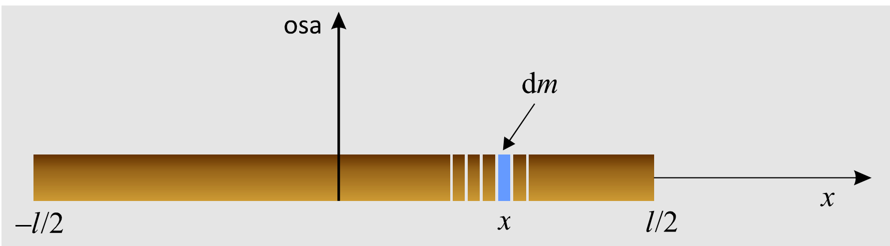
který se nazývá Steinerova věta podle švýcarského matematika Jakoba Steinera (1796–1863). Ze Steinerovy věty je patrné, že moment setrvačnosti je nejmenší vzhledem k ose procházející hmotným středem, všechny ostatní momenty jsou větší.

**Trik čtvrtý**

Při výpočtu momentu setrvačnosti vzhledem k ose postačí znát moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející hmotným středem. Všechny ostatní momenty vzhledem k dalším rovnoběžným osám získáme přičtením členu $md^2$, kde $d$ je vzdálenost aktuální osy otáčení od osy procházející hmotným středem.

◖ **Příklad 8.9:** Spočtěte moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose procházející hmotným středem a z něho určete moment vzhledem k ose procházející koncem tyče.

**Řešení:** Budeme postupovat stejně jako v příkladu 8.3, jen meze budou jiné:



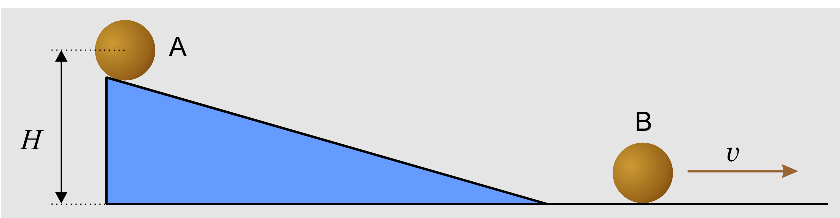

$$J_S = \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 \, dm = \rho S \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 \, dx = \rho S \left[ x^3/3 \right]_{-l/2}^{+l/2} = \frac{m}{Sl} S \frac{l^3}{12} = \frac{1}{12} ml^2 . \tag{8.24}$$

Nyní za pomoci Steinerovy věty určíme moment kolem kterékoli rovnoběžné osy, pro konec tyče dostaneme

$$J_o = md^2 + J_S = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} ml^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) ml^2 = \frac{1}{3} ml^2 . \tag{8.25}$$

Výsledek je stejný jako při přímém výpočtu v příkladu 8.3. ◗

◖ **Příklad 8.10:** Spočtěte rychlost kuličky a válce, které se skutálely po nakloněné rovině.



**Řešení:** Rychlost určíme ze zákona zachování energie. V bodě A má těleso jen potenciální energii, v bodě B je jeho energie složena z kinetické energie translačního pohybu hmotného středu a rotačního pohybu vzhledem k hmotnému středu:

$$mgH = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}J\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad mgH = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}J(v/R)^2 \qquad \Rightarrow$$

$$mgH = \tfrac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{J}{mR^2}\right).$$

Nyní již snadno určíme rychlost kuličky nebo válce

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \frac{J}{mR^2}}}\,. \tag{8.26}$$

Pro kouli máme $J = \tfrac{2}{5}mR^2$, pro válec $J = \tfrac{1}{2}mR^2$ a pro těleso, které klouže bez valení $J = 0$:

$$v_{\text{koule}} = \sqrt{\frac{10gH}{7}}\,; \qquad v_{\text{válec}} = \sqrt{\frac{4gH}{3}}\,; \qquad v_{\text{kluzák}} = \sqrt{2gH}\,.$$

◗

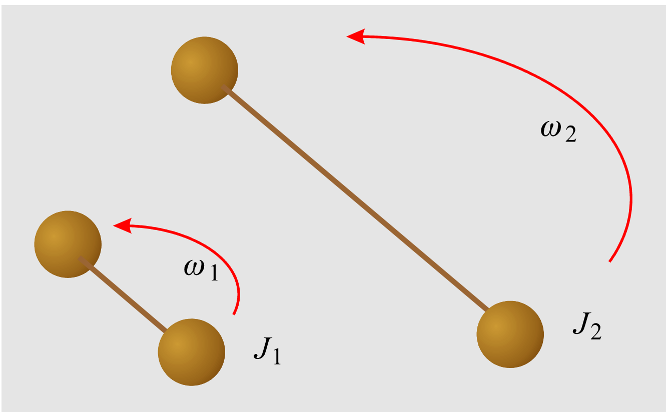
## Změna momentu setrvačnosti

Pokud na rotující těleso nepůsobí moment síly, jeho moment hybnosti se zachovává. Plyne to okamžitě z pohybové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = M_{\mathrm{F}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{b} = \text{const}\,.$$

Velikost momentu můžeme vyjádřit jako.

$$b = J\omega = \text{const}\,.$$




Pokud rotující soustava nějakým způsobem změní své vnitřní rozložení hmoty, a tím změní svůj moment setrvačnosti, úhlová rychlost se automaticky nastaví tak, aby součin $J\omega$ zůstal konstantní. Příkladem může být krasobruslařka, která při piruetě připaží ruce. Její moment setrvačnosti se zmenší a úhlová rychlost odpovídajícím způsobem zvětší.

# 9 KEPLEROVY ZÁKONY

Keplerovy zákony pro planetární pohyb zformuloval Johannes Kepler (1571–1630) na základě měření Tychona Braheho (1546–1601). Jde tedy o zákony objevené experimentálně. Dnes je umíme odvodit z pohybových rovnic a gravitačního zákona.

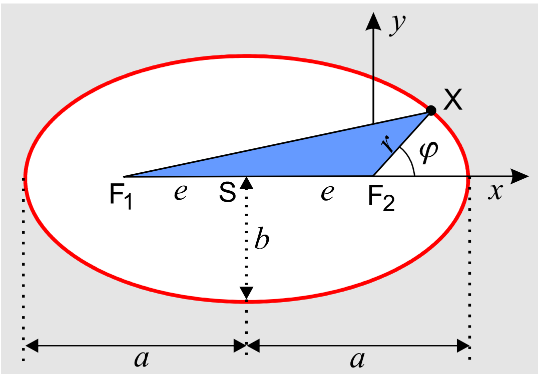
**Keplerovy zákony**

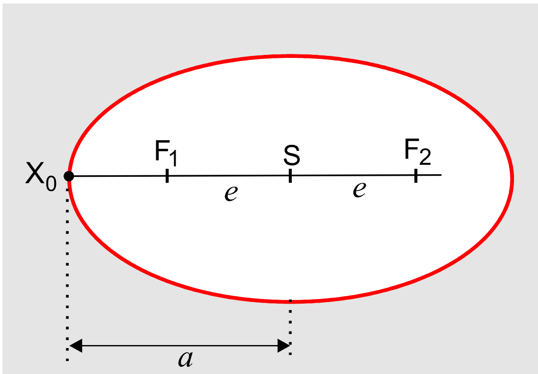
1. Planety se pohybují po elipsách, v jejichž jednom ohnisku je Slunce.
2. Spojnice planety se Sluncem opíše za stejnou dobu vždy stejnou plochu.
3. Podíl třetí mocniny velké poloosy a druhé mocniny oběžné doby je pro všechny planety stejný.

Druhý Keplerův zákon není nic jiného než zákon ploch, který jsme již dříve odvodili ze zákona zachování momentu hybnosti. První a třetí Keplerův zákon si nyní odvodíme.

## Rovnice elipsy

Nejprve se musíme seznámit s rovnicí elipsy v polárních souřadnicích, jejichž střed je v jednom z ohnisek ($F_2$):




Elipsa je definována jako množina bodů, pro které je součet vzdáleností od dvou pevně daných bodů (ohnisek $F_1$ a $F_2$) konstantní, tj.

$$XF_1 + XF_2 = \text{const} . \tag{9.1}$$

Hodnotu konstanty snadno určíme pro bod $X = X_0$, který je situovaný podle pravého obrázku:

$$X_0F_1 + X_0F_2 = (a-e)+(a+e) = 2a .$$

Rovnice elipsy tedy bude mít tvar:

$$XF_1 + XF_2 = 2a , \tag{9.2}$$

kde $X$ je libovolný bod na elipse. Jednotlivé body mají podle obrázku souřadnice:

$$\begin{aligned} X &= (r\cos\varphi, r\sin\varphi) ; \\ F_1 &= (-2e, 0) ; \\ F_2 &= (0,0) . \end{aligned} \tag{9.3}$$

Souřadnice bodů nyní dosadíme do rovnice elipsy, vzdálenost dvou bodů vyjádříme jako odmocninu ze součtu kvadrátů rozdílů souřadnic:

$$\mathrm{XF}_1 + \mathrm{XF}_2 = 2a \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(r\cos\varphi + 2e)^2 + (r\sin\varphi)^2} + \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = 2a \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt{r^2 + 4re\cos\varphi + 4e^2} \; + \; r = 2a\,.$$

To, že druhá vzdálenost musela vyjít $r$, je na první pohled patrné z obrázku. Ve výsledném vztahu ponecháme na levé straně jen odmocninu (člen $r$ převedeme doprava) a obě strany umocníme na druhou:

$$\sqrt{r^2 + 4re\cos\varphi + 4e^2} = 2a - r \qquad \Rightarrow$$

$$r^2 + 4re\cos\varphi + 4e^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \qquad \Rightarrow$$

$$re\cos\varphi + e^2 = a^2 - ar \qquad \Rightarrow$$

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos\varphi} = a\frac{1-(e/a)^2}{1+(e/a)\cos\varphi}\,.$$

Rovnice elipsy se většinou píše ve tvaru:

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,;$$

$$p \equiv a(1-\varepsilon^2)\,, \tag{9.4}$$

$$\varepsilon \equiv e/a\,.$$

Veličiny $p$, $\varepsilon$ se nazývají parametr elipsy a numerická (bezrozměrná, číselná) excentricita.

## První Keplerův zákon (planety se pohybují po elipsách)

Při odvození tvaru trajektorie planety bychom mohli vyjít z pohybových rovnic a řešit diferenciální rovnice druhého řádu. Výhodnější ale bude vyjít ze zákonů zachování energie a momentu hybnosti. Z nich dostaneme soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu. Energie planety se skládá z translační energie v radiálním směru (přibližování a vzdalování od Slunce ve směru $r$), z rotační energie (v úhlovém směru $\varphi$) a z potenciální energie pohybu v poli Slunce:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - G\frac{mM}{r} = E\,. \tag{9.5}$$

Druhým vztahem bude zákon zachování momentu hybnosti $J\omega$:

$$J\dot{\varphi} = b\,. \tag{9.6}$$

Obě veličiny se zachovávají, pravé strany jsou proto konstanty pohybu. Moment setrvačnosti planety vzhledem ke Slunci je dán jednoduchým vztahem (stejným jako pro kuličku na provázku), tj.

$$J = mr^2\,. \tag{9.7}$$

Po dosazení za $J$ má soustava rovnic, kterou budeme řešit, tvar:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - G\frac{mM}{r} = E\,,$$
$$mr^2\dot{\varphi} = b\,. \tag{9.8}$$

Nevýhodou je, že v první rovnici jsou časové derivace obou proměnných, tj. $\dot{r}$ i $\dot{\varphi}$. Proto vyjádříme časovou derivaci $\dot{\varphi}$ z druhé rovnice a dosadíme do první:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{b^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = E\,,$$
$$mr^2\dot{\varphi} = b\,. \tag{9.9}$$

V dalším kroku vypočteme z obou rovnic časové derivace hledaných proměnných:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{b^2}{2mr^2} + G\frac{mM}{r}\right)}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{b}{mr^2}\,. \tag{9.10}$$

Nyní bychom mohli řešit pohyb planety za pomoci diferenčního schématu. My ale potřebujeme znát jen celkový tvar trajektorie, nikoli časovou závislost (v kterém čase je planeta na kterém místě). Proto vydělíme druhou rovnici první (tím se diferenciály d$t$ vyruší):

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{b/mr^2}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \left(\frac{b}{mr}\right)^2 + 2G\frac{M}{r}}}\,. \tag{9.11}$$

Rovnici budeme separovat (diferenciál d$r$ převedeme na pravou stranu a integrovat:

$$\int \mathrm{d}\varphi = \int \frac{b/mr^2}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \left(\frac{b}{mr}\right)^2 + 2G\frac{M}{r}}}\,\mathrm{d}r\,. \tag{9.12}$$

Integrál na levé straně je jednoduchý, integrační konstanta ovlivní jen počáteční odečet úhlu, můžeme ji proto zvolit nulovou. Na pravé straně zavedeme substituci

$$\xi \equiv \frac{b}{mr}\,; \qquad \mathrm{d}\xi = -\frac{b}{mr^2}\,\mathrm{d}r. \tag{9.13}$$

Po provedení substituce máme:

$$\varphi = \int \frac{-1}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \xi^2 + 2\frac{GmM}{b}\xi}}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{9.14}$$

Výraz pod odmocninou doplníme na čtverec

$$\varphi = \int \frac{-1}{\sqrt{\dfrac{2E}{m} - \left(\xi - \dfrac{GmM}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{GmM}{b}\right)^2}} \, \mathrm{d}\xi \,. \tag{9.15}$$

Vzhledem k tomu, že se pouze snažíme dokázat, že jde o rovnici elipsy, nebudeme vypisovat hodnoty jednotlivých konstant a výraz napravo napíšeme ve tvaru

$$\varphi = -\int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{C^2 - (\xi - \xi_0)^2}} \,. \tag{9.16}$$

Konstantou $C^2$ jsme označili součet obou konstantních členů. Z integrálu vytkneme $C$

$$\varphi = -\frac{1}{C} \int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\xi - \xi_0}{C}\right)^2}} \,. \tag{9.17}$$

a zavedeme poslední substituci

$$\eta = \frac{\xi - \xi_0}{C}; \qquad \mathrm{d}\eta = \frac{\mathrm{d}\xi}{C}. \tag{9.18}$$

Integrace přejde na jednoduchý tvar

$$\varphi = -\int \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \,, \tag{9.19}$$

což je tabulkový integrál vedoucí na řešení

$$\varphi = \arccos \eta \,. \tag{9.20}$$

Závislost otočíme a vrátíme se k původním proměnným:

$$\begin{gathered}
\eta = \cos\varphi \qquad \Rightarrow \\
\frac{\xi - \xi_0}{C} = \cos\varphi \qquad \Rightarrow \\
\frac{b}{mr} - \xi_0 = C\cos\varphi \qquad \Rightarrow \\
\frac{b}{mr} = \xi_0 + C\cos\varphi \qquad \Rightarrow \\
r = \frac{b/m}{\xi_0 + C\cos\varphi} = \frac{b/(m\xi_0)}{1 + (C/\xi_0)\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \,.
\end{gathered} \tag{9.21}$$

Výsledná rovnice má tvar rovnice elipsy (9.4) s počátkem souřadnic (Sluncem) v ohnisku. Při výpočtu jsme mlčky předpokládali, že vliv planety na Slunce je zanedbatelný a Slunce zůstane v počátku souřadnic po celou dobu oběhu planety. První Keplerův zákon je tedy důsledkem gravitačního zákona a příslušných pohybových rovnic (respektive zákonů zachování z nich plynoucích). Druhý Keplerův zákon (zákon ploch) plyne ze zákona zachování momentu hybnosti a již jsme ho odvodili dříve. Zbývá tedy alespoň naznačit odvození třetího Keplerova zákona.

## Třetí Keplerův zákon

Platnost třetího Keplerova zákona si ukážeme jen pro kruhovou orbitu planety. Předpokládejme, že planeta obíhá Slunce po kružnici (speciální případ elipsy s nulovou excentricitou) o poloměru $R$. Z rovnosti odstředivé a gravitační síly máme

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}. \tag{9.22}$$

Na levé straně je hmotnost planety násobená normálovým zrychlením (3.17) při kruhovém pohybu, na pravé straně je velikost gravitační síly. Již nás nepřekvapí, že hmotnost planety se na obou stranách rovnosti zkrátí a pohyb planety v gravitačním pole nezávisí na její hmotnosti. Rychlost vyjádříme jako obvod dráhy $2\pi R$ dělený periodou oběhu $T$:

$$\frac{(2\pi R/T)^2}{R} = G\frac{M}{R^2}. \tag{9.23}$$

Jednoduchým přeskupením máme třetí Keplerův zákon

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}, \tag{9.24}$$

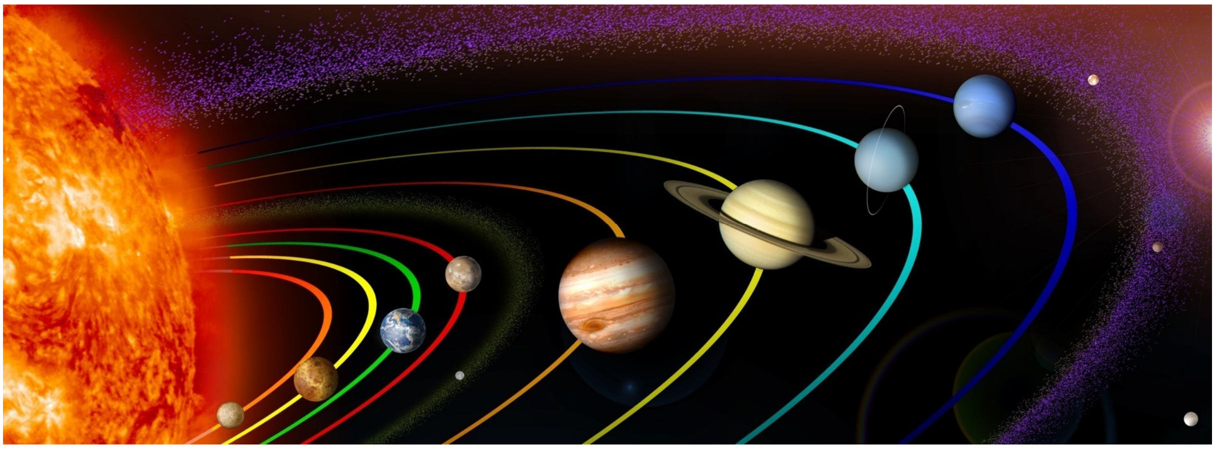
který platí pro všechny planety. Konstanta na pravé straně je dána hmotností Slunce. Pokud bychom při odvození uvažovali eliptickou dráhu planety a fakt, že velké planety poněkud ovlivní polohu Slunce, dostali bychom výsledný vztah (který v tomto kurzu nebudeme odvozovat)

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}, \tag{9.25}$$

Tedy místo poloměru kruhové dráhy zde vystupuje velká poloosa elipsy a místo hmotnosti Slunce součet hmotností obou těles. Pro planety je ale $m \ll M$ a jejich hmotnost je možné zanedbat. Třetí Keplerův zákon lze aplikovat i na dvojhvězdy, potom na pravé straně skutečně zůstane součet hmotností obou těles.

**Zapamatujte si**

Keplerovy zákony byly nalezeny na základě sledování poloh planet na obloze. Dnes je umíme snadno odvodit z gravitačního zákona a pohybových rovnic nebo ze zákonů zachování energie a momentu hybnosti.



# 10 HARMONICKÝ OSCILÁTOR

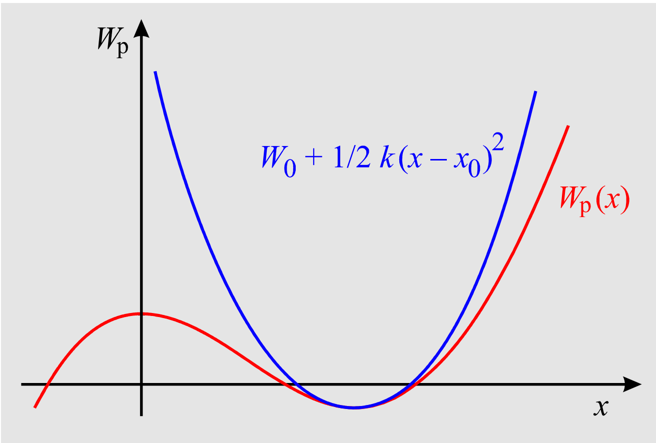
V okolí minima potenciální energie můžeme vždy očekávat kmity. Síla působí do minima potenciální energie, takže po vychýlení částice bude mít vždy vratný charakter. Nejednodušším tvarem minima je parabolická závislost, která vede na tzv. *harmonické oscilace*. Pokud má minimum energie obecnější tvar, můžeme ho alespoň v prvním přiblížení nahradit parabolickou závislostí, která je snadno řešitelná. Harmonické oscilace přibližně vykonává těleso upevněné na pružině, těleso částečně ponořené do kapaliny nebo radiální vzdálenost Země od Slunce (osciluje mezi 147 a 151 miliony kilometry). Za harmonické oscilátory lze také považovat fotony – kvanta elektromagnetického pole.

## Energie, síla a pohybová rovnice

Představme si částici v poli potenciální energie s minimem v bodě $x_0$ a hodnotou minima $W_0 = W_\mathrm{p}(x_0)$. Proveďme Taylorův rozvoj funkce $W_\mathrm{p}(x)$ v okolí minima do druhého řádu:

$$W_\mathrm{p}(x) = W_\mathrm{p}(x_0) + W_\mathrm{p}'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}W_\mathrm{p}''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \cdots . \tag{10.1}$$

První člen je nepodstatnou konstantou – jde jen o posunutí potenciální energie, které se neprojeví na průběhu síly, neboť derivace konstanty je nulová. Druhý člen je nulový, protože první derivace v minimu je nulová. Jediný podstatný člen je třetí člen, který je zodpovědný za parabolický průběh.




Pokud počátek souřadnicové soustavy posuneme do minima potenciální energie, dostaneme

$$W_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}kx^2 \,; \qquad k \equiv W_\mathrm{p}''(x_0) \,. \tag{10.2}$$

Konstanta $k$ určuje strmost paraboly, u mechanických soustav se jí říká *tuhost oscilací*. Je rovna druhé derivaci potenciální energie v minimu. Síla působící na těleso je rovna

$$F = -\frac{\mathrm{d}W_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x} = -kx \,. \tag{10.3}$$

Síla je tedy přímo úměrná výchylce a má opačný směr (znaménko minus). Sestavme nyní pohybovou rovnici $ma = F$:

$$m\ddot{x} = -kx \,. \tag{10.4}$$

U diferenciálních rovnic bývá zvykem seřadit proměnné podle jejich klesající derivace a koeficient u nejvyšší derivace zvolit rovný jedné:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \,. \tag{10.5}$$

Jde o jednoduchou diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty.

## Exponenciála a její příbuzní, komplexní číslo

Před řešením rovnice (10.5) se musíme seznámit s exponenciální funkcí. Ze zápisu (10.4) je jasné, že řešením rovnice musí být funkce, jejíž druhá derivace je úměrná samotné funkci. Hledejme proto funkci, jejíž derivace je rovna funkci samotné. Pak i druhá, třetí a libovolná derivace bude rovna původní funkci. Zkrátka tato funkce bude imunní vzhledem k derivování. Hledejme takovou zvláštní funkci jako nekonečnou řadu

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots. \tag{10.6}$$

Její derivaci provedeme člen po členu:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + \cdots. \tag{10.7}$$

Pokud mají být obě poslední funkce stejné (funkce je rovna své první derivaci), musí platit:

$$c_1 = c_0 \,, \qquad 2c_2 = c_1 \,, \qquad 3c_3 = c_2 \,, \qquad 4c_4 = c_3 \,, \qquad 5c_5 = c_4 \,, \quad \cdots \tag{10.8}$$

Pokud zvolíme konstantu $c_0$, můžeme dopočítat všechny koeficienty rozvoje. Volba $c_0 = 0$ povede na nulovou funkci, jakékoli nenulové číslo nám vygeneruje námi hledanou funkci. Hodnota $c_0$ je nepodstatná a bude jen násobícím faktorem této funkce. Proto zvolíme $c_0 = 1$:

$$c_0 = 1 \,, \qquad c_1 = 1 \,, \qquad c_2 = \frac{1}{2} \,, \qquad c_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} \,, \qquad c_4 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} \,, \qquad c_5 = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \,. \tag{10.9}$$

Celkem snadno odhadneme obecnou formulku:

$$c_n = \frac{1}{n!} \,. \tag{10.10}$$

Nalezená funkce se nazývá exponenciála a její rozvoj tedy je

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots. \tag{10.11}$$

Z řešení rovnice $f' = f$ plyne, že exponenciálu je možné zapsat také jako mocninnou funkci, tj.

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots. \tag{10.12}$$

Základ této funkce (Eulerovo číslo) snadno určíme, pokud položíme $x = 1$:

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = 2{,}71828183\ldots \tag{10.13}$$

V matematice je velmi časté, že funkce jsou definovány za pomoci nekonečných řad a většinou se z těchto řad i počítají jejich funkční hodnoty (například i ve vaší kalkulačce). Pokud z rozvoje exponenciály vybereme jen sudé mocniny, dostaneme hyperbolický kosinus (vzpomeňte si, že v nule má hodnotu 1 a je otočen vzhůru, podobně jako parabola). Pokud vybereme jen sudé mocniny a budeme u nich střídat znaménka, dostaneme obyčejný kosinus. Střídající se znaménka budou polynomy tvořící řadu otáčet střídavě dolů a nahoru, tím získáme periodickou funkci. Pokud vybereme liché mocniny, funkce se nazývá sinus hyperbolický a pokud vybereme liché mocniny a budeme u nich střídat znaménka, získáme normální sinus.

**Zapamatujte si:**

$$\begin{aligned}
\exp x &\equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \\
\cosh x &\equiv 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots, \\
\cos x &\equiv 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \pm \cdots, \\
\sinh x &\equiv x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \pm \cdots, \\
\sin x &\equiv x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} \pm \cdots
\end{aligned} \tag{10.14}$$

Mezi takto definovanými funkcemi je řada zajímavých vztahů, k nejznámějším patří Eulerův vztah. Zkusme nalézt exponenciálu s ryze imaginárním argumentem (za pomoci její řady):

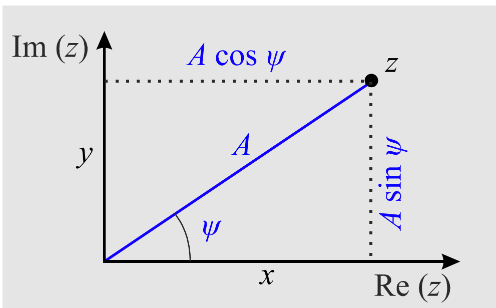
$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}x) &= 1 + (\mathrm{i}x) + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}x)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}x)^5}{5!} + \cdots = \\
&= 1 + \mathrm{i}x - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{i}\frac{x^5}{5!} + \cdots = \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots\right) + \mathrm{i}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots\right).
\end{aligned}$$

V první závorce je řada pro kosinus, ve druhé řada pro sinus. Celkově tedy platí:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x\,; \qquad \text{resp}\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = \cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi\,. \tag{10.15}$$

Eulerův vztah je nesmírně užitečný při vyjadřování komplexních čísel, která můžeme chápat jako uspořádanou dvojici čísel v kartézské (Gaussově) rovině, ale můžeme je také přepsat za pomoci amplitudy a fáze do goniometrického tvaru:

$$z = (x, y) = x + \mathrm{i}y = A\cos\psi + \mathrm{i}\,A\sin\psi = A(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\,. \tag{10.16}$$




Obdobných užitečných vztahů mezi goniometrickými a hypergeometrickými funkcemi je celá řada a lze je dokázat přímo z definice těchto funkcí za pomoci řad nebo z již dokázaného Eulerova vztahu.

**Zapamatujte si:**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \tag{10.17}$$
$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

U komplexních čísel je často důležitý převod mezi dvojicí $x$, $y$ (reálnou a imaginární částí) a dvojicí $A$, $\psi$ (amplitudou a fází). Vztahy snadno nalezneme z posledního obrázku:

**Zapamatujte si užitečné převody:**

$$x = A\cos\psi,$$
$$y = A\sin\psi;$$
$$A = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}, \tag{10.18}$$
$$\psi = \mathrm{arctg}(y/x).$$

## Řešení pohybové rovnice pro harmonický oscilátor

Z tvaru rovnice (10.4) už víme, že řešením musí být funkce, jejíž všechny derivace jsou úměrné původní funkci. Také víme, že takovou funkcí je exponenciála, proto hledejme řešení ve tvaru:

$$x(t) = e^{\lambda t};$$
$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t};$$
$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Po dosazení výrazů do rovnice (10.5) dostaneme rovnici pro $\lambda$ (exponenciály se samozřejmě zkrátí, neboť všechny derivace exponeniály jsou si vzájemně úměrné):

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = +i\sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Nalezli jsme tedy dvě řešení naší pohybové rovnice:

$$x_1 = e^{i\sqrt{k/m}\,t}; \qquad x_2 = e^{-i\sqrt{k/m}\,t}. \tag{10.19}$$

Snadno zjistíme, že násobek každého z řešení je opět řešením, stejně tak jejich součet, rozdíl nebo jakákoli lineární kombinace (řešení tvoří tzv. lineární vektorový prostor, tj. chovají se stejně jako vektory a můžeme je také tak skládat). Obecné řešení proto bude mít tvar:

$$x(t) = c_1 e^{i\sqrt{k/m}\,t} + c_2 e^{-i\sqrt{k/m}\,t}. \tag{10.20}$$

Fáze pohybu bude narůstat lineárně s časem:

$$\varphi(t) = \sqrt{k/m}\; t\,. \tag{10.21}$$

Zavedeme-li úhlovou frekvenci pohybu

$$\omega \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{10.22}$$

můžeme řešení napsat jako

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + c_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,. \tag{10.23}$$

Snadno ukážeme, že toto řešení lze také zapsat jako lineární kombinaci sinů a kosinů nebo jako posunutý kosinus či jako posunutý sinus.

**Zapamatujte si:**

- Řešení rovnice pro harmonický oscilátor lze zapsat v libovolném z těchto tvarů:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + c_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,,\\ x(t) &= a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\,,\\ x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi_0)\,,\\ x(t) &= B\sin(\omega t + \varphi_0)\,. \end{aligned} \tag{10.24}$$

- Frekvence pohybu je svázána s tuhostí oscilací jednoduchým vztahem

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Leftrightarrow \qquad k = m\omega^2 \tag{10.25}$$

Všechny zápisy (10.24) jsou ekvivalentní – pokud u posledních dvou vyjádření použijeme součtové vzorce, dostaneme okamžitě lineární kombinaci kosinu a sinu. Pokud u prvního vyjádření použijeme Eulerův vztah, dostaneme opět lineární kombinaci kosinu a sinu:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + c_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \\ c_1&\left[\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\right] + c_2\left[\cos(\omega t) - \mathrm{i}\sin(\omega t)\right] = \\ &= (c_1 + c_2)\cos(\omega t) + (\mathrm{i}\,c_1 - \mathrm{i}\,c_2)\sin(\omega t) = \\ &= a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\,. \end{aligned}$$

**Harmonické oscilace**

1. Mají parabolický průběh potenciální energie $W_\mathrm{p} = kx^2/2$.
2. Síla je úměrná výchylce a má opačný směr $F = -kx$.
3. Pohybová rovnice má tvar $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, kde $\omega$ je úhlová frekvence oscilací.
4. Řešením jsou kosinové a sinové kmity $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$.

Kdykoli narazíme na rovnici ve tvaru $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, už ji nebudeme muset řešit.
Budeme vědět, že řešením je lineární kombinace kosinu a sinu frekvence $\omega$!

◖ **Příklad 10.1:** Nalezněte integrační konstanty pro případ, že je oscilátor spuštěn s počáteční výchylkou $A_0$ ($x(0) = A_0$, $v(0) = 0$) a poté pro situaci, že je spuštěn s počáteční rychlostí $v_0$ ($x(0) = 0$, $v(0) = v_0$.

**Řešení:** Poloha a rychlost jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\,, \\ v(t) &= \dot{x} = -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)\,. \end{aligned} \tag{10.26}$$

Do obou rovnic dosadíme nulový čas a počáteční podmínky. Pro první případ (nenulová výchylka) vyjde kosinové řešení a pro druhý případ (nenulová rychlost) sinové řešení:

$$x_1(t) = A_0\cos(\omega t)\,, \qquad x_2(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\,. \tag{10.27}$$

◗

Pro jednoduchost budeme v celé této kapitole používat jen kosinové řešení (s nenulovou počáteční výchylkou). Není to na újmu obecnosti, neboť víme, že obecná kombinace sinu a kosinu je jen fázově posunutý kosinus, viz (10.24).

## Zákon zachování energie

Předpokládejme harmonické oscilace ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0\cos(\omega t)\,, \\ v(t) &= -A_0\omega\sin(\omega t)\,. \end{aligned} \tag{10.28}$$

Sestavme nyní výraz pro celkovou energii

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA_0^2\sin^2(\omega t) \tag{10.29}$$

V prvním výrazu je $m\omega^2 = k$, tedy máme

$$E = \frac{1}{2}kA_0^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA_0^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}kA_0^2\,. \tag{10.30}$$

Celková energie se zachovává, přelévá se mezi kinetickou a potenciální složkou. V krajní výchylce je veškerá energie v potenciální složce ($1/2\; kA_0^2$), v rovnovážné poloze je veškerá energie v kinetické složce.

**Zapamatujte si**

- Celková energie harmonického oscilátoru se zachovává ($E = W_k + W_p = 1/2\; kA_0^2$) a přelévá se mezi kinetickou a potenciální složkou.
- Hybnost oscilátoru se nezachovává (v krajní poloze je nulová, v rovnovážné poloze je nenulová).

## Fázový portrét

Fázovým portrétem nazýváme graf trajektorie systému, v němž je na vodorovné ose poloha a na svislé ose hybnost. Pro polohu a hybnost máme:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0\cos(\omega t)\,, \\ p(t) &= mv = -A_0 m\omega\sin(\omega t)\,. \end{aligned} \tag{10.31}$$

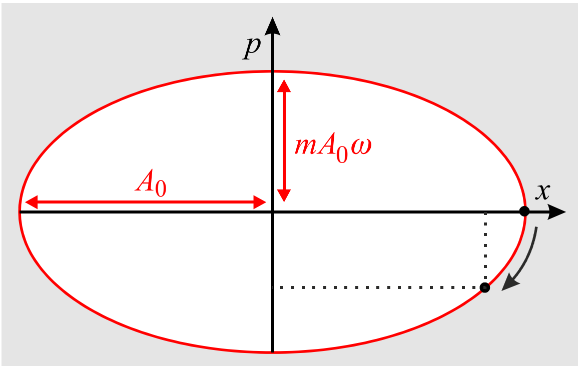
Na pravé straně rovnic ponecháme jen časové závislosti, ostatní výrazy převedeme nalevo:

$$\begin{aligned}\frac{x}{A_0} &= \cos(\omega t)\,, \\ \frac{p}{A_0 m\,\omega} &= -\sin(\omega t)\,.\end{aligned} \tag{10.32}$$

Obě rovnice nyní umocníme na druhou a sečteme:

$$\left(\frac{x}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{p}{A_0 m\,\omega}\right)^2 = 1\,. \tag{10.33}$$

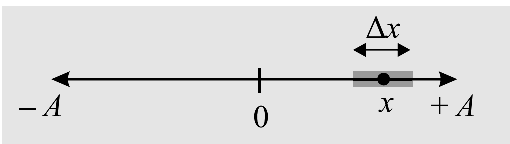
Jde o rovnici elipsy s poloosami $A_0$ a $A_0 m\omega$. Oscilátor si můžeme představit jako malou kuličku pohybující se po obvodu elipsy. Vodorovný průmět pohybu kuličky odpovídá její poloze a svislý průmět její hybnosti.




Funguje ale i opačná konstrukce. Představte si, že pohyb oscilátoru snímají dvě čidla. Jedno měří polohu a druhé rychlost a tím i hybnost. Signál z prvního čidla přivedeme na vodorovnou osu osciloskopu (kosinový průběh) a signál z druhého čidla na svislou osu osciloskopu (sinový průběh). Výsledný obraz bude samozřejmě námi odvozená elipsa. Z hlediska matematiky skládáme dva kolmé kmity stejných frekvencí posunuté ve fázi o 90°.

## Pravděpodobnost výskytu oscilátoru

Na závěr určeme klasickou hustotu pravděpodobnosti $w(x)$ výskytu částice mezi krajními polohami $-A$ , $A$. Pro pravděpodobnost, že se částice nachází v okolí $\Delta x$ bodu $x$ platí:




$$\Delta P \cong \frac{2\Delta t}{T} = \frac{2\Delta x/v(x)}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{\pi\,v(x)}\Delta x\,, \tag{10.34}$$

kde $T$ je perioda pohybu a $2\Delta t$ je doba, po kterou částice pobývá v okolí bodu $x$. Okolím prolétá za periodu $T$ částice dvakrát (tam a zpět), proto je v čitateli $2\Delta t$. Hustota pravděpodobnosti je

$$\mathcal{P}(x) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{\omega}{\pi\,v(x)}\,. \tag{10.35}$$

Závislost $v(x)$ určíme ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \qquad \Rightarrow \qquad v(x) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}\,. \tag{10.36}$$

Konečný vztah má tvar

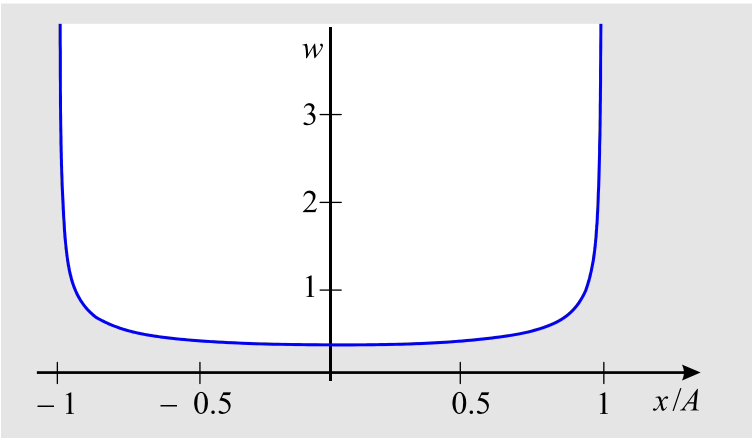
$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}\,. \tag{10.37}$$

Hustota pravděpodobnosti výskytu tělesa je nejvyšší v bodech obratu $-A$, $A$ a nejnižší v místě minima potenciální energie. Nelekejte se nekonečné hodnoty hustoty pravděpodobnosti v krajních bodech. Skutečný smysl má jen pravděpodobnost výskytu tělesa v intervalu $<a, b>$ daná vztahem:

$$P(a,b) = \int_a^b \mathcal{P}(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{10.38}$$

Celková pravděpodobnost výskytu částice v oblasti $(-A\,,\,A)$ je rovna jedné:

$$\int_{-A}^{+A} w(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-A}^{+A} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(\frac{x}{A}\right)\right]_{-A}^{+A} = 1\,. \tag{10.39}$$




**Zapamatujte si**

- Pravděpodobnost výskytu oscilátoru je nejvyšší v místech krajní výchylky. Hustota pravděpodobnosti je zde nekonečná, nicméně pravděpodobnost v každém konečném intervalu je konečná.
- Nejnižší pravděpodobnost výskytu je v rovnovážné poloze, kde má oscilátor nejvyšší rychlost
- Součet (integrál) všech pravděpodobností je roven 1.

# 11 TLUMENÉ A VYNUCENÉ KMITY

## Tlumené kmity

Předpokládejme, že na oscilátor nyní působí ještě tlumení. Těleso zavěšené na pružině kmitá například v kádince s vodou. Tlumící síla je úměrná rychlosti a má opačný směr, na pravé straně rovnice tedy budou dvě síly, harmonická a tlumicí:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}\,. \tag{11.40}$$

V rovnici nyní uspořádáme členy podle klesajících derivací a koeficient u nejvyšší derivace upravíme tak, aby byl roven jedné:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,. \tag{11.41}$$

Koeficient u první derivace popisuje velikost tlumení, označíme ho $2\delta$ (jde jen o označení, ukáže se, že s faktorem 2 bude výsledný vztah jednodušší). Koeficient u druhé derivace je druhou mocninou frekvence netlumeného oscilátoru, označíme ji $\omega_0$. Máme tedy řešit jednoduchou rovnici

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0\,. \tag{11.42}$$

Jde o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Má-li rovnice platit, musí být hledaná funkce úměrná své první i druhé derivaci. Jediná funkce s takovou vlastností je exponenciála, proto předpokládejme, že řešení má tvar:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}\,, \\ \dot{x}(t) &= \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,, \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,. \end{aligned} \tag{11.43}$$

Po dosazení do pohybové rovnice (11.42) a následném zkrácení exponenciál máme rovnici

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0\,, \tag{11.44}$$

která má řešení

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\,. \tag{11.45}$$

Pro velká $\delta > \omega_0$ máme dvě reálná řešení a žádné oscilace se nekonají. Hovoříme o tzv. přetlumeném (aperiodickém) kmitu. Tlumení je natolik veliké, že se oscilátor bez kmitů vrátí do rovnovážné polohy. Naopak pro slabé tlumení $\delta < \omega_0$ máme dvě komplexní řešení

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,. \tag{11.46}$$

Poloha oscilátoru bude dána lineární kombinací obou nalezených řešení, tj.

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \mathrm{e}^{-\delta t}\left(c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t} + c_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t}\right). \tag{11.47}$$

Superpozici kmitajících exponenciál můžeme opět napsat jako superpozici kosinu a sinu

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left[a\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t\right) + b\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t\right)\right]. \tag{11.48}$$

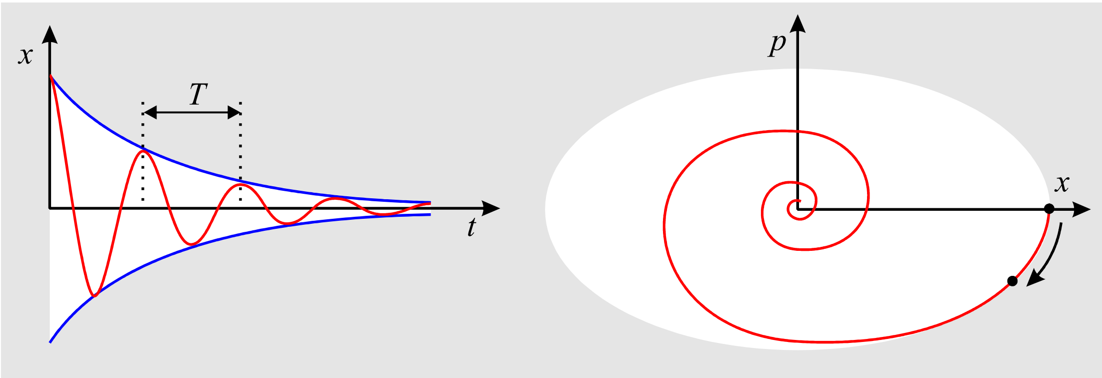
Předpokládejme kmit s počáteční nulovou rychlostí a nenulovou výchylkou $A_0$:

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t\right). \tag{11.49}$$

Amplituda, fáze kmitů a úhlová frekvence budou

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 e^{-\delta t}\,, \\ \varphi(t) &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\; t\,, \\ \omega &= \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,. \end{aligned} \tag{11.50}$$

Amplituda kmitů klesá exponenciálně s časem. Koeficientem u času je parametr $\delta$ zavedený výše. Fáze kmitů roste lineárně s časem. Úhlová frekvence je nižší než u netlumených kmitů. Časový vývoj bude dát exponenciálně tlumeným kosinem. Fázový portrét bude spirála:




Často používanou veličinou je logaritmický dekrement útlumu. Jde o přirozený logaritmus podílu amplitudy v nějakém čase a amplitudy v čase o periodu pozdějším:

$$\Lambda \equiv \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T\,. \tag{11.51}$$

Energie oscilací je úměrná druhé mocnině amplitudy, proto má tvar

$$E(t) = E_0 e^{-2\delta t}\,. \tag{11.52}$$

**Zapamatujte si**

- Tlumené oscilace mají tvar: $x(t) = A(t) \cos(\omega t)$.
- Frekvence je dána vztahem: $\omega = (\omega_0{}^2 - \delta^2)^{1/2}$. Tlumení sníží frekvenci.
- Amplituda exponenciálně klesá: $A(t) = A_0 \exp(-\delta t)$.
- Energie klesá s kvadrátem amplitudy: $E(t) = E_0 \exp(-2\delta t)$.
- Logaritmus podílu amplitud po jedné periodě (dekrement útlumu) je $\Lambda = \delta T$.
- Fázovým portrétem tlumených oscilací je spirála.

## Vynucené kmity, amplitudová rezonance

Na kmitajícím systém může působit nějaká vnější síla. Takovou obecnou sílu můžeme složit z mnoha harmonických sil nejrůznějších frekvencí. Zaměřme se proto na vnější sílu, která má jedinou frekvenci $\Omega$. Budeme tedy řešit rovnici tlumených oscilací doplněnou o vnější periodickou sílu o frekvenci $\Omega$:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + F_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\,. \tag{11.53}$$

V principu může být vnější síla jakákoli. Vzhledem k tomu, že problém je lineární, můžeme libovolnou sílu složit z harmonických sil typu exp(i$\Omega t$). Rovnici uvedeme na standardní matematický tvar, tj. seřadíme levou stranu od nejvyšších derivací hledané funkce po nejnižší derivace a na pravé straně ponecháme výrazy, které na hledané funkci nezávisí:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\,. \tag{11.54}$$

Obecné řešení lineární diferenciální rovnice s pravou stranou je součtem obecného řešení bez pravé strany (tzv. homogenního řešení) a libovolného řešení s pravou stranou (tzv. partikulárního řešení). Homogenní řešení známe, zapíšeme ho ve tvaru (10.24) fázově posunutého kosinu. Partikulární řešení lze hledat ve tvaru podobném pravé straně, tj. jako $A$ exp(i$\Omega t$). Celkové řešení bude

$$x(t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi) + A\,\mathrm{e}^{i\Omega t}\,. \tag{11.55}$$

První člen je řešení homogenní rovnice, představuje tlumený kmit, který postupně ustane. Jde tedy jen o *přechodový jev*. Druhý člen je partikulární řešení, které bude jediným nenulovým řešením po dosti dlouhé době. Jde o vynucený kmit s frekvencí vnější síly. Amplituda je obecně komplexní číslo, které způsobuje fázový posun vynuceného kmitu oproti vnější síle i původnímu kmitu. Nalezněme nyní tuto amplitudu $A$. Za tím účelem dosadíme námi nalezené řešení do původní rovnice (11.54). První část řešení dá po dosazení do levé strany nulu (jde o homogenní řešení s nulovou pravou stranou), postačí tedy dosadit jen partikulární řešení (vynucený kmit):

$$-A\Omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + 2\delta\,\mathrm{i}\,\Omega A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \omega_0^2 A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} = \frac{F_0}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\,. \tag{11.56}$$

Po zkrácení periodické části máme rovnici pro amplitudu $A$:

$$A\left(-\Omega^2 + 2\delta\,\mathrm{i}\,\Omega + \omega_0^2\right) = \frac{F_0}{m}. \tag{11.57}$$

Nyní již snadno dopočteme

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\delta\,\mathrm{i}\,\Omega\right)}. \tag{11.58}$$

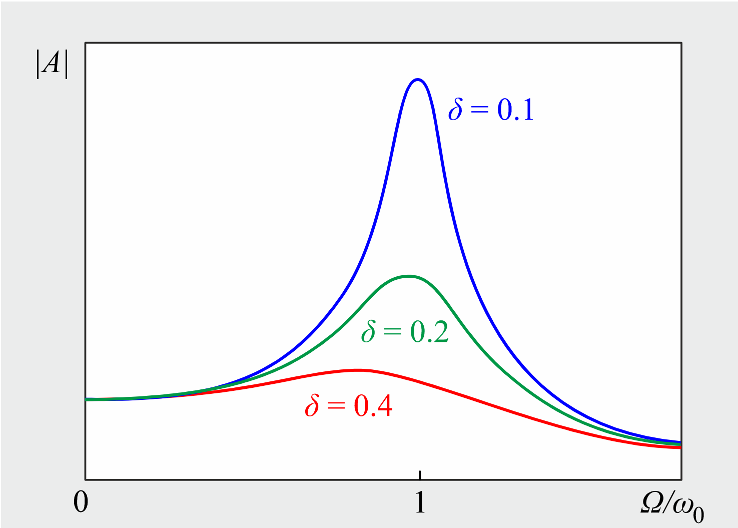
Výsledná amplituda je komplexní číslo, které závisí na frekvenci vynucující síly. Velikost tohoto komplexního čísla $|A|$ udává skutečnou velikost amplitudy kmitů a fáze $\psi$ tohoto komplexního čísla udává posun fáze kmitů oproti vynucující síle. Spočtěme nyní velikost amplitudy. Obecně je velikost komplexního čísla $z$ rovna $(z\,z^*)^{1/2}$, tedy

$$|A(\Omega)| = \sqrt{AA^*} = \sqrt{\frac{F_0/m}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\delta\,\mathrm{i}\,\Omega\right)}\cdot\frac{F_0/m}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta\,\mathrm{i}\,\Omega\right)}}.$$

Jmenovatele upravíme dle vztahu $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ a získáme výsledný vztah

$$\left|A(\Omega)\right| = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}. \tag{11.59}$$

Z následujícího grafu je patrné, že amplituda je pro určitou frekvenci vnější síly maximální (hovoříme o tzv. amplitudové rezonanci). Poloha maxima amplitudy závisí jak na frekvenci vynucující síly, tak na útlumu systému.




Určeme nyní rezonanční frekvenci. Nemusíme hledat extrém celé funkce (11.59), stačí najít extrém výrazu pod odmocninou:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega}\left(\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Omega_{\mathrm{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\,. \tag{11.60}$$

Snadné je i určení fázového posunutí, pro komplexní číslo je tangenta fáze rovna podílu imaginární a reálné části, tj. $\mathrm{tg}\,\psi = \mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z)$, viz (10.18), proto stačí nalézt imaginární a reálnou část výrazu (11.58) a udělat jejich podíl. K oddělení reálné a imaginární části pomůže následující trik:

$$\frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{1}{a + \mathrm{i}b}\frac{a - \mathrm{i}b}{a - \mathrm{i}b} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + b^2}\,.$$

Pomocí tohoto triku snadno nalezneme reálnou i imaginární část a tangentu fázového posunutí vynuceného kmitu oproti působící síle:

$$\mathrm{Re}(A) = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}, \tag{11.61}$$

$$\mathrm{Im}(A) = \frac{F_0}{m}\frac{-2\delta\Omega}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}; \tag{11.62}$$

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \qquad (11.63)$$

Měřitelná (reálná) část řešení (11.55) tedy je

$$x(t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi) + |A|\cos(\Omega t + \psi)\,; \qquad (11.64)$$

Shrňme výsledky, které jsme odvodili pro vynucené kmity, do přehledné tabulky:

**Vynucené kmity – přehled vztahů**

$$x(t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi) + |A|\cos(\Omega t + \psi)\,; \qquad (11.65)$$

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \qquad (11.66)$$

$$|A(\Omega)| = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \qquad (11.67)$$

$$\Omega_{\mathrm{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \qquad (11.68)$$

## Výkonová rezonance

Určeme ještě výkon přenášený v ustáleném stavu vnější silou na kmitající těleso

$$P(t) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{F\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F_0\cos(\Omega t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A|\cos(\Omega t + \psi) \qquad \Rightarrow$$

$$P(t) = -F_0|A|\,\Omega\cos(\Omega t)\sin(\Omega t + \psi).$$

Nás bude zajímat střední hodnota výkonu předaného za jednu periodu, tedy

$$\langle P\rangle = -F_0|A|\,\Omega\langle\cos(\Omega t)\sin(\Omega t + \psi)\rangle.$$

Funkci sinus rozepíšeme pomocí součtového vzorce $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$:

$$\langle P\rangle = -F_0|A|\,\Omega\left\langle\cos(\Omega t)\sin(\Omega t)\cos\psi + \cos^2(\Omega t)\sin\psi\right\rangle.$$

Střední hodnota první části je nulová (v polovině periody má funkce kladnou hodnotu a v po lovině zápornou. To lze snadno dokázat pomocí vztahu $\sin x\cos x = \sin(2x)/2$. Střední hodnotu druhé části budeme muset určit:

$$\langle P\rangle = -F_0|A|\,\Omega\sin\psi\left\langle\cos^2(\Omega t)\right\rangle.$$

Jaká je střední hodnota druhé mocniny kosinu za celou periodu? Využijeme vztah

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,, \qquad (11.69)$$

ze kterého plyne

$$\langle \cos^2 x \rangle + \langle \sin^2 x \rangle = 1 . \tag{11.70}$$

Obě střední hodnoty jsou stejné (sinus je jen posunutý kosinus), proto musí pro každou z nich platit jednoduchý vztah

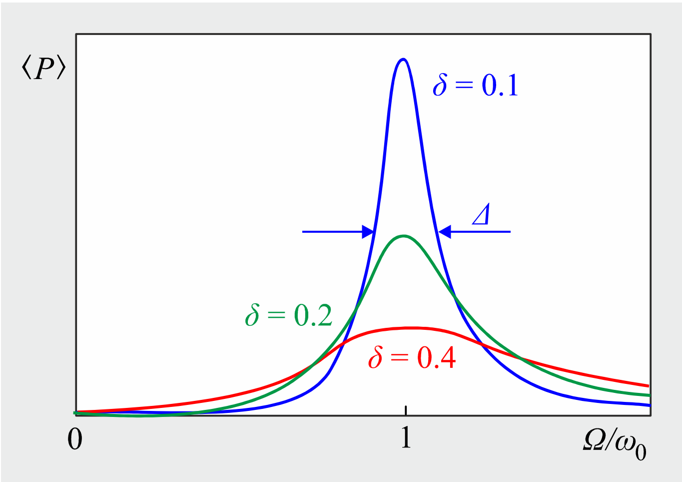
$$\langle \cos^2 x \rangle = \langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2} . \tag{11.71}$$

Pro hledanou střední hodnotu výkonu tedy vyjde:

$$\langle P \rangle = -\frac{F_0 |A|}{2} \Omega \sin\psi = -\frac{F_0}{2} \Omega \, |A| \sin\psi = -\frac{F_0}{2} \Omega \, \mathrm{Im}(A) .$$

Za imaginární část amplitudy dosadíme ze vztahu (11.62) a získáme výsledný vztah:

$$\langle P(\Omega) \rangle = \frac{F_0^2}{m} \frac{\delta \Omega^2}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2 \Omega^2} . \tag{11.72}$$




Přenesený výkon má maximum vždy na vlastní frekvenci netlumených oscilací. Můžeme to snadno ověřit najitím extrému pro výraz (11.72):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega} \left( \frac{\Omega^2}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2 \Omega^2} \right) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Omega_{\mathrm{rez}} = \omega_0 . \tag{11.73}$$

Poznamenejme, že ze vztahu (11.72) rezonanční křivky je možné určit šířku rezonanční křivky v polovině výšky. Po delším výpočtu vyjde (vztah se nemusíte učit, ale je užitečný)

$$\Delta = \frac{2\delta}{\omega_0} . \tag{11.74}$$

Převrácená hodnota se nazývá *jakost rezonance*

$$Q \equiv \frac{1}{\Delta} = \frac{\omega_0}{2\delta} . \tag{11.75}$$

Shrňme dosažené výsledky opět do tabulky

**Výkonová rezonance**

$$\langle P(\Omega)\rangle = \frac{F_0^2}{m}\frac{\delta\Omega^2}{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}, \tag{11.76}$$

$$\Omega_{\mathrm{rez}} = \omega_0\,, \tag{11.77}$$

$$\Delta = \frac{2\delta}{\omega_0}, \tag{11.78}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}. \tag{11.79}$$

## Skládání kmitů

Kmity různých frekvencí, směrů, amplitud a fází lze skládat. Výsledkem složení několika jednoduchých kmitů jsou často velmi bizarní a komplikované kmity. Skládáním harmonických kmitů se zabývá Fourierova analýza, se kterou se seznámíte později. V tomto textu se omezíme jen na několik jednoduchých příkladů. Nejprve napišme vztah pro složení dvou jednoduchých harmonických kmitů, které probíhají ve stejném směru. Výsledkem bude

$$x(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\psi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\psi_2)\,. \tag{11.80}$$

Velmi zajímavá situace nastane, pokud budou amplitudy a fáze stejné a frekvence obou skládaných kmitů blízké. K výpočtu využijeme součtový vzorec

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \tag{11.81}$$

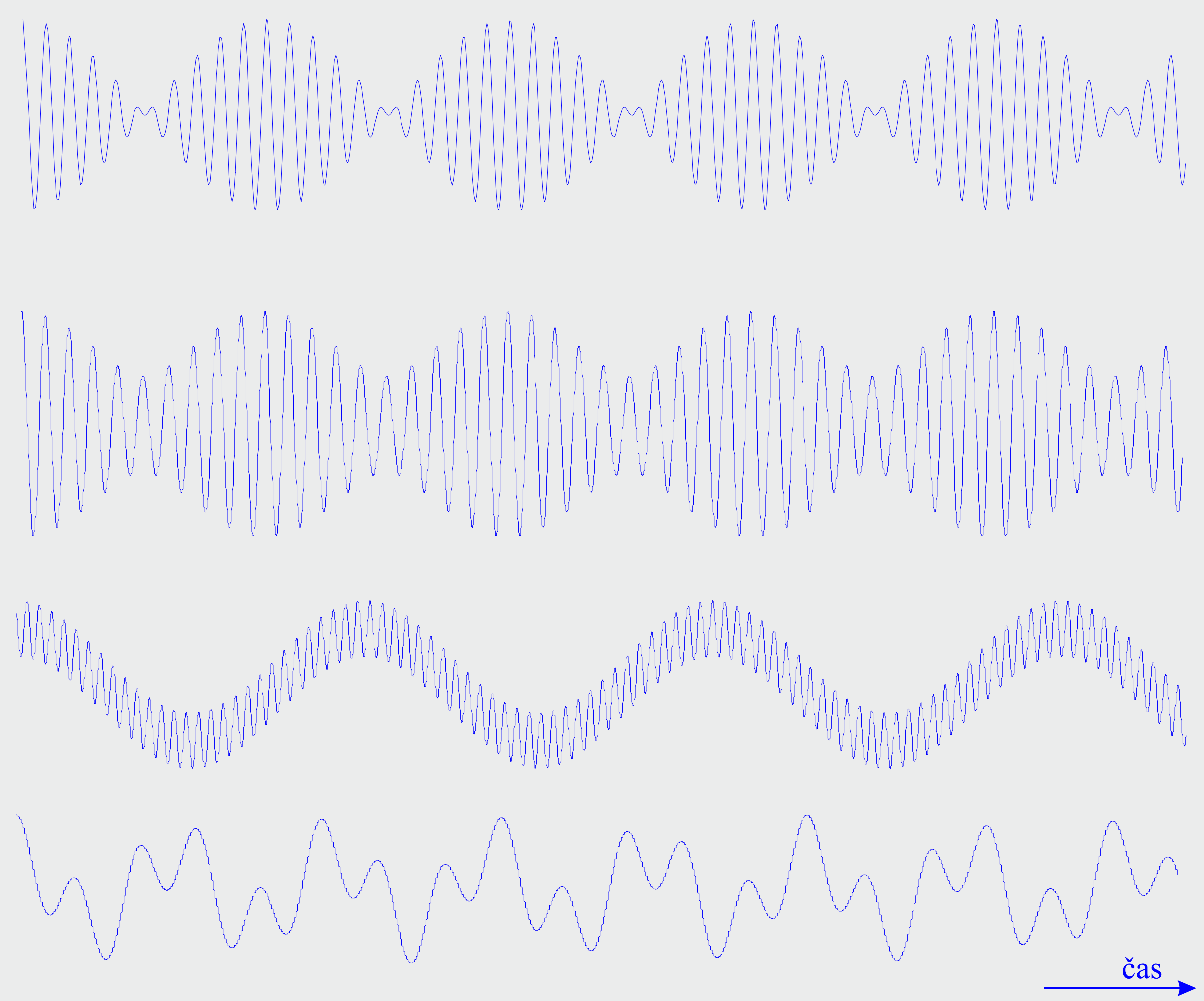
Výsledkem složení kmitů $A_0\cos\omega_1 t + A_0\cos\omega_2 t$ bude

$$x(t) = A(t)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right); \qquad A(t)\equiv 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right). \tag{11.82}$$

Ve výsledném kmitu jsou zastoupeny dvě frekvence: 1) aritmetický průměr obou blízkých frekvencí, který se od nich příliš neliší; 2) polovina rozdílu obou blízkých frekvencí – jde o natolik nízkou frekvenci, že se funkce kosinus, která ji obsahuje, mění jen velmi zvolna, a tak moduluje amplitudu (tvar obálky kmitů). Vznikají charakteristické *zázněje* neboli *rázy*. Rázy se opakují od uzlu k uzlu, jejich frekvence je dvojnásobná než frekvence modulace obálky, tj.

$$\omega_{\mathrm{rázy}} = \omega_2-\omega_1\,. \tag{11.83}$$

Na následujícím obrázku jsou typické rázy pro dvě blízké frekvence (vodorovně plyne čas). Pokud nejsou amplitudy skládaných kmitů stejné a frekvence zůstanou blízké, zmizí uzly, jak je patrné na druhém ze série obrázků. Budeme-li skládat kmity zcela odlišných frekvencí, může být výsledek podobný tomu na třetím obrázku. A při složení dvou obecných kmitů můžete obdržet něco podobného jako na posledním obrázku. Zkuste si v nějakém softwaru (například MATHEMATICA, MATLAB) skládat různé kmity ve shodném směru.




Kmity můžeme také skládat ve dvou kolmých směrech. Je to podobné, jako když na vodorovnou osu osciloskopu přivedeme jeden signál a na svislou osu druhý signál:

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1)\,,\qquad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)\,. \tag{11.84}$$

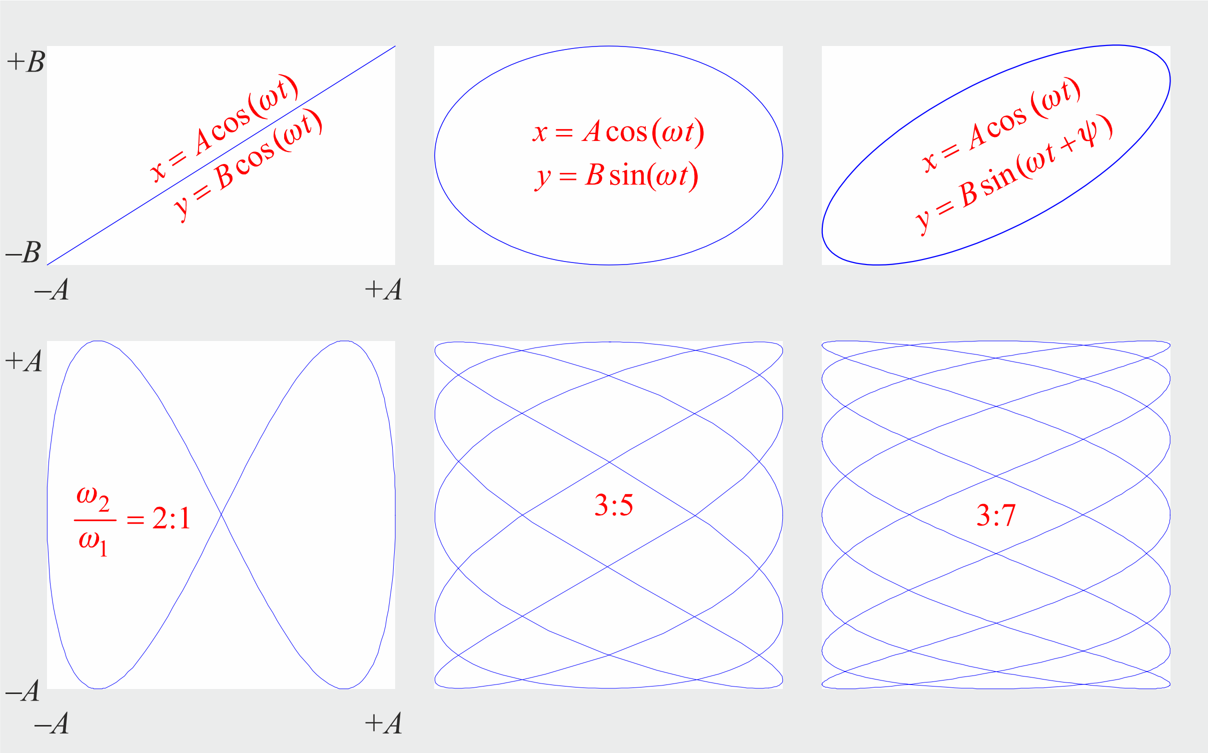
Pokud budou kmity ve fázi a se stejnou frekvencí, dostaneme jako výsledek periodický pohyb po úsečce:

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t)\,,\\ y &= B\cos(\omega t)\,. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{B}{A} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{B}{A}x\,; \quad \begin{aligned} &x \in \langle -A, +A \rangle\,,\\ &y \in \langle -B, +B \rangle\,. \end{aligned} \tag{11.85}$$

Situace je znázorněna na prvním obrázku následující série. Při složení dvou kmitů stejných frekvencí a fázově posunutých o 90° (jeden z kosinů se stane sinem), dostaneme elipsu:

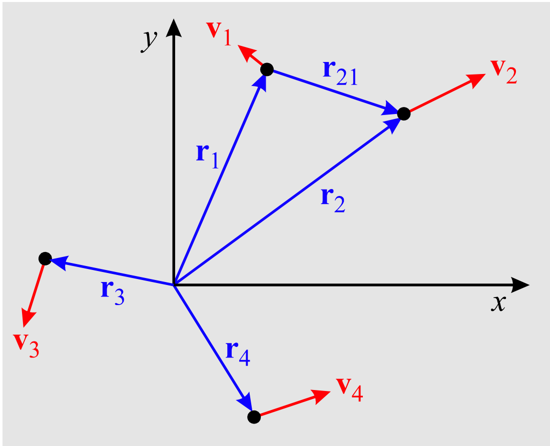
$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t)\,,\\ y &= B\sin(\omega t)\,. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1\,; \quad \begin{aligned} &x \in \langle -A, +A \rangle\,,\\ &y \in \langle -B, +B \rangle\,. \end{aligned} \tag{11.86}$$

Výsledek je znázorněn na druhém obrázku. Pokud bude fázový posun jiný než 90°, bude elipsa pootočená. Při skládání kmitů ve dvou navzájem kolmých směrech vznikají pro frekvence v poměru malých celých čísel tzv. Lissajousseovy obrazce. Pojmenovány jsou podle francouzského fyzika, jehož celé jméno je Jules Antoine Lissajous (1822–1880). Poměr počtu dotyků křivek na opsaném obdélníku je roven poměru frekvencí. Je-li poměr frekvencí iracionální, vyplní kmity po dosti dlouhé době celý obdélník $\langle -A, A\rangle \times \langle -B, B\rangle$.


+B
$x = A\cos(\omega t)$
$y = B\cos(\omega t)$
–B
–A
+A
$x = A\cos(\omega t)$
$y = B\sin(\omega t)$
$x = A\cos(\omega t)$
$y = B\sin(\omega t + \psi)$
+A
$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2{:}1$
–A
–A
+A
3:5
3:7

# 12 SOUSTAVA HMOTNÝCH BODŮ

Nyní se naučíme popisovat soustavu hmotných bodů. Předpokládejme, že máme $N$ hmotných bodů 1, 2, ..., $N$. Na následujícím obrázku jsou pro přehlednost vykresleny pouze čtyři z nich.




Každý z těchto hmotných bodů (v dalším textu budeme pro jednoduchost hovořit o částicích) je popsán polohovým vektorem $\mathbf{r}_a$, rychlostí $\mathbf{v}_a$, má hmotnost $m_a$ a náboj $q_a$. Index $a$ probíhá přes všechny body soustavy, tj. $a = 1 \ldots N$. Označme

$$\mathbf{r}_{ab} \equiv \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b \tag{12.1}$$

rozdíl polohových vektorů částic $a$ a $b$. Význam rozdílu dvou vektorů jsme řešili v příkladu 1.7. Na obrázku je znázorněn tento rozdíl pro druhou a první částici, tj. vektor $\mathbf{r}_{21}$. Vidíme, že míří od první částice k druhé, proto se mu říká vzájemný (relativní) vektor obou částic. Ve směru tohoto vektoru budou také mířit konzervativní síly, kterými na sebe částice mohou působit. Velikost vzájemného vektoru dvou částic je vzdálenost obou částic, tj.

$$r_{ab} \equiv |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b| = \sqrt{(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)\cdot(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}\,. \tag{12.2}$$

## První věta impulzová

Pohybovou rovnici $a$-té částice můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_a \mathbf{v}_a) = \mathbf{F}_a^{(\mathrm{ext})} + \sum_{b=1}^{N} \mathbf{F}_{ab}\,. \tag{12.3}$$

První člen na pravé straně reprezentuje vnější (externí) sílu. Druhý člen je součtem všech sil, kterými působí na částici $a$ ostatní částice $b$. Částice nepůsobí sama na sebe, proto předpokládáme, že $\mathbf{F}_{aa}$ je nulové. Sečtěme nyní pohybové rovnice pro všechny částice naší soustavy:

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_a \mathbf{v}_a) = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{(\mathrm{ext})} + \sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} \mathbf{F}_{ab}\,. \tag{12.4}$$

Na levé straně vytkneme časovou derivaci před sumu. V ní pak zůstane součet všech hybností částic, čili jejich celková hybnost. První člen na pravé straně je součtem všech externích sil na naší soustavu, tedy celková působící externí síla. Druhý člen na pravé straně je nulový, veškeré vnitřní síly se totiž vzájemně vyruší, protože ze zákona akce a reakce plyne, že $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$, takže polovina sil je se znaménkem kladným a druhá polovina se znaménkem záporným, což dá v součtu nulu. Celkem tedy máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}\,, \tag{12.5}$$

kde

$$\mathbf{P} \equiv \sum_a m_a \mathbf{v}_a\,; \qquad \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})} \equiv \sum_a \mathbf{F}_a^{(\mathrm{ext})}\,. \tag{12.6}$$

Odvozený zákon se nazývá *první věta impulzová*. Říká, že časová změna celkové hybnosti soustavy je rovna celkové externí síle působící na soustavu. Veškeré vnitřní síly se vzájemně vyruší. Pokud je celková externí síla nulová, je $\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t = 0$ a celková hybnost soustavy se zachovává. V součtech pro přehlednost již nepíšeme horní meze. První větu impulzovou lze přepsat za pomoci definice hmotného středu (8.22) ještě do jiného použitelného tvaru:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sum_a m_a \mathbf{r}_a = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}\,; \\ &\mathbf{r}_\mathrm{S} \equiv \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{M} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(M\,\mathbf{r}_\mathrm{S}\right) = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}. \tag{12.7}$$

Výsledek je velmi jednoduchý:

$$\begin{aligned} &M\,\ddot{\mathbf{r}}_\mathrm{S} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}\,; \\ &M \equiv \sum_a m_a\,. \end{aligned} \tag{12.8}$$

Jde o pohybovou rovnici celé soustavy, kde jako hmotnost vystupuje celková hmotnost soustavy a jako polohový vektor je zde polohový vektor hmotného středu soustavy.

**Zapamatujte si:**

Pro soustavu hmotných bodů můžeme pohybovou rovnici psát ve dvou jednoduchých tvarech:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})} \qquad \text{nebo} \qquad M\,\ddot{\mathbf{r}}_\mathrm{S} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}\,.$$

Veličina $\mathbf{P}$ je celková hybnost soustavy, $M$ je celková hmotnost soustavy, $\mathbf{r}_\mathrm{S}$ je polohový vektor hmotného středu a $\mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}$ je výslednice všech vnějších sil. Výslednice všech vnitřních sil je nulová. Pokud je celková externí síla nulová (například pro izolovanou soustavu), zachovává se celková hybnost soustavy a hmotný střed se pohybuje konstantní rychlostí po přímce.

## Druhá věta impulzová

Obdobně budeme postupovat pro rotační pohyby. Napišme nejprve pohybovou rovnici pro jednu jedinou částici:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_a \times m_a \mathbf{v}_a) = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{(\mathrm{ext})} + \sum_b \left(\mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ab}\right). \tag{12.9}$$

Nalevo je časová změna momentu hybnosti částice $a$. První člen napravo je moment externí síly působící na částici $a$, druhý člen je součtem momentů sil od ostatních částic soustavy. Opět předpokládáme, že částice nepůsobí sama na sebe, tj. platí $\mathbf{F}_{aa} = 0$. Sečtěme nyní tyto rovnice pro celou soustavu

$$\sum_a \left[ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{r}_a \times m_a \mathbf{v}_a) \right] = \sum_a \left( \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{(\mathrm{ext})} \right) + \sum_a \sum_b (\mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ab}) . \tag{12.10}$$

Vytkneme-li na levé straně časovou derivaci před součet, získáme časovou změnu celkového momentu hybnosti všech částic. První člen na pravé straně je celkový moment externí síly působící na částice. V posledním členu na pravé straně se vždy vzájemně vyruší členy

$$\mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ab} + \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_{ba} = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ab} - \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_{ab} = (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}_{ab} ,$$

neboť vzájemný polohový vektor $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ míří ve stejném směru jako síla $\mathbf{F}_{ab}$ a vektorový součin rovnoběžných vektorů je nulový. Pohybovou rovnici pro celou soustavu tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{B} = \mathbf{M}^{(\mathrm{ext})} , \tag{12.11}$$

kde jsme označili

$$\mathbf{B} \equiv \sum_a (\mathbf{r}_a \times m_a \mathbf{v}_a) ; \qquad \mathbf{M}^{(\mathrm{ext})} \equiv \sum_a \left( \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{(\mathrm{ext})} \right) . \tag{12.12}$$

Odvozený zákon se nazývá druhá věta impulzová. Časová změna celkového momentu hybnosti soustavy je rovna celkovému momentu působících externích sil. Momenty vnitřních sil působících na soustavu se vzájemně vyruší. Pokud nepůsobí externí síly, moment hybnosti celé soustavy se zachovává.

**Zapamatujte si:**

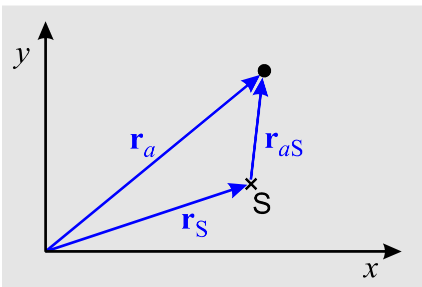
Pro soustavu hmotných bodů můžeme pohybovou rovnici pro rotační pohyb psát ve tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{B} = \mathbf{M}^{(\mathrm{ext})} .$$

Veličina $\mathbf{B}$ je celkový moment hybnosti soustavy, $\mathbf{M}^{(\mathrm{ext})}$ je celkový moment vnějších sil působících na soustavu. Celkový moment všech vnitřních sil je nulový. Pokud je celkový moment externích sil nulový, zachovává se celkový moment hybnosti soustavy.

## Königova věta

Odvoďme na závěr ještě vztah pro kinetickou energii soustavy částic. Polohový vektor částice zapíšeme jako součet polohového vektoru hmotného středu soustavy a polohového vektoru částice vzhledem k hmotnému středu:



$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_\mathrm{S} + \mathbf{r}_{a\mathrm{S}} \,. \tag{12.13}$$

Nyní již snadno odvodíme formulku pro kinetickou energii soustavy:

$$W_k = \sum_a \left( \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 \right) = \sum_a \left( \frac{1}{2} m_a (\mathbf{v}_\mathrm{S} + \mathbf{v}_{a\mathrm{S}})^2 \right) =$$

$$= \sum_a \left( \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_\mathrm{S}^2 \right) + \sum_a \left( m_a \mathbf{v}_\mathrm{S} \cdot \mathbf{v}_{a\mathrm{S}} \right) + \sum_a \left( \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_{a\mathrm{S}}^2 \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left( \sum_a m_a \right) \mathbf{v}_\mathrm{S}^2 + \mathbf{v}_\mathrm{S} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_a \left( m_a \mathbf{r}_{a\mathrm{S}} \right) + \sum_a \left( \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_{a\mathrm{S}}^2 \right).$$

V prvním členu vystupuje součet všech hmotností, tedy celková hmotnost celé soustavy. Druhý člen je nulový (plyne z definice hmotného středu) a poslední člen je kinetickou energií všech částic vzhledem k hmotnému středu. Výsledek je

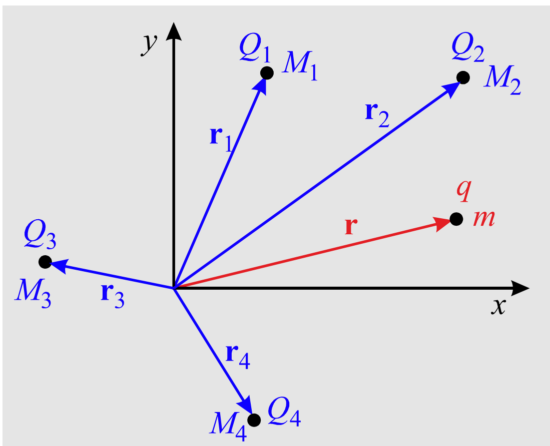
$$W_k = \frac{1}{2} M \, \mathbf{v}_\mathrm{S}^2 + \sum_a \left( \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_{a\mathrm{S}}^2 \right). \tag{12.14}$$

**Zapamatujte si (Königova věta):**

Pro soustavu hmotných bodů (částic) můžeme kinetickou energii rozložit na součet kinetické energie hmotného středu a kinetické energie všech částic vzhledem k hmotnému středu. Tomuto rozkladu říkáme Königova věta. Je pojmenována podle německého matematika Samuela Königa (1712–1757).

## Potenciál a intenzita

Přidejme nyní do naší soustavy testovací částici, která bude v nějakém místě testovat vliv ostatních částic. Na obrázku je znázorněna červeně (od ostatních částic se nijak neliší)




Spočtěme nyní potenciální energii testovací částice v gravitačním a elektrostatickém poli všech ostatních částic:

$$W_\mathrm{G} = -G \frac{m M_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - G \frac{m M_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \cdots - G \frac{m M_N}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_N|} \,; \tag{12.15}$$

$$W_E = \frac{qQ_1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \frac{qQ_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{qQ_N}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_N|}. \quad (12.16)$$

Celková potenciální energie testovací částice bude součtem obou členů (tedy potenciální energie gravitační a elektrostatické). Pojďme nyní oba výrazy prozkoumat. Ve všech členech gravitační potenciální energie se vyskytuje hmotnost $m$ testovací částice. Je proto výhodné celou rovnici touto hmotností vydělit a zavést pro zkoumané místo prostoru tzv. gravitační potenciál vztahem

$$\phi_G \equiv \frac{W_G}{m} = -G\frac{M_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} - G\frac{M_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} - \cdots - G\frac{M_N}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_N|}.. \quad (12.17)$$

Takový výraz nezávisí na hmotnosti testovací částice, ale jen na její poloze, je tedy charakteristikou daného místa a v různých místech bude mít různou velikost. Rozměr gravitačního potenciálu snadno určíme z jeho definice:

$$\phi_G \equiv \frac{W_G}{m}; \qquad [\phi_G] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}. \quad (12.18)$$

Zcela obdobným způsobem můžeme zavést potenciál elektrického pole. Povšimněme si, že potenciální energie (12.16) testovací částice má ve všech členech náboj této částice. Bude proto výhodné pro testovací částici s nábojem $q$ zavést tzv. potenciál elektrického pole, který měříme ve voltech (V)

$$\phi_E \equiv \frac{W_E}{q}; \qquad [\phi_E] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}. \quad (12.19)$$

Tento potenciál nezávisí na náboji testovací částice, je ale samozřejmě funkcí její polohy. Obdobně, jako jsme postupovali u energie, můžeme postupovat u síly. Výsledné veličiny (síla dělená hmotností nebo nábojem) jsou tzv. intenzity gravitačního a elektrického pole:

$$\mathbf{E}_G \equiv \frac{\mathbf{F}_G}{m}; \qquad [\mathbf{E}_G] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}. \quad (12.20)$$

$$\mathbf{E}_E \equiv \frac{\mathbf{F}_E}{q}; \qquad [\mathbf{E}_E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}. \quad (12.21)$$

**Zapamatujte si (gravitační pole):**

Chceme-li popsat gravitační působení soustavy částic v určitém místě, vložíme do tohoto místa testovací částici o hmotnosti $m$ a náboji $q$. Pro popis gravitačního pole je výhodné zavést potenciál a intenzitu vztahy

$$\phi_G \equiv \frac{W_G}{m}; \qquad \mathbf{E}_G \equiv \frac{\mathbf{F}_G}{m},$$

$$W_G = m\phi_G; \qquad \mathbf{F}_G = m\mathbf{E}_G.$$

Jak je patrné z druhého řádku, vztahy fungují i naopak. Známe-li průběh potenciálu a intenzity, snadno určíme pro částici v určitém místě její potenciální energii a sílu, která na ni působí. Z posledního vztahu je patrné, že intenzita gravitačního pole při povrchu Země je tíhové zrychlení.

**Zapamatujte si (elektrostatické pole):**

Obdobně lze postupovat i v elektrostatickém poli, veličiny jsou ale vztažené na náboj:

$$\phi_\mathrm{E} \equiv \frac{W_\mathrm{E}}{q}\,; \qquad \mathbf{E}_\mathrm{E} \equiv \frac{\mathbf{F}_\mathrm{E}}{q}\,,$$

$$W_\mathrm{E} = q\,\phi_\mathrm{E}\,; \qquad \mathbf{F}_\mathrm{E} = q\,\mathbf{E}_\mathrm{E}\,.$$

Povšimněte si, že potenciál elektrického pole nemá stejný rozměr jako potenciál gravitačního pole. Ani intenzity obou polí nemají stejný rozměr. Pokud v dalším textu vynecháme index označující, zda jede o gravitační nebo elektrický potenciál, automaticky budeme předpokládat, že jde o potenciál elektrického pole.

Síla je minus gradientem potenciální energie, proto bude obdobný vztah platit i pro intenzitu a potenciál (tyto veličiny jsou jen vyděleny nábojem nebo hmotností testovací částice):

$$\mathbf{F} = -\nabla W_\mathrm{p} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{E} = -\nabla\phi\,. \tag{12.22}$$

Vztah platí jak pro gravitační, tak pro elektrický potenciál. Pokud v dalším textu nebudeme psát indexy, půjde vždy o elektrické veličiny. Intenzitu elektrického pole můžeme měřit ze silového působení na testovací částici, tj. ze vztahu

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E}\,. \tag{12.23}$$

Elektrické pole 1 V/m je takové pole, které působí na bodový objekt s nábojem 1 C silou 1 N.

# 13 ANALYTICKÁ MECHANIKA

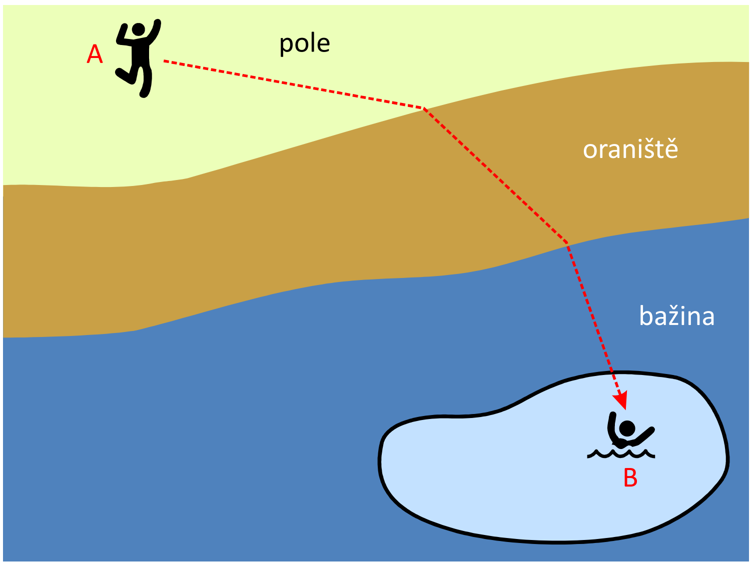
Newtonovy pohybové rovnice jsou koncipovány pro použití v kartézské souřadnicové soustavě, což nemusí být výhodné například při popisu pohybu planety kroužící kolem Slunce nebo elektronu pohybujícího se v magnetickém poli. Proto najdeme pohybové rovnice, které jsou použitelné pro jakoukoli soustavu parametrů $q_1$, $q_2$ až $q_N$, které systém popisují. Budeme požadovat, aby tyto parametry byly nezávislé a zcela popisovaly daný pohyb. Potom je nazýváme ***zobecněné souřadnice*** pohybu. Pro rovinné kyvadlo může jít o úhel $\alpha(t)$ popisující výchylku, pro planetu pohybující se v rovině kolem Slunce půjde o vzdálenost ke Slunci $r(t)$ a azimutální úhel $\varphi(t)$ odečítaný od průletu perihéliem, pro jednoduchý elektrický obvod může jít o náboj $Q(t)$ proteklý určitým místem obvodu. Za zobecněné rychlosti budeme chápat časové změny těchto parametrů:

$$v_k \equiv \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} \tag{13.1}$$

Časové změny úhlů jsou úhlové rychlosti, časové změny ploch jsou plošné rychlosti, časová změna proteklého náboje je elektrický proud atd. V dalším textu odvodíme pohybové rovnice pro zobecněné souřadnice, nazývají se Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Prvním druhem rovnic se zabývat nebudeme, jde o rovnice popisující různé vazby v systému, což je užitečné například ve stavebnictví. Pro naše účely postačí rovnice druhého druhu, které budeme zkráceně nazývat ***Lagrangeovy rovnice***.

## Integrální principy a variační počet

Představme si, že se v rybníku topí člověk. Mezi zachráncem a rybníkem je bažinatý pás, ve kterém se velmi těžko pohybuje, pás oraniště a pole. Zachránce musí volit optimální cestu, aby se k tonoucímu dostal co nejrychleji (takovou cestou nemusí být nejkratší spojnice mezi tonoucím a zachráncem):




Celkový čas, po který se bude pohybovat zachránce, určíme takto:

$$v = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}l}{v} \qquad \Rightarrow$$

$$T = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}l}{v} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{v(x,y)} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\mathrm{d}x\,. \tag{13.2}$$

Předpokládáme, že známe prostorovou závislost rychlosti $v(x, y)$. Ta je dána typem terénu (pole, oraniště, bažina). Nyní hledáme takovou křivku $y(x)$, aby předchozí integrál měl minimální hodnotu. Řešením úloh tohoto typu se zabývá variační počet. V diferenciálním počtu hledáme extrémy křivek, výsledkem jsou jednotlivé body. Ve variačním počtu hledáme celé funkce, pro něž má nějaký integrál extremální hodnotu.

## Hamiltonův princip nejmenší akce

Příklad topícího se člověka vedl na optimalizaci integrálu typu

$$T(x_A, x_B) = \int_{x_A}^{x_B} F\left(x, y(x), y'(x)\right) \mathrm{d}x\,. \tag{13.3}$$

Integrand je funkcí nezávislé proměnné $x$, hledané funkce $y(x)$ a její první derivace $y'(x)$. Výsledkem optimalizace by měla být hledaná trajektorie či křivka $y(x)$. V úvodním příkladu zachránce volil trajektorii tak, aby celkový čas byl nejkratší. Všechny ostatní trajektorie (tzv. virtuální – nerealizované) jsou sice v principu možné, ale zachránce se po nich bude pohybovat delší dobu. Integrál výše uvedeného typu se nazývá funkcionál. Funkcionál je zobrazení, při kterém funkci přiřadíme číslo (v našem případě celkový čas).

Základní myšlenka integrálních principů mechaniky je velmi podobná. Ze všech možných trajektorií systému se realizovala jen ta, která je nějakým způsobem výhodnější než ostatní. Hledisko výhodnosti se uvažuje obdobné úvodnímu příkladu, nezávislou proměnnou je ale čas, protože hledáme křivku $\mathbf{q}(t)$, kde $\mathbf{q}$ je množina všech zobecněných souřadnic

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots q_N) \tag{13.4}$$

Budeme předpokládat, že existuje funkce času $t$, zobecněných souřadnic a jejich prvních derivací (tj. stavu)

$$L(t, q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)$$

taková, že ze všech možných závislostí $q_k(t) = f_k(t)$ se v přírodě realizuje ta, pro kterou má integrál

$$S(t_A, t_B) \equiv \int_{t_A}^{t_B} L(t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)\, \mathrm{d}t \tag{13.5}$$

extrém (minimum). Funkci $L(t, \mathbf{q}, \mathrm{d}\mathbf{q}/\mathrm{d}t)$ nazýváme *Lagrangeova funkce* (*lagranžián*) a integrál $S(t_A, t_B)$ *integrál akce*. Důležitou součástí teoretické fyziky je hledání lagranžiánů. Pokud máme pro daný problém Lagrangeovu funkci, z níž plynou závislosti zobecněných souřadnic, které pozorujeme v přírodě, můžeme být spokojeni a problém jsme správně popsali. Pokud z naší Lagrangeovy funkce plynou časové vývoje zobecněných souřadnic, které se v přírodě nevyskytují, je naše Lagrangeova funkce špatná a musíme hledat dál. Dnes známe dobře Lagrangovy funkce pro jednoduché mechanické problémy, pro pohyby částic v elektromagnetických polích, pro silnou interakci, pro slabou interakci a mnoho dalších jevů. Pro mnoho problémů ale dosud Lagrangeovu funkci neznáme.

**Zapamatujte si**

*Hamiltonův princip nejmenší akce* je představa, že existuje funkce $L(t, \mathbf{q}, \mathrm{d}\mathbf{q}/\mathrm{d}t)$ taková, že trajektorie těles minimalizují integrál $S = \int L\mathrm{d}t$. Věříme, že takovou funkci je možné vždy nalézt. Funkci $L$ nazýváme *Lagrangeova funkce*, integrál $S$ nazýváme *integrál akce*. V dalším textu nalezneme Lagrangeovu funkci pro jednoduché mechanické problémy.

## Lagrangeovy rovnice

Zaveďme *virtuální posunutí*

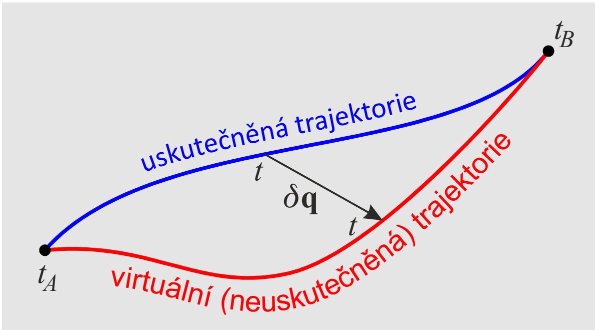
$$\delta q_k = q_{k,\mathrm{virt}}(t) - q_{k,\mathrm{real}}(t)\,, \quad \text{resp.}$$
$$\delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_{\mathrm{virt}}(t) - \mathbf{q}_{\mathrm{real}}(t) \tag{13.6}$$

jako infinitezimální rozdíl virtuální (myšlené) trajektorie a reálné (uskutečněné) trajektorie. Body na obou trajektoriích si odpovídají ve stejném čase (tzv. *isochronní variace*). Uveďme dvě základní vlastnosti virtuálních posunutí (isochronnéích variací):

$$\delta \mathbf{q}(t_A) = \delta \mathbf{q}(t_B) = 0\,, \tag{13.7}$$

$$\delta \dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \mathbf{q}\,. \tag{13.8}$$

První vlastnost vyjadřuje, že virtuální i reálné trajektorie začínají a končí ve stejném bodě prostoru zobecněných souřadnic. Druhá vlastnost vyjadřuje záměnnost operací derivace d/d$t$ a variace δ. (to je možné jen proto, že virtuální posunutí začíná a končí ve stejném čase)




Odvoďme nyní nutné podmínky extremálnosti integrálu akce:

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \delta\, L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k \right) \mathrm{d}t = 0\,,$$

kde jsme z důvodu isochronnosti vynechali diferenciaci podle času. Ve druhém členu zaměníme pořadí variace a časové derivace ($\delta \mathrm{d}q_k/\mathrm{d}t = \mathrm{d}/\mathrm{d}t\, \delta q_k$) a poté integrujeme per partes:

$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k \right) \mathrm{d}t \;+\; \left[ \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k \right]_{t_A}^{t_B} = 0\,.$$

Poslední člen je vzhledem k (13.7) nulový, a proto

$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \,\mathrm{d}t \;=\; 0\,.$$

Tato rovnost musí platit pro každé dva časy $t_A$, $t_B$ a každé virtuální posunutí $\delta q_k$. Protože jsou $\delta q_k$ nezávislá, musí být závorka v předchozím vztahu pro každé $k$ nutně nulová, tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0; \qquad k = 1, \dots, N. \tag{13.9}$$

Tyto rovnice představují *nutné podmínky* extremálnosti integrálu akce a nazývají se *Lagrangeovy rovnice*. Z matematického hlediska jde o obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu pro extremální trajektorii $q_k(t)$; $k = 1 \dots N$, která je realizována v přírodě. Vidíme, že Hamiltonův princip nejmenší akce vede opět k popisu pohybu pomocí obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, jako tomu bylo v případě Newtonova pohybového zákona.

**Poznámka 1.** Lagrangeovy rovnice jsou pohybovými rovnicemi našeho systému v zobecněných souřadnicích. Jejich tvar nezávisí na volbě souřadnicové soustavy. Newtonovy rovnice musí být speciálním případem v kartézském souřadnicovém systému.

**Poznámka 2.** Rovnice je třeba doplnit o počáteční podmínky

$$\begin{aligned} q_k(t_0) &= q_{k0}\,, \\ \dot{q}_k(t_0) &= \dot{q}_{k0}\,, \end{aligned} \tag{13.10}$$

tj. zadat stav v nějakém počátečním čase $t_0$.

**Poznámka 3.** Lagrangeova funkce není jednoznačně určitelná, různé Lagrangeovy funkce mohou vést ke stejným Lagrangeovým rovnicím.

**Poznámka 4.** Hamiltonův princip v uvedené podobě platí jen pro nedisipativní systémy, tj. systémy ve kterých nedochází k tepelným ztrátám.

**Poznámka 5.** Lagrangeovy rovnice jsou jen nutnými podmínkami extremálnosti integrálu akce, nikoli postačujícími.

**Poznámka 5.** V matematice se nutné podmínky minima funkcionálu nazývají Eulerovy rovnice, ve fyzice nutné podmínky extremálnosti integrálu akce Lagrangeovy rovnice. Někdy se těmto rovnicím jednoduše říká Eulerovy-Lagrangeovy rovnice.

Nejdůležitější úlohou daného vědního oboru je volba správné Lagrangeovy funkce. Zvolíme-li určitý tvar Lagrangeovy funkce, můžeme řešit příslušné Lagrangeovy rovnice a tato řešení porovnat s experimentálním průběhem trajektorií. Nesouhlasí-li, je vybraná Lagrangeova funkce špatná. Volba Lagrangeovy funkce patří mezi základní *axiomy* budované teorie. Zpravidla se za $L$ vybírá vhodná skalární funkce (její hodnota nezávisí na volbě souřadnic). Pro jednoduché mechanické problémy známe dvě důležité skalární funkce: kinetickou a potenciální energii. V analytické mechanice je z historických důvodů zvykem značit kinetickou energii symbolem $T$ a potenciální energii symbolem $V$. V nejjednodušším případě by Lagrangeova funkce mohla být jejich lineární kombinací $L = \alpha T + \beta V$. Určeme koeficienty $\alpha$, $\beta$ v jednoduchém případě konzervativního jednorozměrného pole v kartézské souřadnicové soustavě, kdy výsledek musí splynout s Newtonovou pohybovou rovnicí:

$$L = \alpha T + \beta V = \alpha \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \beta V(x)\,. \tag{13.11}$$

Tohoto kandidáta na Lagrangeovu funkci dosadíme do Lagrangeových rovnic (13.9):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\alpha \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \beta V(x)\right) - \frac{\partial L}{\partial x}\left(\alpha \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \beta V(x)\right) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha m\dot{x} - \beta\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{x} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{x} = -\frac{\beta}{\alpha}F\,.$$

Je zřejmé, že například pro volbu $\alpha = 1, \beta = -1$ dostáváme správnou pohybovou rovnici. Proto

$$L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - V(t,\mathbf{q}) \quad . \tag{13.12}$$

Tato volba umožní řešit jednoduché úlohy pro nejrůznější konzervativní pole. Kinetická energie je funkcí rychlosti, může ale záviset i na souřadnicích. Potenciální energie závisí na poloze, může záviset i na čase. Pro komplikovanější systémy je rozdělení Lagrangeovy funkce na kinetickou a potenciální energii značně obtížné a navíc zbytečné. Jedinou úlohou mechaniky je volba správné Lagrangeovy funkce pro daný systém tak, aby řešení příslušných Lagrangeových rovnic odpovídalo pozorovaným trajektoriím.

Vhodnou Lagrangeovu funkci lze nalézt i pro relativistickou mechaniku, pohyby nabitých částic v elektrických a magnetických polích, pro teorii elektromagnetického pole, pro obecnou teorii relativity i pro další fyzikální obory. Vždy z ní potom plynou rovnice popisující daný problém – například v teorii elektromagnetického pole jsou to Maxwellovy rovnice. V celém tomto textu se omezujeme na nedisipativní systémy, v nichž nedochází k přeměně některé z forem energie na teplo.

**Zapamatujte si**

Pohybové rovnice mají v zobecněných souřadnicích tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0\,.$$

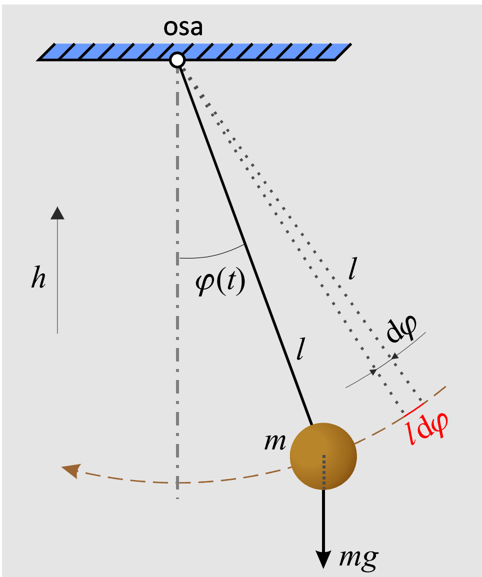
Za lagranžián lze pro konzervativní pole zvolit rozdíl kinetické a potenciální energie

$$L = T - V\,.$$

Nezapomeňte si propočítat jednoduché příklady uvedené ve skriptu pro semináře z Fyziky 1! Zde uvedeme jediný příklad pro pohyb kuličky na závěsu (kyvadlo):

◖ **Příklad 13.1**: Kulička na závěsu

**Zadání:** Nalezněte pohybové rovnice kuličky na závěsu




**Řešení:** Za jedinou zobecněnou souřadnici budeme považovat úhel $\varphi$. Pohne-li se závěs kyvadla o infinitezimální úhel d$\varphi$, opíše těleso dráhu

$$\mathrm{d}s = l\,d\varphi \tag{13.13}$$

Kinetická energie tělesa proto bude

$$T=\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\,. \tag{13.14}$$

Potenciální energie (výšku $h$ budeme měřit od závěsu směrem vzhůru) bude

$$V=mgh=-mgl\cos\varphi\,. \tag{13.15}$$

Nyní již snadno sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L=T-V=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2+mgl\cos\varphi \tag{13.16}$$

a napíšeme Lagrangeovu rovnici pro zobecněnou proměnnou $\varphi$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0\,. \tag{13.17}$$

Po dosazení a derivování dostaneme rovnici

$$ml^2\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi=0\,, \tag{13.18}$$

kterou velmi snadno převedeme na standardní tvar

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0\,. \tag{13.19}$$

Jde o pohybovou rovnici kyvadla (8.3). Povšimněte si, že jsme k tomu nepotřebovali ani zavést kartézskou souřadnicovou soustavu, ani vědět, co je to moment hybnosti a znát pohybovou rovnici otáčejícího se tělesa. Z Lagrangeových rovnic dostaneme přirozeným způsobem a elegantně časový vývoj jakéhokoli parametru či zobecněné souřadnice.

◗

## Zákony zachování

Představme si, že Lagrangeova funkce nezávisí na některé zobecněné souřadnici, třeba $q_k$:

$$L=L(t,q_1,\ldots,q_{k-1},q_{k+1},\ldots,q_N,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_N)\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\partial L}{\partial q_k}=0. \tag{13.20}$$

Zobecněnou souřadnici, která se nevyskytuje v Lagrangeově funkci, nazýváme *cyklickou*. Na $q_k$ potom nezávisí ani pohybové rovnice, a tím ani výsledek experimentu. *Situace je symetrická vůči prostorovému posunutí v zobecněné souřadnici* $q_k$. Z pohybové rovnice pro tuto souřadnici $q_k$ máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}=0\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}=\mathrm{const}\,. \tag{13.21}$$

Nalezli jsme tedy příslušnou zachovávající se veličinu. V kartézských souřadnicích šlo o hybnost, nyní budeme hovořit o zobecněné hybnosti odpovídající zobecněné souřadnici $q_k$:

$$p_k\;\equiv\;\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k},\qquad k=1,\ldots,N. \tag{13.22}$$

Tato veličina se zachovává, je-li zobecněná souřadnice $q_k$ cyklická (nevyskytuje se v L), tj. fyzikální situace je symetrická vzhledem k prostorovému posunutí v zobecněné souřadnici $q_k$. Pro náš ukázkový příklad s kyvadlem je zobecněná hybnost rovna

$$p_\varphi\;\equiv\;\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\;=\;ml^2\dot{\varphi}\,.$$

Fyzikální situace není symetrická vzhledem k pootočení o úhel $\delta\varphi$ (změní se gravitační pole), proto se souřadnice $\varphi$ vyskytuje v $L$ a tato zobecněná hybnost se nezachovává. Zobecněná hybnost k úhlové proměnné hraje roli momentu hybnosti ze světa kartézských souřadnic. V Lagrangeově formalizmu není nutné rozlišovat mezi hybností a momentem hybnosti.

První člen Lagrangeových rovnic není ničím jiným než časovou změnou hybnosti. Proto můžeme Lagrangeovy rovnice napsat v formálně stejném tvaru jako Newtonovy rovnice, jen namísto hybností a sil zde budou figurovat zobecněné hybnosti a zobecněné síly:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_k = F_k\,; \qquad p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}; \qquad F_k \equiv \frac{\partial L}{\partial q_k}. \tag{13.23}$$

Nyní se věnujme časové symetrii, tedy zákonu zachování energie. Nechť Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, tj.

$$L = L(q_1,\dots,q_f,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_N) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{13.24}$$

To odpovídá situaci symetrické vůči časovému posunutí. Najděme úplnou časovou derivaci Lagrangeovy funkce:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}_k).$$

Vzhledem k předpokladu je první člen na pravé straně nulový, ve druhém členu vyjádříme $\partial L/\partial q_k$ z Lagrangeovy rovnice (13.9) a máme

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}_k).$$

Členy napravo upravíme za pomoci vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)$$

a po převedení na jednu stranu rovnosti zjistíme, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) - L\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) - L = \mathrm{const}.$$

Opět jsme tedy našli zachovávající se veličinu, která je jedinou korektní definicí energie:

$$E \equiv \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L. \tag{13.25}$$

Veličina $E$ se zachovává, nezávisí-li Lagrangeova funkce explicitně na čase, tj. je-li fyzikální situace symetrická vzhledem k časovému posunutí. Pro náš příklad s kyvadlem energie vyjde

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi.$$

V takto jednoduchých příkladech energie dle očekávání vychází

$$E = T + V.$$

Tato relace ale platí jen pro speciální tvary Lagrangeovy funkce. V obecném případě nelze Lagrangeovu funkci ani energii rozdělit na kinetickou a potenciální část. Je tomu tak například při pohybu částice v magnetickém poli. Energie je však i nadále vždy definována vztahem (13.25).

**Zapamatujte si**

V Lagrangeově formalizmu jsou hybnosti a energie definovány vztahy

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}; \tag{13.26}$$

$$E = \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - L = \sum_k p_k \dot{q}_k - L. \tag{13.27}$$

Vztahy platí pro libovolné zobecněné proměnné a takto definované veličiny se zachovávají jen tehdy, pokud platí příslušné symetrie.

## Hamiltonovy kanonické rovnice

V této kapitole se seznámíme s jiným tvarem pohybových rovnic – Hamiltonovými rovnicemi. Na rozdíl od Lagrangeových rovnic jsou Hamiltonovy rovnice diferenciálními rovnicemi prvního řádu, ale je jich dvojnásobné množství. Pro řešení diferenciálních rovnic prvního řádu je vypracováno velké množství numerických metod a tak Hamiltonovy rovnice bývají většinou pro numerické řešení vhodnější než rovnice Lagrangeovy. S pomocí definice zobecněné hybnosti (13.26) můžeme Lagrangeovy rovnice přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \tag{13.28}$$

Výraz napravo hraje roli zobecněné síly, jak jsme viděli v zápise (13.23), který silně připomíná Newtonovy rovnice v kartézských souřadnicích. Najděme nyní diferenciál energie za pomoci jejího definičního vztahu (13.27)

$$E = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(t, q, \dot{q}) \qquad \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}E = \sum_k \dot{q}_k \,\mathrm{d}p_k + \sum_k p_k \,\mathrm{d}\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\mathrm{d}\dot{q}_k.$$

V předposledním členu vyjádříme $\partial L/\partial q_k$ z pohybové rovnice(13.28), v posledním členu využijeme definici zobecněné hybnosti:

$$\mathrm{d}E = \sum_k \dot{q}_k \,\mathrm{d}p_k + \sum_k p_k \,\mathrm{d}\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t - \sum_k \dot{p}_k \,\mathrm{d}q_k - \sum_k p_k \,\mathrm{d}\dot{q}_k.$$

Členy s diferenciály zobecněných rychlostí se odečtou a zbývá

$$\mathrm{d}E = -\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t - \sum_k \dot{p}_k \,\mathrm{d}q_k + \sum_k \dot{q}_k \,\mathrm{d}p_k. \tag{13.29}$$

Funkci, jejíž diferenciál jsme právě nalezli, označíme

$$E = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{13.30}$$

Jde o energii, v níž jsou rychlosti nahrazeny hybnostmi. Koeficienty v diferenciálu (13.29) musí být příslušné parciální derivace funkce $H$:

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}; \qquad -\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \tag{13.31}$$

Funkce $H$ se nazývá *Hamiltonova funkce*. Hamiltonova funkce je energie přepsaná do proměnných $t$, $q_k$, $p_k$. V (13.29) se odečetly diferenciály rychlostí, proto lze vždy nalézt takovou transformaci

$$t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \quad \to \quad t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \tag{13.32}$$

aby energie byla funkcí zobecněných souřadnic a zobecněných hybností. Tato transformace se nazývá *Legendreova duální transformace*. Poslední dvě rovnice z relace (13.31) jsou *Hamiltonovy kanonické rovnice* (kanos – zákon, souhrn pravidel):

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k};$$
$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

**Postup řešení**

1) Nalezneme Lagrangeovu funkci.
2) Z Lagrangeovy funkce určíme zobecněné hybnosti a zobecněnou energii.
3) Ze zobecněné energie vyloučíme zobecněné rychlosti – vyjádříme je za pomoci zobecněných hybností, tj. provedeme Legendreovu duální transformaci.
4) Napíšeme Hamiltonovy kanonické rovnice

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{13.33}$$

5) Řešíme je s počátečními podmínkami

$$q_k(t_0) = q_{k0}; \qquad p_k(t_0) = p_{k0}. \tag{13.34}$$

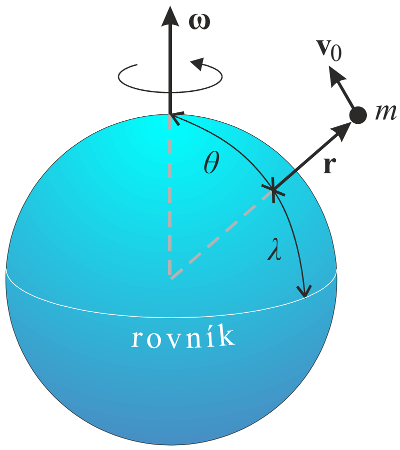
V našem ukázkovém příkladě s kyvadlem mají jednotlivé kroky výsledky:

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos\varphi;$$
$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi};$$
$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos\varphi;$$
$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos\varphi;$$
$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2};$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl \sin\varphi.$$

Poslední dva řádky jsou příslušné Hamiltonovy rovnice, pro které lze snadno najít diferenční schéma a řešit je numericky. Pokud bychom první z rovnic derivovali podle času a dosadili do ní za d$p$/d$t$ z druhé rovnice, vrátili bychom se ke standardní rovnici kyvadla.

## Pohyb v rotující soustavě

V Lagrangeově formalizmu se velmi dobře vypořádáme s popisem sil působících na tělesa na povrchu rotující Země a obecně v rotujících souřadnicových soustavách. Úhlovou rychlost rotace budeme považovat za vektor, jehož směr je totožný s osou rotace.




K nalezení pohybové rovnice v neinerciální rotující soustavě potřebujeme znát některé vektorové identity, které byste měli znát ze základního kurzu matematiky:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\,, \tag{13.35}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}\,, \tag{13.36}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}\,, \tag{13.37}$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,, \tag{13.38}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,. \tag{13.39}$$

Pro určitost předpokládejme, že budeme sledovat pohyby na rotující Zemi. Jedna souřadnicová soustava je pevná v prostoru (inerciální) a druhá rotuje spolu se Zemí (rotující, neinerciální). Obě soustavy mají počátek ve středu Země a polohový vektor sledovaného tělesa je v obou soustavách shodný (spojnice tělesa a středu Země), tj.

$$\mathbf{r}_{\mathrm{in}}=\mathbf{r}_{\mathrm{rot}}=\mathbf{r}\,. \tag{13.40}$$

Jde o vektor, který si můžeme představit jako objekt – tyč mířící ze středu Země k tělesu. Jde o jeden objekt, ale souřadnice v inerciální soustavě budou jiné než v rotující. Rychlosti tělesa o hmotnosti $m$ budou v obou soustavách různé, budou se lišit o rychlost $v_0$ způsobenou rotací Země. Ta je úměrná velikosti úhlové rychlosti, vzdálenosti od středu Země a sinu polárního úhlu $\theta$ (na pólu je rychlost nulová, na rovníku maximální), tj.

$$v_0=\omega r\sin\theta\,. \tag{13.41}$$

Směr této rychlosti je kolmý na vektory $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{r}$, tedy platí (u Země míří na východ)

$$\mathbf{v}_0=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,. \tag{13.42}$$

Mezi rychlostí tělesa v inerciální a rotující soustavě proto existuje jednoduchý vztah

$$\mathbf{v}_{\mathrm{in}}=\mathbf{v}_{\mathrm{rot}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,, \tag{13.43}$$

To je vše, co potřebujeme vědět k sestavení Lagrangeovy funkce. V inerciální soustavě bude Lagrangeova funkce rovna

$$L=\frac{1}{2}m\,\mathbf{v}_{\mathrm{in}}^2-V(\mathbf{r}_{\mathrm{in}})\,. \tag{13.44}$$

Do vztahu dosadíme za rychlost z (13.43) a za polohový vektor z (13.40)

$$L = \frac{1}{2} m \left( \mathbf{v}_{\mathrm{rot}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right)^2 - V(\mathbf{r}) . \tag{13.45}$$

Rychlost v rotující soustavě, která nás zajímá, přeznačíme na **v**. Výsledná Lagrangeova funkce pro pohyb v neinerciální rotující soustavě je

► $$L = \frac{1}{2} m(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - V(\mathbf{r}) \ . \tag{13.46}$$

K nalezení hybnosti, energie a k sestavení pohybové rovnice budeme potřebovat parciální derivace $\partial L/\partial\, \mathbf{v}$, $\partial L/\partial\, \mathbf{r}$. Za tím účelem roznásobíme první člen v lagranžiánu:

$$L = \frac{1}{2} m \left( \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) \cdot \left( \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) - V(\mathbf{r}) \qquad \Rightarrow$$

$$L = \frac{1}{2} m\, \mathbf{v}^2 + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} m\, (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - V(\mathbf{r}) \tag{15.47}$$

Z této podoby Lagrangeovy funkce snadno určíme derivaci podle rychlostních proměnných:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\, \mathbf{v} + m\, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \ . \tag{15.48}$$

Pro zjištění derivace podle prostorových proměnných musíme Lagrangeovu funkci (15.47) poněkud upravit. Ve druhém členu na pravé straně posuneme jednotlivé členy podle vztahu (13.37) tak, aby **r**, podle kterého chceme derivovat, bylo vně vektorového součinu. Ve třetím členu upravíme skalární součin $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ podle Crammerova vztahu (13.39):

$$L = \frac{1}{2} m\, \mathbf{v}^2 + m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} m\, \omega^2 \mathbf{r}^2 - \frac{1}{2} m\, (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 - V(\mathbf{r}) \tag{15.49}$$

Nyní již snadno nalezneme i derivaci Lagrangeovy funkce podle proměnné **r**:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + m\, \omega^2 \mathbf{r} - m\, \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \tag{15.50}$$

Druhý a třetí člen na pravé straně upravíme podle identity (13.38) do finálního tvaru:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + m\, \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \tag{15.51}$$

Vztahy (15.48) a (15.51) jsou hledané derivace Lagrangeovy funkce podle rychlosti a polohového vektoru. Nyní již snadno určíme hybnost a energii pohybujícího se objektu.

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \ , \tag{13.52}$$

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + V(\mathbf{r}) \ . \tag{13.53}$$

Hybnost se skládá jednak z klasické mechanické hybnosti $m\mathbf{v}$ a jednak z neinerciálního rotačního členu $m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Energie je součtem kinetické energie, rotační energie a potenciální energie. Rotační energie je z hlediska pozorovatele v inerciální soustavě záporná. Pro predikci pohybu těles je nejdůležitější znát pohybovou rovnici, kterou nyní již snadno sestavíme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\mathbf{v}+m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\right)-\left(m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})+m\,\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{r}}\right)=0 \qquad \Rightarrow$$

► $$\frac{\mathrm{d}m\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}+2m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})+m\,\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})\,. \qquad (13.54)$$

Rovnice (13.54) je hledaná pohybová rovnice tělesa pohybujícího se v rotující neinerciální soustavě. Nalevo je časová změna mechanické hybnosti, první člen napravo je síla působící na částici v potenciálním poli ($\mathbf{F} = -\partial V/\partial\mathbf{r}$), druhý člen je Coriolisova síla a třetí odstředivá síla. Coriolisova síla je zodpovědná za směr roztáčení víru ve výlevce (na každé polokouli je jiný), za stáčení roviny kyvadla i za další jevy. Coriolisova síla nepůsobí na tělesa pohybující se rovnoběžně se zemskou rotační osou. Odstředivá síla je nulová na pólech a maximální na rovníku, kde dosáhne hodnoty $mr\omega^2$. Síla je pojmenována po francouzském matematikovi Gustavu Gaspardu de Coriolisovi (1792–1844), který se proslavil výpočtem sil působících v rotujících soustavách.

**Zapamatujte si**

Na těleso na povrchu rotující Země působí odstředivá a Coriolisova síla. Odstředivá síla míří ve směru od osy rotace. Coriolisova síla míří kolmo na rychlost tělesa a kolmo na osu rotace, nepůsobí na tělesa pohybující se ve směru osy rotace.

$$\mathbf{F}_\mathrm{o}=m\,\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})\,. \qquad (13.55)$$

$$\mathbf{F}_\mathrm{C}=2m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})\,. \qquad (13.56)$$

Odstředivou sílu v rotující soustavě započítáváme do tíhového zrychlení. Měříme ho u stojících těles a na konkrétním místě na Zemi se nám k tíži automaticky přidává odstředivá síla, která je pro danou rovnoběžku vždy stejná. U Coriolisovy síly to udělat nemůžeme, protože závisí na rychlosti tělesa.

### ◖ Příklad 13.2: Padající kámen

**Zadání:** Představte si, že pustíte kámen z výšky 65 m (odpovídá Petřínské rozhledně). Jakou odchylku od kolmice bude mít kámen po dopadu vlivem Coriolisovy síly? Jakým směrem se kámen odchýlí od kolmice při pádu? Počítejte pro Prahu (zeměpisná šířka $\lambda = 50°$).

**Řešení:** Budeme řešit pohybovou rovnici s tíhovou a Coriolisovou silou (odstředivá síla je zahrnutá to tíhového zrychlení)

$$\frac{\mathrm{d}m\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=m\mathbf{g}+2m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})\,. \qquad (13.57)$$

Druhý člen na pravé straně je podstatně menší než první a můžeme ho chápat jako malou poruchu. Řešení je možné hledat iterační metodou, tj.

$$\frac{\mathrm{d}m\mathbf{v}^{(k+1)}}{\mathrm{d}t}=m\mathbf{g}+2m(\mathbf{v}^{(k)}\times\boldsymbol{\omega})\,. \qquad (13.58)$$

Zvolíme nějaké řešení $\mathbf{v}^{(0)}$, které dosadíme do pravé strany a vypočteme $\mathbf{v}^{(1)}$. Poté dosadíme $\mathbf{v}^{(1)}$ do pravé strany a vypočteme $\mathbf{v}^{(2)}$ atd. Pro počáteční nulové řešení máme posloupnost

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(0)}&=0\,;\\ \mathbf{v}^{(1)}&=\mathbf{g}\,t\,;\\ \mathbf{v}^{(2)}&=\mathbf{g}\,t+(\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega})\,t^2\,.\end{aligned} \qquad (13.59)$$

První iterační řešení $\mathbf{v}^{(1)}$ je volný pád neovlivněný Coriolisovou silou. Druhé iterační řešení $\mathbf{v}^{(2)}$ již v sobě zahrnuje vliv Coriolisovy síly. Vzhledem k tomu, že považujeme Coriolisovu sílu za malou poruchu, můžeme iteraci po druhém členu ukončit. Při integraci jsme použili nulovou počáteční rychlost, tedy jednoduchý volný pád. V případě nenulové počáteční rychlosti $\mathbf{v}_0$ by bylo $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_0 + \mathrm{g}t$. Pro volný pád postačí nalezené řešení bez počáteční rychlosti. Integrace iteračního řešení nám dá polohu kamene:

$$\mathbf{r}(t) \doteq \mathbf{r}^{(2)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{g}\frac{t^2}{2} + (\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega})\frac{t^3}{3}. \tag{13.60}$$

Zvolme nyní konkrétní souřadnicový systém na povrchu Země (řešení posuneme ze středu Země k povrchu, poloha vystupuje jen v prvním členu na pravé straně). Osa $z$ bude mířit svisle, osu $x$ orientujeme na východ a osu $y$ na sever. Jde o pravotočivý souřadnicový systém, což ve výsledku zajišťuje správná znaménka vektorových součinů. Polární úhel $\theta$ a zeměpisnou šířku $\lambda = 90°-\theta$ zavedeme standardním způsobem jako na úvodním obrázku. Jednotlivé vektory v řešení (13.60) budou:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(0)} &= (0, 0, H)\,; \\ \mathbf{g} &= (0, 0, -g)\,; \\ \boldsymbol{\omega} &= (0, \omega\cos\lambda, \omega\sin\lambda)\,. \end{aligned} \tag{13.61}$$

Volný pád kamene je tedy po rozepsání vektorového součinu popsán vztahy

$$\begin{aligned} x &= \frac{g\omega t^3}{3}\cos\lambda\,; \\ y &= 0\,; \\ z &= H - \frac{gt^2}{2}\,. \end{aligned} \tag{13.62}$$

Kámen se bude při pádu odchylovat vlivem Coriolisovy síly ve směru osy $x$, tedy na východ. Nyní zbývá určit velikost odklonu. Položíme-li v třetí rovnici (13.62) $z = 0$, zjistíme dobu, za kterou kámen dopadl. Tu dosadíme do vztahu pro $x$ a máme výslednou vzdálenost

$$\Delta x = x_{\text{fin}} - x_0 = \frac{g\omega}{3}\left(\frac{2H}{g}\right)^{3/2}\cos\lambda \approx 7\ \text{mm}. \tag{13.63}$$

◗

# 14 TŘENÍ A DEFORMACE

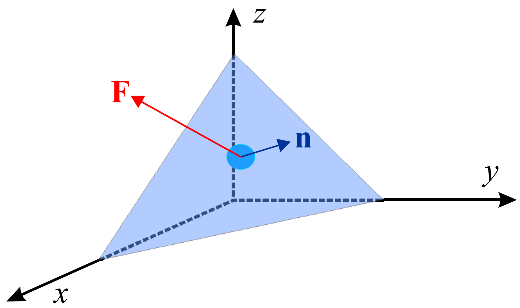
S přiblížením hmotného bodu často nevystačíme. Mnohdy potřebujeme popsat složité pohyby celých těles, která se mohou dotýkat a deformovat. Dokonce nemusí jít o pevná tělesa, ale o pohyb nějaké tekutiny (tak nazýváme společně nestlačitelné kapaliny i stlačitelné plyny). Ve všech těchto případech se hodí zavádět objemové, plošné a lineární síly. V tekutinách nás nejčastěji zajímá objemová hustota sil definovaná vztahem

$$\mathbf{f} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V}; \qquad [\mathbf{f}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}. \tag{14.1}$$

Obdobně, jako máme hustotu hmoty, hustotu náboje, hustotu energie, můžeme také zavést hustotu síly. Taková veličina je důležitá například v proudících tekutinách. Typickým příkladem je hustota Lorentzovy síly, kterou působí elektrická a magnetická pole na pohybující se vodivou tekutinu. Na styku dvou těles či na rozhraní dvou prostředí působí plošné síly. Příkladem může být povrchové napětí na povrchu kapaliny: Hluboko pod povrchem se všechny síly navzájem kompenzují a na jednotlivé atomy a molekuly v průměru žádná síla od ostatních nepůsobí. Na povrchu kapaliny nejsou ale síly kompenzované a vzniká plošná síla, které říkáme *povrchové napětí*. Na povrchu vzniká pružná blanka, k jejímuž proniknutí je zapotřebí určité síly. Díky tomuto napětí může vodoměrka udržet na vodní hladině a mohou tam plavat i lehké předměty, například kancelářská sponka. Dalším příkladem plošných sil je působení vody na trup lodi ponořený pod hladinou. Samotná plocha je vektorem, má směr své normály a síla je také vektorem. Tlakové poměry při působení síly na plochu vyjadřuje *tenzor napětí*

$$\tau_{kl} \equiv \lim_{\Delta S_l \to 0} \frac{\Delta F_k}{\Delta S_l}; \qquad [\tau] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}. \tag{14.2}$$

Jde o veličinu se dvěma indexy, která popisuje působení $k$-té složky síly na plošky s normálami ve směru os $x$, $y$ a $z$. Pokud taková tabulka čísel (matice) má předem daná transformační pravidla při přechodu od jedné souřadnicové soustavy k jiné, hovoříme o tenzoru druhého řádu. Dá se ukázat, že tenzor napětí musí být symetrickou maticí, tj. $\tau_{kl} = \tau_{lk}$, jinak by neplatil zákon zachování momentu hybnosti a tělesa by se sama od sebe roztáčela. Limitním případem je napětí působící kolmo na plochu (ve směru její normály), pak hovoříme o tahu či tlaku $\sigma$. Druhým extrémem je tečné napětí působící podél plochy, hovoříme o střižném napětí neboli o střihu či smyku. Na styku dvou těles jsou střižné síly běžné, v tekutinách nikoli, tam by jakákoli tečná síla způsobila proudění tekutiny, které by vedlo k rychlému zániku této síly.




Na obrázku je znázorněna plocha jako vektor. Její směr je totožný se směrem normály **n** k ploše. Lze ji složit ze tří ploch tvořených projekcemi do souřadnicových rovin. Na plochu působí obecná síla **F**. Povšimněme si její složky $F_x$. (na obrázku by mířila ve směru osy $x$). Tato složka způsobí tah na projekci do roviny ($yz$) a tečná napětí (střihy) ve dvou zbývajících projekcích. Každá složka síly působí na tři projekce roviny, tím dostaneme dohromady devět čísel $\tau_{kl}$ popisujících působení obecné síly na obecnou plochu.

Síly působí i na různé lineární útvary, například elektrické pole může ovlivňovat nabité vlákno z umělé hmoty. K popisu takového děje lze zavést sílu vztaženou na jednotku délky. V našem úvodním kurzu ale nebudeme takovou veličinu potřebovat.

## Smykové tření a valivý odpor

V přírodě existuje řada procesů, při nichž se pohyb mění na odpadní teplo – kmity jednotlivých atomů a molekul. Hovoříme o tzv. *disipaci* (rozptýlení, nevratné změně) energie na teplo. Disipativní procesy nejsou konzervativní, tj. působící síly nelze popsat za pomoci potenciální energie. Patří sem viskózní procesy v kapalinách, interní tření, odpor vzduchu a další. My se v krátkosti seznámíme se silami působícími při dotyku dvou pevných těles, kdy se o sebe dva povrchy třou nasucho, tj. bez jakékoli kluzné kapalinové vrstvy. Prvním příkladem je ***smykové tření***, při němž vzniká třecí síla při tažení tělesa po podložce (např. dřevěné bedny vlečené po betonové podlaze). Na vzniku třecí síly, která brání pohybu, se podílejí dva mechanizmy: 1) nerovnosti obou povrchů; 2) nevykompenzované síly na rozhraní tělesa a podložky. Proto k tření dochází i u velmi hladkých povrchů. Na první pohled by se mohlo zdát, že větší styčná plocha povede k větší třecí síle. Větší plocha ale znamená menší tlak působící na rozhraní, proto třecí síla na velikosti styčné plochy nezávisí. Experimentálně se ukázalo, že pro suché tření (bez lubrikantu) nezávisí příliš ani na rychlosti tělesa. Třecí síla je úměrná kolmé složce síly působící na podložku (nemusí jít jen o tíži, můžeme například šoupat svisle vzhůru cihlu přimáčknutou ke stěně). Koeficient úměrnosti mezi třecí silou $F_t$ a kolmou složkou síly $N$ působící na podložku se nazývá *koeficient (činitel) smykového tření:*

$$F_t = f\,N; \qquad [f] = 1. \tag{14.3}$$

Koeficient smykového tření je jiný pro pohybující se tělesa a jiný pro těleso, které se snažíme z klidu uvést do pohybu. V tomto případě je vyšší o 20 až 25 % a nazýváme ho *klidový koeficient smykového tření* (*koeficient statického tření*) $f_0$.

$$F_t = f_0 N. \tag{14.4}$$

Oba koeficienty lze pro různé povrchy nalézt v literatuře. Zákon smykového tření jako první zevrubně popsal italský malíř a konstruktér Leonardo da Vinci (1452–1519). V roce 1699 je precizně zformuloval francouzský fyzik a vynálezce Guillaume Amontons (1663–1705). Experimentálně ho ověřil v roce 1781 francouzský fyzik Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806). Proto hovoříme o Coulombově tření, případně o Amontonsově zákonu.

Pokud se po povrchu valí těleso kruhového průřezu, vzniká v podložce prohlubenina. Díky paměti materiálu je její vznik rychlejší než její zánik při odlehčení. Tím vzniká nenulová síla působící proti směru pohybu, které říkáme ***valivý odpor***. Velmi zjednodušeně (bez prokluzování, s konstantní rychlostí pohybu, se zanedbáním působící dvojice sil atd.) je valivý odpor úměrný tlakové síle působící na podložku a dále je nepřímo úměrný poloměru valícího se tělesa. Koeficient úměrnosti se nazývá *rameno valivého odporu* a označuje se $\xi$:

$$F_{vo} = \xi \frac{N}{R}; \qquad [\xi] = \mathrm{m}. \tag{14.5}$$

**Zapamatujte si**

*Smykové tření* je úměrné kolmé tlakové síle působící na podložku, nezávisí na ploše ani na rychlosti tělesa. Koeficient úměrnosti se nazývá součinitel smykového tření $f$. V klidu je tento součinitel vyšší, nazývá se klidový součinitel smykového tření $f_0$.

*Valivý odpor* je úměrný kolmé tlakové síle působící na podložku a nepřímo úměrný poloměru valícího se tělesa. Koeficient úměrnosti se nazývá rameno valivého odporu $\xi$.

$$F_t = f\,N,$$

$$F_t = f_0 N,$$

$$F_{vo} = \xi \frac{N}{R}.$$

| povrch | $f$ | $f_0$ | $\xi$ (mm) |
|---|---|---|---|
| ocel na oceli | 0,10 | 0,15 | 0,5 |
| dřevo na oceli | 0,35 | 0,55 | 1,2 |
| dřevo na dřevě | 0,3 | 0,65 | 1,5 |
| guma na betonu | – | 0,7 až 0,8 | 15 až 35 |
| pneu na asfaltu | – | – | 2 až 4 |

◖ **Příklad 14.1:**

**Zadání:** Jakou silou musím dlaní přitlačit ke zdi knihu o hmotnosti 1 kg, aby nespadla, je-li koeficient smykového tření mezi knihou a stěnou 0,5?

**Řešení:** Ve svislém směru musí třecí síla kompenzovat tíži knihy, tj.

$$mg = fN \qquad \Rightarrow N = \frac{mg}{f} \approx 20\ \mathrm{N} \tag{14.6}$$

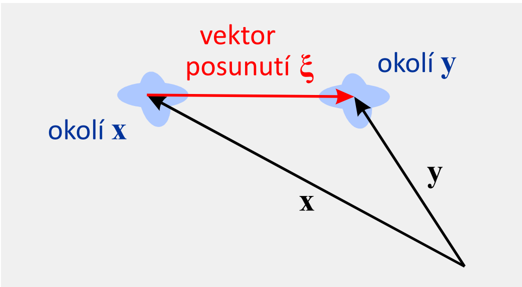
◗

## Tenzor malých deformací

Těleso, na které působí síly, je různě deformováno. Prodlužuje se, kroutí, zešikmuje atd. My se v tomto úvodním textu budeme zabývat jen malými deformacemi v okolí nějakého místa. Představme si, že se vlivem působících sil bod **x** tělesa přesunul do místa **y**. Rozdílu polohy nového a starého místa říkáme vektor posunutí a budeme ho značit řeckým písmenem ξ (ksí):

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})\,. \tag{14.7}$$

Vektor **x** je poloha nějakého místa před deformací, vektor **y** po deformaci. Při popisu deformace nás bude zajímat, kam se přesunou body z objemového okolí původního místa. Pokud by se všechny body posunuly stejně, došlo by totiž jen k přesunutí tělesa bez jakékoli deformace. Proto nalezneme diferenciál vztahu (14.7):




$$\mathrm{d}y_k = \mathrm{d}x_k + \sum_l \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_l. \tag{14.8}$$

Než se pustíme do dalšího odvození, seznámíme se s jedním trikem, který nám usnadní zápisy dalších vztahů. Říká se mu Einsteinova sumační konvence. Albert Einstein si povšiml, že se ve výrazech se součty často vyskytuje určitý index dvakrát. V posledním výrazu je to index $l$, přes který se sčítá. Zavedl proto následující konvenci: *Pokud je v matematickém zápise nějaký index dvakrát, automaticky se přes něho sčítá a nemusíme explicitně vypisovat sumaci*. Na vás jako na čtenáře to ale znamená určité nároky. Každý výraz si prohlédněte, a zjistěte, zda se tam některý z indexů nevyskytuje dvakrát. Pokud ano, jde o sčítací index, přes který se automaticky provádí součet. Například skalární součin můžeme nyní zapsat jednoduše bez znaku sumace jako $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Index $k$ je sčítací index.

**Einsteinova sumační konvence**

- Pokud se index ve výrazu objeví dvakrát, automaticky přes něho sčítáme a říkáme mu *sčítací index*.
- Pokud je ve výrazu index jen jednou, nesčítáme přes něho, říkáme mu *volný index*. Volný index musí být na pravé i levé straně rovnosti.

Prohlédněte si následující čtyři příklady. Sčítací index je všude označen $k$ (můžeme ho ale označit libovolným písmenkem: skalární součin, rozvoj funkce, diferenciál funkce a maticové násobení – vše zapsané za pomoci Einsteinovy sumační konvence.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_k b_k\,,$$
$$f = c_k f_k\,,$$
$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_k\,,$$
$$C_{nl} = A_{nk} B_{kl}\,.$$

Poslední výraz (14.8) popisující lokální deformace v okolí bodů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ můžeme s pomocí sumační konvence zapsat jednodušeji:

$$\mathrm{d}y_k = \mathrm{d}x_k + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_l. \tag{14.9}$$

Index $k$ je volný, index $l$ sčítací. Spočtěme nyní rozdíly druhých mocnin vzdáleností v okolí míst $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

$$\mathrm{d}l^2 - \mathrm{d}l_0^2 = \mathrm{d}y_k \mathrm{d}y_k - \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_k =$$
$$\left(\mathrm{d}x_k + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_l\right)\left(\mathrm{d}x_k + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n\right) - \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_k\,.$$

V druhé kulaté závorce jsme museli sčítací index označit písmenem n namísto písmenka $l$, aby po roznásobení nevznikly nejednoznačné výrazy se čtyřmi indexy $l$. Nyní roznásobíme obě kulaté závorky. Budeme předpokládat, že jsou deformace malé, tj. změny dalé derivacemi jsou malé. Potom budou druhé mocniny členů s derivacemi ještě menší a zanedbáme je:

$$\mathrm{d}l^2 - \mathrm{d}l_0^2 = \left(\mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_k + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_l \mathrm{d}x_k + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_n + \cdots\right) - \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_k\,.$$

První a poslední výraz na pravé straně se odečte:

$$\mathrm{d}l^2 - \mathrm{d}l_0^2 = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_l \mathrm{d}x_k + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_n + \cdots.$$

Ve druhém výrazu na pravé straně přeznačíme sčítací index $k$ na $l$ a poté $n$ na $k$:

$$\mathrm{d}l^2 - \mathrm{d}l_0^2 = \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}x_l \mathrm{d}x_k + \cdots. \tag{14.10}$$

Výraz v kulaté závorce nějak popisuje malé deformace tělesa, ale před finálním označením ještě upravíme levou stranu rovnosti a využijeme, že se deformace příliš neliší, tj. $\mathrm{d}l \approx \mathrm{d}l_0$:

$$\mathrm{d}l^2 - \mathrm{d}l_0^2 = \left(\mathrm{d}l - \mathrm{d}l_0\right)\left(\mathrm{d}l + \mathrm{d}l_0\right) \approx \left(\mathrm{d}l - \mathrm{d}l_0\right) 2\mathrm{d}l_0 \tag{14.11}$$

Kombinací obou posledních výrazů získáme finální vztah pro malou relativní deformaci:

$$\delta \equiv \frac{\mathrm{d}l - \mathrm{d}l_0}{\mathrm{d}l_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right)\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}l_0}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}l_0} + \cdots. \tag{14.12}$$

Zavedeme-li tenzor malých deformací $\varepsilon_{kl}$, je relativní deformace snadno zapsatelná:

$$\delta = \varepsilon_{kl}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}l_0}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}l_0} + \cdots; \qquad \varepsilon_{kl} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right). \tag{14.13}$$

Tenzor malých derivací je symetrický, což má významné důsledky. Symetrie zajišťuje splnění zákona zachování momentu hybnosti, symetrické matice mají reálná vlastní čísla a jejich vlastní vektory tvoří ortogonální bázi, ve které je dotyčná matice jen diagonální. Prvky na diagonále popisují relativní prodloužení $\Delta l/l_0$ v jednotlivých osách: $\varepsilon_{11}$ v ose $x$, $\varepsilon_{22}$ v ose $y$ a $\varepsilon_{33}$ v ose $z$. Nediagonální prvky popisují ostatní deformace, tj. smykové a torzní deformace tělesa. Zajímavý je také význam stopy tenzoru malých deformací (součtu diagonálních členů)

$$\mathrm{Tr}\left(\varepsilon\right) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0} + \frac{\Delta z}{z_0} = \frac{y_0 z_0 \Delta x + x_0 z_0 \Delta y + x_0 y_0 \Delta z}{x_0 y_0 z_0} \approx \frac{\Delta V}{V_0} \tag{14.14}$$

Stopa tenzoru malých deformací má význam relativní změny objemu tělesa.

**Tenzor malých deformací**

$$\varepsilon_{kl} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right) \tag{14.15}$$

- Tenzor malých deformací je definován pomocí vektoru posunutí $\boldsymbol{\xi}$.
- Tenzor malých deformací je symetrický.
- Diagonální členy vyjadřují relativní deformace délky ve směru os.
- Nediagonální členy popisují smykové a torzní deformace.
- Součet diagonálních členů (stopa) popisuje relativní objemovou deformaci.

## Hookův zákon

Na těleso působí síly, které popisujeme tenzorem napětí $\tau_{kl}$ (14.2). Odezvou jsou deformace tělesa popsané tenzorem malých deformací $\varepsilon_{kl}$ (14.15). Pokud jde o malé síly a malé reakce tělesa na tyto síly, platí mezi oběma veličinami lineární vztah, tedy relativní deformace je úměrná napětí působícímu na těleso:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\tau_{kl} \tag{14.16}$$

Indexy $k$, $l$ jsou sčítací, indexy $i$, $j$ volné. Lineární vztah mezi napětím a deformací objevil anglický filosof a vědec mnoha oborů Robert Hooke (1635–1703), který mj. nezávisle na Newtonovi zformuloval gravitační zákon (dokonce Newtona obvinil, že jeho zákon opsal, ten ale vztah pro gravitační sílu pravděpodobně znal dříve, aniž by ho publikoval). Hooke si zákona elasticity objeveného v roce 1676 velmi cenil, a proto jeho latinskou formulaci „*Ut tensio, sic vis*“ (jaká deformace, taková síla) zakódoval do přesmyčky, kterou zveřejnil:

$$\mathrm{c\ e\ i\ i\ i\ n\ o\ s\ s\ s\ t\ t\ u\ v} \tag{14.17}$$

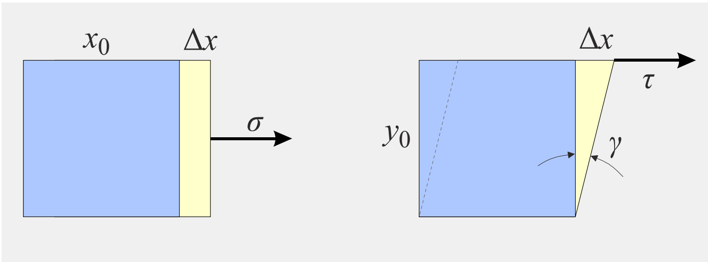
Na první pohled by se mohlo zdát, že koeficientů v lineární kombinaci (14.16) je neskutečné množství. Jde o čtyřrozměrnou matici 3×3×3×3, tj. má 81 prvků. Mezi indexy ale platí různé symetrie, například tenzor deformace nalevo je symetrický, tj. i napravo bude matice koeficientů symetrická v indexech $i$ a $j$. Podrobným rozborem symetrií se dá ukázat, že pro izotropní těleso zůstanou jen dva nezávislé koeficienty (tzv. Lamého koeficienty). První popisuje smykové (střižné) deformace, druhý souvisí s tahovými deformacemi. Pojmenovány jsou podle francouzského matematika Gabriela Lamého (1795–1870).

## Podélná deformace a smyk

Uveďme na závěr dva speciální případy obecného Hookova zákona. První se týká relativní podélné deformace $\varepsilon$ vzniklé napětím v tahu $\sigma$ (například natahované tyče):

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma\,; \qquad \varepsilon \equiv \frac{\Delta x}{x_0}. \tag{14.18}$$

Koeficient úměrnosti se z historických důvodů označuje $1/E$, konstanta $E$ se nazývá *Youngův modul pružnosti* podle anglického učence Thomase Younga (1773–1829). Relativní deformace je samozřejmě bezrozměrná, napětí v tahu je v pascalech. Druhým speciálním případem je příčná deformace tělesa (napětí $\tau$ působí podél některé z ploch).




$$\gamma = \frac{1}{G}\tau\,; \qquad \gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta x}{y_0}. \tag{14.19}$$

Koeficient úměrnosti je označen $1/G$, samotné $G$ se nazývá *modul pružnosti ve smyku*. Podélně působící síla na jednotku plochy (střih, smyk) se nazývá podélné (střižné) napětí, jednotkou jsou pascaly. Příklady naleznete v učebním textu F1 – semináře.

**Zapamatujte si**

- Malé relativní deformace jsou úměrné přiloženému napětí.
- Obecný Hookův zákon má tvar $\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\,\tau_{kl}$.
- Hookův zákon v tahu má tvar $\varepsilon = \sigma/E$.
- Hookův zákon ve smyku má tvar $\gamma = \tau/G$.

# 15 MECHANIKA TEKUTIN

Tekutinami nazýváme souhrnně kapaliny a plyny. Kapaliny jsou nestlačitelné, tj. působením vnějších sil se nemění jejich objem, zatímco plyny jsou stlačitelné, jejich objem lze změnit.

## Tlak v tekutině

Na plochu uvnitř tekutiny, ať skutečnou (např. trup lodi) či myšlenou), vždy působí tlak způsobený nárazy jednotlivých částic. Tlak je silou vztaženou na jednotkovou plochu, působením tlaku se může taková plocha posunout, čímž se vykoná práce

$$\Delta A = F\Delta l = p\Delta S\Delta l = p\Delta V \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\Delta A}{\Delta V}. \tag{15.1}$$

Vykonaná práce samozřejmě souvisí se změnou energie, po limitním přechodu lze uzavřít, že tlak je hustotou energie

$$p = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta V}; \qquad [p] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = \mathrm{Pa}. \tag{15.2}$$

Příkladem může být hydrostatický tlak způsobený tíží sloupce tekutiny. Energie v tíhovém poli je $mgh$, v hustotách máme

$$p = \rho g h. \tag{15.3}$$

Jde o tzv. hydrostatický tlak. Speciálním případem je tlak atmosféry při povrchu Země způsobený tíží vzdušných mas nad námi. Normální tlak při povrchu Země je přibližně

$$p_{\mathrm{atm}} \approx 101\,325\ \mathrm{Pa}. \tag{15.4}$$

Tento tlak označujeme jako jednu atmosféru. Jiným příkladem je tlak působící na tělo potápěče pod vodní hladinou. V hloubce deseti metrů vychází tlak určený ze vztahu (15.3) pro vodu přibližně stejný jako atmosférický tlak. Potápěč by tedy celkem pocítil dvojnásobný tlak oproti atmosférickému. Tlak ale nemusí být spojen jen s pohybujícími se atomy a molekulami tekutiny, které narážejí na myšlenou plochu. Existuje například magnetický tlak, který je hustotou energie magnetického pole.

**Zapamatujte si**

- Kapaliny jsou nestlačitelné.
- Plyny jsou stlačitelné.
- Tekutiny jsou souhrnným označením pro kapaliny a plyny.
- Tlak je hustotou energie.
- Hydrostatický tlak v tekutině je $\rho g h$.

Tlak je v tekutinách přenášen jejími atomy a molekulami rovnoměrně. Pokud na určitý objem tekutiny působí vnější síla, vzroste tlak tekutiny ve všech místech o stejnou hodnotu. Tento poznatek se nazývá *Pascalův zákon*. Objevil ho francouzský matematik, fyzik a vynálezce Blaise Pascal (1623–1662). Po něm je také pojmenována jednotka tlaku pascal. Vzhledem k tomu, že tlak je hustotou energie, je pascal roven joulu na metr krychlový.

Pokud je těleso ponořené do kapaliny, vyrovnají se tlakové síly působící na boční stěny. Na spodní část ale působí větší tlaková síla než na horní část. Představme si například kvádr ponořený do kapaliny, spodní část je v hloubce $h_2$, horní v hloubce $h_1$. Na kvádr působí vztlaková síla

$$F = p_2 S - p_1 S = h_2 \rho g S - h_1 \rho g S = \rho g (h_2 - h_1) S = \rho g V = m_{\mathrm{kap}} g. \tag{15.5}$$

Odvodili jsme *Archimédův zákon*: těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené.

**Pascalův zákon:** Tlak způsobený vnějšími silami se v tekutině rozloží rovnoměrně.

**Archimédův zákon:** Těleso ponořené do kapaliny je nadnášeno silou, která je rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené.

## Diferenciální operace a Gaussova věta

Než se pustíme do odvození rovnice kontinuity, pohybové rovnice tekutiny a Bernoulliho rovnice, musíme se seznámit s některými matematickými operacemi. Víme, co je gradient skalární funkce a k čemu se používá (může třeba posloužit k výpočtu normály k izoploše). Operátor nabla $\nabla \equiv (\partial/\partial_x, \partial/\partial_y, \partial/\partial_z)$ lze ale aplikovat i na vektorové pole. Skalární součin nabla a vektorového pole nazýváme *divergencí* a vektorový součin *rotací* pole:

$$\operatorname{div}\mathbf{K} \equiv \nabla\cdot\mathbf{K} = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}; \tag{15.6}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{K} \equiv \nabla\times\mathbf{K} = \left(\frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z}, \frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x}, \frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y}\right). \tag{15.7}$$

První veličina je skalární – jde o jedno jediné číslo, které lze elegantně zapsat pomocí sumační konvence:

$$\operatorname{div}\mathbf{K} = \partial_k K_k. \tag{15.8}$$

Ve fyzice II si ukážeme, že tato operace souvisí se zdroji polí. Tam kde pole vyvěrají (například elektrické pole z kladného náboje) je divergence kladná, tam kde mizí (například elektrické pole se noří do záporného náboje), je divergence záporná a tam, kde pole jen prochází je divergence nulová. Druhá operace, rotace, je vektorová. Jde o trojici čísel, která popisuje, zda dané pole vytváří či nevytváří víry. Pro pole bez vírů je rotace nulová. Podrobně si tyto souvislosti objasníme až ve Fyzice II, nyní budeme operace divergence a rotace potřebovat jen okrajově. V dalším textu bude ještě užitečné zobecnění vztahu pro integraci per partes na třídimenzionální prostor. Pro derivaci součinu dvou funkcí platí

$$f'g + fg' = (fg)'. \tag{15.9}$$

Integrací tohoto vztahu okamžitě máme známý vztah pro integraci per partes

$$\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x + \int_a^b fg'\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b, \tag{15.10}$$

$$\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x = -\int_a^b fg'\,\mathrm{d}x + f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{15.11}$$

Znaménka na pravé straně můžeme chápat jako vnější normály k intervalu $<a, b>$, tedy

$$\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x = -\int_a^b fg'\,\mathrm{d}x + n_b f(b)g(b) + n_a f(a)g(a). \tag{15.12}$$

Oba výrazy napravo jsou vlastně integrací přes hranici množiny $\Omega = <a, b>$, kterou tvoří pouhé dva body. Ve třech dimenzích platí obdobný vztah:

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x_k} g\,\mathrm{d}V = -\iiint_V f\frac{\partial g}{\partial x_k}\,\mathrm{d}V + \oiint_{S=\partial V} f g n_k\,\mathrm{d}S. \tag{15.13}$$

Tento výraz je větou o integraci per partes ve třech dimenzích. Umožňuje přesouvat derivaci z jedné funkce na druhou. Pro $g = 1$ dá vztah důležitou relaci

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x_k} \, \mathrm{d}V = \oiint_{S=\partial V} f \, n_k \, \mathrm{d}S \,. \tag{15.14}$$

Nyní za funkci $f$ vezmeme složku vektorového pole, tj. $f = K_k$ a přesčítáme přes index $k$:

$$\iiint_V \frac{\partial K_k}{\partial x_k} \, \mathrm{d}V = \oiint_{S=\partial V} K_k n_k \, \mathrm{d}S \,. \tag{15.15}$$

Na levé straně se objevila divergence, na pravé straně zapíšeme plochu jako vektor $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ a vztah přepíšeme do tvaru

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{K}) \, \mathrm{d}V = \oiint_{S=\partial V} \mathbf{K} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \,. \tag{15.16}$$

Obdobně jako jsme dělili křivkové integrály na integrály prvního a druhého druhu, můžeme i plošné integrály počítat ze skalárního či vektorového elementu plochy. Integrál napravo je plošným integrálem druhého druhu. Odvozený vztah se nazývá Gaussova věta integrálního počtu. Umožňuje převádět plošné integrály z vektorového pole na objemové a využijeme ji nejen k odvození rovnice kontinuity, ale v příštím semestru i k odvození Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru. V příštím semestru se seznámíme s významem divergence mnohem podrobněji a zavedeme i další užitečné diferenciální operace s vektorovými poli.

**Zapamatujte si**

**Divergence** je skalární součin nabla s vektorovým polem, jde o jedno číslo popisující zdroje polí. **Rotace** je vektorový součin nabla s vektorovým polem. Jde o trojici čísel popisující, zda pole má víry.

$$\operatorname{div} \mathbf{K} \equiv \nabla \cdot \mathbf{K} \,; \qquad \operatorname{rot} \mathbf{K} \equiv \nabla \times \mathbf{K} \,.$$

Integrace **per partes** má ve třech dimenzích tvar

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x_k} g \, \mathrm{d}V = -\iiint_V f \frac{\partial g}{\partial x_k} \, \mathrm{d}V + \oiint_{S=\partial V} f \, g \, n_k \, \mathrm{d}S \,.$$

Speciálním případem je Gaussova věta integrálního počtu

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{K}) \, \mathrm{d}V = \oiint_{S=\partial V} \mathbf{K} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \,.$$

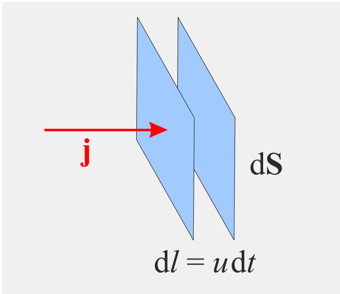
## Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity vyjadřuje zákon zachování látky v tekutině. Ta se nikam nemůže ztratit. Pokud z daného objemu zmizela, musela protéct přes plochu ohraničující tento objem. Uvažujme proudění tekutiny s ohledem na přesuny látky popsané její hmotností. Proudění popíšeme čtveřicí veličin – hustotou a hmotnostním tokem:

$$\rho \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \,; \qquad [\rho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \,. \tag{15.17}$$

$$\mathbf{j} \equiv \rho \, \mathbf{u} \,; \qquad [j] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2 \mathrm{s}} \,. \tag{15.18}$$

Význam hustoty hmoty je zřejmý. Věnujme se proto hmotnostnímu toku. Symbol $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ označuje rychlostní pole, které se mění v čase i v prostoru. Každá vektorová veličina má velikost a směr. Hmotnostní tok má směr rychlostního pole. Velikost toku snadno zjistíme, pokud budeme sledovat tečení látky kolmou plochou. Za čas $\mathrm{d}t$ se jednotlivé atomy a molekuly dostanou o $\mathrm{d}l = u\,\mathrm{d}t$ dále k jiné myšlené ploše:




Pro velikost toku platí:

$$j = \rho u = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}S\,\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t}\,. \tag{15.19}$$

Tok veličiny má tedy význam množství veličiny proteklé kolmou jednotkovou plochou za jednotku času a jeho rozměr je

$$[j] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}}. \tag{15.20}$$

V obecném případě může jít i o jiný než hmotnostní tok, například tok náboje, tok energie, tok hybnosti atd. Jestliže látka při proudění nemizí, musí být časový úbytek hmotnosti z libovolného objemu roven hmotnostnímu toku přes plochu obklopující tento objem:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} \mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,. \tag{15.21}$$

Hranice objemu $V$ je označena $\partial V$. Na pravé straně je tok integrován přes ohraničující plochu, tím dostaneme množství veličiny proteklé touto plochou za jednotku času. Skalární součin je zde důležitý: pokud je plocha kolmá na tok, proteče plochou maximální množství, pokud látka teče podél plochy, je skalární součin nulový a plochou neproteče nic. Na levé straně přesuneme časovou derivaci do integrace, $\rho$ je ale funkcí času i prostoru, proto se derivace změní na parciální. Pokud máme ustálený homogenní tok tekutiny nějakou trubkou, je levá strana nulová, plošný integrál na pravé straně bude nulový na plášti trubky a nenulový na obou otevřených koncích trubky. Vektor normály bude mít opačné znaménko, proto dostaneme

$$\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2\,, \tag{15.22}$$

což je velmi zjednodušená středoškolská podoba rovnice kontinuity. Na pravou stranu (15.21) budeme nyní aplikovat Gaussovu větu a plošný integrál převedeme na objemový:

$$-\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{j}\,\mathrm{d}V\,. \tag{15.23}$$

Oba integrály spojíme:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}\right)\mathrm{d}V = 0. \tag{15.24}$$

Uvedený vztah musí při proudění platit v libovolném objemu, a to je možné jen tehdy, je-li argument integrálu roven nule (mohl by v principu být nenulový jen v některých bodech nebo plochách, obecně na množině menší dimenze, než přes kterou integrujeme):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0\,. \tag{15.25}$$

Odvozený vztah se nazývá *rovnice kontinuity* a na pravé straně je nula, pokud se hmotnost látky při proudění zachovává. Rovnici kontinuity můžeme upravit ještě do jiného užitečného tvaru. V posledním kroku využijeme, že hustota je funkcí času a polohy, tj. $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k(\rho u_k) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} u_k + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\,. \tag{15.26}$$

Z posledního výrazu je zřejmé, že nestlačitelná tekutina (kapalina) splňuje

$$\rho = \text{const} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\,. \tag{15.27}$$

Divergence rychlostního pole kapalin je vždy nulová, u plynů toto ale neplatí.

**Zapamatujte si**

Zákon zachování hmoty v proudící tekutině vyjadřuje rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0\,.$$

Pro nestlačitelné tekutiny (kapaliny) platí

$$\operatorname{div} \mathrm{u} = 0.$$

## Eulerova pohybová rovnice

Pro objekt o hmotnosti $m$ platí Newtonova pohybová rovnice

$$m \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\,. \tag{15.28}$$

V našem případě ale nejde o jednu jedinou částici, ale hmotný element proudící tekutiny, na který působí síla d**F**. Rychlost jedné částice **v** nahradíme rychlostním polem $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$:

$$\mathrm{d}m \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\mathbf{F}\,. \tag{15.29}$$

Nyní přejdeme k hustotám, tj. obě strany rovnice vydělíme objemovým elementem d$V$:

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}\,. \tag{15.30}$$

Symbol $\rho$ reprezentuje hustotu hmoty proudící tekutiny, symbol **f** hustotu působící síly. Uvědomíme-li si, že rychlostní pole je funkcí času a prostoru, tj. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, budeme mít

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}\,. \tag{15.31}$$

Derivace $\mathrm{d}x_k/\mathrm{d}t$ nejsou ničím jiným než složkami rychlostního pole $u_k$. Rovnici přepíšeme do výsledného tvaru

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=\mathbf{f}\,. \tag{15.32}$$

První část na levé straně vyjadřuje explicitní změnu rychlostního pole, druhý člen změnu rychlostního pole způsobenou prouděním (při jarním tání přinese řeka množství rychle tekoucí vody z hor). Hustota síly na pravé straně se liší podle procesů, které popisujeme. Může jít o tlakovou sílu, viskózní procesy nebo Lorentzovu sílu působící na nabité částice ve vodivé tekutině. Vypišme explicitně jen tlakovou sílu. Síla je záporně vzatým gradientem potenciální energie. Hustota tlakové síly proto bude záporně vzatým gradientem hustoty potenciální energie, tedy tlaku (v tomto případě tlaku daným chaotickým pohybem atomů či molekul):

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p+\mathbf{f}_{\mathrm{vis}}+\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}. \tag{15.33}$$

Uvedený vztah nazýváme Eulerova pohybová rovnice proudící tekutiny. Napravo jsou hustoty všech působících sil: tlakové, viskózních procesů a dalších externích sil. Rovnice je pojmenována po švýcarském matematikovi a astronomovi Lheonardu Eulerovi (1707–1783).

Viskózní procesy v tekutině lze popsat několika způsoby. Nejjednodušší je cesta, kterou zvolili francouzský inženýr Claude-Louis Navier (1785–1836) a anglo-irský matematik a fyzik George Gabriel Stokes (1819–1903), kteří popsali viskózní sílu vztahem

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vis}}=\eta\,\Delta\mathbf{u}\,; \qquad \Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{15.34}$$

Součet druhých derivací označený jako $\Delta$ se nazývá Laplaceův operátor a koeficient $\eta$ je první vazkost. Pohybová rovnice s tímto členem se nazývá Naviere-Stokesova rovnice. Je zde uvedena jen pro úplnost, její řešení jsou za hranicemi možností úvodního kurzu fyziky.

## Bernoulliho rovnice

Zaměřme se nyní na nejjednodušší možnou situaci. Ustálené proudění kapaliny bez viskózních procesů a vírů. Vnější síla působící na tekutinu bude konzervativní, tj. hustotu síly bude možné zapsat jako záporně vzatý gradient hustoty potenciální energie $w_{\mathrm{p}}$. Z Eulerovy pohybové rovnice zbude

$$\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p-\nabla w_{\mathrm{p}}. \tag{15.35}$$

První člen pohybové rovnice je nulový, neboť hledáme ustálené řešení nezávislé na čase. K úpravě zbývajícího členu na levé straně využijeme vektorovou identitu (lze ji dokázat buď rozepsáním do složek, nebo sofistikovanějšími postupy, které se naučíte v matematice)

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}=\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)-\mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{u}\,. \tag{15.36}$$

Předpokládali jsme, že proudění je bez vírů, jeho rotace bude proto nulová a my máme

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right). \tag{15.37}$$

Pro stacionární proudění bez vírů tedy z pohybové rovnice zbude

$$\rho\,\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)=-\nabla p-\nabla w_{\mathrm{p}}. \tag{15.38}$$

Vzhledem k tomu, že jde o kapalinu, která je nestlačitelná, je její hustota konstantní a můžeme ji odsunout do gradientu. Výsledkem je

$$\nabla\left(\rho\frac{u^2}{2}+p+w_\mathrm{p}\right)=0. \tag{15.39}$$

Je-li gradient nulový, musí být funkce samotná konstantní, tj.

$$\rho\frac{u^2}{2}+p+w_\mathrm{p}=\mathrm{const.} \tag{15.40}$$

Jde o slavnou Bernoulliho rovnici, která říká, že součet hustot kinetické, tlakové a potenciální energie je v proudící kapalině konstantní. Rovnice je pojmenována po švýcarském matematikovi a fyzikovi Danielu Bernoullim (1700–1782), který byl členem velmi rozsáhlé rodiny, ve které se všichni zabývali matematikou a fyzikou po mnoho generací. Daniel Bernoulli byl blízkým přítelem Leonharda Eulera, otce pohybové rovnice pro proudící tekutinu.

**Zapamatujte si**

Eulerova pohybová rovnice proudící tekutiny má tvar

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p+\mathbf{f}_\mathrm{vis}+\mathbf{f}_\mathrm{ext}.$$

Předpokládáme-li

- ustálené proudění,
- proudění bez vírů,
- nestlačitelnou tekutinu (kapalinu),
- konzervativní externí síly s hustotou potenciální energie $w_\mathrm{p}$,
- nulovou viskozitu,

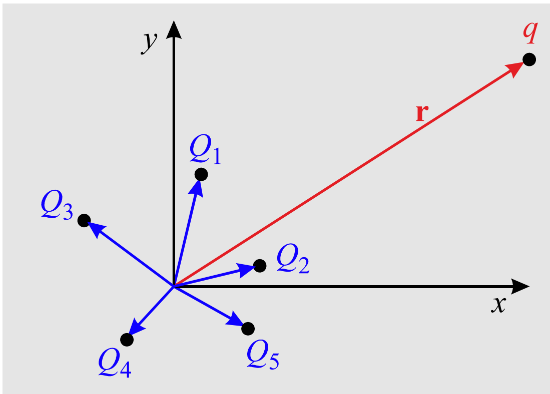
redukuje se Eulerova rovnice proudící tekutiny na Bernoulliho rovnici

$$\rho\frac{u^2}{2}+p+w_\mathrm{p}=\mathrm{const.}$$

Z rovnice je patrné, že s rostoucí rychlostí kapaliny klesá její tlak. Při proudění v tíhovém poli je hustota potenciální energie $w_\mathrm{p}=\rho gh$.

# 16 ELEKTROSTATICKÉ POLE

Představme si, že je někde v prostoru lokalizována nábojová struktura, tedy soustava nabitých částic různých nábojů a hmotností (dobrým příkladem je atom složený z protonů a elektronů, jiným příkladem je molekula). Počátek souřadnicové soustavy umístíme tak, aby byla nábojová struktura rozprostřená kolem počátku, může jít o hmotný střed soustavy nebo jiné vhodné místo. Testovací částici umístíme do větší vzdálenosti od struktury a budeme sledovat pole generované v tomto místě. Z opravdu velké vzdálenosti se struktura bude jevit jako bodový náboj, jehož velikost bude dána součtem všech nábojů ve struktuře. V menší vzdálenosti už ve struktuře rozlišíme některé kladné a záporné oblasti a dobrým přiblížením pro její popis bude elektrický dipól. V ještě větší blízkosti budeme vnímat i výraznější nesymetrie v rozložení náboje a vhodným popisem struktury bude tzv. kvadrupól. Obecně lze pole struktury rozložit do tzv. multipólového rozvoje, jehož jednotlivé členy budou popisovat projevy struktury v různých vzdálenostech od struktury (monopól, dipól, kvadrupól, oktupól…).




## Multipólový rozvoj

Potenciál soustavy částic, která tvoří námi sledovanou nábojovou strukturu, můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\phi = \sum_{a=1}^{N} \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right|} . \tag{16.1}$$

Velikost vektoru ve jmenovateli vyjádříme jako odmocninu skalárního součinu vektoru se sebou samým a výraz upravíme:

$$\phi = \sum_{a=1}^{N} \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)}} = \sum_{a=1}^{N} \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_a^2}} = \sum_{a=1}^{N} \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_a + r_a^2}} .$$

Ve výrazu pod odmocninou je největší první člen ($r >> r_a$), následuje druhý člen a nejmenší je poslední člen. První člen z odmocniny vytkneme:

$$\phi = \sum_{a=1}^{N} \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r \sqrt{1 - \dfrac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_a}{r^2} + \dfrac{r_a^2}{r^2}}} = \sum_{a=1}^{N} \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r} \left(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_a}{r^2} + \frac{r_a^2}{r^2}\right)^{-1/2} .$$

Pořadí významnosti členů pod odmocninou se obrátilo, první je největší, druhý je menší (chová se jako $1/r$) a poslední nejmenší ($1/r^2$). Výraz je nyní připraven pro provedení Taylorova rozvoje. Pokud nás budou zajímat jen první dva členy, postačí aproximace $(1+x)^n \approx 1+nx$ a zanedbání všech členů úměrných $1/r^2$:

$$\phi = \sum_{a=1}^{N} \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_a}{r^2} + \cdots\right). \tag{16.2}$$

Součet rozdělíme na dva sčítance a ze sum vytkneme všechny členy, kterých se sumace netýká (nemají index $a$):

$$\phi = \sum_{a=1}^{N} \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r} + \sum_{a=1}^{N} \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_a}{r^2} + \cdots = \frac{\sum_{a=1}^{N} Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\left(\sum_{a=1}^{N} Q_a \mathbf{r}_a\right)\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \cdots$$

Celý výsledek lze přehledně zapsat takto:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\mathbf{p}_\mathrm{E}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \cdots;$$

$$Q \equiv \sum_{a=1}^{N} Q_a\,; \tag{16.3}$$

$$\mathbf{p}_\mathrm{E} \equiv \sum_{a=1}^{N} Q_a \mathbf{r}_a\,.$$

První člen představuje tzv. monopól, nábojová struktura je prezentována celkovým nábojem. Monopólový člen klesá se vzdáleností jako $1/r$. Celý výraz je dán Coulombovým potenciálem pro celkový náboj. Druhý člen představuje elektrický dipól, veličina $\mathbf{p}_\mathrm{E}$ se nazývá elektrický dipólový moment. Tento člen ubývá se vzdáleností jako $1/r^2$ (nezapomeňte, že jedno $r$ je v čitateli a ve jmenovateli je $r^3$). Dále by následoval kvadrupól ($1/r^3$), oktupól ($1/r^4$) atd. Těmito členy se ale v úvodním kurzu fyziky nebudeme zabývat. Síly jsou derivacemi potenciální energie, proto ubývají s mocninou o jednotku vyšší než příslušný potenciál: pro monopól jako $1/r^2$, pro dipól jako $1/r^3$ atd. Čím rychleji ubývají potenciál a síla se vzdáleností, tím v kratší vzdálenosti se takový příspěvek dostane pod práh citlivosti našich přístrojů.

| | monopól | dipól | kvadrupól | oktupól |
|---|---|---|---|---|
| potenciál | $1/r$ | $1/r^2$ | $1/r^3$ | $1/r^4$ |
| síla | $1/r^2$ | $1/r^3$ | $1/r^4$ | $1/r^5$ |

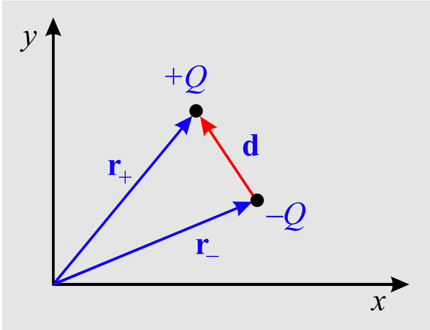
## Elektrický dipól

Uvažujme nyní co možná nejjednodušší nábojovou strukturu s elektrickým dipólovým momentem. Představme si, že naše struktura obsahuje jen dvě částice, jedna z nich má kladný náboj a druhá stejně veliký, ale záporný náboj. Elektrický dipólový moment potom bude

$$\mathbf{p}_\mathrm{E} \equiv \sum_{a=1}^{N} Q_a \mathbf{r}_a = Q_+\mathbf{r}_+ + Q_-\mathbf{r}_- = Q\mathbf{r}_+ - Q_-\mathbf{r}_- = Q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = Q\mathbf{d}\,. \tag{16.4}$$

Elektrický dipólový moment je tedy roven součinu náboje a vzdálenosti kladného a záporného náboje. Rozměr dipólového momentu je

$$[\mathbf{p}_{\mathrm{E}}] = [Q\mathbf{d}] = \mathrm{C\,m}. \tag{16.5}$$




Představme si, že náš dipól vnoříme do homogenního elektrického pole. Jak se bude chovat? Abychom odpověděli na tuto otázku, spočteme moment sil působící na dipól a jeho energii. Nejprve se věnujme momentu sil:

$$\mathbf{M} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times Q_a \mathbf{E} = \left( \sum_{a=1}^{N} Q_a \mathbf{r}_a \right) \times \mathbf{E}\,.$$

Výraz v kulaté závorce je elektrický dipólový moment, pro moment sil tedy platí vztah

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_{\mathrm{E}} \times \mathbf{E}\,. \tag{16.6}$$

Na dipól působí moment sil, který je tím větší, čím větší je rozdíl směru dipólu a elektrického pole. Pokud dipól míří ve směru pole, žádný moment sil na něho nepůsobí. Nyní přistupme k výpočtu energie dipólu ve vnějším elektrickém poli, které popíšeme potenciálem $\phi_{\mathrm{ext}}$. Energie bude

$$W_{\mathrm{p}} = \sum_{a=1}^{N} Q_a\, \phi_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}_a)$$

Využijeme toho, že je nábojová struktura lokalizovaná v blízkosti počátku souřadnic a potenciál rozvineme v okolí počátku:

$$W_{\mathrm{p}} = \sum_{a=1}^{N} Q_a \left( \frac{\partial \phi_{\mathrm{ext}}}{\partial x} x_a + \frac{\partial \phi_{\mathrm{ext}}}{\partial y} y_a + \frac{\partial \phi_{\mathrm{ext}}}{\partial z} z_a \right) = \sum_{a=1}^{N} (Q_a\, \mathbf{r}_a \cdot \nabla \phi_{\mathrm{ext}}) = \left( \sum_{a=1}^{N} (Q_a\, \mathbf{r}_a) \right) \cdot \nabla \phi_{\mathrm{ext}}\,.$$

Derivace jsou počítány v počátku souřadnic. Pro homogenní pole jsou derivace potenciálu dokonce stejné ve všech místech. V kulaté závorce je elektrický dipólový moment, gradient potenciálu vyjádříme ze vztahu (12.22) ($\mathbf{E} = -\nabla\phi_{\mathrm{ext}}$). Výsledná energie bude

$$W_{\mathrm{p}} = -\mathbf{p}_{\mathrm{E}} \cdot \mathbf{E} \tag{16.7}$$

Na první pohled je patrné, že energie bude minimální, pokud bude dipól orientovaný shodně s elektrickým polem (kladný náboj bude mířit ve směru pole, kosinus vzájemného úhlu bude roven 1 a energie dipólu záporná), a maximální, bude-li dipól mířit proti směru pole (kosinus vzájemného úhlu bude roven −1 a energie bude kladná). Elektrické dipóly budou obecně preferovat stav s nejnižší možnou energií a budou mít snahu se zorientovat ve směru pole. Budou-li splněny podmínky pro zákon zachování energie, bude elektrický dipól nucen svírat s polem stále stejný úhel a bude se pohybovat po ploše kužele s tímto vrcholovým úhlem. Hovoříme o tzv. precesi elektrického dipólu. Pokud na list papíru vysypete travní semeno a budete na ně působit silným elektrickým polem, zorientují se semínka ve směru siločar, protože se každé semínko chová jako malý elektrický dipól.

**Zapamatujte si**

Elektrický dipólový moment soustavy nabitých částic je definován vztahem

$$\mathbf{p}_\mathrm{E} \equiv \sum_{a=1}^{N} Q_a \mathbf{r}_a .$$

Pro dvě částice s opačnými náboji a vzájemným vektorem **d** (míří od záporné ke kladné částici) je elektrický dipólový moment roven

$$\mathbf{p}_\mathrm{E} = Q\mathbf{d} .$$

Potenciál elektrického dipólu je (16.3)

$$\phi = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{E}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} .$$

V elektrickém poli má elektrický dipól potenciální energii

$$W_\mathrm{p} = -\mathbf{p}_\mathrm{E}\cdot\mathbf{E}$$

a působí na něho moment sil

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_\mathrm{E}\times\mathbf{E} .$$

**◖ Příklad 16.1**

**Zadání:** Nalezněte elektrické pole v okolí elektrického dipólu, jenž míří v ose $z$ souřadnicové soustavy.

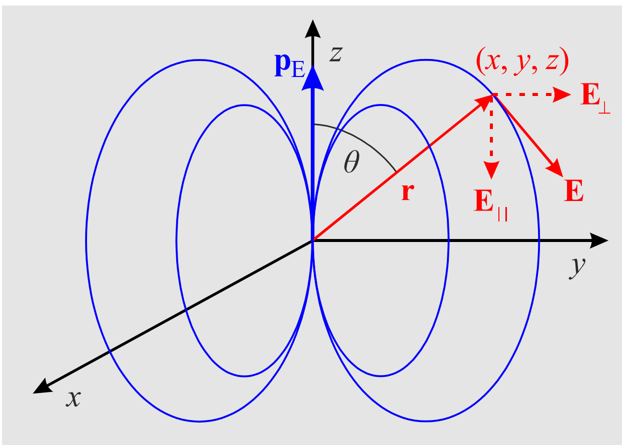
**Řešení:** Předpokládejme potenciál elektrického pole dipólu ve tvaru

$$\phi = \frac{\mathbf{p}_\mathrm{E}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p_\mathrm{E} z}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{3/2}} . \tag{16.8}$$

Intenzitu elektrického pole snadno určíme ze vztahu

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \frac{p_\mathrm{E}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2-r^2}{r^5}\right) \tag{16.9}$$

Siločáry můžeme vykreslit jakýmkoli standardním softwarem:



Pole můžeme snadno rozdělit na rovnoběžnou a kolmou složku (vzhledem k ose dipólu). Pro testovací částici umístěnou v rovině ($y$, $z$), jak tomu je na obrázku, platí:

$$\frac{z}{r} = \cos\theta\,; \qquad \frac{y}{r} = \sin\theta\,. \tag{16.10}$$

Nyní již snadno odečteme kolmou a rovnoběžnou složku:

$$E_\perp = E_y = \frac{p_\mathrm{E}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zy}{r^5} = \frac{3p_\mathrm{E}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\theta\sin\theta\,; \tag{16.11}$$

$$E_\| = E_z = \frac{p_\mathrm{E}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{p_\mathrm{E}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right). \tag{16.12}$$

◗

## Vektor polarizace

Velmi užitečnou veličinou je hustota elektrického dipólového momentu:

$$\mathbf{P} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_\mathrm{E}}{\Delta V} \tag{16.13}$$

Hustotu elektrického dipólového momentu nazýváme *vektor polarizace*. Rozměr této veličiny snadno určíme z definice dipólového momentu:

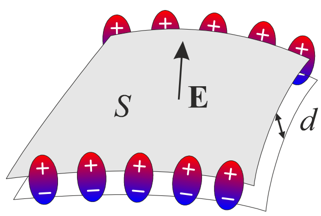
$$[\mathbf{P}] = \frac{\mathrm{C\,m}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\,. \tag{16.14}$$

V dalším uvidíme, že vektor polarizace je roven plošné hustotě náboje na povrchu dielektrika ponořeného do elektrického pole. Představme si, že na dielektrikum, v němž se nachází kladné i záporné náboje, zapůsobí elektrické pole (pro jednoduchost kolmo na jeho povrch). Kladné náboje se posunou ve směru pole a záporné náboje proti směru pole, označme vzdálenost posunutí kladných a záporných nábojů $d$. Určeme vektor polarizace ve vrstvě přiléhající k povrchu dielektrika, jejíž tloušťka je právě $d$. Ke každému posunutému kladnému náboji můžeme najít nějaký záporný náboj, který s ním bude tvořit elektrický dipól (viz obrázek). Velikost hustoty elektrického dipólového momentu tedy bude

$$P = \frac{NQd}{\Delta V} = \frac{NQd}{Sd} = \frac{NQ}{S} \tag{16.15}$$

Velikost vektoru polarizace je tedy pro pole kolmé k povrchu rovna plošné hustotě náboje indukovaného na povrchu dielektrika:

$$P = \sigma\,. \tag{16.16}$$




Vektor polarizace v tomto případě míří ve směru elektrického pole, kterým působíme na dielektrikum. Pokud by elektrické pole nepůsobilo kolmo na povrch dielektrika, ale šikmo, natočí se dipóly ve směru pole a příhraniční vrstva bude mít tloušťku $d\cos\alpha$, kde $\alpha$ je odklon elektrického pole, a tím i dipólů, od normály k povrchu. Výsledkem bude vztah $P\cos\alpha = \sigma$, tedy z vektoru polarizace se uplatní jen normálová složka $P_{\mathrm{n}} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = P\cos\alpha$:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = \sigma\,. \qquad (16.17)$$

Vektor polarizace popisuje vytváření dipólového momentu, které způsobuje elektrické pole. Čím je pole silnější, tím je obvykle indukovaný dipólový moment větší. Obecně je vektor polarizace funkcí elektrického pole a nemusí ani mířit v jeho směru:

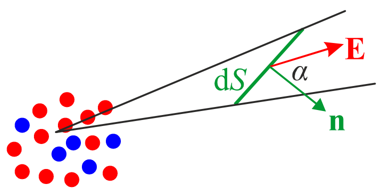
$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \qquad (16.18)$$

## Gaussova věta elektrostatiky

Představme si opět, že kolem počátku souřadnic je rozprostřena nějaká nábojová struktura. Tuto strukturu obepneme myšlenou plochou a spočteme tok elektrického pole struktury touto plochou:

$$\psi_E \equiv \oint\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,. \qquad (16.19)$$

Matematickými prostředky lze ukázat, že tok pole na vzdálenosti ani tvaru plochy nezávisí. Záleží pouze na tom, kolik nábojů je uvnitř plochy uzavřeno. Pokud plochu libovolného tvaru zvětšíme (vzdálíme od struktury), poroste velikost plochy s druhou mocninou vzdálenosti. Elektrické pole ale naopak bude s druhou mocninou vzdálenosti klesat, obě závislosti se vykompenzují a výsledný tok nebude záviset na vzdálenosti integrační plochy od struktury. Jednoduchou úvahou ukážeme, že tok nebude záviset ani na tvaru plochy. Zkusme plochu zdeformovat v nějakém směru (v malém prostorovém úhlu), jak je tomu na obrázku:




Normála plochy bude se směrem elektrického pole svírat úhel $\alpha$. Samotný tok bude úměrný kosinu tohoto úhlu (pokud je normála rovnoběžná s polem, bude tok maximální, pokud je kolmá na pole, bude tok nulový). Velikost elementu plochy na obrázku je nepřímo úměrná kosinu sklonu (míří-li normála ve směru pole, je plocha nejmenší, je-li normála kolmá na pole, je plocha nekonečná). Obě závislosti se v integrálu opět vykompenzují:

$$\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = E\,\mathrm{d}S\cos\alpha\,; \qquad \mathrm{d}S \sim \frac{1}{\cos\alpha}\,.$$

Nezávisí-li výsledek integrace (16.19) ani na tvaru plochy, ani na její vzdálenosti, můžeme plochu nahradit povrchem koule a integrál snadno spočítat (na celém povrchu koule bude velikost elektrického pole stále stejná a pole kolmé na plochu)

$$\psi_E \equiv \oint\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = E\oint\!\!\oint_S \mathrm{d}S = E\,4\pi r^2. \qquad (16.20)$$

Pokud je plocha dostatečně vzdálená, je pole určenou pouze monopólovým členem, tedy

$$\psi_E \equiv \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,. \qquad (16.21)$$

Závěr je jednoduchý: Tok elektrického pole plochou obepínající nábojovou strukturu je roven náboji děleném permitivitou:

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{16.22}$$

Pokud jde o dielektrikum, náboj dipólů se v objemu dielektrika vyruší. Působení pole se ale část náboje vysune nad ohraničující plochu a pod ní vznikne tzv. vázaný náboj, který označíme $Q_\mathrm{b}$.(index b je z anglického „bound“). Na pravé straně ho musíme přidat:

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q+Q_\mathrm{b}}{\varepsilon_0}. \tag{16.23}$$

Permitivitu převedeme na levou stranu rovnosti a vázaný náboj určíme z plošné hustoty vysunutého náboje (o ni bude v objemu náboje méně), tj.

$$\oiint_S \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q-\oiint_S \sigma\,\mathrm{d}S = Q-\oiint_S \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = Q-\oiint_S \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{16.24}$$

Integrál z pravé strany převedeme nalevo a máme

$$\oiint_S \left(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q. \tag{16.25}$$

Veličině v integraci říkáme elektrická indukce, označujeme ji písmenem **D**:

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q; \tag{16.26}$$

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}. \tag{16.27}$$

Odvozený vztah se nazývá Gaussova věta elektrostatiky a patří k základním zákonům elektřiny a magnetizmu. Vektor elektrické indukce je složen z elektrického pole **E** a reakce dielektrika prezentované vektorem polarizace **P**(**E**). Je-li pole velmi slabé, platí lineární závislost

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{E}. \tag{16.28}$$

V silných polích a nelineárním dielektriku může být závislost složitější. V nejjednodušším případě homogenního izotropního prostředí a slabého pole jsou směry vektoru polarizace a elektrického pole totožné a jejich úměrnost můžeme psát v jednoduchém tvaru

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\kappa\mathbf{E}. \tag{16.29}$$

Permitivita vakua je ve vztahu jen z historických důvodů. V prvním členu (16.27) totiž $\varepsilon_0$ je, zatímco v druhém nikoli. Proto ho do **P** přidáme uměle, aby to druhému členu nebylo líto. Koeficient úměrnosti $\kappa$ se nazývá *elektrická susceptibilita* nebo *koeficient polarizovatelnosti*. Pro homogenní izotropní prostředí platí

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P} = \\ &= \varepsilon_0\mathbf{E}+\varepsilon_0\kappa\mathbf{E} = \\ &= \varepsilon_0(1+\kappa)\mathbf{E}.\end{aligned} \tag{16.30}$$

Celý koeficient úměrnosti $\varepsilon$ nazýváme *permitivitou* (*dielektrickou konstantou*), tedy platí

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}; \qquad \varepsilon \equiv \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}, \qquad \varepsilon_\mathrm{r} \equiv 1+\kappa. \tag{16.31}$$

kde $\varepsilon_\mathrm{r}$ je tzv. *relativní permitivita*. Ve složitějších prostředích takto jednoduchý vztah neplatí.

**Zapamatujte si**

- Vektor polarizace je definován jako hustota elektrického dipólového momentu.
- Normálová složka vektoru polarizace je v dielektriku rovna plošné hustotě elektrického náboje, který je indukován na povrchu dielektrika elektrickým polem.
- Gaussova věta elektrostatiky ukazuje, že tok elektrické indukce libovolnou plochou je roven volnému náboji, který je v této ploše uzavřen:

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q\,; \qquad \mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\,.$$

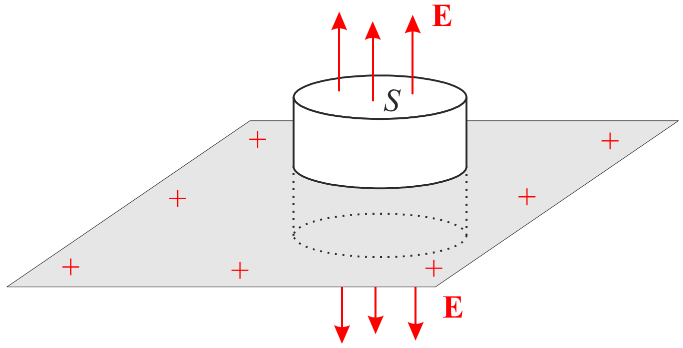
- Elektrická indukce zahrnuje jak vliv elektrického pole, tak vliv polarizace dielektrika, který je v ní zastoupen vektorem polarizace.
- Pro lineární homogenní izotropní prostředí platí vztahy

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}\,;$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}\,,$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} = \varepsilon_0 (1+\kappa)\,.$$

◖ **Příklad 16.2**

**Zadání:** Nalezněte elektrické pole v okolí nekonečně veliké nabité tenké desky.

**Řešení:** Předpokládejme, že plošná hustota náboje desky je $\sigma$. Z důvodu symetrie bude vzniklé elektrické pole kolmé na desku. K výpočtu pole využijeme Gaussovu větu elektrostatiky, za integrační plochu zvolíme povrch válce dle následujícího obrázku:




Tok elektrického pole pláštěm válce bude nulový (normála plochy je kolmá k poli), horní a dolní podstavou bude nenulový. Oba příspěvky budou kladné, neboť vnější normála na obou podstavách míří ve směru pole. Gaussova věta elektrostatiky nám dá:

$$\varepsilon_0 ES + \varepsilon_0 ES = Q\,.$$

Náboj uzavřený v integrační ploše je

$$Q = \sigma S$$

Kombinací obou vztahů dostaneme hledané pole

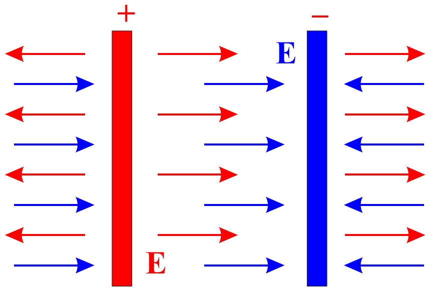
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,. \qquad (16.32)$$

◗

◖ **Příklad 16.3**

**Zadání:** Určete elektrické pole mezi dvěma velkými rovnoběžnými deskami, z nichž jedna je nabitá kladně a druhá záporně.

**Řešení:** Z předchozího příkladu známe pole od jedné desky. Pole obou desek se budou sčítat. Pokud zanedbáme okrajové efekty, bude pole mezi deskami dvojnásobné a vně desek nulové.



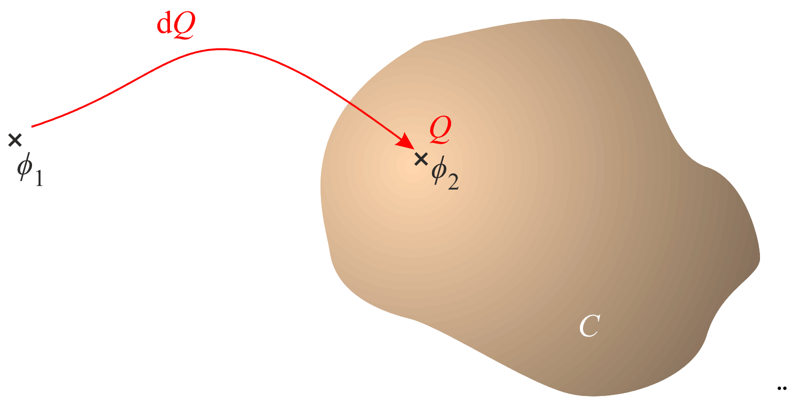

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . \tag{16.33}$$

◗

## Kapacita, energie elektrického pole

Představme si, že z místa s potenciálem $\phi_1$ stěhujeme elektrický náboj na nějaké těleso do místa s potenciálem $\phi_2$. Stěhováním náboje vynikne rozdíl potenciálů, kterému říkáme napětí $U = \phi_2 - \phi_1$. Přestěhovaný náboj bude úměrný tomuto napětí

$$Q \sim U = \Delta\phi . \tag{16.34}$$




Konstantu úměrnosti značíme $C$, nazývá se kapacita a závisí jen na geometrických vlastnostech tělesa. Měříme ji ve faradech:

$$Q = CU ; \qquad C \equiv \frac{Q}{U} . \tag{16.35}$$

$$[C] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F} . \tag{16.36}$$

Jaká bude energie potřebná k přemístění náboje? Stačí si vzpomenout na definici potenciálu a snadno určíme energii potřebnou na přemístění náboje d$Q$:

$$\mathrm{d}W = (\phi_2 - \phi_1)\,\mathrm{d}Q = U\,\mathrm{d}Q = \frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q . \tag{16.37}$$

Při poslední úpravě jsme napětí vyjádřili za pomoci kapacity tělesa. Energii nyní snadno zintegrujeme:

$$W = \int \frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q = \frac{Q^2}{2C}. \tag{16.38}$$

Využijeme-li definiční vztah (16.35) pro kapacitu, dostaneme různá vyjádření energie potřebné k přemístění náboje na těleso s kapacitou $C$:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU. \tag{16.39}$$

◖ **Příklad 16.4**

**Zadání:** Určete kapacitu deskového kondenzátoru vyplněného dielektrikem o permitivitě $\varepsilon$.

**Řešení:** Z výsledku předchozího příkladu je zjevné, že pole mezi deskami bude přibližně homogenní (okrajové efekty zanedbáme a rovno)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \tag{16.40}$$

Napětí mezi deskami, jejichž vzdálenost je $d$, bude rovno

$$U = \int_\gamma \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon} = \frac{\frac{Q}{S}d}{\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad U = \frac{Qd}{\varepsilon S}. \tag{16.41}$$

kde $Q$ jsme označili náboj na deskách. Nyní již snadno určíme kapacitu

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon\frac{S}{d}. \tag{16.42}$$

Čím větší desky, tím více se na ně vejde náboje, a tím větší je kapacita kondenzátoru $C$. Ve složitějších případech budeme postupovat obdobně, jen s tím rozdílem, že napětí získáme integrací elektrického pole mezi dvěma místy $A$ a $B$ po nějaké křivce:

$$U = \int_A^B \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{16.43}$$

◗

Určeme nyní hustotu energie elektrického pole v kondenzátoru:

$$w_\mathrm{E} = \frac{\frac{1}{2}CU^2}{V} = \frac{\frac{1}{2}\left(\varepsilon\frac{S}{d}\right)(Ed)^2}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED. \tag{16.44}$$

V obecném případě je hustota energie elektrického pole rovna

$$w_\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}, \tag{16.45}$$

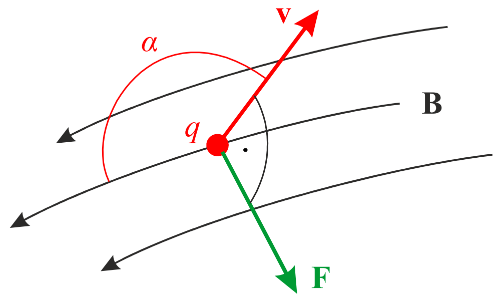
tedy polovině skalárního součinu obou vektorů popisujících elektrické pole.

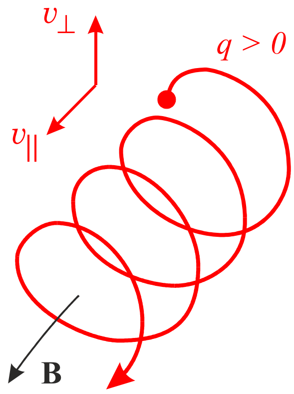
# 17 MAGNETOSTATICKÉ POLE

V této kapitole se budeme zabývat nabitými částicemi v magnetickém poli, které je v čase neproměnné, tj. ve stacionárním poli $\mathbf{B}(\mathbf{x})$.

## Lorentzova pohybová rovnice

Uvažujme částici s nábojem $q$, která se ocitne v magnetickém poli $B$. Toto pole nazýváme *magnetická indukce*. Z experimentů je známo, že na částici začne působit síla, která je úměrná náboji částice, velikosti pole, velikosti rychlosti a sinu úhlu mezi polem a rychlostí. Pokud se částice pohybuje ve směru siločar (sinus je nulový), nepůsobí na ni žádná síla a částice volně klouže podél siločar. Pokud se částice pohybuje kolmo na siločáry, působí na ni maximální síla. Směr síly je kolmý jak na magnetické pole, tak na rychlost částice. Kolmá síla způsobuje změnu směru rychlosti a zakřivuje pohyb částice. V homogenním poli bude částice kroužit kolem siločar, pokud má složku rychlosti rovnoběžnou se siločarami, bude se pohybovat po šroubovici.




Síla, kterou působí magnetické pole na nabitou částici, se nazývá Lorentzova síla podle holandského teoretika Hendrika Antoona Lorentze. Matematicky je dána vektorovým součinem

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,. \tag{17.1}$$

Tato formule v sobě zahrnuje veškeré experimentálně objevené závislosti popsané výše (zkontrolujte si). Na částici s nulovou rychlostí síla nepůsobí, stejně tak nepůsobí na částici pohybující se podél siločar. Síla je kolmá na rychlost a magnetické pole a její velikost je úměrná sinu úhlu, který svírá rychlost částice s magnetickým polem. Vztah (17.1) lze považovat za definici magnetického pole, rozměr určíme z (17.1), pole měříme v teslách:

$$[B] = \frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{C\,m}} \equiv \mathrm{T}\,. \tag{17.2}$$

*Magnetické pole jeden tesla je takové pole, které na částici s nábojem jeden coulomb pohybující se kolmo na magnetické siločáry rychlostí jeden metr za sekundu působí silou jeden newton*. Stejným způsobem můžeme definovat na základě silového působení elektrické pole:

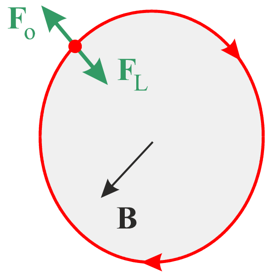
$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E}\,. \tag{17.3}$$

$$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,. \tag{17.4}$$

*Elektrické pole jeden volt na metr je takové pole, které na částici s nábojem jeden coulomb působí silou jeden newton*. Je-li částice v elektrickém i magnetickém poli, působí na ni síla

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} \;+\; q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,. \tag{17.5}$$

Poloměr kružnice, po které se částice bude pohybovat v magnetickém poli, a frekvenci oběhu lze nalézt buď přímo integrací pohybové rovnice, nebo z rovnováhy sil působících na částici. Nejprve zvolíme jednodušší způsob – rovnováhu Lorentzovy a odstředivé síly:




$$F_\mathrm{o} = F_\mathrm{L}\,,$$

$$m\frac{v_\perp^2}{R} = qv_\perp B\,.$$

Z tohoto vztahu snadno určíme poloměr pohybu a úhlovou frekvenci:

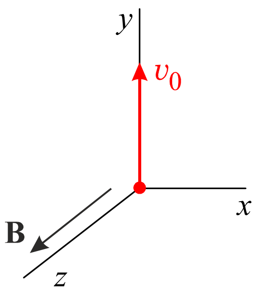
$$R = \frac{mv_\perp}{qB}\,, \tag{17.6}$$

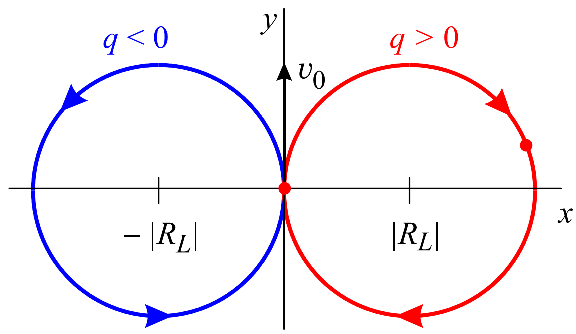
$$\omega = \frac{v_\perp}{R} = \frac{QB}{m}\,. \tag{17.7}$$

Tyto veličiny se nazývají *Larmorův poloměr* a *cyklotronní frekvence*. Joseph Larmor byl irský fyzik. Zpravidla se označují $R_\mathrm{L}$ a $\omega_\mathrm{c}$. Pohyb po kružnici či šroubovici je nejtypičtějším pohybem nabité částice v magnetickém poli a někdy mu říkáme *gyrační pohyb* nebo jen gyrace. Zkusme nyní z pohybové rovnice nabité částice dokázat, že pohyb opravdu probíhá po kružnici. Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby magnetické pole mířilo pouze v ose $z$:

$$\mathbf{B} = (0, 0, B)\,. \tag{17.8}$$

Částici vypustíme rychlostí $v_0$ ve směru osy $y$, tedy kolmo na pole. Vzhledem k tomu, že síla působí kolmo na rychlost i na pole, bude se pohyb konat v rovině (xy).




Pohybovou rovnici $m\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ rozepíšeme do složek:

$$m\ddot{x} = qB\,\dot{y}\,,$$

$$m\ddot{y} = -qB\,\dot{x}\,, \tag{17.9}$$

$$m\ddot{z} = 0\,.$$

Řešení třetí rovnice je jednoduché, v případě našich počátečních podmínek nulové, tj. pohyb se bude dít jen v rovině ($xy$). Soustavu prvních dvou rovnic budeme řešit v komplexním oboru. První rovnici budeme chápat jako reálnou část, druhou jako imaginární:

$$m\ddot{x} + \mathrm{i}\, m\ddot{y} = qB\,\dot{y} - \mathrm{i}\, qB\,\dot{x}\,. \tag{17.10}$$

Tato operace je vratná, kdykoli můžeme oddělit reálnou a imaginární část a dostat zpět původní rovnice. Po jednoduché úpravě a označení kombinace $QB/m$ jako $\omega_C$ (později zjistíme význam této veličiny) dostaneme

$$\ddot{x} + \mathrm{i}\,\ddot{y} = -\mathrm{i}\,\omega_c\,(\dot{x} + \mathrm{i}\,\dot{y})\,; \qquad \omega_c \equiv \frac{qB}{m}\,. \tag{17.11}$$

Nyní zavedeme komplexní polohu $\xi \equiv x + \mathrm{i}\, y$, pro kterou má rovnice jednoduchý tvar

$$\ddot{\xi} + \mathrm{i}\,\omega_c\,\dot{\xi} = 0\,; \qquad \xi \equiv x + \mathrm{i}\, y\,. \tag{17.12}$$

Samozřejmě bude kdykoli možné se vrátit k původním proměnným $x$ a $y$. Řešení této lineární rovnice bez pravé strany budeme hledat v exponenciálním tvaru $\exp(\lambda t)$. Po dosazení získáme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \mathrm{i}\,\omega_c \lambda = 0\,; \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0\,; \quad \lambda_2 = -\mathrm{i}\,\omega_c\,. \tag{17.13}$$

Obecné řešení je lineární kombinací obou nalezených modů:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= c_1 + c_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_c t}\,; \\ \dot{\xi}(t) &= -\mathrm{i}\, c_2 \omega_c\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_c t}\,. \end{aligned} \tag{17.14}$$

Integrační konstanty nalezneme snadno z počátečních podmínek

$$\begin{aligned} \xi(0) &= x(0) + \mathrm{i}\, y(0) = 0\,; \\ \dot{\xi}(0) &= \dot{x}(0) + \mathrm{i}\, \dot{y}(0) = \mathrm{i}\, v_0\,. \end{aligned} \tag{17.15}$$

Dosadíme-li tyto počáteční podmínky do rovnic(17.14), dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2\,; \\ \mathrm{i}\, v_0 &= -\mathrm{i}\, c_2 \omega_c\,, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} c_1 &= +v_0/\omega_c\,; \\ c_2 &= -v_0/\omega_c\,. \end{aligned} \tag{17.16}$$

Výsledné řešení má proto tvar

$$\xi(t) = R_\mathrm{L} - R_\mathrm{L}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_c t}\,; \qquad R_\mathrm{L} \equiv v_0/\omega_c = m v_0/qB\,. \tag{17.17}$$

Po oddělení reálné a imaginární části získáme obě souřadnice pohybující se částice

$$\begin{aligned} x(t) &= R_\mathrm{L} - R_\mathrm{L} \cos \omega_c t\,, \\ y(t) &= R_\mathrm{L} \sin \omega_c t\,. \end{aligned} \tag{17.18}$$

Rovnici trajektorie nalezneme po vyloučení času z (17.18). Na pravé straně ponecháme jen členy s trigonometrickými funkcemi, obě rovnice umocníme na druhou a sečteme:

$$(x - R_\mathrm{L})^2 + y^2 = R_\mathrm{L}^2\,. \tag{17.19}$$

Vidíme, že pohyb se děje po kružnici s poloměrem $|R_\mathrm{L}|$, se středem $S = [R_\mathrm{L}, 0]$ a s úhlovou frekvencí oběhu $\omega_C$. Podle znaménka náboje částice může mít Larmorův poloměr kladnou i zápornou hodnotu, stejně tak může mít obě znaménka cyklotronní frekvence (záporná hodnota znamená oběh proti směru chodu hodinových ručiček).

Magnetické pole nepůsobí na pohyb částice ve směru podél pole. Kolmo na směr pole působí Lorentzova síla, která zakřivuje trajektorii částice na kružnici, případně šroubovici. Samotné elektrické pole naopak nepůsobí na pohyb částice napříč pole (v nerelativistickém případě) nebo jen velmi málo (v relativistickém případě). Ve směru pole dochází k urychlování.

## Magnetický dipól

Obdobně, jako jsme dělali multipólový rozvoj potenciálu elektrického pole, můžeme udělat totiž i pro pole magnetické. První (monopólový člen) vyjde nulový. To znamená, že neexistují magnetické monopóly, částice, které by byly zdrojem magnetického pole a magnetické siločáry každým místem prostoru jen prochází. Druhý (dipólový člen) je nenulový a objeví se v něm charakteristická veličina

$$\mathbf{p}_\mathrm{M} \equiv \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} Q_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a \,, \tag{17.20}$$

kterou nazýváme *magnetický dipólový moment*. U elektrického dipólu byla nejjednodušším zástupcem dvojice opačně orientovaných nábojů v těsné blízkosti. U magnetického pole je typickým reprezentantem magnetického dipólu jediná částice pohybující se po kružnici o poloměru $R$ s rychlostí $v$. Pro velikost dipólového momentu budeme mít (řada má jediný člen):

$$p_\mathrm{M} = \frac{1}{2} Q R v = \frac{1}{2} Q R \frac{2\pi R}{T} = \frac{Q}{T} \pi R^2 \,. \tag{17.21}$$

Podíl $Q/T$ není nic jiného než náboj proteklý kružnicí za periodu oběhu, tedy elektrický proud. Výraz $\pi R^2$ je plocha kružnice, po jejímž obvodu nabitá částice krouží. Pro magnetický moment tedy máme jednoduchý výraz

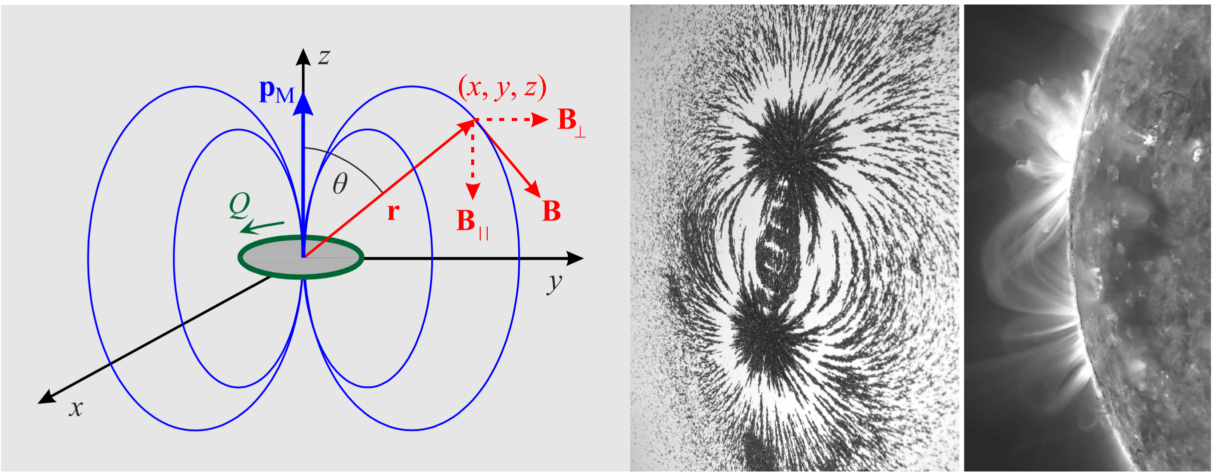
$$p_\mathrm{M} = IS \,. \tag{17.22}$$

$$[p_\mathrm{M}] = \mathrm{Am}^2 \,. \tag{17.23}$$

Elektrický dipól tedy realizujeme dvojicí blízkých opačných nábojů, magnetický dipól nábojem kroužícím po malé (nejlépe infinitezimální) kružnici. Pro soustavu stejných částic (všechny částice budou mít stejnou hmotnost a stejný náboj) je magnetický dipólový moment úměrný momentu hybnosti soustavy:

$$\mathbf{p}_\mathrm{M} \equiv \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} Q \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a = \frac{1}{2} Q \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a = \frac{Q}{2m} \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times m \mathbf{v}_a = \frac{Q}{2m} \mathbf{L} \,. \tag{17.24}$$

Celkový moment hybnosti soustavy jsme označili písmenem **L** (**B** by kolidovalo s magnetickou indukcí). Moment hybnosti je v mikrosvětě kvantován (může nabývat jen určitých hodnot), proto bude kvantován i magnetický dipólový moment soustavy částic. Pokud vnoříme magnetický dipól do vnějšího magnetického pole, bude se chovat podobně jako elektrický dipól v elektrickém poli, tedy bude na něho působit moment sil $\mathbf{p}_\mathrm{M} \times \mathbf{B}$ a bude mít energii $-\mathbf{p}_\mathrm{M} \cdot \mathbf{B}$. Stejně, jako tomu bylo v elektrostatice, bude magnetický dipól precedovat, tj. jeho osa se bude pohybovat po plášti kužele. Kvantování magnetického momentu se projeví tak, že kužele mohou mít jen některé vrcholové úhly. Při nedisipativních procesech se bude magnetický dipól snažit zorientovat ve směru pole. Proto se rozsypané železné piliny na papíru, pod kterým je magnet, zorientují ve směru siločar.




Magnetický dipól, dipólové pole tyčového magnetu a sluneční skvrny.

Porovnejme nyní vlastnosti elektrického a magnetického dipólu v jednoduché tabulce:

| veličina | elektrický dipól | magnetický dipól |
|---|---|---|
| dipólový moment soustavy | $\mathbf{p}_\mathrm{E} \equiv \sum_{a=1}^{N} Q_a \mathbf{r}_a$ | $\mathbf{p}_\mathrm{M} \equiv \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} Q_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a$ |
| nejjednodušší realizace | dva opačné náboje: $\mathbf{p}_\mathrm{E} = Q\,\mathbf{d}$ | kroužící náboj: $\mathbf{p}_\mathrm{M} = I\,\mathbf{S}$ |
| moment síly | $\mathbf{M} = \mathbf{p}_\mathrm{E} \times \mathbf{E}$ | $\mathbf{M} = \mathbf{p}_\mathrm{M} \times \mathbf{B}$ |
| energie ve vnějším poli | $W = -\,\mathbf{p}_\mathrm{E} \cdot \mathbf{E}$ | $W = -\,\mathbf{p}_\mathrm{M} \cdot \mathbf{B}$ |
| pole dipólu | $\mathbf{E} = \frac{p_\mathrm{E}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right)$ | $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 p_\mathrm{M}}{4\pi}\left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right)$ |
| rozklad pole | $E_\perp = \frac{3p_\mathrm{E}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\theta\sin\theta\,,$ $E_{\parallel} = \frac{p_\mathrm{E}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right).$ | $B_\perp = \frac{3\mu_0 p_\mathrm{M}}{4\pi r^3}\cos\theta\sin\theta\,,$ $E_{\parallel} = \frac{\mu_0 p_\mathrm{M}}{4\pi r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right).$ |

Výrazy pro elektrické pole jsme odvozovali a měli byste je znát. Výrazy pro magnetické pole jsou obdobné, nebudeme je odvozovat a nemusíte se je učit nazpaměť. Zdrojem magnetického dipólového pole mohou být jak elektrické proudy (Země, Slunce, elektromagnety…), tak spin elementárních částic (většina komerčních magnetů).

## Magnetizace

Stejně, jako jsme dříve zavedli hustotu elektrického dipólového momentu (vektor polarizace), zavedeme i nyní hustotu magnetického dipólového momentu (vektor magnetizace):

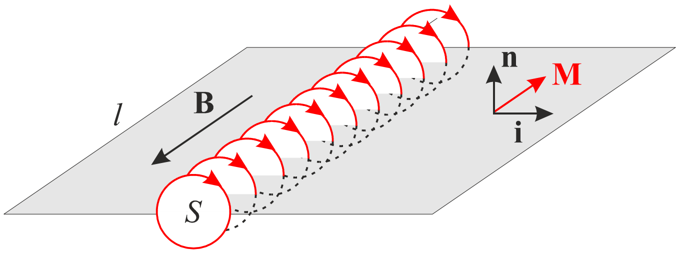
$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{M}}}{\Delta V}. \qquad (17.25)$$

Hustotu elektrického dipólového momentu nazýváme *vektor magnetizace*. Rozměr této veličiny snadno určíme z definice dipólového momentu:

$$[\mathbf{M}] = \frac{\mathrm{A\,m^2}}{\mathrm{m^3}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}. \qquad (17.26)$$

Už rozměr nám napovídá, že magnetizace bude nějak souviset s proudem na jednotku délky. Představme si povrch magneticky aktivního materiálu, ke kterému přiložíme magnetické pole mířící podél povrchu. Nabité částice začnou v magnetickém poli vykonávat krouživý pohyb dle obrázku. Uvnitř materiálu se elektrický proud vzniklý tímto krouživým pohybem vyruší, na povrchu ale zůstane nenulový povrchový proud (magnetizační proud). Jednotlivé kroužící částice budeme považovat za elementární dipóly s magnetickým momentem *IS*. U povrchu magnetika vybereme jeden válec kroužících částic s objemem *Sl* a určíme velikost magnetizace v tomto povrchovém válci:

$$M \equiv \frac{NIS}{\Delta V} = \frac{NIS}{Sl} = \frac{NI}{l}$$




Magnetizace je tedy u povrchu magnetika rovna celkovému povrchovému magnetizačnímu proudu vztaženému na jednotku příčné délky. Takovou veličinu budeme označovat *i*:

$$M = i. \qquad (17.27)$$

V objemových tělesech je zajímavou veličinou proud tekoucí na jednotku plochy, na povrchu těles je důležitý proud tekoucí na jednotku příčné délky. Uvážíme-li směry vektorů (magnetický dipólový moment je kolmý na tekoucí proud i na normálu k povrchu), pak v našem případě platí vektorové vztahy

$$\mathbf{M} = \mathbf{n} \times \mathbf{i}\,; \qquad \mathbf{i} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \qquad (17.28)$$

Takové vztahy platí i při obecném směru magnetického pole a magnetizace materiálu. Pokud míří magnetizace šikmo k povrchu, bude se na genezi proudu podílet jen tečná složka magnetizace, jejíž velikost je rovna $M \sin \alpha$ ($\alpha$ je úhel mezi magnetizací a normálou k povrchu). Proto je ve vztahu (17.28) vektorový součin, který s sebou přináší sinus obou vektorů. V našem případě volně kroužících částic je směr magnetizace opačný než směr magnetického pole (to platí například v plazmatu). Hovoříme o tzv. *diamagnetickém* chování látky.

Elektrické pole popisujeme dvěma vektory – elektrickou intenzitou a elektrickou indukcí. Obdobně je tomu i v magnetickém poli, kde v příští kapitole zavedeme intenzitu magnetického pole vztahem $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$. Zapišme a porovnejme oba vztahy:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\,; \tag{17.29}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})\,. \tag{17.30}$$

Přestože oba vztahy vypadají podobně, jsou mezi nimi podstatné rozdíly. U elektrického pole je z historických důvodů permitivita vakua jen u prvního členu, u magnetického pole je permeabilita vakua u obou členů. V prvním vztahu je za pomoci prvního členu pohybové rovnice (17.5) definována intenzita elektrického pole **E**, proto je vztah (17.29) definičním vztahem pro indukci elektrického pole. U magnetického pole je tomu právě naopak. Za pomoci Lorentzovy pohybové rovnice, tedy druhého členu v (17.5), je definována indukce magnetického pole. Vztah (17.30) musíme tedy považovat za definici intenzity magnetického pole **H**. Připustíme-li, že magnetizace je funkcí některého z magnetických vektorů, tedy například

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})\,, \tag{17.31}$$

můžeme opět zavést susceptibilitu, tentokrát magnetickou. Je-li pole velmi slabé, platí lineární závislost

$$\mathbf{M} \sim \mathbf{H}\,. \tag{17.32}$$

V silných polích a nelineárním magnetiku může být závislost složitější. V nejjednodušším případě homogenního izotropního prostředí a slabého pole jsou směry vektoru magnetizace a magnetické intenzity totožné a jejich úměrnost můžeme psát v jednoduchém tvaru

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}\,. \tag{17.33}$$

Koeficient úměrnosti $\chi$ se nazývá *magnetická susceptibilita*. Pro homogenní a izotropní prostředí platí

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \\ &= \mu_0 (\mathbf{H} + \chi \mathbf{H}) = \\ &= \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}\,.\end{aligned} \tag{17.34}$$

Celý koeficient úměrnosti $\mu$ nazýváme *permeabilitou*, tedy platí

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}\,; \qquad \mu \equiv \mu_0 \mu_{\mathrm{r}}\,, \qquad \mu_{\mathrm{r}} \equiv 1 + \chi\,. \tag{17.35}$$

kde $\mu_{\mathrm{r}}$ je tzv. *relativní permeabilita*. Ve složitějších prostředích tak jednoduchý vztah neplatí.

| veličina | elektřina | magnetismus |
|---|---|---|
| hustota dipólového momentu | $\mathbf{P} \equiv \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{E}}}{\Delta V}$ | $\mathbf{M} \equiv \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{M}}}{\Delta V}$ |
| povrchové děje | $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \sigma$ | $\mathbf{M} \times \mathbf{n} = \mathbf{i}$ |
| vztahy mezi polními vektory | $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ | $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ |
| susceptibilita (lineární prostředí) | $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}$ | $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ |
| permitivita, permeabilita | $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}\,; \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \kappa)$ | $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}\,; \qquad \mu = \mu_0 (1 + \chi)$ |
| hustota energie | $w = ½\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ | $w = ½\, \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ |

## Gaussova věta magnetostatiky

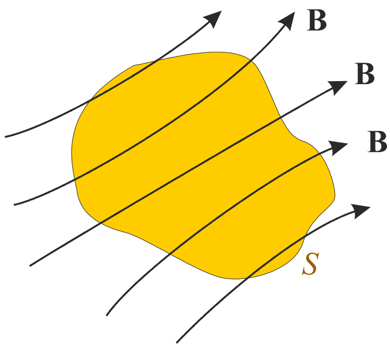
Tok magnetického pole nějakou plochou definujeme jako

$$\psi_B \equiv \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{17.36}$$

a nazýváme ho *magnetický indukční tok*. Měříme ho ve weberech:

$$[\psi_B] = \mathrm{Tm}^2 = \mathrm{Wb}. \tag{17.37}$$

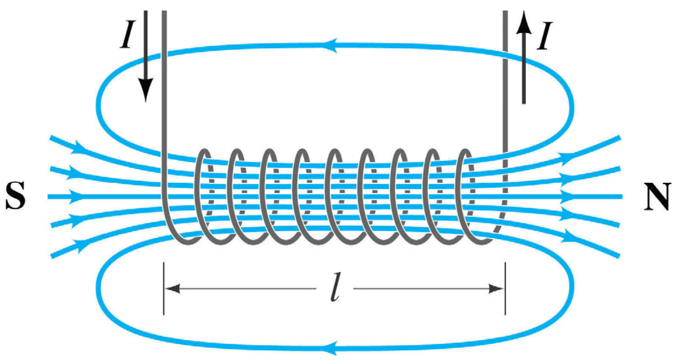
Magnetické pole nemá žádné zdroje, ze kterých by vyvěralo. Neexistují tzv. magnetické monopóly. Pokud někdy existovaly, tak se v průběhu inflační fáze našeho vesmíru rozlétly od sebe natolik, že v dnes pozorovatelném vesmíru (to je malá část skutečného vesmíru) nachází jen několik monopólů, které nemáme šanci pozorovat. Magnetické pole proto každým bodem prostoru jen prochází. Pokud bude plocha uzavřená, bude celkový tok plochou nulový. Cokoli do ní vteče, zase někudy vyteče. Uvnitř plochy magnetické pole ani nevzniká, ani nemizí.




Gaussova věta magnetostatiky má proto velmi jednoduchý a snadno zapamatovatelný tvar

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0. \tag{17.38}$$

| | elektrostatika | magnetostatika |
|---|---|---|
| Gaussova věta | $\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q$ | $\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$ |




Magnetické pole všemi místy prostoru jen prochází.

# 18 ELEKTRICKÝ PROUD A MAGNETICKÉ POLE

Budeme-li na vodivé prostředí působit elektrickým polem, dojde k transportu náboje. Kladné náboje se budou pohybovat ve směru pole a záporné proti směru pole. Elektrické pole bude náboje urychlovat, srážky s okolím je budou naopak brzdit. Velmi často dojde k rovnováze mezi urychlovacími a brzdnými procesy a ustaví se tzv. ohmický režim – říkáme, že látka vede elektrický proud. Ten je dán nábojem proteklým daným místem za jednotku času:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{18.1}$$

Jednotkou elektrického proudu je ampér. Ampér byl původně definován pomocí silových účinků magnetického pole generovaného vodičem, ale od roku 2018 je ampér definován za pomoci elektrického náboje elektronu.

$$[I] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \mathrm{A}. \tag{18.2}$$

V kanálech blesků teče elektrický proud kolem 30 000 A.

V ohmickém režimu se náboje pohybují velmi pomalu, jejich pohyb je složen z neustálého urychlování a následné ztráty rychlosti při srážce. Pro různé třírozměrné oblasti, jimiž teče elektrický proud, je výhodné zavést tzv. *proudovou hustotu* – elektrický proud vztažený na jednotku plochy, kterou protéká (může jít například o příčný průřez vodiče):

$$j = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}. \tag{18.3}$$

$$[j] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}. \tag{18.4}$$

Proudovou hustotu můžeme zavést i jako vektor **j**, který má směr pohybu kladných nábojů. V běžných situacích je proudová hustota úměrná elektrickému poli, které ji vyvolalo:

$$\mathbf{j} \sim \mathbf{E} \tag{18.5}$$

Konstanta úměrnosti se nazývá diferenciální vodivost, zpravidla ji značíme $\gamma$:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \tag{18.6}$$

Pro jednoduchý vodič konstantního průřezu, jehož diferenciální vodivost je všude stejná, snadno určíme celkový elektrický proud:

$$\frac{I}{S} = \gamma \frac{U}{l} \qquad \Rightarrow \qquad I = \gamma \frac{S}{l} U \,. \tag{18.7}$$

V případě vodiče s měnícím se průřezem a měnící se vodivostí by bylo nutné provést integraci přes celý objem vodiče. V obou případech je výsledkem *Ohmův zákon*

$$I \sim U \,. \tag{18.8}$$

*Protékající proud je úměrný přiloženému napětí*. Převrácenou hodnotu konstanty úměrnosti nazýváme elektrický odpor

$$I = \frac{1}{R} U \,;. \tag{18.9}$$

$$\left[ R \right] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega \,. \tag{18.10}$$

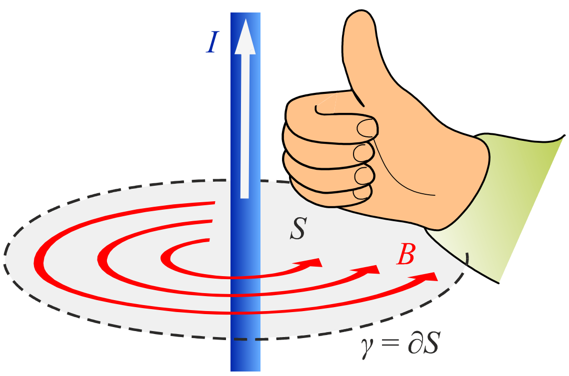
Elektrický odpor měříme v Ohmech a pro náš jednoduchý vodič s konstantním průřezem a konstantní diferenciální vodivostí je

$$R = \frac{l}{\gamma S} \,. \tag{18.11}$$

Odpor je tedy přímo úměrný délce vodiče a nepřímo úměrný průřezu vodiče (vodiče s větším průřezem snáze vedou elektrický proud).

## Ampérův zákon

Letící nabitá částice kolem sebe vytváří magnetické pole. Pohybující se částice jsou proto zdrojem magnetického pole. Toto pole se dá snadno pozorovat i kolem vodičů protékaných proudem a zabývala se jím celá řada fyziků (Oersted, Ampér a další). Představme si nejjednodušší vodič (drát) válcového průřezu protékaný konstantním proudem. Na konce vodiče přiložíme napětí, takže vodičem začne téci elektrický proud a kolem vodiče vznikne magnetické pole. Vodič budeme považovat za dosti dlouhý, takže zanedbáme jevy v okolí konců vodiče. Magnetické pole bude mít azimutální směr, tj. siločáry budou tvořit kružnice kolem vodiče, jejichž směr je dán Ampérovým pravidlem pravé ruky: *Přiložíme-li palec k vodiči tak, aby mířil ve směru tekoucího proudu, budou zbývající prsty mířit ve směru siločar*.



Velikost pole je úměrná protékajícímu proudu a nepřímo úměrná vzdálenosti od vodiče:

$$B \sim \frac{I}{r}. \tag{18.12}$$

V soustavě jednotek SI tuto úměru zapisujeme ve tvaru

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \tag{18.13}$$

který lze chápat jako definiční vztah pro permeabilitu vakua $\mu_0$. Provedeme-li integraci pole podél libovolné uzavřené siločáry ve vzdálenosti $R$ od vodiče (po kružnici, která je hranicí plochy $S$, píšeme $\gamma = \partial S$, nezaměňte symbol křivky s diferenciální vodivostí), vyjde:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_{\gamma=\partial S} B\,\mathrm{d}l = B \oint_{\gamma=\partial S} \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I .$$

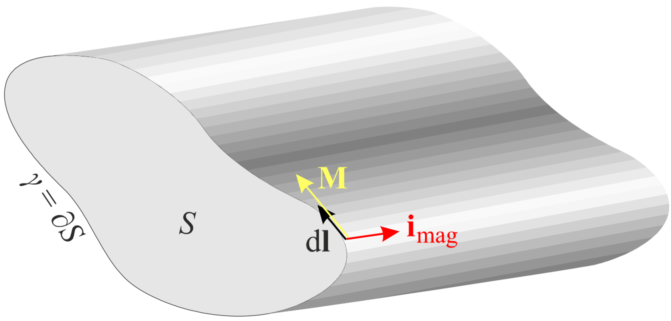
Uvedený výsledek bude platit pro libovolnou plochu a její hraniční křivku, nemusí jít o siločáru. Pokud křivku od vodiče vzdálíme, naroste její délka úměrně vzdálenosti a magnetické pole poklesne nepřímo úměrně vzdálenosti. Obě závislosti se vyrovnají a integrál se nezmění. Zdeformujeme-li křivku, také se nic nestane, úvahy jsou analogické těm, které jsme dělali při odvození Gaussovy věty elektrostatiky. Výsledný tvar Ampérova zákona tedy je:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I . \tag{18.14}$$

Křivkový integrál z magnetické indukce je úměrný vodivostnímu proudu protékanému plochou, kterou křivka ohraničuje. Koeficientem úměrnosti je permeabilita vakua. Uvedený zákon platí jen pro stacionární situaci v nemagnetických prostředích.

V obecném prostředí a nestacionárním případě budeme muset na pravé straně k vodivostnímu proudu (je způsoben pohybem nabitých částic v ohmickém režimu) přidat ještě magnetizační a polarizační proud. *Magnetizační proud* je způsoben interakcí magnetického pole s vázanými částicemi. Ty začnou na místě kroužit a způsobí proudy tekoucí v ploše (plášti útvaru na obrázku). Ze vztahu (17.27) resp. (17.28) už víme, že magnetizační proud vztažený na jednotku příčné délky má číselně velikost magnetizace. Co se směru tyče, míří kolmo na magnetizaci (ta je v jednoduchých prostředích rovnoběžná s magnetickým polem). V našem případě bude magnetizační proud dán integrací

$$I_{\mathrm{mag}} = \oint_{\gamma=\partial S} i\,\mathrm{d}l = \oint_{\gamma=\partial S} M\,\mathrm{d}l = \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{M}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} . \tag{18.15}$$




V případě obecně mířící magnetizace se uplatní jen složka magnetizačního proudu kolmá na křivku, což odpovídá projekci magnetizace do směru křivky, tedy skalárnímu součinu s vektorovým elementem křivky.

*Polarizační proud* souvisí s tvorbou dipólů v proměnném elektrickém poli. Ve stacionárním poli se kladné a záporně nabité náboje od sebe posunou a vytvoří v látce nenulový dipólový moment. Na povrchu vznikne nenulová plošná hustota náboje, která je rovna polarizaci. Hustota polarizačního proudu (proud vztažený na jednotku plochy bude)

$$\mathbf{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{18.16}$$

Z předchozího textu už víme, že vektor elektrické indukce je složen ze dvou částí:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{18.17}$$

Časová změna druhé části odpovídá polarizačnímu proudu, který je zdrojem magnetického pole, stejně jako kterýkoli jiný elektrický proud. Bude mít nějakou interpretaci i časová změna prvního členu na pravé straně? James Clerk Maxwell ukázal, že i proměnné elektrické pole budí pole magnetické a že můžeme zavést tzv. posuvný proud

$$\mathbf{j}_{\text{dis}} \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{18.18}$$

Posuvný proud (*displacement current*) má rozměr A/m$^2$. První část je nenulová i ve vakuu a souvisí jen s časovou změnou elektrického pole. Druhá část je způsobena kmitanými vázanými náboji v dielektriku. Představme si například rovinný kondenzátor se dvěma deskami, mezi nimiž je prázdný prostor. K přívodním vodičům přiložíme střídavé napětí. Kondenzátorem poteče střídavý proud, přesto se v prostoru mezi deskami žádné náboje přesouvat nebudou. Na deskách se bude periodicky hromadit tu kladný a tu záporný náboj, a proto mezi nimi vznikne proměnné elektrické pole. Kolem přívodních vodičů a kondenzátoru vznikne proměnné magnetické pole, jehož směr se bude měnit ve shodě s momentální polaritou elektrického proudu. Kolem přívodních vodičů je za vznik magnetického pole zodpovědný tekoucí elektrický proud. Kolem prostoru mezi deskami za pole zodpovídá Maxwellův posuvný proud, konkrétně jeho první část spojená s periodickou změnou elektrického pole. Vzdálený pozorovatel nerozliší, že je magnetické pole kolem kondenzátoru generováno jiným mechanizmem než kolem vodiče. Do Ampérova zákona tedy musíme na pravou stranu přidat ještě magnetizační a posuvný proud:

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma = \partial S} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I + I_{\text{mag}} + I_{\text{dis}},$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma = \partial S} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I + \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{M} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \iint_S \mathbf{j}_{\text{dis}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma = \partial S} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I + \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{M} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S},$$

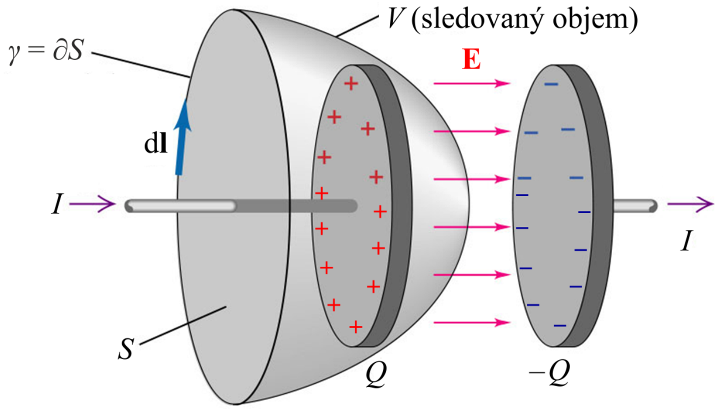
Nyní oba křivkové integrály sloučíme do jednoho, tj. z pravé strany převedeme křivkový integrál přes magnetizaci na levou stranu rovnosti:

$$\oint_{\gamma = \partial S} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Na levé straně se objevila přesně intenzita magnetického pole **H** – porovnejte výraz v kulaté závorce se vztahem (17.30). Ampérův zákon doplněný o reakci materiálu (magnetizační proud) a Maxwellův posuvný proud tedy bude mít tvar

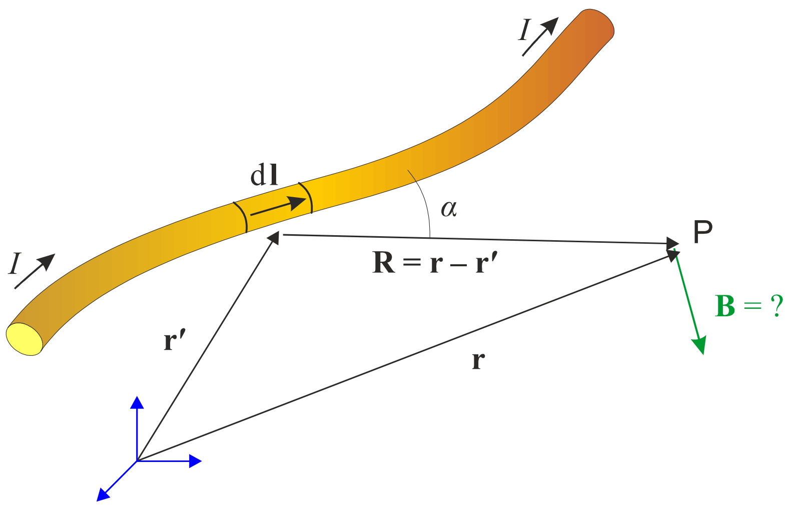
$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \,. \qquad (18.19)$$

Po Gaussových větách elektrostatiky a magnetostatiky jde o další klíčovou rovnici elektřiny a magnetizmu.




## Biotův-Savartův zákon

Často se setkáme s úlohou, při které potřebujeme v nějakém místě zjistit magnetické pole generované vodičem obecného tvaru, kterým teče konstantní proud. Využijeme principu superpozice (skládání příspěvků k poli od jednotlivých částí vodiče). Vodič myšlenkově rozsekáme na malé (nejlépe infinitezimální) kousky. Najdeme pole od jedné takové malé části vodiče a výsledné pole zjistíme jako součet všech příspěvků.




Polohu pozorovatele označíme **r**, polohu zdroje (proudového elementu) **r**′. Výsledné magnetické pole bude přímo úměrné protékajícímu proudu, délkovému elementu, sinu $\alpha$ (viz obrázek) a nepřímo úměrné $R^2$ (to platí pro bodové zdroje vždy, vzpomeňte si na Coulombův zákon):

$$\mathrm{d}B \sim I\frac{\mathrm{d}l\sin\alpha}{R^2} \sim I\frac{R\;\mathrm{d}l\sin\alpha}{R^3} \sim I\frac{|\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{R}|}{R^3}\,,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} \sim \frac{I\;\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{R}}{R^3} = \frac{I\;\mathrm{d}\mathbf{l}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,.$$

Třetí mocnina ve jmenovateli je kompenzována první mocninou v čitateli na správný průběh úměrný $1/R^2$. Konstanta úměrnosti musí být taková, aby pro rovný vodič vyšel Ampérův zákon. Podrobný výpočet provedeme příští semestr:

$$\mathrm{d}\mathbf{B} \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\mathrm{d}\mathbf{l} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{18.20}$$

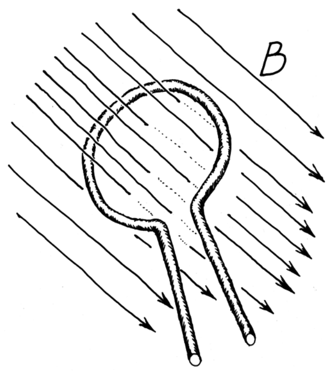
Celkové pole získáme integrací přes všechny proudové elementy, tj.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\gamma \frac{I\,\mathrm{d}\mathbf{l} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{18.21}$$

Tuto formuli nazýváme Biotův-Savartův zákon a používáme ji k výpočtu magnetického pole generovaného vodiči protékanými neproměnným elektrickým proudem.

## Faradayův indukční zákon, indukčnost, energie magnetického pole

Při svých rozsáhlých experimentech s elektřinou a magnetizmem přišel anglický fyzik Michael Faraday na velmi zajímavou věc. Pokud vodivou smyčkou procházel časově proměnný magnetický tok, vznikalo v ní elektrické napětí a následně tekl elektrický proud.




Důležité je, že magnetický indukční tok musí být proměnný. Toho dosáhneme otáčením smyčky, otáčením magnetu nebo přibližováním či vzdalováním magnetu a smyčky. Na mikroskopické úrovni je elektrický proud samozřejmě generován Lorentzovou silou působící na nabité částice. Faradayův indukční zákon lze zapsat velmi jednoduše:

$$U = -\frac{\mathrm{d}\psi_B}{\mathrm{d}t}. \tag{18.22}$$

Elektrické napětí je rovno časové změně magnetického indukčního toku smyčkou. Znaménko minus symbolizuje, že vzniklé napětí a jím generovaný proud působí proti změně, která ho vyvolala (Lenzovo pravidlo).

**Poznámka:** Z mechaniky víme, že rozdíl potenciálních energií mezi dvěma místy je v konzerrvativním poli roven vykonané práci, tedy křivkovému integrálu síly po určité dráze:

$$\Delta W = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Pokud jde o elektrické pole, vydělíme obě strany rovnosti nábojem testovací částice. Z potenciální energie se stane rozdíl potenciálů, tedy napětí a ze síly se stane intenzita elektrického pole:

$$U = \int_\gamma \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Elektrické napětí tedy vždy určujeme jako křivkový integrál druhého druhu z elektrického pole.

Označíme-li symbolem $S$ plochu smyčky a symbolem $\gamma = \partial S$ hraniční křivku, můžeme snadno přepsat Faradayův indukční zákon (18.22) do tvaru

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,. \tag{18.23}$$

Pokud přemístíme časovou derivaci napravo do argumentu integrálu, musíme použít parciální derivaci, neboť je magnetické pole funkcí času i prostoru a při derivování máme na výběr z více proměnných:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,. \tag{18.24}$$

*Faradayův indukční zákon* zapsaný ve tvaru (18.24) je posledním ze čtyř základních zákonů elektřiny a magnetizmu. Umožňuje zjistit generované napětí z proměnnosti magnetického indukčního toku a je základem všech točivých generátorů elektrického proudu.

Představme si nyní, že máme k dispozici smyčku protékanou elektrickým proudem. Smyčka bude generovat magnetické pole. Magnetický indukční tok (ať už naší smyčkou nebo nějakou jinou plochou) bude vždy úměrný velikosti elektrického proudu, který teče smyčkou a je původcem pole:

$$\psi_B \sim I \tag{18.25}$$

Koeficient úměrnosti se nazývá indukčnost, značíme ho $L$ a jednotkou je henry:

$$\psi_B = L\,I, \tag{18.26}$$

$$[L] = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{Tm}^2}{\mathrm{A}} = \mathrm{H}\,. \tag{18.27}$$

Pokud sledujeme magnetický indukční tok původní smyčkou, hovoříme o *vlastní indukčnosti*. Pokud jde o tok jinou smyčkou, hovoříme o *vzájemné indukčnosti*. V obou případech je indukčnost charakteristická konstanta daná pouze rozměry a tvarem smyček.

Nyní již můžeme určit energii magnetického pole v cívce. Předpokládejme, že cívka je dosti dlouhá ($l$), takže je uvnitř homogenní magnetické pole a okrajové efekty můžeme zanedbat. Energie deponovaná v poli jde na úkor výkonu dodávaného protékajícím proudem, tj.

$$\mathrm{d}W = -P\mathrm{d}t = -I\,U\,\mathrm{d}t\,.$$

Napětí vyjádříme z Faradayova indukčního zákona (18.22):

$$\mathrm{d}W = I\frac{\mathrm{d}\psi_B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = I\,L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = LI\,\mathrm{d}I\,.$$

Za magnetický indukční tok jsme dosadili ze vztahu (18.26). nyní vztah zintegrujeme

$$W = \frac{1}{2}LI^2\,. \tag{18.28}$$

Využijeme-li definiční vztah (18.26) pro indukčnost, dostaneme různá vyjádření energie magnetického pole v cívce s indukčností $L$:

$$W = \frac{1}{2}\frac{\psi_B^2}{L} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\psi_B \,. \tag{18.29}$$

Uvažujme cívku s $N$ závity o průřezu $S$ a s délkou $l$. Z Ampérova zákona můžeme určit magnetické pole uvnitř cívky

$$B = \mu\frac{NI}{l}\,. \tag{18.30}$$

Magnetický indukční tok cívkou bude

$$\psi_B = B\,NS = \mu\frac{NI}{l}NS = \mu\frac{N^2S}{l}I\,. \tag{18.31}$$

Indukčnost cívky lze určit přímo z definičního vztahu jako

$$L = \mu\frac{N^2S}{l}\,. \tag{18.32}$$

Obdobně jako u kondenzátoru můžeme nyní určit hustotu energie magnetického pole v cívce:

$$w_M = \frac{\frac{1}{2}LI^2}{V} = \frac{1}{2V}LI^2 = \frac{1}{2S\,l}LI^2\,,$$

Proud vyjádříme ze vztahu (18.30) a indukčnost ze vztahu (18.32):

$$w_M = \frac{1}{2S\,l}\left(\mu N^2\frac{S}{l}\right)\left(\frac{l\,B}{\mu N}\right)^2 = \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2}HB\,.$$

Obecný vztah, který platí v případě různých směrů **B** a **H** je

$$w_M = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,. \tag{18.33}$$

Všechny vztahy uvedené na konci této kapitoly kopírují obdobné vztahy pro elektrické pole:

| veličina | elektrické pole | magnetické pole |
|---|---|---|
| kapacita<br>indukčnost | $C = \frac{Q}{U}$ | $L = \frac{\psi_B}{I}$ |
| deskový kondenzátor<br>cívka | $C = \varepsilon\frac{S}{d}$ | $L = \mu N^2\frac{S}{l}$ |
| energie v kondenzátoru<br>energie v cívce | $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$ | $W = \frac{\psi_B^2}{2L} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\psi_B$ |
| hustota energie (tlak) pole | $w = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$ | $w = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$ |

## Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru

Gaussova věta elektrostatiky, Gaussova věta magnetostatiky, Ampérův zákon a Faradayův indukční zákon tvoří soustavu tzv. Maxwellových rovnic v integrálním tvaru. Jako vstup Maxwellových rovnic slouží hustota elektrického náboje $\rho$ a proudová hustota $\mathbf{j}$, z nichž spočteme náboj $Q$ a elektrický proud $I$. Výstupem jsou elektrická pole **E**, **D** a magnetická pole **H**, **B**. Na vstupu jsou tedy 4 proměnné (jedna skalární a jedna vektorová veličina) a na výstupu je 12 proměnných (čtyři vektorová pole, každé se třemi nezávislými složkami). Maxwellovu soustavu je třeba doplnit materiálovými vztahy, které popisují elektrickou a magnetickou odezvu materiálu (polarizaci a magnetizaci). Tu určujeme buď experimentálně, nebo většinou z numerických simulací.

**Maxwellova soustava v integrálním tvaru (zapamatujte si)**

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q\,; \tag{18.34}$$

$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0\,; \tag{18.35}$$

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = I + \iint_S \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{18.36}$$

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{18.37}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E})\,, \tag{18.38}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H})\right) \tag{18.39}$$

Z Maxwellových rovnic je možné zpětně odvodit všechny výchozí zákony a navíc předpovědět celou řadu důležitých jevů. Příkladem může být Maxwellova předpověď existence elektromagnetických vln, jejichž existenci dokázal Heinrich Hertz až po Maxwellově smrti. Svojí teorii elektřiny a magnetizmu publikoval James Clerk Maxwell v roce 1873 v práci *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dnešní podobu rovnic vytvořili Oliver Heaviside a Heinrich Hertz. Přirozeným důsledkem Maxwellových rovnic je speciální relativita, která v mechanice splňuje stejné časoprostorové transformace jako Maxwellovy rovnice. S diferenciálním tvarem, který je pro výpočty užitečnější, a s bohatými aplikacemi Maxwellových rovnic se seznámíte v příštím semestru.

Hodně štěstí u zkoušek,

Petr Kulhánek, 18. května 2020