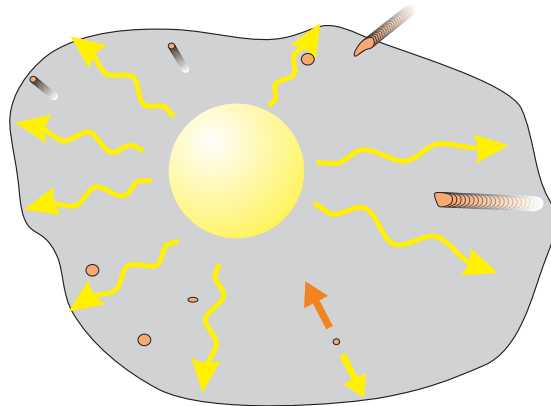


# ASTROFYZIKA V PŘÍKLADECH



Petr Kulhánek, Milan Červenka

# OBSAH

<b>I. ZÁKLADNÍ VZTAHY</b>	<b>3</b>
1. Parsek	3
2. Proxima Centauri	4
3. Magnituda	4
4. Pogsonova rovnice	5
5. Absolutní magnituda Slunce	5
6. Měrný výkon Rigelu	6
7. Hodinový úhel Aldebaranu	6
8. Jety kvazaru – fiktivní nadsvětelná rychlost	7
9. Planckovy škály	7
10. Vektorový součin	8
<b>II. ELEKTROMAGNETICKÉ ZÁŘENÍ</b>	<b>10</b>
1. Záření husté jako voda	11
2. Teplota Slunce z vlnové délky světla	11
3. Zářivý výkon Slunce	11
4. Měrný výkon Slunce	12
5. Sluneční konstanta	12
6. Teplota Slunce z intenzity záření	12
7. Elektrické pole slunečního záření u Země	13
8. Tlak záření	13
9. Teplota těles a vlnové délky záření	15
10. Určení poloměru hvězdy	15
<b>III. HVĚZDY, SLUNCE</b>	<b>17</b>
1. Hydrodynamický čas	17
2. Jeansovo kritérium	17
3. Rovnováha polytropní hvězdy	18
4. Schwarzschildova podmínka	19
5. Rovnice rovnováhy polytropní hvězdy	20
6. Porovnání výkonů	21
7. Poloměr Procyonu B	22
8. Úbytek sluneční hmoty	22
9. Krytí produkce energie gravitační kontrakcí	22
10. Teplota sluneční skvrny	23

<b>IV. GRAVITACE, TÍŽE, POHYBY</b>	<b>24</b>
1. Vztah mezi tíhovým a gravitačním polem	24
2. Pád z malé výšky – diferenční schéma	25
3. Pád z velké výšky – diferenční schéma	27
4. Oběh tělesa po kruhové dráze	28
5. Třetí Keplerův zákon	29
6. Kometární dráha	29
7. Pád Země do Slunce	30
8. Příliv a odliv	30
9. Gravitační působení Slunce a Země na Měsíc	31
10. Příliv a odliv	31
11. Hmotnost Země	32
12. Hillovy ekvipotenciály	33
13. Gravitace Země a Měsíce	34
14. Lagrangeův bod L1 soustavy Země a Měsíc	34
15. Úniková rychlost z Galaxie	36
16. Cesta raketou na Proximu Centauri	36
<b>V. ROTAČNÍ POHYBY</b>	<b>38</b>
1. Rotace bodu	39
2. Kyvadlo	40
3. Hvězda měnící rozměry	41
4. Zákon ploch	42
5. Druhý Keplerův zákon	43
6. Od Keplera k Newtonovi	43
7. Volný pád Měsíce	44
8. Vzdalování Měsíce	44
9. Vzdalování Země	45
10. Efektivní potenciál	45
11. Země jako harmonický oscilátor	46
12. Pohyb elektronu v magnetickém poli	47
13. Profil hladiny kapaliny v rotující nádobě	48
14. Profil víru na vodní hladině	48
15. Rychlostní profil v rotující galaxii s hustým jádrem	49
16. Rozměr neutronové hvězdy	50
<b>VI. SPECIÁLNÍ RELATIVITA</b>	<b>52</b>
1. Maticový zápis Lorentzovy transformace	52
2. Determinant LT	52
3. Inverzní matice k LT	53

4.	Úhel rotace – rapidita	53
5.	Relativistický Dopplerův jev	54
6.	Mion	55
<b>VII. GRAVITACE A OBECNÁ RELATIVITA</b>		<b>56</b>
1.	Laplaceův výpočet Schwarzschildova poloměru	56
2.	Hustota černé díry	57
3.	Pohyb fotonu	57
4.	Kruhová orbita fotonů kolem černé díry	58
5.	Ohyb světla	59
6.	Červený posuv fotonu – výpočet ze zákona zachování energie	60
7.	Červený posuv fotonu – výpočet z LIS	61
8.	Červený posuv fotonu – výpočet z metriky	62
9.	Poundův Rebkův experiment	62
10.	Červené posuvy pro typické hvězdy	63
11.	Hodiny na telekomunikační družici	64
12.	Cesta do centra Galaxie	66
13.	Efektivní potenciál částice v okolí černé díry	68
14.	Beckensteinova teplota černé díry	69
15.	Vypařování černé díry	70
16.	Zakřivení prostoru v okolí černé díry	72
<b>VIII. ROZPÍNÁNÍ VESMÍRU</b>		<b>74</b>
1.	Objem koule	75
2.	Objem vesmíru	75
3.	Metrika na povrchu čtyřrozměrné koule	77
4.	Kosmologický posuv	78
5.	Kvazar	80
6.	Linearizace kosmologického posuvu	80
7.	Hubblův zákon a kosmologický princip	81
8.	Pokles hustoty energie záření s expanzí	81
9.	Základní řešení Einsteinovy-Fridmanovy rovnice	82
10.	Horizont částic (pozorovatelného vesmíru)	82
11.	Expanze při Hubblově konstantě neměnné v čase	83
12.	Hubblova konstanta pro různé entity	84
13.	Maximální stáří vesmíru pro Fridmanovu expanzi	84
14.	Stáří vesmíru tvořeného pouze hmotou	85
15.	Poměr energie látky a záření ve vesmíru	85
16.	Stavová rovnice expandující entity	86

<b>IX. POHYBY ČÁSTIC V POLÍCH</b>	<b>88</b>
1. Náboj v elektrickém poli	88
2. Larmorův poloměr	88
3. Magnetický moment nabité částice	89
4. Magnetická rezonance	89
5. Magnetický moment jako invariant	90
6. Magnetické zrcadlo	91
7. Gravitační drift	91
8. Bennettův pinč	92

Skriptum je doplňkem k textu Astrofyzika (<https://www.aldebaran.cz/astrofyzika/>) Aktuální verzi skriptu si můžete stáhnout na serveru <https://www.aldebaran.cz/> v sekci „Studium“ nebo v sekci „Stáhnout“. Nalezené chyby prosím pošlete na adresu [kulhanek@aldebaran.cz](mailto:kulhanek@aldebaran.cz).

TABULKA ZÁKLADNÍCH KONSTANT	
$G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$	gravitační konstanta
$c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	rychlost světla
$\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J s}$	Planckova konstanta
$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	Stefanova Boltzmannova konstanta
$b = 0,00289 \text{ K} \cdot \text{m}$	Wienova konstanta

TABULKA HODNOT VELIČIN	
$M_S = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$	hmotnost Slunce
$M_Z = 5,976 \times 10^{24} \text{ kg}$	hmotnost Země
$M_M = M_Z / 81$	hmotnost Měsíce
$m_n = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	hmotnost nukleonu
$R_{ZS} = 150 \times 10^6 \text{ km}$	vzdálenost Země – Slunce
$R_{ZM} = 384 \times 10^3 \text{ km}$	vzdálenost Země – Měsíc
$R_S = 700\,000 \text{ km}$	poloměr Slunce
$R_Z = 6\,400 \text{ km}$	poloměr Země
$P_S = 4 \times 10^{26} \text{ W}$	celkový zářivý výkon Slunce
$b = 2,662 \times 10^{40} \text{ J s}$	moment hybnosti Země vzhledem ke Slunci
$v = 30 \text{ km s}^{-1}$	rychlost Země kolem Slunce
$I = 1,39 \text{ kW m}^{-2}$	solární konstanta (intenzita slunečního záření u Země)

JEDNOTKY VZDÁLENOSTI	
$\text{au} = 150 \times 10^6 \text{ km}$	astronomická jednotka
$\text{ly} = 9,46 \times 10^{12} \text{ km}$	světelný rok
$\text{pc} = 30,9 \times 10^{12} \text{ km}$	parsek

TYPICKÉ VLASTNOSTI HVĚZD			
	poloměr	hmotnost	hustota
<b>černá díra</b>	3 km	$1 M_S$	$10^{16} \text{ g/cm}^3$
<b>neutronová hvězda</b>	10 až 100 km	$1 M_S$	$10^{14} \text{ g/cm}^3$
<b>bílý trpaslík</b>	1000 až 10 000 km	$1 M_S$	$10^6 \text{ g/m}^3$
<b>Slunce</b>	700 000 km	$1 M_S$	$1,4 \text{ g/cm}^3$
<b>veleobr</b>	až $500 R_S$	$1 M_S$	$10^{-6} \text{ g/cm}^3$

RELATIVNÍ MAGNITUDA			
	rovnice	ref. hodnota	obor
<b>vizuální</b>	$m = -2,5 \log J/J_0$	$J_0 = 2,54 \times 10^{-6} \text{ lm/m}^2$	vizuální
<b>bolometrická</b>	$m = -2,5 \log I/I_0$	$I_0 = 2,553 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$	kompletní

# I. ZÁKLADNÍ VZTAHY

- $au$  – astronomická jednotka: průměrná vzdálenost Země od Slunce,  $150 \times 10^6$  km.
- $ly$  – světelný rok: vzdálenost, kterou světlo ulétne za jeden rok,  $9,46 \times 10^{12}$  km.
- $pc$  – parsek, paralaktická sekunda: vzdálenost, ze které by poloměr oběžné dráhy Země byl kolmo k zornému paprsku vidět pod úhlem  $1''$ ,  $30,9 \times 10^{12}$  km.
- $m$  – relativní magnituda: logaritmická míra jasnosti,  $m = -2,5 \log J/J_0$ . Tato definiční rovnici zavedl N. R. Pogson. Koeficient je volen tak, aby hvězdy s rozdílem pěti magnitud měly podíl jasností 1:100. Znaménko minus v definici je z historických důvodů. Magnitudy takto vypočtené odpovídají historickému dělení hvězd do šesti skupin (nula nejjasnější, 5 nejméně jasné pozorovatelné okem). Magnitudu nula má hvězda s referenční jasností  $J_0$ . Nejjasnější hvězda na severní polokouli Vega má magnitudu  $\sim 0$ , nejjasnější hvězda noční oblohy Sirius má magnitudu  $-1,6$ . Relativní magnituda vypovídá o skutečné jasnosti hvězdy na obloze, která kromě svítivosti závisí i na vzdálenosti hvězdy. Magnitudu označujeme buď  $10 \text{ mag}$ , nebo  $10^m$ .
- $M$  – absolutní magnituda: magnituda, kterou by hvězda měla ve vzdálenosti 10 pc. Závisí jen na skutečné svítivosti hvězdy. Každou hvězdu si představíme „přestěhovanou“ do vzdálenosti 10 pc. Zadáváme-li vzdálenost hvězdy v parsecích, platí mezi absolutní a relativní magnitudou jednoduchý vztah

$$M = m + 5 - 5 \log r. \quad (1)$$

- $\delta$  – deklinace: Oblouk mezi světovým rovníkem (projekce roviny zemského rovníku na nebeskou sféru) a hvězdou. Světový rovník má  $\delta = 0^\circ$ , severní světový pól má  $\delta = 90^\circ$ , jižní světový pól  $\delta = -90^\circ$ .
- $\alpha$  – rektascenze: Oblouk mezi jarním bodem a deklinační kružnicí hvězdy (kolmá na světový rovník) měřený ve stupních nebo hodinách. Jarní bod ( $\alpha = 0^\circ = 0 \text{ h}$ ) je průsečík ekliptiky (průmět roviny oběžné dráhy Země kolem Slunce na nebeskou sféru) se světovým rovníkem v souhvězdí Ryb. Slunce se nachází v jarním bodě při jarní rovnodennosti.
- $t$  – hodinový úhel: úhel mezi místním poledníkem a objektem měřený ve směru zdánlivého pohybu hvězd, tj. od jihu k západu. Udává se v hodinách (azimut vyjádřený v hodinách). *Horní kulminace*: hvězda v nejvyšším bodě své dráhy (nad jihem,  $t = 0 \text{ h}$ ). *Dolní kulminace*: hvězda v nejnižším bodě své dráhy (nad severem,  $t = 12 \text{ h}$ ).
- $\theta$  – hvězdný čas: hodinový úhel jarního bodu. Jde o rektascenzi hvězd, které právě kulminují.  $\theta = \alpha + t$ . K danému datu nalezneme hvězdný čas v hvězdářské ročence.

## 1. Parsek

**Zadání:** Spočítejte vzdálenost 1 pc.

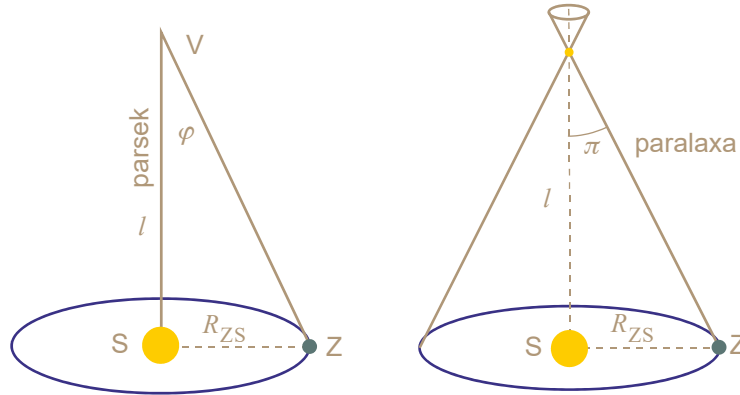
**Řešení:** 1 pc (parsek, paralaktická sekunda) je vzdálenost, ze které vidíme velkou poloosu oběžné dráhy Země kolem Slunce pod úhlem  $\varphi = 1''$ . Úhel  $1''$  je tak malý, že strany VS a VZ na obrázku prakticky splývají a místo pravoúhlého trojúhelníka VSZ můžeme použít definiční vztah úhlu (úhel je oblouk ku poloměru). Proto



$$l = \frac{R_{ZS}}{\phi}, \quad (2)$$

kde  $l$  je vzdálenost 1 pc v metrech,  $R_{ZS}$  je vzdálenost Země od Slunce a  $\phi$  je úhel jedné vteřiny vyjádřený v radiánech:

$$l = \frac{1,5 \times 10^{11} \text{ m}}{\frac{1}{60 \times 60} \cdot \frac{2\pi}{360}} \cong 3 \times 10^{16} \text{ m}. \quad (3)$$



## 2. Proxima Centauri

**Zadání:** Najděte paralaxu Proximy Centauri, která je vzdálená asi 4.3 světelného roku.

**Řešení:** Díky pohybu Země kolem Slunce se zdá, že blízké hvězdy opisují oproti vzdáleným elipsu. Úhlový poloměr této elipsy se nazývá paralaxa hvězdy. Lze ji změřit jen pro nejbližší hvězdy. Z definice úhlu (jako v předchozím příkladě) tedy vyplývá, že

$$\pi = \frac{R_{ZS}}{l} = \frac{1,5 \times 10^{11} \text{ m}}{4,3 \text{ ly}} = \frac{1,5 \times 10^{11} \text{ m}}{4,3 \times 9,5 \times 10^{15} \text{ m}} \cong 3,7 \times 10^{-6} \text{ rad}, \quad (4)$$

což je přibližně 0.76". Vidíme, že i u druhé nejbližší hvězdy po Slunci není paralaxa ani celá 1".

## 3. Magnituda

**Zadání:** Jaký je rozdíl magnitud dvou hvězd, jejichž jasnost se liší stokrát?

**Řešení:** Magnituda je logaritmickou mírou jasnosti:

$$m \equiv -2,5 \log J/J_0. \quad (5)$$

Koeficient  $-2,5$  se objevuje před logaritmem z historických důvodů, kdy nejjasnější hvězdy pozorovatelné okem měly třídu 0, nejslabší třídu 5. Znaménko „-“ zajišťuje, aby nižší magnitudy měly vyšší svítivost. Koeficient  $2,5$  zase zajistí, aby pro poměr jasností  $J_1/J_2 = 100$  byl rozdíl magnitud právě 5:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = -2,5 (\log J_2/J_0 - \log J_1/J_0) \Rightarrow$$

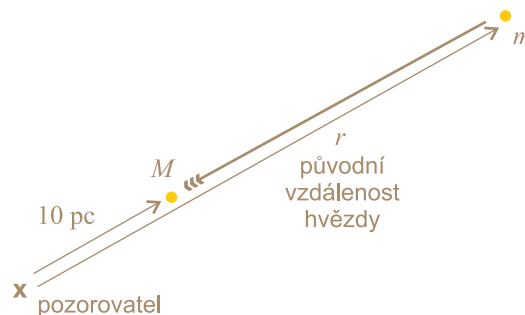
$$\Delta m = 2.5 \log \left( \frac{J_1}{J_2} \right) = 2,5 \log 100 = 5. \quad (6)$$

#### 4. Pogsonova rovnice

**Zadání:** Odvoďte vztah mezi absolutní magnitudou a relativní magnitudou v parsecích (tzv. Pogsonovu rovnici).

**Řešení:** Víme, že  $J$  klesá se čtvercem vzdálenosti od zdroje ( $J \sim 1/r^2$ ) a tak můžeme podle definice magnitudy psát:

$$m_2 - m_1 = -2.5 \log \left( \frac{J_2}{J_1} \right) = -2.5 \log \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) = 5 \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right). \quad (7)$$



Absolutní magnituda je magnituda hvězdy přepočítaná na jednotnou vzdálenost 10 pc od zdroje (hvězdy). Jestliže bude  $r_2 = 10$  pc a  $m_2 = M$  pro absolutní magnitudu a  $r_1 = r$ ,  $m_1 = m$  pro relativní magnitudu, pak

$$M - m = 5 \log \left( \frac{10}{r} \right) = 5 (\log 10 - \log r).$$

Pogsonova rovnice má tedy tvar:

$$M = m + 5 - 5 \log r, \quad (8)$$

kde  $r$  je vzdálenost zdroje, která musí být vyjádřena v parsecích.

#### 5. Absolutní magnituda Slunce

**Zadání:** Určete absolutní magnitudu Slunce. Relativní magnituda je  $m = -26,6$ .

**Řešení:** Nejprve převedeme vzdálenost Slunce od nás (1 au) na parseky.

$$r = \frac{150 \times 10^9}{3,1 \times 10^{16}} \text{ pc} = 4,84 \times 10^{-6} \text{ pc}. \quad (9)$$

Nyní z Pogsonovy rovnice dostáváme

$$M = m + 5 - 5 \log r = -26,6 + 5 - 5 \times (-5,3) \cong 4,9. \quad (10)$$

Absolutní magnituda Slunce je tedy přibližně  $M \cong 5$ .

## 6. Měrný výkon Rigelu

**Zadání:** Hvězda Rigel ze souhvězdí Orionu je od Slunce vzdálena 240 pc a její relativní magnituda je  $0,18^m$ . Hmotnost Rigelu je 17 hmotností Slunce. Určete výkon hvězdy na jednotku hmotnosti tak, že její parametry porovnáte se Sluncem.

**Řešení:** Nejprve určíme z Pogsonovy rovnice absolutní magnitudu Rigelu

$$M_{\text{Rig}} = m_{\text{Rig}} + 5 - 5 \log r \approx -6,72. \quad (11)$$

Pro svítivosti Slunce a Rigelu platí

$$M_{\text{Rig}} - M_{\text{S}} = -2,5 \left( \frac{L_{\text{Rig}}}{L_{\text{S}}} \right) \Rightarrow$$
$$\frac{L_{\text{Rig}}}{L_{\text{S}}} = 10^{\frac{M_{\text{Rig}} - M_{\text{S}}}{-2,5}} \quad (12)$$

Pro měrné výkony máme

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{Rig}}}{\mathcal{P}_{\text{S}}} = \frac{L_{\text{Rig}}/M_{\text{Rig}}}{L_{\text{S}}/M_{\text{S}}} =$$
$$= 10^{\frac{M_{\text{Rig}} - M_{\text{S}}}{-2,5}} \frac{M_{\text{S}}}{M_{\text{Rig}}} \approx 2300 \quad (13)$$

Hmotnosti jsou vysázeny odlišným fontem, aby nedošlo k záměně s magnitudou.

## 7. Hodinový úhel Aldebaranu

**Zadání:** Určete hodinový úhel hvězdy Aldebaran dne 12. 10. 2000 ve 23h 10min v centru Prahy.

*Souřadnice Aldebaranu:* rektascenze  $\alpha = 4\text{h } 33\text{min}$ ; deklinace  $\delta = 16^\circ$ .

*Souřadnice centra Prahy:* zem. délka:  $\lambda = 14^\circ 23'$  zem. šířka:  $\varphi = 50^\circ 07'$ .

*Hvězdný čas k půlnoci 12. 10. 2000 (z Hvězdářské ročenky):*  $\theta = 1\text{h } 2\text{min}$ .

**Řešení:** Nejprve určíme místní hvězdný čas (zanedbáme rozdíl mezi středním a pravým časem). Pro převod úhlových a časových údajů uijeme  $1^\circ = 4\text{min}$  ( $15^\circ = 1\text{h}$ ), resp.  $1' = 4\text{s}$  ( $15' = 1\text{min}$ ):

$$\theta_{\text{loc}} = \theta + \lambda + t_0 = 1\text{h } 2\text{min} + 0\text{h } 58\text{min} + 23\text{h } 10\text{min} =$$
$$= 25\text{h } 10\text{min} = 1\text{h } 10\text{min}. \quad (14)$$

Dále určíme hodinový úhel hvězdy

$$t = \theta_{\text{loc}} - \alpha = 1\text{h } 10\text{min} - 4\text{h } 33\text{min} = 20\text{h } 37\text{min}. \quad (15)$$

Aldebaran se tedy nachází nad jihovýchodem, kulminovat bude za 3h 23min (bude nad jihem,  $t = 24\text{h}$ ).

## 8. Jetý kvazaru – fiktivní nadsvětelná rychlost

**Zadání:** Vzdálený kvazar je zdrojem dvou výtrysků látky (jetů) z nichž jeden se pohybuje směrem k pozorovateli pod malým úhlem téměř rychlostí světla. Určete, jakou rychlost naměří pozorovatel.

**Řešení:** Poloha objektu je dána vztahy:

$$\begin{aligned}x(t) &= vt \sin \alpha ; \\ y(t) &= y_0 - vt \cos \alpha .\end{aligned}\quad (16)$$

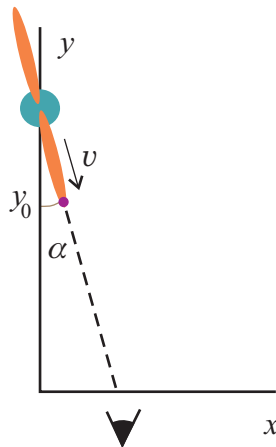
Signál přichází k pozorovateli se zpožděním v čase

$$\tau \doteq t + \frac{y(t)}{c} .\quad (17)$$

Rychlost, kterou zjistí pozorovatel, proto bude

$$v = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx/dt}{d\tau/dt} = \frac{v \sin \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} \underset{v \rightarrow c}{\approx} \frac{c \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \underset{\alpha \ll 1}{\approx} \frac{c \alpha}{1 - (1 - \alpha^2 / 2)} = \frac{2c}{\alpha} .\quad (18)$$

Z výsledku je zřejmé, že pohybuje-li se jet směrem k pozorovateli, tato fiktivní pozorovaná rychlost snadno převýší rychlost světla.



## 9. Planckovy škály

**Zadání:** Nalezněte takové kombinace konstant  $c$ ,  $G$ ,  $\hbar$ , které dají přirozenou jednotku pro délku, čas, hmotnost a energii.

$$\begin{aligned}c &= 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} , \\ G &= 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} , \\ \hbar &= 1,05 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} .\end{aligned}\quad (19)$$

**Řešení:** Pokusíme se vytvořit výraz pro délku  $l_P$ , čas  $t_P$ , hmotnost  $m_P$  a energii  $E_P$ . Začneme délkou tak, že napíšeme součin výše uvedených tří konstant, s neznámými exponenty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ :

$$l_P = c^\alpha G^\beta \hbar^\gamma .\quad (20)$$

Tato rovnice ve skutečnosti představuje čtyřnásobnou rovnost: rovnost číselnou a rovnost rozměrovou v metrech, kilogramech a sekundách. Napíšeme nyní rozměrové části vytvořeného výrazu:

$$m^1 \text{kg}^0 \text{s}^0 = m^\alpha \text{s}^{-\alpha} \text{kg}^{-\beta} m^{3\beta} \text{s}^{-2\beta} \text{kg}^\gamma m^2 \text{s}^{-\gamma} . \quad (21)$$

Nyní zapíšeme soustavu rovnic pro exponenty u metru, kilogramu a sekundy:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + 3\beta + 2\gamma , \\ 0 &= -\beta + \gamma , \\ 0 &= -\alpha - 2\beta - \gamma . \end{aligned} \quad (22)$$

Řešením této soustavy získáme jednoznačné řešení pro exponenty

$$\alpha = -3/2; \quad \beta = 1/2; \quad \gamma = 1/2 .$$

Tyto exponenty jednoznačně až na násobící číselný faktor určují velikost Planckovy délky. Zcela analogickým způsobem můžeme odvodit vztahy pro ostatní Planckovy veličiny. Výsledky udává následující tabulka:

$$\begin{aligned} l_P &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35} \text{ m} , \\ t_P &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-43} \text{ s} , \\ m_P &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{-8} \text{ kg} , \\ E_P &= \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 10^{19} \text{ GeV} . \end{aligned} \quad (23)$$

**Poznámka:** Planckovy škály jsou přirozené jednotky pro náš vesmír. V Planckově čase se oddělovala gravitační interakce od ostatních interakcí (došlo k narušení supersymetrie) a vesmír poprvé získal vlastnosti podobné dnešním vlastnostem. V tomto čase měl vesmír komplikovanou prostorovou strukturu, jejíž základním elementem byla vlákna o rozměrech Planckovy délky. Průměrná pohybová hmotnost (energie) částic v té době byla rovna Planckově hmotnosti (energii).

## 10. Vektorový součin

**Zadání:** Ukažte, že vektorový součin má tenzorový charakter.

**Řešení:** Pomocí klasické definice přes determinant můžete vektorový součin zapsat jako

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} . \quad (24)$$

Už z tohoto zápisu je zřejmé, že se vektorový součin nemůže transformovat jako vektor, protože se tam vyskytují součiny původních uspořádaných trojic  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ . Obecně jde o matici

$$\mathbf{C}_{kl} = a_k b_l - a_l b_k . \quad (25)$$

Tato matice má své transformační vlastnosti a je to antisymetrický ( $C_{kl} = -C_{lk}$ ) tenzor druhého řádu. Antisymetrické matice mají na diagonále vždy nulu a prvky pod diagonálou lze dopočítat z prvků nad diagonálou obrácením znaménka. U naší matice to vypadá takto:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Existují tedy jen tři nezávislé prvky této matice. To svádí k tomu, napsat je do trojice a interpretovat jako vektor. To ale nejde! Maximálně můžeme říci, že tvoří pseudovektor.

**Variace příkladu:** Kolik nezávislých prvků má symetrická a antisymetrická matice ve dvou, třech a čtyřech dimenzích.

## II. ELEKTROMAGNETICKÉ ZÁŘENÍ

Tok energie elektromagnetického záření je popsán relativistickým čtyřvektorem  $(\rho_W, \mathbf{j}_W)$ .

$$\rho_W = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}; \quad \mathbf{j}_W = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (27)$$

Složka  $\rho_W$  se nazývá hustota energie elektromagnetického záření a zpravidla ji označujeme symbolem  $u$ . Tři prostorové složky  $\mathbf{j}_W$  se nazývají tok energie (Poyntingův vektor) a zpravidla je označujeme symbolem  $\mathbf{S}$  nebo jde-li jen o velikost (tzv. intenzitu) symbolem  $I$ . Velikosti prostorové a časové části čtyřvektoru jsou spojeny vztahem  $I = uc$ . Z čtyřvektoru lze složit rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho_W}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_W = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (28)$$

Na pravé straně není nula, energie elektromagnetického záření se nezachovává, převádí se na nabitě částice v podobě hustoty Jouleova výkonu  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ .

NĚKTERÉ DŮLEŽITÉ VZTAHY		
$I = EH$	(29)	tok energie (intenzita, velikost Poyntingova vektoru) [I] = Jm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> = W/m <sup>2</sup>
$I = \sigma T^4$	(30)	tok energie – Stefan Boltzmannův zákon
$I = uc$	(31)	tok energie – vyjádření z hustoty energie
$u = ED/2 + HB/2$	(32)	hustota energie – výpočet z elektrické i magnetické složky [u] = Jm <sup>-3</sup>
$u = ED$	(33)	hustota energie – výpočet z elektrické složky
$u = HB$	(34)	hustota energie – výpočet z magnetické složky
$u = I/c = EH/c$	(35)	hustota energie – výpočet z toku energie
$P = u/3$	(36)	tlak elektromagnetického záření
$E/B = c$	(37)	poměry polí v elektromagnetické vlně
$c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$	(38)	rychlost světla
$\lambda_{\max} = b/T$	(39)	Wienův zákon (vlnová délka maxima vyzařování)

## 1. Záření husté jako voda

**Zadání:** Určete při jaké fázi expanze vesmíru (při jaké teplotě) mělo záření hustotu stejnou jako voda.

**Řešení:** Mezi hustotou hmoty a energie platí jednoduchý vztah plynoucí z Einsteinovy formule

$$\rho_W = \rho_m c^2. \quad (40)$$

Hustota hmoty bude odpovídat hustotě vody. Hustotu energie záření určíme z toku energie, který je dán Stefan Boltzmannovým zákonem:

$$\rho_W = \frac{I}{c} = \frac{\sigma T^4}{c}. \quad (41)$$

Porovnáním obou vztahů určíme teplotu vesmíru, při které mělo elektromagnetické záření hustotu stejnou jako voda:

$$T = \sqrt[4]{\frac{\rho_m c^3}{\sigma}} = 8 \times 10^8 \text{ K}. \quad (42)$$

**Poznámka:** Vesmír měl tuto teplotu asi 4 minuty po Velkém třesku a právě se v něm začínaly tvořit první lehké prvky.

## 2. Teplota Slunce z vlnové délky světla

**Zadání:** Určete povrchovou teplotu Slunce, víte-li, že maximum vyzařování je na vlnové délce 500 nm.

**Řešení:** Podle Wienova zákona je povrchová teplota rovna

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}} \sim \frac{0.00289 \text{ m} \cdot \text{K}}{500 \times 10^{-9} \text{ m}} \sim 5800 \text{ K}. \quad (43)$$

**Poznámka:** Horké hvězdy vyzařují obecně na kratší vlnové délce. Typické modré hvězdy mají povrchovou teplotu přes 9000 K, žluté a zelené hvězdy okolo 6 000 K, červené hvězdy jen asi 3 000 K. Wienův zákon lze aplikovat i na podstatně chladnější tělesa. Například člověk s povrchovou teplotou cca 310 K vyzařuje přibližně jako černé těleso s maximem vyzařování na vlnové délce 10 mikrometrů. V této oblasti musí být proto maximálně citlivá čidla pro detekci osob.

## 3. Zářivý výkon Slunce

**Zadání:** Nalezněte celkový zářivý výkon Slunce, znáte-li jeho povrchovou teplotu  $T = 5800 \text{ K}$ .

**Řešení:** Zářivý výkon Slunce určíme ze Stefan-Boltzmannova zákona:

$$\begin{aligned} P_S &= I S = \sigma T^4 4\pi R_S^2 = \\ &= 5.67 \times 10^{-8} \times 5800^4 \times 4\pi \times (7 \times 10^8)^2 \text{ W} = \\ &= 4 \times 10^{26} \text{ W}. \end{aligned} \quad (44)$$

**Poznámka:** Obrovská hodnota zářivého výkonu Slunce je dána jeho velkou hmotností. V průměru produkuje jeden kilogram sluneční hmoty výkon velmi malý.



## 4. Měrný výkon Slunce

**Zadání:** Jaký výkon se průměrně uvolňuje v jednom kilogramu sluneční hmoty?

**Řešení:** Měrný výkon přepočítaný na kilogram je

$$\mathcal{P} = \frac{P_S}{M_S} = 2 \times 10^{-4} \text{ W/kg} . \quad (45)$$

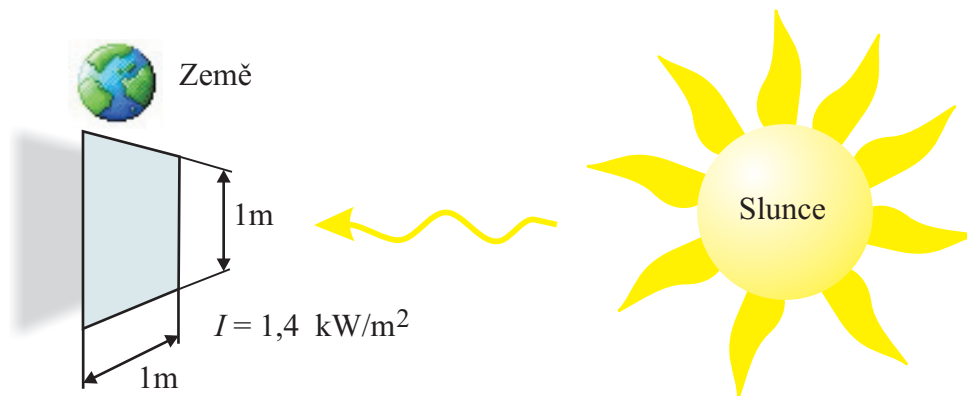
**Poznámka:** Přestože je celkový zářivý výkon enormní a obtížně představitelný, je měrný výkon zanedbatelný. Jeden kilogram sluneční hmoty by nepostačil ani k rozsvícení nejmenší žárovky. Termojaderná syntéza v centru Slunce probíhá velmi, velmi pomalu, zato však v obrovských měřítkách. Ohromný výkon Slunce je tak dán jen jeho velkou hmotností, nikoliv intenzitou termojaderné syntézy.

## 5. Sluneční konstanta

**Zadání:** Určete intenzitu slunečního záření v okolí Země.

**Řešení:** Sluneční konstanta je intenzita slunečního záření (energie kolmo dopadající na jednotkovou plochu za jednotku času) nad atmosférou naší Země. Tuto veličinu můžeme spočítat jako podíl celkového výkonu Slunce a celkové plochy povrchu koule procházející Zemí se středem ve Slunci:

$$I_Z = \frac{P_S}{4\pi R_{ZS}^2} = 1.4 \text{ kW m}^{-2} . \quad (46)$$



**Poznámka:** U naší Země dopadá na každý metr čtvereční plochy, kolmo postavené ke Slunečnímu záření, výkon 1.4 kW. Tento ohromný výkon je přímo využíván v panelech slunečních baterií kosmických sond a ve slunečních elektrárnách. Při povrchu Země je tento výkon snížen rozptylem v atmosféře. Kromě jaderné energie pochází veškerá běžně dostupná energie na Zemi ze sluneční energie. Dopadající výkon slunečního záření je například částečně absorbován rostlinami a pomocí fotosyntézy ukládán do energie chemických vazeb. Po mnoha letech je tato energie zpětně využita při spalování uhlí, nafty nebo benzínu. Dopadající záření způsobuje také odpařování vody z povrchu Země a umožňuje tak vodní koloběh. Proto i energie využívaná ve vodních elektrárnách má prapůvod ve sluneční energii.

## 6. Teplota Slunce z intenzity záření

**Zadání:** Určete povrchovou teplotu Slunce, víte-li, že u Země je tok energie světelného záření od Slunce roven  $1.4 \text{ kW/m}^2$ .

**Řešení:** Intenzita vyzařování je definována jako výkon na plochu neboli

$$I_Z \equiv \frac{\Delta P}{\Delta S}. \quad (47)$$

Zářivý výkon v kouli kolem Slunce ve vzdálenosti 1 au (u Země) je roven

$$P_S = 4\pi R_{ZS}^2 \cdot I_Z. \quad (48)$$

Protože známe poloměr Slunce  $R_S = 7 \times 10^5$  km, můžeme předchozí vztah přepočítat na intenzitu na povrchu Slunce jako

$$I_S = \frac{P_S}{4\pi R_S^2} = \frac{R_{ZS}^2}{R_S^2} I_Z. \quad (49)$$

Ze Stefan-Boltzmanova zákona nyní plyne teplota na povrchu

$$T = \sqrt[4]{\frac{I_S}{\sigma}}. \quad (50)$$

Po dosazení docházíme k přibližné hodnotě 5 800 K na povrchu Slunce.

## 7. Elektrické pole slunečního záření u Země

**Zadání:** Sluneční záření má v okolí Země intenzitu  $I = 1.4$  kW/m<sup>2</sup>. Nalezněte průměrnou hodnotu intenzity elektrického a indukce magnetického pole v slunečním záření v místě, kde se nachází Země.

**Řešení:** Intenzita dopadající energie je dána velikostí Poyntingova vektoru:  $I_Z = |\mathbf{S}| = EH$ . Poměr elektrické intenzity a magnetické indukce v elektromagnetické vlně je  $E/B = c$ . Tyto dva vztahy můžeme chápat jako soustavu dvou rovnic pro elektrické a magnetické pole:

$$\mu_0 I = EB; \quad \frac{E}{B} = c. \quad (51)$$

Vynásobením a vydělením obou rovnic dostaneme řešení:

$$E = \sqrt{c\mu_0 I}; \quad B = \sqrt{\frac{\mu_0 I}{c}}. \quad (52)$$

**Výsledek:**  $E = 726$  V/m,  $B = 2.4 \times 10^{-6}$  T.

**Poznámka:** Pole 726 V/m se na první pohled zdá být enormní. Musíme si však uvědomit, že rozdíl potenciálů 726 V je měřen na vzdálenosti 1 m. Skutečné emisní akty však trvají krátkou dobu a pozorované světlo se skládá z úseků o rozměrech několikanásobku vlnové délky. Na této vzdálenosti je již rozdíl potenciálů malý.

## 8. Tlak záření

**Zadání:** Určete rozměry částec prachu, u kterých je v mlhovině kolem hvězdy vyrovnána gravitační síla tlakem záření.

**Řešení:** Veličinu  $x$  charakterizující centrální hvězdu v mlhovině budeme označovat indexem  $x_*$ , veličinu  $x$  charakterizující zrníčko prachu indexem  $x_p$ . Pro gravitační sílu působící na zrníčko prachu vychází:

$$F_G = G \frac{m_p m_*}{r^2} = G \frac{\frac{4}{3} \pi R_p^3 \rho_p m_*}{r^2}. \quad (53)$$

Sílu elektromagnetického záření určíme jako součin tlaku záření a účinné plochy zrníčka. Ta závisí na tvaru zrníčka a jeho orientaci vzhledem k dopadajícímu záření. V prvním přiblížení ji lze považovat za průřez zrníčka:

$$F_{\text{RAD}} = p_{\text{RAD}} \cdot S_p = \frac{1}{3} u \cdot \pi R_p^2 = \frac{1}{3} \frac{I(r)}{c} \cdot \pi R_p^2 \quad (54).$$

Intenzitu záření na povrchu hvězdy určíme ze Stefanova-Boltzmannova zákona  $I(R_*) = \sigma T_*^4$ .

Intenzita ubývá s kvadrátem vzdálenosti, a v místě zrníčka proto bude  $I(r) = \sigma T_*^4 \cdot R_*^2 / r^2$ .

Výsledný vztah pro sílu způsobenou tlakem záření tedy bude:

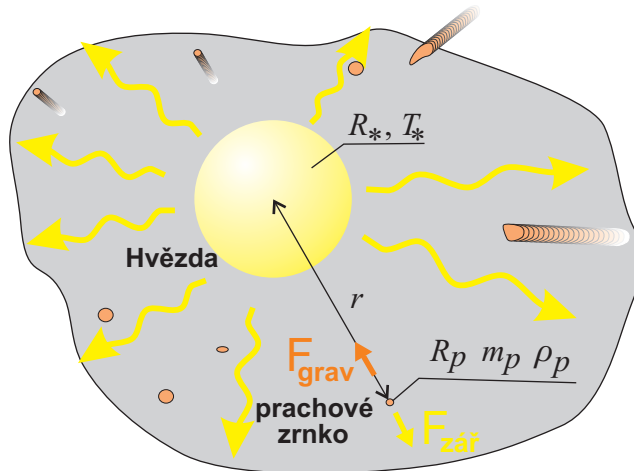
$$F_{\text{RAD}} = \frac{1}{3} \frac{\pi \sigma}{c} \frac{T_*^4 \cdot R_*^2 \cdot R_p^2}{r^2}. \quad (55)$$

Povšimněte si, že gravitační síla i síla od tlaku záření ubývají s druhou mocninou vzdálenosti od hvězdy! Budou-li pro zrno určité velikosti vyrovnány v blízkosti hvězdy, budou také vyrovnány ve větší vzdálenosti. Malá zrníčka tak budou vypuzena tlakem záření a velká zrníčka udržována v mlhovině gravitací nezávisle na tom, o kterou část mlhoviny jde.

Porovnáním obou sil snadno určíme rozměry zrníčka, pro které jsou obě síly vyrovnány:

$$R_{p0} = \frac{\sigma}{4cG} \cdot \frac{T_*^4 R_*^2}{m_*} \cdot \frac{1}{\rho_p}. \quad (56)$$

Pro rozměry zrníček  $R_p < R_{p0}$  převládne tlak záření a pro rozměry zrníček  $R_p > R_{p0}$  převládne gravitace.



**Poznámky:** Uvedené vztahy závisí jen na hustotě prachu, která bývá v celé mlhovině stejná. V mlhovině jsou však oblasti s malými rozměry zrněk a oblasti s většími rozměry. Dojde-li v mlhovině ke vzniku mladé hvězdy, jsou oblasti drobných zrněk vyfoukány vně mlhovinu, podobně jako je na poušti větrem odváť drobný prach na úkor hrubozrného písku. Tomuto jevu se říká fotoevaporace, zpravidla je způsobena ultrafialovým světlem mladých

hvězd. Výsledkem fotoevaporace jsou charakteristické ostře ohraničené oblasti mlhoviny, které odolaly agresivnímu záření mladých hvězd. Například u Orlí mlhoviny obklopující hvězdokupu M 16 se těmto útvarům říká „Sloupy stvoření“. Obdobný jev také známe u komet. Často mívají dva ohony, jeden z hrubších částíček, který míří blíže ke Slunci a je ovládán gravitací a druhý z drobnějších částíček, který míří spíše od Slunce a je ovládán tlakem záření. Vzhledem k přítomnosti odstředivé síly nejsou oba ohony na spojnici kometa–Slunce.

## 9. Teplota těles a vlnové délky záření

**Zadání:** Nalezněte z Wienova zákona vlnové délky vyzařování pro hvězdy spektrální třídy W (80 000 K), G (6700 K), L (1700 K), člověka (310 K) a reliktního záření (2,73 K). Naopak určete teplotu černé díry velikosti našeho Slunce, která září převážně na vlnové délce srovnatelné s Schwarzschildovým poloměrem (3 km).

**Řešení:** Z Wienova zákona  $\lambda_{\max} = b/T$  snadno nalezneme:

objekt	teplota	vlnová délka
hvězda typu W	80 000 K	36 nm
hvězda typu G	6700 K	431 nm
hvězda typu L	1700 K	1.7 $\mu\text{m}$
člověk	310 K	9 $\mu\text{m}$
reliktní záření	2,73 K	1 mm
černá díra (3 km)	$10^{-7}$ K	3 km

**Poznámky:** Nejteplejší hvězdy spektrální třídy W září převážně v UV oblasti na velmi krátkých vlnových délkách (Wolfovy-Rayetovy hvězdy). Podobné hvězdy jako Slunce mají spektrální třídu G a září ve viditelné oblasti, maximum vyzařování Slunce je například na 500 nm. Lidské oko se v průběhu vývoje tomuto záření dokonale přizpůsobilo. Nejchladnější známé hvězdy typu L mají maximum vyzařování v blízké IR oblasti. Sám člověk by jako absolutně černé těleso zářil asi na 10  $\mu\text{m}$ . Na této vlnové délce musí být citlivá čidla monitorující pohyb člověka (čidla na zloděje apod.). Reliktní záření z doby oddělení záření od látky, které prostupuje celý vesmír má vlnovou délku asi 1 mm a je tedy z radiového oboru. Stejně tak jako v minulosti vyplňuje prostor „beze zbytku“. To je dáno tím, že vlnová délka záření se zvětšuje spolu s rozpínáním vesmíru. Do 1  $\text{m}^3$  se tak vejde asi miliarda reliktních fotonů. Černá díra velikosti Slunce by měla pranepatrnou teplotu a vyzařuje velmi málo. Malé černé díry ale září výrazně více.

## 10. Určení poloměru hvězdy

**Zadání:** Hvězda s paralaxou 0,03" a vizuální magnitudou 3,9<sup>m</sup> má maximum vyzařování na vlnové délce 500 nm. Určete poloměr této hvězdy.

**Řešení:** Nejprve určíme z paralaxy  $\pi$  vzdálenost hvězdy  $r$  v parsecích a poté její absolutní magnitudu  $M$ . Z porovnání se Sluncem můžeme nalézt zářivý výkon  $P$  hvězdy. Teplotu  $T$  určíme z Wienova zákona. Ze znalosti svítivosti a teploty můžeme určit poloměr  $R$  hvězdy ze Stefanova-Boltzmannova zákona. Ze zadání víme:

$$\pi = 0,03''; \quad m_* = 3,9^m; \quad \lambda = 500 \text{ nm}. \quad (57)$$

Podle výše uvedeného postupu získáme:

$$\pi = \frac{R_{ZS}}{r} \Rightarrow r = \frac{R_{ZS}}{\pi} \Rightarrow r(\text{pc}) = \frac{1}{\pi(")} = 33, \bar{3} \text{ pc}; \quad (58)$$

$$M_* = m_* + 5 - 5 \log r \approx 1,2856^{\text{m}}. \quad (59)$$

Nyní určíme zářivý výkon a teplotu hvězdy

$$M_* - M_S = -2,5 \left( \frac{P_*}{P_S} \right) \Rightarrow$$

$$P_* = P_S 10^{0,4(M_S - M_*)} \approx 1,1 \times 10^{28} \text{ W}; \quad (60)$$

$$T_* = \frac{b}{\lambda_{\text{max}}} \approx 5780 \text{ K}.$$

Zářivý výkon je dán vztahem

$$P_* = \sigma T_*^4 4\pi R_*^2. \quad (61)$$

Odsud již snadno určíme poloměr hvězdy  $R_* \approx 3,4 \times 10^6 \text{ km}$ .

### III. HVĚZDY, SLUNCE

#### 1. Hydrodynamický čas

**Zadání:** Nalezněte hydrodynamické časy pro Slunce, bílého trpaslíka a neutronovou hvězdu. (Hydrodynamický čas je doba šíření poruchy a je přibližně roven času, po který by částice s povrchovým zrychlením padala do centra objektu.)

**Řešení:** Víme, že

$$W_p = -G \frac{mM}{r} \approx m g h, \text{ kde } g = G \frac{M}{R^2}. \quad (62)$$

S použitím  $s = gt^2/2$  vyplývá pro hydrodynamický čas

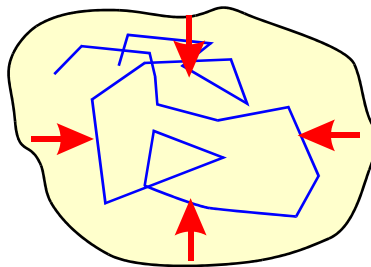
$$t_{\text{hydro}} = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2R}{GM}} = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}}. \quad (63)$$

Pro konkrétní hodnoty poloměrů hvězdných objektů dostáváme následující výsledky:

Slunce:	~ 40 minut,
bílý trpaslík:	~ 1 s,
neutronová hvězda:	~ 1 ms.

#### 2. Jeansovo kritérium

**Zadání:** Odvoďte vztah pro kritickou hmotnost mlhoviny, při které se začne vlastní gravitací hroutit. Předpokládejte, že hmotnost jedné molekuly je  $m$ , znáte teplotu a hustotu mlhoviny.



**Řešení:** V mlhovině jsou dva typické procesy: 1) difúze způsobená tepelným pohybem, která mlhovinu zvětšuje. 2) gravitační přitahování, které se snaží mlhovinu smrštít. Spočtíme charakteristické rychlosti obou procesů:

Chaotickou tepelnou rychlost určíme z *ekvipartičního teorému*. Průměrná kinetická energie na jeden stupeň volnosti je rovna průměrné tepelné energii na jeden stupeň volnosti

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} kT \quad \Rightarrow \quad v_{\text{tep}} \approx \sqrt{\frac{kT}{m}}. \quad (64)$$

Průměrnou složku rychlosti odpovídající gravitaci určíme z ekvipartičního teorému pro gravitační energii

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = G \frac{mM}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{grav}} \approx \sqrt{\frac{GM}{R}}. \quad (65)$$

Nyní z podmínky pro hroucení  $v_{\text{grav}} > v_{\text{tep}}$  máme

$$\frac{GM}{R} > \frac{kT}{m}. \quad (66)$$

Spolu se vztahem pro hustotu

$$\rho \approx \frac{M}{R^3} \quad (67)$$

lze kritérium upravit na tvar

$$M \geq \left( \frac{kT}{mG} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \quad (68)$$

který je znám jako Jeansovo kritérium. Při vyšších hmotnostech než je pravá strana je mlhovina nestabilní a může dojít k samovolnému hroucení.

**Poznámka:** Řešení lze přesně odvodit standardním vyšetřováním stability v hydrodynamice za pomoci poruch rovnovážného stavu. Jeansovo kritérium je hranicí, za kterou se poruchy samovolně netlumí a mlhovina se stává nestabilní. Pověšimněte si také, že kritická hmotnost je úměrná  $p^{3/2}$ . Kritérium poprvé odvodil Jeans v roce 1902.

### 3. Rovnováha polytropní hvězdy

**Zadání:** Řešte rovnováhu gravitační a tlakové síly ve hvězdě pro polytropní závislost tlaku na hustotě.

**Řešení:** Při řešení se budeme zabývat jen závislostí na rozměrech hvězdy. Gravitační síla má tvar

$$F_{\text{grav}} \sim \frac{1}{R^2}. \quad (69)$$

Tlaková síla je dána součinem tlaku  $p \sim \rho^\gamma$  a povrchu  $S \sim R^2$ , tj.

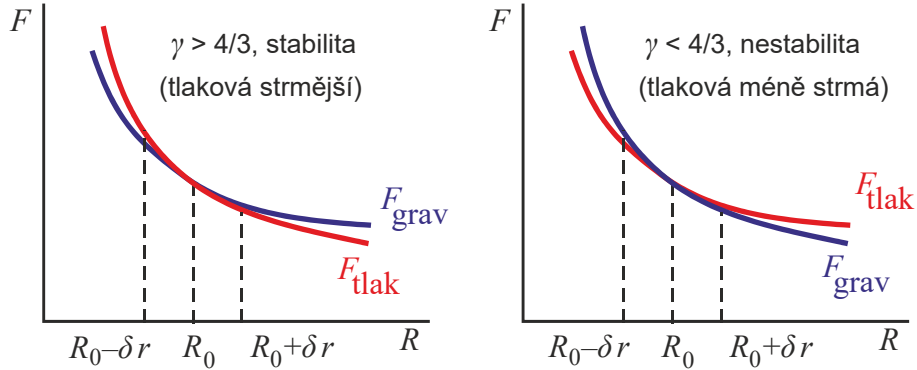
$$F_{\text{tlak}} \sim \rho^\gamma R^2 \sim R^{-3\gamma} R^2 \sim \frac{1}{R^{3\gamma-2}}. \quad (70)$$

Obě síly za normálních okolností klesají s rozměry hvězdy. Rovnováha se ustaví při rovnosti obou sil. Styl poklesu obou sil je stejný pro koeficient

$$\gamma = \frac{4}{3}. \quad (71)$$

Diskutujeme dva případy. Nejprve  $\gamma > 4/3$ . Tlaková křivka je strmější než gravitační. Jestliže hvězda zcela náhodně zvětší své rozměry, převládne gravitační síla a hvězdu opět smrští. Zmenší-li hvězda své rozměry, převládne tlaková síla a nafoukne hvězdu na původní rozměr. Hvězda je stabilní a výkyvy v jejích rozměrech neohrozí její existenci.

V případě  $\gamma < 4/3$  je tomu jinak. Jestliže hvězda zcela náhodně zvětší své rozměry, převládne tlaková síla a bude hvězdu nadále nutit zvětšovat rozměry. Hvězda bude nestabilní a minimálně odhodí obálku. Zmenší-li hvězda své rozměry, převládne gravitační síla a bude nutit hvězdu ke kolapsu.



**Poznámka:** Materiál bílých trpaslíků má polytropní koeficient blízký  $4/3$ . Polytropní koeficient se poněkud mění s hmotností trpaslíka. Při hmotnosti přibližně  $1,4 M_S$  má polytropní koeficient právě hodnotu  $4/3$  a pro vyšší hmotnosti je bílý trpaslík nestabilní. Této hranici se říká Chandrasekharova mez.

#### 4. Schwarzschildova podmínka

**Zadání:** Nalezněte podmínku pro hranici mezi zářivou a konvektivní vrstvou ve hvězdě.

**Řešení:** Předpokládejme, že ve hvězdě vznikne bublina, která se chová adiabaticky (rychlý děj spojený s konvekcí, při kterém si bublina nestačí vyměňovat teplo s okolím). Pokud vzniklou bublinu vychýlíme směrem vzhůru, bude situace stabilní (tj. bublina se vrátí zpět a konvekce se nerozvine), pokud v novém místě platí

$$\rho_b > \rho_* \quad \Rightarrow$$

$$\rho + \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_b dr > \rho + \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_* dr \quad \Rightarrow \quad (72)$$

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|_b > \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_*$$

Nyní musíme určit obě derivace (radiální gradienty). V bublině platí adiabatický zákon, tj.  $p_b \rho_b^\gamma = p \rho^\gamma$ , zatímco ve hvězdě máme ze stavové rovnice  $p_*/\rho_* T_* = p/\rho T$ . Z obou výrazů vypočteme hustotu  $\rho$  a určíme derivace v poslední nerovnosti (tlak v bublině i okolí je týž!):

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{p} \frac{dp}{dr} > \frac{\rho}{p} \frac{dp}{dr} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \Big|_* \quad (73)$$

Výraz snadno upravíme na tvar

$$\left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{p} \frac{dp}{dr} < \frac{dT}{dr} \Big|_* \quad (74)$$



Nerovnost vydělíme pravou stranou, která je v aktivní hvězdě vždy záporná (teplota klesá se vzdáleností od jádra):

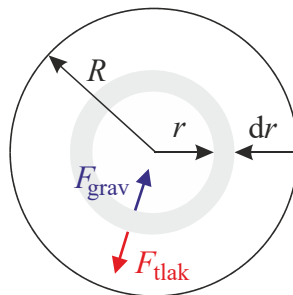
$$\begin{aligned} \frac{T}{p} \left( \frac{dT}{dr} \right)^{-1} \frac{dp}{dr} &> \frac{\gamma}{\gamma-1} \quad \Rightarrow \\ \frac{T}{p} \frac{dp}{dT} &> \frac{\gamma}{\gamma-1} \quad \Rightarrow \\ \frac{d(\ln p)}{d(\ln T)} &> \frac{\gamma}{\gamma-1}, \end{aligned} \quad (75)$$

Což je Schwarzschildova podmínka rovnováhy. Pokud podmínka není splněna, rozvine se ve hvězdě konvekce. Ve Slunci má hodnota výrazu vlevo lokální minimum v centru Slunce, kde klesá až k 3,0. Se vzrůstající vzdáleností od centra výraz pozvolna roste, maximální je v polovině Slunce, kde dosáhne až 5,2. Pak následuje velice svižný pokles daný vzrůstem opacity materiálu, a to až ke kritické hodnotě 2,5 ve vzdálenosti 0,7  $R_s$ . Odtud až těsně pod povrch platí, že  $d(\ln p)/d(\ln T)$  je roven 2,5. Znamená to, že uvedená vnější část obalu Slunce je v konvektivní rovnováze.

## 5. Rovnice rovnováhy polytropní hvězdy

**Zadání:** Sestavte rovnici rovnováhy polytropní hvězdy

**Řešení:** Nechceme-li se omezit na odhady v minulém příkladu, je třeba skutečně řešit rovnici rovnováhy.



Cílem je sestavit takové rovnice, ze kterých bude možné určit závislost tlaku  $p(r)$  a hustoty hvězdy  $\rho(r)$  na vzdálenosti od centra. Jednou z rovnic je rovnice polytropního chování

$$p = k \rho^\gamma. \quad (76)$$

Druhou rovnici získáme z podmínky rovnováhy gravitační a tlakové síly na vrstvu tloušťky  $dr$  znázorněnou na obrázku. Na tuto vrstvu působí gravitační síla

$$dF_{\text{grav}} = G \frac{\mathcal{M}(r) dm}{r^2}; \quad dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr. \quad (77)$$

$$dF_{\text{grav}} = G \frac{4\pi r^2 \rho(r) \mathcal{M}(r)}{r^2} dr. \quad (78)$$

$\mathcal{M}(r)$  je hmotnost vnitřku hvězdy pod vybranou slupkou. Tlaková síla působící na slupku je

$$dF_{\text{tlak}} = 4\pi r^2 dp. \quad (79)$$

Z rovnováhy obou sil máme druhou ze sady rovnic:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{\rho(r) \mathcal{M}(r)}{r^2} \quad (80)$$

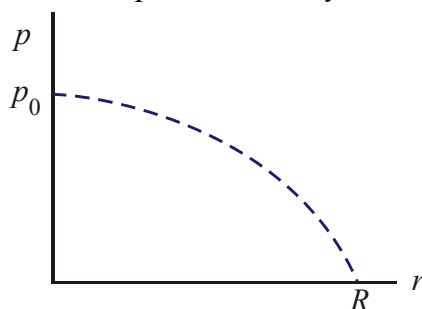
Poslední rovnici získáme ze vztahu pro hmotnost  $\mathcal{M}(r)$ :

$$\mathcal{M}(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr. \quad (81)$$

Diferenciací máme:

$$\frac{d\mathcal{M}}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (82)$$

Soustavu těchto tří rovnic řešíme vhodným diferenčním schématem. Počáteční podmínky rovnic jsou  $p(0) = p_0$  a  $\mathcal{M}(0) = 0$ . Integrací se tlak směrem od centra snižuje. V okamžiku, kdy  $p = 0$ , ukončíme integraci, neboť jsme došli až k povrchu hvězdy.



## 6. Porovnání výkonů

**Zadání:** Jaký je poměr zářivých výkonů bílého trpaslíka a normální hvězdy, mají-li stejnou povrchovou teplotu? Předpokládejte poloměr trpaslíka  $R_{\text{WD}} = 5000$  km a poloměr normální hvězdy  $R_{\text{N}} = 1\,000\,000$  km.

**Řešení:** Mají-li hvězdy stejné teploty, mají také stejnou intenzitu vyzařování na povrchu, takže

$$\begin{aligned} \frac{P_{\text{WD}}}{P_{\text{N}}} &= \frac{\sigma T_{\text{WD}}^4 \cdot 4\pi R_{\text{WD}}^2}{\sigma T_{\text{N}}^4 \cdot 4\pi R_{\text{N}}^2} = \\ &= \frac{T_{\text{WD}}^4 R_{\text{WD}}^2}{T_{\text{N}}^4 R_{\text{N}}^2} = \\ &= 1 : 40\,000. \end{aligned} \quad (83)$$

Vidíme, že zářivý výkon bílého trpaslíka je řádově  $10\,000 \times$  menší než u normální hvězdy.

## 7. Poloměr Procyonu B

**Zadání:** Bílý trpaslík Procyon B vyzařuje výkon  $P = 6,3 \times 10^{-4} P_S$ . Jeho povrchová teplota je  $T = 9\,200$  K. Jaký má hvězda poloměr?

**Řešení:** Jak víme z předchozího příkladu je

$$\frac{P_{\text{Proc}}}{P_S} = \left( \frac{R_{\text{Proc}}}{R_S} \right)^2 \left( \frac{T_{\text{Proc}}}{T_S} \right)^4, \quad (84)$$

z čehož vyplývá poloměr

$$\begin{aligned} R_{\text{Proc}} &= \sqrt{\frac{P_{\text{Proc}}}{P_S}} \left( \frac{T_S}{T_{\text{Proc}}} \right)^2 R_S = \\ &= \sqrt{6,3 \times 10^{-4}} \times \left( \frac{5700}{9200} \right)^2 700\,000 \text{ km} \cong 6\,800 \text{ km}. \end{aligned} \quad (85)$$

## 8. Úbytek sluneční hmoty

**Zadání:** Kolik procent sluneční hmoty se přemění v energii za jedno tisíciletí?

**Řešení:** Hledáme poměr hmoty, která se přemění na energii (ubude) a původní hmoty Slunce, neboli

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta m}{M} = \frac{\Delta E/c^2}{M} = \frac{P_S \Delta t/c^2}{M} = \frac{P_S \Delta t}{Mc^2} = \\ &= x = \frac{4 \times 10^{26} \times 10^3 \times 365 \times 24 \times 3600}{2 \times 10^{30} \times 9 \times 10^{16}} \cong 7 \times 10^{-11} = 7 \times 10^{-9} \%. \end{aligned} \quad (86)$$

Za celé tisíciletí tedy současným vyzařovaným výkonem ubude jen sedm miliardtin procenta sluneční hmoty!

## 9. Krytí produkce energie gravitační kontrakcí

**Zadání:** O kolik by se musel změnit poloměr Slunce za rok, aby energie uvolněná gravitačním smršťováním odpovídala energii vyzařované Sluncem ( $R = 700\,000$  km,  $M = 2 \times 10^{30}$  kg,  $P = \times 10^{26}$  W)? Jak dlouho by mohlo Slunce krýt vyzařovanou energii z gravitačních zdrojů?

**Řešení:** V našem řešení budeme hledat jen hrubý odhad a koeficienty vynecháme.

$$\begin{aligned} W_p &\approx G \frac{M^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \Delta W_p \approx G \frac{M^2}{R^2} \Delta R \quad \Rightarrow \\ \Delta R &= \frac{R^2}{GM^2} \Delta W_p \quad \Rightarrow \quad \Delta R = \frac{R^2}{GM^2} \cdot P_S \Delta t. \end{aligned} \quad (87)$$

Za rok po dosazení v sekundách dostáváme  $\Delta R = 23$  m. Jestliže by se tedy Slunce zmenšovalo o 23 m za rok, pak by se při poloměru 700 000 km zmenšovalo nejdéle

$$T = \frac{7 \times 10^8 \text{ m}}{23 \text{ m/rok}} = 30 \times 10^6 \text{ let.} \quad (88)$$

Slunce už ale existuje několik miliard let (což víme například z hornin na Zemi), a proto nemůže být zdrojem jeho energie gravitační smršťování.

## 10. Teplota sluneční skvrny

**Zadání:** Odhadněte teplotu ve sluneční skvrně ze znalosti magnetického tlaku ve skvrně, koncentrace částic a teploty okolí.

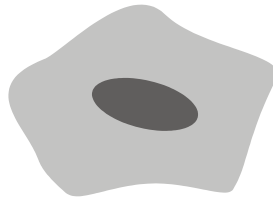
**Řešení:** Celkový tlak vně i uvnitř skvrny musí být stejný. Ve skvrně je tlak součtem tlaku látky a magnetického tlaku:

$$p_{\text{in}} + p_{\text{mag}} = p_{\text{out}}, \quad (89)$$

$$n k T_{\text{in}} + \frac{B^2}{2\mu_0} = n k T_{\text{out}}, \quad (90)$$

$$T_{\text{in}} = T_{\text{out}} - \frac{B^2}{2\mu_0 k n}. \quad (91)$$

Je zřejmé, že díky přítomnosti magnetického pole musí být teplota ve skvrně nižší než teplota okolí.



## IV. GRAVITACE, TÍŽE, POHYBY

*Gravitací* rozumíme vzájemné přitahování dvou libovolných těles. Toto přitahování se řídí Newtonovým gravitačním zákonem. Nejjednodušší je zadat vztah pro potenciální energii (skalární veličinu). Na tělesa působí síla mířící k minimu potenciální energie, kterou určíme ze vztahu  $\mathbf{F} = -\nabla W_p$ . Síla je veličina vektorová a má tři složky. V některých výjimečných případech postačí znát jen velikost gravitační síly, resp. její radiální složku  $-\partial W_p/\partial r$ .

*Tíže* je jen přibližný vztah ke gravitaci. Jde o lineární rozvoj potenciální energie. Tíhové pole je použitelné v situacích, kdy se příliš nemění naše vzdálenost od centra gravitace (například na zemském povrchu).

Ve vztahu pro potenciální energii i sílu vystupuje součin hmotností obou přitahovaných těles. Zpravidla jde o zdroj gravitace ( $M$ ) a menší testovací tělisko ( $m$ ). Výhodné je zavést veličiny nezávislé na hmotnosti testovacího tělesa: *potenciál*  $\phi$  (potenciální energie dělená hmotností testovacího tělesa) a *intenzitu*  $\mathbf{K}$  (síla dělená hmotností testovacího tělesa). Potenciál a intenzita závisí jen na parametrech zdroje pole. Podobně se v elektrostátice zavádí potenciál a intenzita elektrostatického pole vydělením veličin nábojem testovacího tělesa.

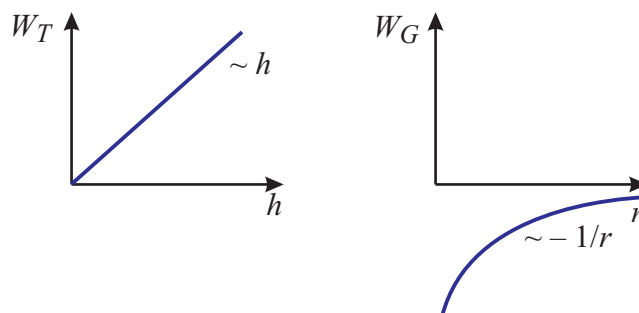
gravitace	
$W_G = -G \frac{mM}{r}$	$F_G = -\frac{\partial W_G}{\partial r} = -G \frac{mM}{r^2}$
$\phi = -G \frac{M}{r}$	$K_G = -\frac{\partial \phi_G}{\partial r} = -G \frac{M}{r^2}$
tíže	
$W_T = mgh$	$F_T = -\frac{\partial W_T}{\partial h} = -mg$
$\phi_T = gh$	$K_T = -\frac{\partial \phi_T}{\partial h} = -g$

### 1. Vztah mezi tíhovým a gravitačním polem

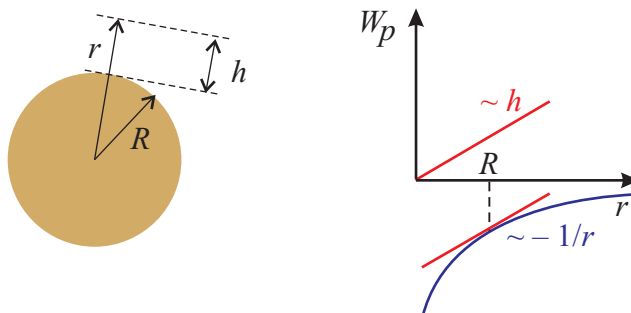
**Zadání:** Ze vztahu pro gravitační potenciální energii odvoďte pomocí Taylorova rozvoje v blízkosti povrchu vztah pro potenciální energii tíže.

**Řešení:** Vyjádřeno v potenciálních energiích je

- $W_T = mgh$  (potenciální energie tíhového pole),
- $W_G = -G \frac{mM}{r}$  (potenciální energie pole gravitačního).



Na první pohled se může zdát být divné, že v obou případech při vzdalování od centra energie roste. Intuitivně tušíme, že by gravitační působení mělo se vzdalováním slábnout. Vysvětlení spočívá v tom, že vztah pro tíhové pole platí jen v těsné blízkosti povrchu, takže o vzdalování od tělesa nemůže být ani řeč. Jde o lineární přiblížení ke gravitačnímu poli. Ve vztahu pro gravitační pole potenciální energie sice se vzdalováním roste, ale k nule! V absolutní hodnotě skutečně pole slábne k nule.



Nahradíme gravitační pole tečnou v blízkosti povrchu (udělejme Taylorův rozvoj do prvního řádu v  $r_0 = R$ ):

$$W_G(r) \approx W_G(R) + W'_G(R) \cdot (r - R) + \dots \quad (92)$$

Potenciální energii můžeme posunout o konstantu a na silách se to neprojeví, takže postačí

$$W_G(r) \approx W'_G(R) \cdot (r - R) = G \frac{mM}{R^2} (r - R) = m \frac{GM}{R^2} h = mgh, \quad (93)$$

kde jsme zavedli tíhové zrychlení vztahem

$$g \equiv \frac{GM}{R^2}. \quad (94)$$

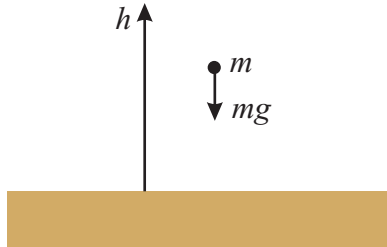
## 2. Pád z malé výšky – diferenční schéma

**Zadání:** Napište diferenční schéma pro pád tělesa z malé výšky (tíhové pole) a z velké výšky (gravitační pole). Pro pád z velké výšky uvažujte odpor atmosféry úměrný rychlosti tělesa. Pád probíhá jen v radiálním směru.

**Řešení:** Pohybová rovnice pro malou výšku vyplývá z 2. Newtonova zákona s tíhovou potenciální energií

$$m\ddot{h} = -\frac{\partial W_T}{\partial h} = -\frac{\partial mgh}{\partial h} = -mg. \quad (95)$$

Výsledná diferenciální rovnice  $\ddot{h} = -g$  je mimořádně jednoduchá a její řešení bychom snadno mohli najít analyticky. Tvorbu diferenčního schématu si proto ukážeme právě na takto jednoduché rovnici. Stejný postup můžete aplikovat i na složitější rovnice, které již nemají analytické řešení.



Nejprve převedeme diferenciální rovnici druhého řádu na soustavu rovnic prvního řádu (ve fyzice k tomu využijeme definice rychlosti jako první derivace hledané proměnné podle času):

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -g. \end{aligned} \tag{96}$$

Nebudeme nyní hledat řešení v každém čase (diferenciální rovnice), ale jen v některých časech (diferenční rovnice). V praxi to znamená nahrazení skutečného řešení lomenou čarou. Budou nás tedy zajímat jen hodnoty

$$\begin{aligned} h_n &= h(t_n), \\ v_n &= v(t_n). \end{aligned} \tag{97}$$

Skutečné derivace nahradíme konečnými rozdíly:

$$\begin{aligned} \frac{h_{n+1} - h_n}{\Delta t} &\cong v_n, \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} &\cong -g. \end{aligned}$$

Nyní vypočteme hodnoty  $n + 1$  pomocí hodnot  $n$ :

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= h_n + v_n \Delta t, \\ v_{n+1} &= v_n - g \Delta t. \end{aligned} \tag{98}$$

Získali jsme tak diferenční schéma, podle kterého počítáme jednotlivé hodnoty

$$h_0, v_0 \Rightarrow h_1, v_1 \Rightarrow h_2, v_2 \Rightarrow \dots \tag{99}$$

Je zřejmé, že k numerické konstrukci řešení postačí znát počáteční výšku a rychlost (počáteční podmínky), například:

$$\begin{aligned} h_0 &= H, \\ v_0 &= 0. \end{aligned} \tag{100}$$

### 3. Pád z velké výšky – diferenční schéma

**Zadání:** Řešte pád z velké výšky za pomoci diferenčního schématu.

**Řešení:** Při pádu z velké výšky by analytické řešení bylo velmi náročné. Numerické schéma je však stejně jednoduché jako u pádu v tíhovém poli. Předpokládejme, že na částici působí gravitační síla a odpor prostředí úměrný rychlosti:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= -\frac{\partial W_G}{\partial r} - \beta\dot{r} = \\ &= -G\frac{mM}{r^2} - \beta\dot{r}. \end{aligned} \quad (101)$$

Rovnici opět pomocí rychlostní proměnné převedeme na soustavu dvou rovnic:

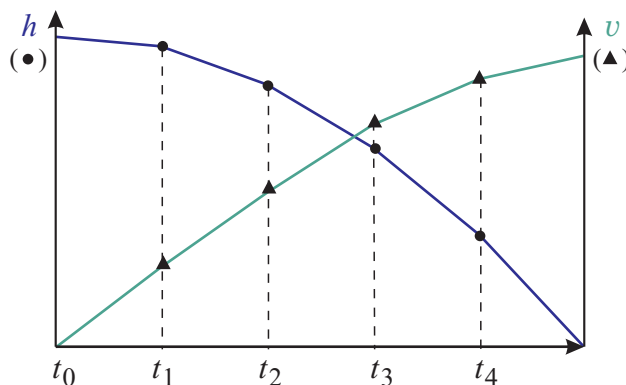
$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -G\frac{M}{r^2} - \frac{\beta}{m}v. \end{aligned} \quad (102)$$

Po dosazení diferencí za derivace máme

$$\begin{aligned} \frac{r_{n+1} - r_n}{\Delta t} &\cong v_n, \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} &\cong -G\frac{M}{r_n^2} - \frac{\beta}{m}v_n, \end{aligned} \quad (103)$$

odkud snadno získáme hledané diferenční schéma:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &\cong r_n + v_n\Delta t, \\ v_{n+1} &\cong v_n - G\frac{M}{r_n^2}\Delta t - \frac{\beta}{m}v_n\Delta t. \end{aligned} \quad (104)$$



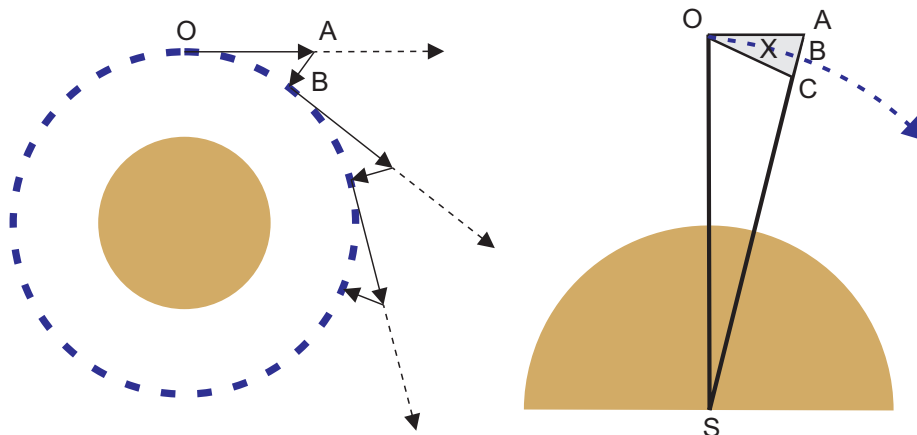
Numerické řešení - náhrada lomenými čarami



#### 4. Oběh tělesa po kruhové dráze

**Zadání:** Dokažte, že oběh tělesa po kruhové dráze lze chápat jako složení pohybu rovnoměrně přímočarého a volného pádu.

**Řešení:** Kdyby na oběžné dráze přestalo působit centrální těleso, pohyboval by se předmět nadále rovnoměrně přímočaře ve směru tečny k původní dráze. Současně s tímto pohybem se skládá volný pád k centrálnímu tělesu. (Jiná formulace: Rychlost oběhu se nemění, mění se však směr rychlosti. Změna směru rychlosti míří do centra, je způsobena centrálním tělesem a jde o volný pád.)



Z obrázku je zřejmá podobnost trojúhelníků (předpokládáme infinitezimální posun tělesa po oběžné dráze) OAC a SOB. Proto můžeme psát:

$$\frac{AC}{BO} = \frac{OB}{XS} \Rightarrow \frac{2\Delta h}{\Delta l} = \frac{\Delta l}{r}. \quad (105)$$

Dosaďme nyní za volný pád  $\Delta h = g\Delta t^2/2$  a za uraženou vzdálenost  $\Delta l = v\Delta t$ . Snadno nalezneme oběžnou rychlost

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (106)$$

Za tíhové zrychlení jsme dosadili zrychlení v místě oběhu tělesa.

#### Poznámky:

- Jde o stejný výsledek, jaký bychom získali porovnáním odstředivé a gravitační síly.
- Při povrchu Země činí gravitační pád těles přibližně 5 m za první vteřinu, na kruhové dráze těsně se přimykající povrchu 5 m za každou vteřinu.
- Po dosazení za  $g$  lze výraz upravit na tvar  $GmM/r^2 = mv^2/r$  a získat tak vztah pro „odstředivou“ sílu.

## 5. Třetí Keplerův zákon

**Zadání:** Odvoďte vztah mezi periodou oběhu tělesa a poloměrem dráhy pro kruhovou trajektorii.

**Řešení:** Nejjednodušší je využít vztah (106) pro kruhovou rychlost z minulého příkladu. Pokud za poloměr dosadíme velkou poloosu oběžné dráhy  $a$ , za rychlost obvod kružnice dělený periodou, tj.  $2\pi a/T$  a za hmotnost centrálního objektu  $M$  zvolíme hmotnost Slunce, vyjde nám

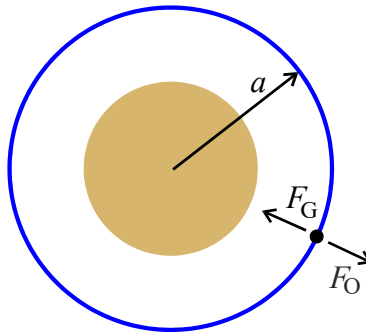
$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi a}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \quad \Rightarrow \quad (107)$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (108)$$

což je třetí Keplerův zákon pro kruhovou orbitu. Postupovat můžeme ale i jinak. Stačí porovnat dostředivou a odstředivou sílu

$$\frac{mv^2}{a} = G \frac{mM}{a^2}. \quad (109)$$

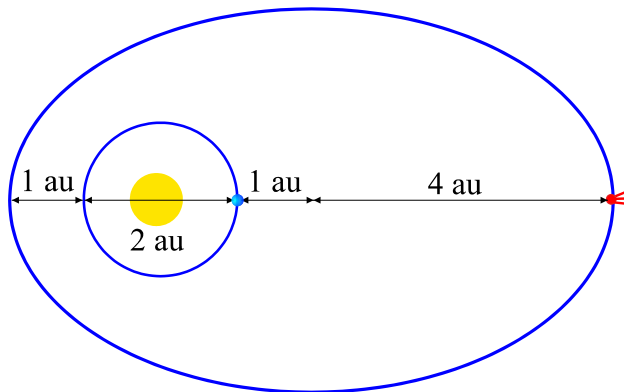
Po dosazení  $v = 2\pi a/T$  za rychlost opět dostaneme třetí Keplerův zákon (108).



## 6. Kometární dráha

**Zadání:** Kometa se v okamžiku opozice se Sluncem nacházela v odsluní. Její vzdálenost od Země tehdy činila 5 au. Velká poloosa její dráhy je 4 au. Za jak dlouho projde kometa přísluním? V jaké vzdálenosti bude v tom okamžiku od Slunce a od Země?

**Řešení:** Situaci ze zadání si nejprve zakreslíme na obrázku:



Nyní využijeme třetí Keplerův zákon a porovnáme parametry dráhy Země s parametry dráhy komety (index K označuje kometu, index Z Zemi):

$$\frac{T_K^2}{T_Z^2} = \frac{a_K^3}{a_Z^3} \Rightarrow T_K = \sqrt{\frac{a_K^3}{a_Z^3}} \times T_Z \quad (110)$$

Po dosazení ( $a_K = 4$  au,  $a_Z = 1$  au,  $T_Z = 1$  rok) vyjde  $T_K = 8$  roků. Kometa projde přísluním za polovinu periody, tedy za 4 roky. Protože je to celý počet roků, Země udělá přesně 4 oběhy a bude na stejném místě. Z nákresu je pak patrné že projde ve vzdálenosti 3 au od Země a 2 au od Slunce.

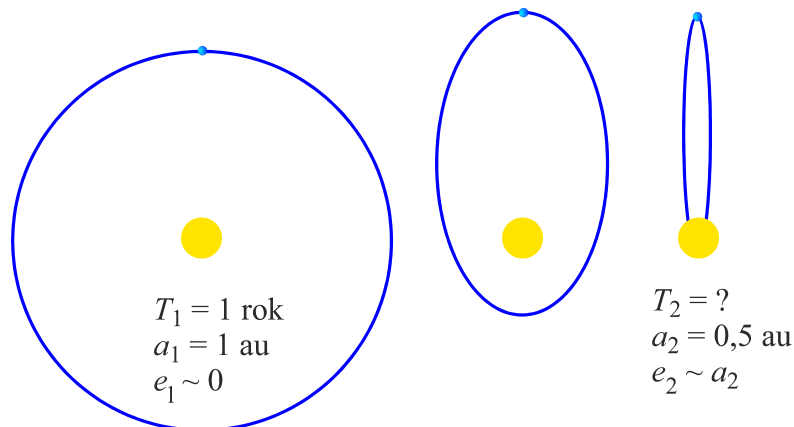
## 7. Pád Země do Slunce

**Zadání:** Jak dlouho by padala Země do Slunce, kdybychom ji zastavili?

**Řešení:** Při řešení nelze použít vztah pro volný pád, protože se tíhové zrychlení postupně při pádu mění. Proto využijeme k řešení jednoduchý trik. Použijeme třetí Keplerův zákon, v němž porovnáme dvě situace. První je oběh Země po kruhové dráze (velká poloosa 1 au, excentricita téměř nulová). Nyní si představme, že Zemi postupně ubíráme oběžnou rychlost. Její dráha už nebude kruhová, ale stane se elipsou, v jejímž jednom ohnisku stále bude Slunce. S dalším ubíráním oběžné rychlosti poroste excentricita elipsy až se elipsa limitně stane úsečkou (s poloosou 0,5 au a excentricitu rovnou velké poloose), po níž Země padá do Slunce. A to je případ našeho volného pádu. Můžeme ho chápat jako limitu eliptické dráhy. Indexem 1 budeme označovat původní dráhu Země, indexem 2 limitní dráhu při volném pádu:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3} \Rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{a_2^3}{a_1^3}} \times T_1 = \frac{0,5^3}{1^3} \times 1 \text{ rok}^2 \Rightarrow T_2 = 0,3536 \text{ roku} = 129 \text{ dní} \quad (111)$$

Doba pádu je polovinou periody. Země by do Slunce spadla volným pádem za cca 65 dní.



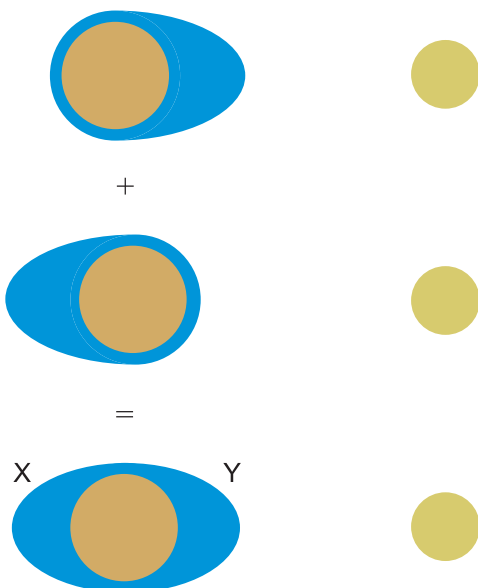
## 8. Příliv a odliv

**Zadání:** Pokuste se vysvětlit, proč dochází k přílivu a odlivu dvakrát za den.

**Řešení:** Příliv a odliv vzniká díky slapovým silám. Jde o to, že gravitace na všechny části tělesa nepůsobí stejnou silou, na ty bližší působí silou větší. Na nohy člověka stojícího na Zemi působí větší gravitace než na hlavu. Ale pro člověka na povrchu Země je tento rozdíl pranepatrný.

Měsíc působí na Zemi pokrytou oceány a jeho přitažlivá síla je také pro různé oblasti různá. Výsledek si můžeme představit jako složení dvou situací:

- a) Na horním obrázku voda tažená Měsícem od Země (protože je voda na přivrácené straně více přitahována).
- b) Na prostředním obrázku je Země tažená Měsícem pryč od vod (protože je Země, která je blíže Měsíci více přitahována).
- c) Na posledním obrázku je skutečná situace. V místě X je voda méně přitahována než Země, v místě Y je více přitahována než Země. Díky rotaci pak nastává příliv i odliv dvakrát denně.

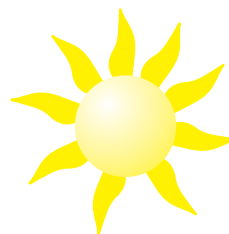


## 9. Gravitační působení Slunce a Země na Měsíc

**Zadání:** Nalezněte poměr gravitačních sil, kterými působí na Měsíc Země a Slunce. Která síla je větší?

**Řešení:**

$$\frac{F_{SM}}{F_{ZM}} = \frac{G M_M M_S / R_{MS}^2}{G M_M M_Z / R_{MZ}^2} = \left( \frac{R_{MZ}}{R_{MS}} \right)^2 \cdot \frac{M_S}{M_Z} = 6,55 \times 10^{-6} \cdot 0,33 \times 10^{+6} \cong 2,18 \quad (112)$$



Síla, kterou na Měsíc působí Slunce je přibližně dvakrát větší než síla působící od naší Země.

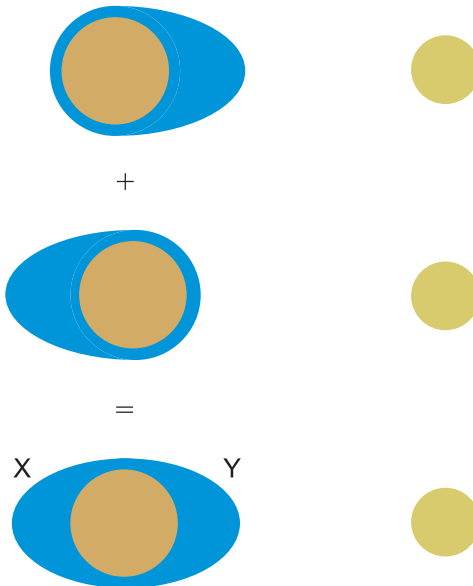
## 10. Příliv a odliv

**Zadání:** Pokuste se vysvětlit, proč dochází k přílivu a odlivu dvakrát za den.

**Řešení:** Příliv a odliv vzniká díky slapovým silám. Jde o to, že gravitace na všechny části tělesa nepůsobí stejnou silou, na ty bližší působí silou větší. Na nohy člověka stojícího na Zemi působí větší gravitace než na hlavu. Ale pro člověka na povrchu Země je tento rozdíl pranepatrný.

Měsíc působí na Zemi pokrytou oceány a jeho přitažlivá síla je také pro různé oblasti různá. Výsledek si můžeme představit jako složení dvou situací:

- Na horním obrázku voda tažená Měsícem od Země (protože je voda na přivrácené straně více přitahována).
- Na prostředním obrázku je Země tažená Měsícem pryč od vod (protože je Země, která je blíže Měsíci více přitahována).
- Na posledním obrázku je skutečná situace. V místě X je voda méně přitahována než Země, v místě Y je více přitahována než Země. Díky rotaci pak nastává příliv i odliv dvakrát denně.



## 11. Hmotnost Země

**Zadání:** Pokuste se určit hmotnost Země z parametrů oběžné dráhy Měsíce (tj. oběžné doby a vzdálenosti).

**Řešení:** Budeme postupovat obdobně jako při odvozování třetího Keplerova zákona pro kruhovou orbitu – z rovnováhy odstředivé a dostředivé síly pro Měsíc:

$$\frac{M_M v^2}{R_{ZM}} = G \frac{M_M M_Z}{R_{ZM}^2}; \quad \Rightarrow \quad (113)$$

$$v = \frac{2\pi R_{ZM}}{T_M}.$$

Po dosazení rychlosti do výrazu pro rovnováhu sil snadno získáme výsledný vztah:

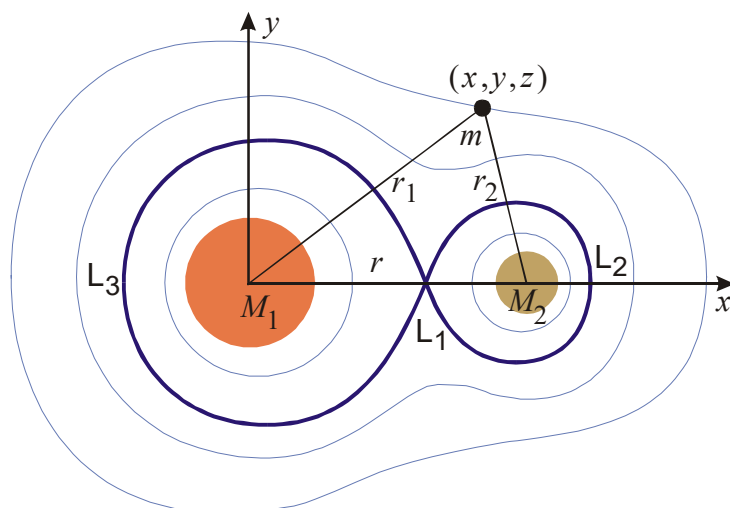
$$M_Z = \frac{4\pi R_{ZM}^3}{G T_M^2}. \quad (114)$$

**Poznámka:** Parametry dráhy Měsíce lze relativně snadno získat experimentálně (oběžnou dobu a vzdálenost). K výpočtu je však třeba znát ještě gravitační konstantu. Proto se první snahy o její zjištění (L. V. Eötvösovy experimenty s přitahováním koulí zavěšených na torzním vlákně) nazývaly „vážením Země“. Po dosazení za známé hodnoty  $R_{ZM}$ ,  $T_M$ ,  $G$  dostaneme  $M_Z = 6 \times 10^{24}$  kg.

## 12. Hillovy ekvipotenciály

**Zadání:** Navrhněte diferenční schéma pro výpočet gravitačních ekvipotenciál binárního systému.

**Řešení:**



Ekvipotenciály dvojice rotujících hvězd jsou v těžišťové soustavě rotující společně s hvězdami popsány vztahem

$$\phi = \frac{W_{\text{pot}} + W_{\text{rot}}}{m} = -G \frac{M_1}{r_1} - G \frac{M_2}{r_2} - \frac{r^2 \omega^2}{2}. \quad (115)$$

Rotační člen u kruhového oběhu jen posouvá potenciál o konstantu, ale bylo by ho možné vypočítat z třetího Keplerova zákona (poloosa  $\rightarrow$  perioda  $\rightarrow$  frekvence). Hledání ekvipotenciál znamená řešení rovnice  $\phi = \text{const}$ , tedy

$$\phi = -G \frac{M_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - G \frac{M_2}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2}} - \frac{r^2 \omega^2}{2} = \text{const}. \quad (116)$$

Napišme si nejprve normálový a tečný vektor k hledané křivce:

$$n = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right), \quad (117)$$

$$\tau = \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right).$$

Konstrukce ekvipotenciály znamená „pohyb“ ve směru tečného vektoru, diferenciální rovnice pro ekvipotenciálu proto bude:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dt} = +\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (118)$$

Derivace nahradíme konečnými diferencemi

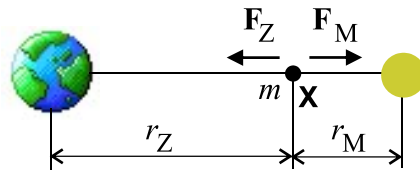
$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} &= - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_n, \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} &= + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_n. \end{aligned} \quad (119)$$

a odpovídající diferenční schéma je:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_n \cdot \Delta t, \\ y_{n+1} &= y_n + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_n \cdot \Delta t. \end{aligned} \quad (120)$$

### 13. Gravitace Země a Měsíce

**Zadání:** Určete pro soustavu Země – Měsíc polohu bodu, ve kterém je na spojnici obou těles vyrovnáno gravitační působení.



**Řešení:** Vzdálenosti Země a Měsíce od hledaného bodu X označíme  $r_Z$  a  $r_M$ . Dvě základní rovnice jsou:

$$\begin{aligned} r_Z + r_M &= R_{ZM}, \\ G \frac{mM_Z}{r_Z^2} &= G \frac{mM_M}{r_M^2}. \end{aligned} \quad (121)$$

První rovnice je součet obou vzdáleností, druhá rovnice popisuje vyrovnání sil. Z druhé rovnice snadno získáme

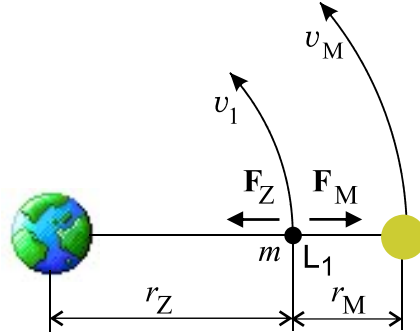
$$\frac{r_M}{r_Z} = \sqrt{\frac{M_M}{M_Z}} = \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}. \quad (122)$$

Z první rovnice je potom zřejmé, že řešení je:

$$r_Z = \frac{9}{10} R_{ZM} = 345\,600 \text{ km}, \quad r_M = \frac{1}{10} R_{ZM} = 38\,400 \text{ km}. \quad (123)$$

### 14. Lagrangeův bod L1 soustavy Země a Měsíc

**Zadání:** Určete pro soustavu Země – Měsíc polohu Lagrangeova bodu L<sub>1</sub>, tj. místa na spojnici obou těles, ve kterém se gravitační i odstředivé síly vyrovnají a těleso bude Zemi obíhat synchronně s Měsícem.



**Řešení:** Zapišme rovnováhu gravitačních a odstředivých sil pro Měsíc a pro testovací tělísko v Lagrangeově bodě (uvažujeme, že se Země vlivem Měsíce nepohybuje):

$$G \frac{M_M M_Z}{(r_Z + r_M)^2} = M_M (r_Z + r_M) \omega^2$$

$$G \frac{m M_Z}{r_Z^2} - G \frac{m M_M}{r_M^2} = m r_Z \omega^2 . \quad , \quad (124)$$

Obě tělesa (Měsíc i testovací těleso) musí mít stejnou úhlovou rychlost, kterou ze vztahů vyloučíme:

$$\frac{M_Z}{(r_Z + r_M)^3} = \frac{M_Z}{r_Z^3} - \frac{M_M}{r_M^2 r_Z} . \quad (125)$$

Současně platí

$$r_Z + r_M = R_{ZM} .$$

Z druhého vztahu vyloučíme  $r_Z$ :

$$\frac{M_Z}{R_{ZM}^3} = \frac{M_Z}{(R_{ZM} - r_M)^3} - \frac{M_M}{r_M^2 (R_{ZM} - r_M)} . \quad (126)$$

Označme  $x$  hledaný podíl  $r_M/R_{ZM}$ :

$$M_Z = \frac{M_Z}{(1-x)^3} - \frac{M_M}{x^2(1-x)} . \quad (127)$$

Rovnici snadno upravíme na tvar

$$1 = \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{x^2(1-x)} \frac{M_M}{M_Z} . \quad (128)$$

Pro malé  $x$  provedeme rozvoj

$$1 \cong 1 + 3x - \frac{1+x}{x^2} \frac{M_M}{M_Z} \quad \Rightarrow \quad 3x^3 \cong (1+x) \frac{M_M}{M_Z} ,$$

$$3x^3 \cong \frac{M_M}{M_Z} \quad \Rightarrow \quad x \cong \sqrt[3]{\frac{M_M}{3M_Z}} \quad \Rightarrow$$

$$r_M \cong R_{MZ} \sqrt[3]{\frac{M_M}{3M_Z}} = 61\,500 \text{ km} . \quad (129)$$



## 15. Úniková rychlost z Galaxie

**Zadání:** Jaká je úniková rychlost z gravitačního pole Galaxie ve Slunečním okolí, víte-li, že Slunce obíhá kolem středu Galaxie rychlostí 250 km/s.

**Řešení:** Kruhovou rychlost určíme z rovnováhy odstředivé a gravitační síly

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} \Rightarrow v_{\text{kruh}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (130)$$

Únikovou rychlost určíme z rovnosti kinetické a potenciální energie:

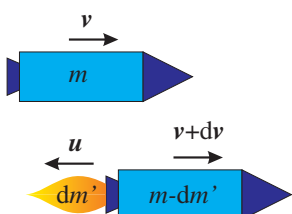
$$\frac{mv^2}{2} = G \frac{mM}{r} \Rightarrow v_{\text{únik}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (131)$$

Odsud vidíme, že

$$v_{\text{únik}} = \sqrt{2} v_{\text{kruh}}. \quad (132)$$

Po výpočtu získáme pro únikovou rychlost z Galaxie v místě našeho Slunce hodnotu 350 km/s.

## 16. Cesta raketou na Proximu Centauri



Je možné doletět raketou na reaktivní pohon k hvězdě, která je nejbližší Slunci (Proxima Centauri,  $l = 4,3$  ly)? Fyzikální princip raketového letu se dá vysvětlit pomocí zákona zachování hybnosti. V čase  $t$  má raketa hybnost  $mv$ , potom v čase  $t + dt$  vypustí zplodiny z motorů o hmotnosti  $dm'$  a absolutní rychlosti  $u$ . Tím hmotnost rakety klesne na hodnotu  $m - dm'$  a její rychlost se změní na  $v + dv$ . Protože raketa spolu se zplodinami tvoří izolovanou soustavu, celková hybnost se nezmění a dostaneme tak (viz obrázek)

$$m v = (m - dm')(v + dv) + u dm'. \quad (133)$$

Po roznásobení závorek a zkrácení příslušných členů dostaneme

$$0 = mdv - v dm' - \underbrace{dm' dv}_{\text{malý člen}} + u dm' \quad (134)$$

Zanedbáme-li nejmenší člen  $dm'dv$  a zavedeme-li rychlost zplodin vzhledem k raketě jako  $U = u - v$ , můžeme poslední vztah přepsat do tvaru  $mdv = -U dm'$ . Protože s unikajícími zplodinami hmotnost rakety klesá, můžeme pro diferenciál její hmotnosti psát  $dm = -dm'$ , takže z posledního vztahu dostaneme

$$dv = U \frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{v_0}^v dv' = U \int_{m_0}^m \frac{dm'}{m'} \Rightarrow \Delta v = -U \ln \frac{m_0}{m}, \quad (135)$$

kde  $m_0, v_0$  jsou počáteční hmotnost a rychlost rakety a  $m, v$  jsou hodnoty konečné. Rovnice (135) se nazývá Ciolkovského a znaménko minus naznačuje, že raketa je urychlována v opačném směru, než jsou vypouštěny zplodiny. Bude-li se jednat o jednorozměrný pohyb s nulovou počáteční rychlostí, můžeme pro velikost dosažené rychlosti rakety Ciolkovského rovnicí přepsat do tvaru

$$v = U \ln \frac{m_0}{m}. \quad (136)$$

Kdyby měl let na Proximu Centauri trvat 20 let, měla by být průměrná rychlost rakety  $v \approx 0,22 c$  kde  $c$  je rychlost světla. Při užitečné hmotnosti rakety  $m = 1000$  kg a rychlosti unikání zplodin  $U = 3$  km/s dostaneme pro startovací hmotnost rakety

$$m_0 \approx m \exp(\bar{v} / U) \approx 10^{9557} \text{ kg}, \quad (137)$$

přičemž hmotnost vesmíru se odhaduje na  $10^{53}$  kg. Odtud je zřejmé, že současná raketová technika se k cestě ke hvězdám použít nedá.

## V. ROTAČNÍ POHYBY

Rotační pohyby jsou nejčastějšími pohyby ve vesmíru. Rotují hvězdy, galaxie, mlhoviny. Je proto třeba těmto pohybům věnovat pozornost. Ve většině případů lze použít analogické vztahy jako u translačních pohybů, jen vystupující veličiny jsou jiné (místo souřadnic úhly, místo rychlostí úhlové rychlosti, atd.). Základní veličinou charakterizující tělesa při translačních pohybech je *setrvačná hmotnost*. Jde o schopnost těles bránit se změně svého pohybového stavu. Analogickou veličinou je při rotačních pohybech *moment setrvačnosti*.

Mají-li působící síly rotační symetrii, zachovává se veličina, kterou nazýváme *moment hybnosti*. Jde o ústřední veličinu při rotačních pohybech s velmi jednoduchou geometrickou interpretací. Zákon zachování momentu hybnosti totiž není nic jiného než zákon ploch: plocha opsaná průvodičem tělesa za jednotku času se nemění. Tento zákon známe například u planet jako druhý Keplerův zákon.

U rotujících objektů se z experimentálního hlediska zajímáme o rychlostní profil  $v(r)$ . Jde o závislost rychlosti  $v$  v závislosti na vzdálenosti od centra rotace. Tři rychlostní profily se vyskytují v astrofyzice velmi často:

- 1) *rotace typu tuhé těleso*:  $v(r) \sim r$ . Rychlostní profil je důsledkem známého vztahu  $v = \omega r$ . Těleso rotuje jako celek, všechny body stejnou úhlovou rychlostí, obvodová rychlost je úměrná vzdálenosti od centra. Příklad: jádro Galaxie, rotující tavenina skloviny při odlévání zrcadla dalekohledu.
- 2) *rotace typu vír*:  $v(r) \sim 1/r$ . Rychlostní profil je důsledkem zachování momentu hybnosti  $m v r = \text{const}$ . Čím dále od centra, tím je rychlost rotace pomalejší. Příklad: Vír na vodní hladině.
- 3) *Keplerovská rotace*:  $v(r) \sim 1/r^{1/2}$ . Profil získáme z rovnosti odstředivé a gravitační síly. Příklad: planety obíhající kolem Slunce.

TRANSLACE		ROTACE	
$x(t)$	vzdálenost	$\varphi(t)$	úhel
$v \equiv \dot{x}$	rychlost	$\omega \equiv \dot{\varphi}$	úhlová rychlost
$a \equiv \ddot{x}$	zrychlení	$\varepsilon \equiv \ddot{\varphi}$	úhlové zrychlení
$m$	setrvačná hmotnost	$J \equiv mr^2$	moment setrvačnosti
$F$	síla	$M_F \equiv Fr \sin \alpha(\mathbf{F}, \mathbf{r})$	moment síly
$m\ddot{x} = F$	pohybová rovnice	$J\ddot{\varphi} = M_F$	pohybová rovnice
$p \equiv mv$	hybnost	$b \equiv J\omega$	moment hybnosti
$W_{\text{TR}} = mv^2/2$	translační energie	$W_{\text{ROT}} = J\omega^2/2$	rotační energie

RŮZNÉ DEFINICE MOMENTU HYBNOSTI	
$b = J \omega$	analogie s translačním pohybem
$b = mr^2 \dot{\varphi}$	vyjádřený moment setrvačnosti
$b = mrv_{\varphi}$	pomocí rychlosti $v_{\varphi}$
$b = mrv \sin \alpha$	pomocí celkové rychlosti $v$
$b = m  \mathbf{r} \times \mathbf{v} $	pomocí vektorového součinu
$\mathbf{b} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$	jako vektor
$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	jako moment hybnosti
$\mathbf{b} = 2m \, d\mathbf{S}/dt$	pomocí plošné rychlosti

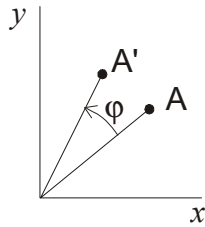
KEPLEROVY ZÁKONY	
<i>1. Keplerův zákon</i>	Planety obíhají kolem Slunce po elipsách. Slunce se nachází ve společném ohnisku těchto elips.
<i>2. Keplerův zákon</i>	Plošná rychlost oběhu planety je konstantní. (Jiné formulace: Plocha průvodiče opsaná za jednotku času se nemění. Moment hybnosti je konstantní).
<i>3. Keplerův zákon</i>	Druhá mocnina oběžné doby je úměrná třetí mocnině velké poloosy planety: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \quad (138)$

## 1. Rotace bodu

**Zadání:** Najděte souřadnice pootočeného bodu v rovině.

**Řešení:** Bod si představíme buď jako uspořádanou dvojici nebo jako komplexní číslo

$$\mathbf{A} = (x, y) = x + iy. \quad (139)$$



Otočený bod bude mít souřadnice

$$\begin{aligned} A' &= A \exp(i\varphi) = (x + iy)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (x \cos \varphi - y \sin \varphi) + i(x \sin \varphi + y \cos \varphi). \end{aligned} \quad (140)$$

Oddělíme-li reálnou a imaginární část máme souřadnice nového bodu

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (141)$$

V maticové podobě (matice rotace kolem osy  $z$  se označuje  $\mathbf{R}_z$ )

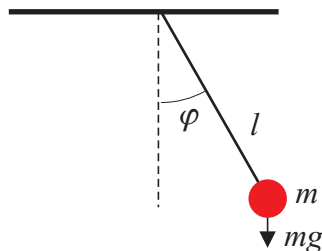
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (142)$$

**Poznámka:** Zkuste otočit bod  $(1,0,0)$  o  $90^\circ$ . Ukažte, že determinant rotační matice je roven 1, což je pro rotace charakteristické. Napište transformaci jako infinitezimální ( $\cos \varphi \approx 1$ ;  $\sin \varphi \approx \varphi$ ) a rozdělte operaci na dvě části – jednotkovou matici a část závislou na malém úhlu  $\varphi$ . Pomocí této matice lze například rotovat snadno s obrázky na monitoru.

## 2. Kyvadlo

**Zadání:** Řešte pomocí diferenčního schématu pohyb nematematického kyvadla (s obecnými rozkmity).

**Řešení:**



Vyjdeme z pohybové rovnice rotujícího tělesa:

$$J\ddot{\varphi} = M_F \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (143)$$

Pro malé rozkmity lze funkci sinus nahradit argumentem a rovnice přejde v rovnici harmonických oscilací. Pro velké rozkmity nejprve rovnici převedeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{144}$$

Derivace nahradíme konečnými diferencemi

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t} &= \omega_n, \\ \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} &= -\frac{g}{l} \sin \varphi_n\end{aligned}\tag{145}$$

a vypočteme nové hodnoty pomocí starých:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + \omega_n \Delta t, \\ \omega_{n+1} &= \omega_n - \frac{g}{l} (\sin \varphi_n) \Delta t.\end{aligned}\tag{146}$$

Z odvozeného diferenčního schématu počítáme z hodnoty úhlu a úhlové rychlosti v čase  $t_n$  nové hodnoty v čase  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ .

### 3. Hvězda měnící rozměry

**Zadání:** Spočítejte rotační periodu a magnetické pole našeho Slunce, pokud by změnilo rozměry podle následující tabulky (stalo se obrem, bílým trpaslíkem nebo neutronovou hvězdou). Předpokládejte, že se při hvězdném vývoji zachovává moment hybnosti a magnetický indukční tok.

	poloměr	perioda	magn. pole
<b>Slunce</b>	700 000 km	25 dní	$10^{-4}$ T
<b>obr</b>	$200 R_S$	?	?
<b>bílý trpaslík</b>	20 000 km	?	?
<b>neutronová hvězda</b>	50 km	?	?

**Řešení:** Ze zákona zachování momentu hybnosti určíme periodu:

$$J\omega = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} mR^2 \cdot \frac{2\pi}{T} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{R^2}{T} = \text{const}.\tag{147}$$

Podíl kvadrátu rozměrů a periody se při hvězdném vývoji zachovává. Přibližně se také zachovává magnetický indukční tok:

$$BS = \text{const} \quad \Rightarrow \quad B \cdot 4\pi R^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad BR^2 = \text{const}.\tag{148}$$

Z posledních relací dopočteme chybějící hodnoty v tabulce:

	Poloměr	Perioda	Mg. pole
Slunce	700 000 km	25 dní	$10^{-2}$ T
Obr	$200 R_S$	2700 let	$0.25 \times 10^{-6}$ T
Bílý trpaslík	20 000 km	29 minut	10 T
Neutronová hvězda	50 km	0,01 s	$2 \times 10^6$ T

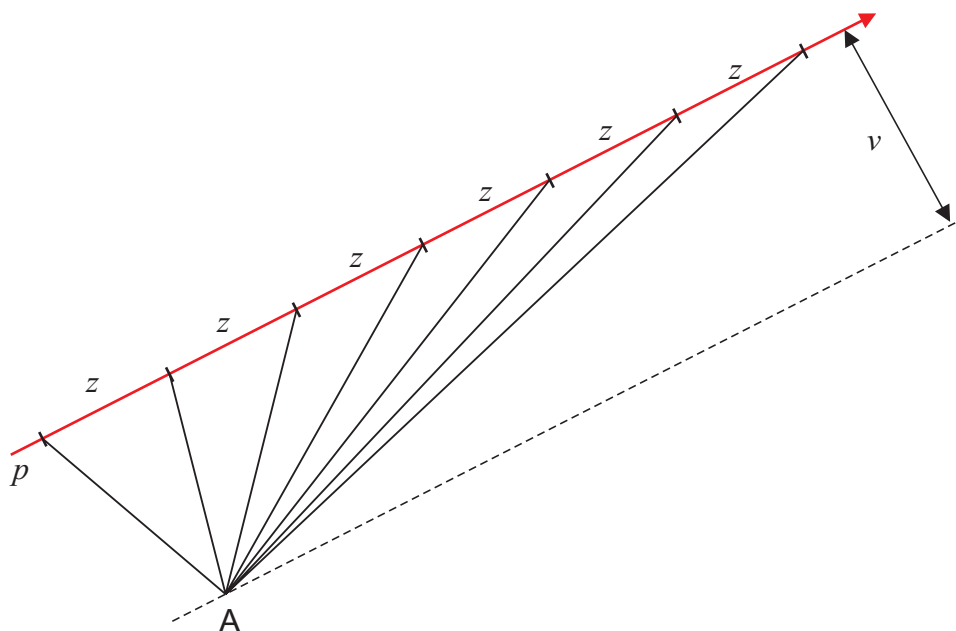
**Poznámka:** Naše Slunce asi za 7 miliard let spotřebuje zásoby vodíku v jádře, začne hořet hélium a Slunce se stane obrem s rozměry přibližně až po dráhu Marsu. Po vyhoření jaderného paliva se nakonec Slunce stane bílým trpaslíkem. Naše Slunce ale nemá dostatek hmoty na to, aby se někdy stalo neutronovou hvězdou. Některé neutronové hvězdy mají tak silné magnetické pole, že na povrchu hvězdy vytváří pevný povrch, který může praskat a být zdrojem magnetotřesení. Takové hvězdy nazýváme *magnetary*.

#### 4. Zákon ploch

**Zadání:** Kámen se pohybuje rovnoměrně přímočaře bez silového působení. Ukažte, že pro zcela libovolný bod v prostoru platí zákon ploch: Plochy opsané průvodičem ze zvoleného bodu za stejnou dobu se nemění.

**Řešení:** Necht' se kámen pohybuje po přímce  $p$ . Zvolíme libovolný bod  $A$  podle obrázku. Plochy opisované průvodičem mají stejné základny  $z$  (pohyb je rovnoměrný přímočarý) a stejné výšky  $v$ . Jelikož jde o trojúhelníky, jsou všechny plochy stejné.

**Poznámka:** Zákon ploch platí i tehdy, je-li v bodě  $A$ , ze kterého plochy počítáme, umístěno těleso, které budí centrální sílu. V následujícím příkladu si ukážeme, že zákon ploch není nic jiného než zákon zachování momentu hybnosti.

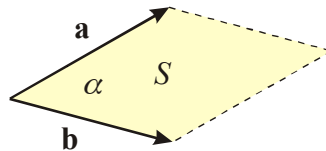


## 5. Druhý Keplerův zákon

**Zadání:** Ukažte, že zákon zachování plošné rychlosti není nic jiného než zákon zachování momentu hybnosti a že pro jeho platnost stačí, aby síly mířily do centra.

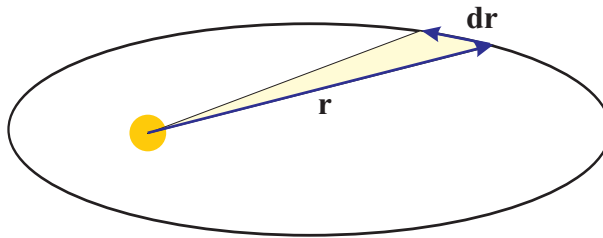
**Řešení:** Vektorový součin dvou vektorů má velikost rovnou ploše rovnoběžníka nataženého na vektory, protože

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha = S; \quad \text{resp.} \quad \mathbf{S} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (149)$$



Plocha opsaná planetou za jednotku času je tedy úměrná momentu hybnosti  $\mathbf{b}$ :

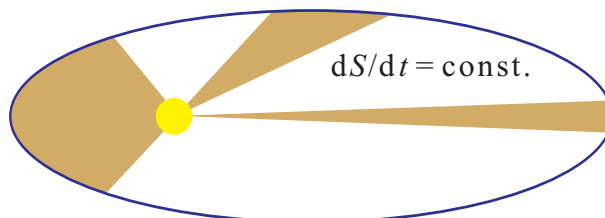
$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}}{2m}. \quad (150)$$



Ukažme nyní, že pro centrální pole se moment hybnosti zachovává a přitom vůbec nezávisí na průběhu síly:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (151)$$

První člen je nulový automaticky a druhý člen je nulový pro sílu mířící do centra nebo pro nulovou sílu (minulý příklad). Centrální síla tedy postačí k platnosti druhého Keplerova zákona.



**Poznámka:** Průvodič planety opíše za stejné časové úseky stejnou plochu (jedna z možných formulací druhého Keplerova zákona).

## 6. Od Keplera k Newtonovi

**Zadání:** Odvoďte ze znalosti Keplerových zákonů, že gravitační síla ubývá se čtvercem vzdálenosti. Uvažujte kruhové orbity planet.

**Řešení:** Předpokládejme rovnost odstředivé síly a gravitační síly s obecnou mocninou vzdálenosti:



$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^\alpha}. \quad (152)$$

Za rychlost dosadíme obvod dráhy dělený periodou, tj.  $v = 2\pi r/T$  a ihned získáme vztah

$$\frac{r^{\alpha+1}}{T^2} = \frac{GM}{4\pi}. \quad (153)$$

Tento vztah přejde ve třetí Keplerův zákon, pokud je  $\alpha = 2$ .

## 7. Volný pád Měsíce

**Zadání:** O jakou vzdálenost spadne Měsíc k Zemi za jednu sekundu volným pádem? Proč skutečný Měsíc nespadne na Zemi?

**Řešení:** Na Měsíc působí gravitační síla

$$M_M g = G \frac{M_M M_Z}{R_{ZM}^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM_Z}{R_{ZM}^2}, \quad (154)$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení v místě, kde obíhá Měsíc. Pro vzdálenost pádu potom máme

$$s = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{GM_Z t^2}{2R_{ZM}^2} \approx 1,5 \text{ mm}. \quad (155)$$

Měsíc za každou sekundu spadne o cca 1,5 mm k Zemi. Ve skutečnosti se tento pohyb skládá s rovnoměrným přímočarým pohybem ve směru okamžité rychlosti. Složení obou těchto pohybů dá pohyb po elipse blízké kružnici.

## 8. Vzdalování Měsíce

**Zadání:** Měsíc interaguje se Zemí slapovými silami. V důsledku toho dochází k výměně momentu hybnosti mezi obíhajícím Měsícem a rotující Zemí. Měsíc se proto vzdaluje od Země o 3,82 m za století. Jaká změna rotační periody Země tomu odpovídá, je-li moment setrvačnosti Země  $\gamma$  násobkem momentu setrvačnosti homogenní koule? Hodnota  $\gamma = 0,83$  odpovídá skutečnému rozložení hmoty uvnitř Země.

**Řešení:** Zákon zachování momentu hybnosti soustavy Země-Měsíc můžeme napsat ve tvaru (vlastní rotaci Měsíce zanedbáváme, rotační moment je  $10^{-5}$  orbitálního momentu)

$$b_Z + b_M = \text{const}. \quad (156)$$

Vyjádríme nejprve rotační moment Země

$$b_Z = J_Z \omega = \frac{2}{5} \gamma M_Z R_Z^2 \cdot \frac{2\pi}{T_Z(t)} = \frac{c_1}{T_Z(t)} \quad (157)$$

a orbitální moment Měsíce (z definice momentu hybnosti a oběžné rychlosti)

$$b_M = M_M r v = M_M \sqrt{GM_Z r(t)} = c_2 \sqrt{r(t)}. \quad (158)$$

Po dosazení (157) a (158) do (156) snadno získáme diferencováním vztah

$$\frac{\Delta T_Z}{T_Z} = \frac{1}{2} \frac{b_M}{b_Z} \frac{\Delta r}{r}. \quad (159)$$

Po dosazení vychází změna rotační periody Země cca 2 milisekundy za století.

## 9. Vzdalování Země

**Zadání:** Za 7 miliard let bude Slunce červeným obrem a oproti dnešnímu stavu ztratí 20 % své hmotnosti. Jak tato ztráta ovlivní dráhu Země?. Předpokládejte kruhovou orbitu a zákon zachování momentu hybnosti Země.

**Řešení:** Označme moment hybnosti Země

$$b_Z = M_Z v r = \text{const} \quad (160)$$

Z rovnosti odstředivé a gravitační síly pro rychlost Země na orbitě plyne

$$v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}. \quad (161)$$

Dosadíme-li tento vztah do zákona zachování hybnosti, máme

$$M_Z \sqrt{\frac{GM_S}{r}} r = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{M_S r} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad M_S r = \text{const} \quad (162)$$

Zřejmě tedy platí

$$r_2 = \frac{M_{1S}}{M_{2S}} r_1 = \frac{1}{0,8} r_1 = 1,25 \text{ au}. \quad (163)$$

Pokud uvažujeme změnu dráhy Země způsobenou ztrátou hmotnosti Slunce, bude Země za 7 miliard let o čtvrtinu dále od Slunce než dnes.

## 10. Efektivní potenciál

**Zadání:** Zformulujte zákon zachování energie tělesa obíhajícího kolem hmotného centra pomocí veličin  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\dot{r}$ . Veličinu  $\dot{\varphi}$  vyjádřete ze zákona zachování momentu hybnosti.

**Řešení:** Těleso pohybující se kolem hmotného centra má dva významné zákony zachování, které souvisí s časovou a rotační symetrií úlohy

- energie  $\rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - G \frac{mM}{r},$
- moment hybnosti  $\rightarrow b = J \dot{\varphi}.$

Jsou to dvě charakteristické konstanty, které přiřadíme dané planetě (kometě, asteroidu, měsíci) a které zcela určují její (jeho) trajektorii. Dosadíme-li za moment setrvačnosti  $J = m r^2$  a za  $\dot{\varphi}$  z druhé relace do první, získá zákon zachování energie tvar:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{b^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r}, \quad (164)$$

kde první člen je radiální energie, druhý rotační energie a třetí gravitační energie. Přitom poslední dva členy dohromady představují tzv. efektivní potenciální energii

$$W_{\text{eff}} \equiv \frac{b^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r}, \quad (165)$$

tvořenou potenciálem odstředivých a gravitačních sil. Průběh této funkce má minimum ve střední hodnotě radiální vzdálenosti planety. Kolem tohoto minima probíhají v radiální souřadnici oscilace (těleso se periodicky vzdaluje a přibližuje vzhledem k centru).

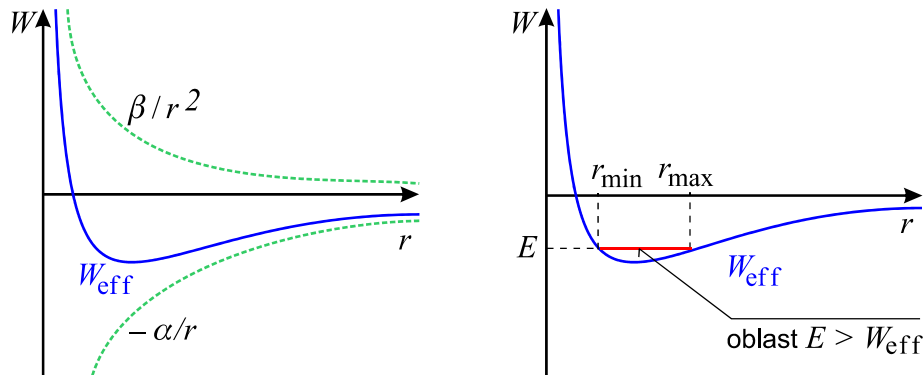
Takovýto příklad často řešíme pro známá  $E$  a  $b$  (pro dané těleso) a neznámé  $r(t)$  jako

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - W_{\text{eff}}(r)] \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - W_{\text{eff}}(r)]}. \quad (166)$$

Odmocnina musí být nezáporná, a proto se může uskutečnit jen pohyb s energií splňující vztah

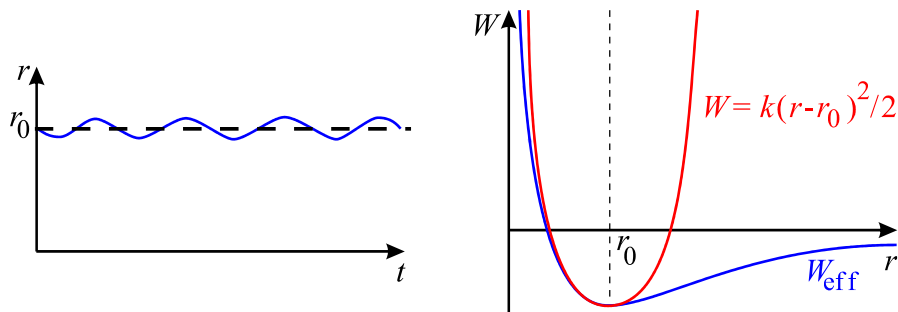
$$E \geq W_{\text{eff}}(r). \quad (167)$$

Význam této podmínky je zřejmý z doprovodného obrázku. Při pohybu po kružnici je  $dr/dt = 0$ . Těleso se nevzdaluje ani nepřibližuje.



## 11. Země jako harmonický oscilátor

**Zadání:** Určete pohyb Země v radiální souřadnici v přiblížení harmonického oscilátoru a určete periodu pohybu.



**Řešení:** Vzdálenost Země od Slunce kolísá kolem rovnovážné polohy, s největší a nejmenší vzdáleností  $r_{\max} = 151 \times 10^6$  km a  $r_{\min} = 147 \times 10^6$  km. Průběh efektivní potenciální energie odpovídá průběhu z předchozího příkladu a pro případ Země může být jeho část přiblížena parabolou. Stačí tedy provést Taylorův rozvoj  $W_{\text{eff}}$  do 2. řádu v okolí minima. Parabolická závislost pak není nic jiného než harmonický oscilátor. Nejprve musíme nalézt radiální vzdálenost, ve které má efektivní potenciál minimum:

$$W'_{\text{eff}} = -\frac{b^2}{M_Z r^3} + G \frac{M_Z M_S}{r^2} = 0 \Rightarrow \quad (168)$$

$$r_0 = \frac{b^2}{GM_Z^2 M_S} = 149 \times 10^6 \text{ km}$$

a poté druhou derivaci v minimu

$$k \equiv W''_{\text{eff}} = \frac{3b^2}{M_Z r_0^4} - \frac{2GM_Z M_S}{r_0^3} = \frac{M_Z^7 M_S^4 G^4}{b^6}. \quad (169)$$

Význam této veličiny je zřejmý z Taylorova rozvoje

$$W_{\text{eff}}(r) = W_0 + \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + \dots \Rightarrow \quad (170)$$

$$F = -\frac{dW_{\text{eff}}}{dr} = -k(r - r_0).$$

Jde o tuhost oscilátoru. Periodu nyní již snadno určíme ze známých relací pro harmonický oscilátor:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M_Z}} = \frac{M_Z^3 M_S^2 G^2}{b^3}, \quad (171)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Perioda „kmitů“ vychází  $T \sim 365$  dní.

## 12. Pohyb elektronu v magnetickém poli

**Zadání:** Ukažte, že soustava elektronů rotuje v magnetickém poli jako tuhé těleso.

**Řešení:** Z rovnosti odstředivé a Lorentzovy síly máme

$$\frac{mv^2}{r} = QvB \Rightarrow \quad (172)$$

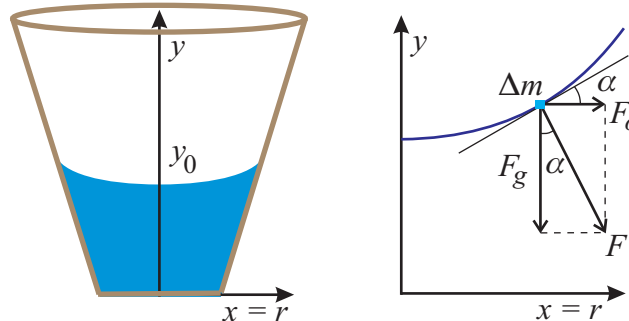
$$v(r) = \frac{QB}{m} r$$

a rychlost rotace je úměrná vzdálenosti, stejně jako u tuhého tělesa.

### 13. Profil hladiny kapaliny v rotující nádobě

**Zadání:** Nalezněte rovnici povrchu kapaliny rotující spolu s nádobou.

**Řešení:**



Hladina kapaliny se ustaví vždy tak, aby byla kolmá na výslednici sil (to je způsobeno tím, že v kapalině neexistují tečné složky napětí). Podle obrázku platí pro element  $\Delta m$  v rovině  $xy$ :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_O}{F_G} = \frac{\Delta m v^2 / x}{\Delta m g} = \frac{v^2}{g x}. \quad (173)$$

Rotuje-li nádoba dostatečně dlouhou dobu, bude veškerá tekutina rotovat se stejnou úhlovou rychlostí. Rychlostní profil pak bude odpovídat tuhému tělesu:

$$v = \omega x. \quad (174)$$

Po dosazení do rovnice povrchu máme diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}, \quad (175)$$

kterou řešíme separací

$$dy = \frac{\omega^2 x}{g} dx \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + \frac{\omega^2 x^2}{2g}. \quad (176)$$

Povrch hladiny v rotující nádobě má tedy parabolický profil.

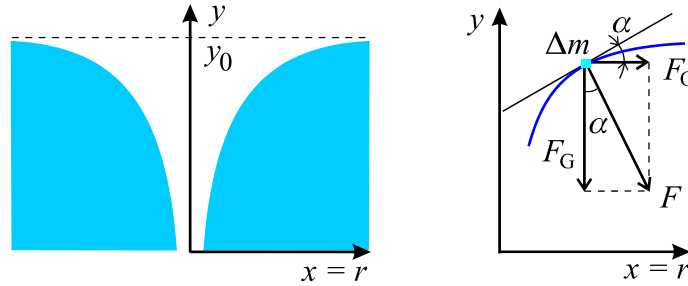
**Poznámka:** Parabolický profil rotující kapaliny se používá při výrobě astronomických zrcadel. Rotující tavenina skla získá přirozeným způsobem parabolický profil, ve kterém je postupně chlazena až do ztuhnutí skla. NASA dokonce otestovala v Novém Mexiku trvale tekuté rtuťové rotující zrcadlo. Systém se jmenuje NODO (NASA Orbital Debris Observatory), průměr má 3 metry, 6 otáček za vteřinu a obraz má vynikající kvalitu. Cena systému je 10 % ceny konvenčních dalekohledů. Jedinou nevýhodou je, že dalekohled může mířit jen do zenitu. Uvažuje se také o stavbě desetimetrového tekutého dalekohledu.

### 14. Profil víru na vodní hladině

**Zadání:** Nalezněte rovnici povrchu víru na vodní hladině.

**Řešení:** Hladina kapaliny se ustaví tak, aby byla kolmá na výslednici sil (to je způsobeno tím, že v kapalině neexistují tečné složky napětí). Podle obrázku platí pro element  $\Delta m$  v rovině  $(xy)$ :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_O}{F_G} = \frac{\Delta m v^2 / x}{\Delta m g} = \frac{v^2}{gx}. \quad (177)$$



Elementy kapaliny ve víru se přesunují směrem k centru tak, že je zachován moment hybnosti elementu kapaliny:

$$\Delta b = x \Delta m v. \quad (178)$$

Vydělíme-li výraz objemem elementu kapaliny, získáme vztah pro hustotu momentu hybnosti  $\beta$ :

$$\beta = \rho x v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\beta}{\rho x}. \quad (179)$$

Po dosazení rychlostního profilu do rovnice povrchu získáme diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta^2}{\rho^2 g x^3}, \quad (180)$$

kterou řešíme separací

$$dy = \frac{\beta^2}{\rho^2 g x^3} dx \quad \Rightarrow \quad y = y_0 - \frac{\beta^2 / \rho g}{2x^2}. \quad (181)$$

Povrch hladiny v rotující nádobě má tedy profil hyperboly druhého stupně. Povrch kapaliny daleko od víru je  $y_0$ .

## 15. Rychlostní profil v rotující galaxii s hustým jádrem

**Zadání:** Nalezněte rychlostní profil zidealizované galaxie s velmi hustým jádrem a málo hustým okolím. Hustotu jádra galaxie považujte za konstantní, hustotu periferie za nulovou.

**Řešení:** Rychlostní profil budeme hledat z rovnováhy odstředivé a gravitační síly. Je-li hvězda uvnitř jádra, působí na hvězdu jen gravitace od hvězd s menší vzdáleností od centra než má sledovaná hvězda. Tuto hmotnost označíme  $\mathcal{M}$ . Hmotnost je úměrná objemu, takže

$$\mathcal{M} = \frac{r^3}{R^3} M \quad (182)$$

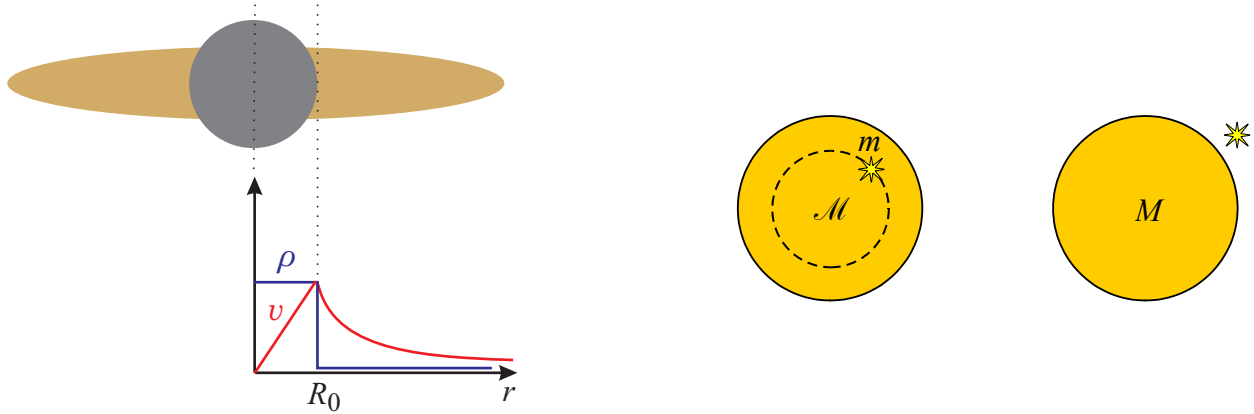
Rovnováha sil pro hvězdu pak je

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} \quad (183)$$

a po dosazení za hmotnost  $M$  dostaneme:

$$v(r) \sim r. \quad (184)$$

V hustém jádru galaxie tedy rotace probíhá jako u tuhého tělesa.



Na periferii působí na hvězdu celá hmotnost jádra, tedy

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} \quad (185)$$

a proto je rotace periferních oblastí je keplerovská.

$$v(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (186)$$

**Poznámka:** Rotační křivka by měla odpovídat červené křivce v prvním obrázku k tomuto příkladu. Již v roce 1933 upozornil F. Zwicky, že ve vnějších oblastech galaxií jsou rotační rychlosti vyšší než teoretické. Je-li v galaxii jen hmota, kterou vidíme, měla by se odstředivou silou rozprsknout. Proto galaxie pravděpodobně obsahují temnou hmotu, kterou nevidíme. Může jít o plyn, prach, hnědé trpaslíky, ale především o hmotu exotických částic, například axionů, které zatím neznáme. Podle odhadů tvoří temná hmota více jak 90 % veškeré hmoty ve vesmíru. Jinou možností je úprava gravitačního zákona pro velké vzdálenosti (například  $\phi \sim -\alpha/r + \beta \ln r/a$ ). Tyto pokusy však vedou na nesprávné odpuzování světelných paprsků v blízkosti velkých galaxií (A. Edery, 1999). Nejpřesnější měření  $v(r)$  byla provedena pro velké spirální galaxie na vlnové délce 21 cm.

## 16. Rozměr neutronové hvězdy

**Zadání:** Stanovte horní hranici poloměru neutronové hvězdy o hmotnosti 1,7 MS, která má periodu rotace 2,1 ms. Použijte klasický výraz pro odstředivou sílu.

**Řešení:** Odstředivá síla působící na element látky o hmotnosti  $m$  na povrchu musí být menší než gravitační, jinak dojde k odvržení látky do prostoru:

$$mR\omega^2 < G \frac{mM}{R^2}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (187)$$

Z tohoto vztahu snadno nalezneme podmínku pro rozměr neutronové hvězdy

$$R < \sqrt[3]{G \frac{MT^2}{4\pi^2}} \approx 6,3 \text{ km} . \quad (188)$$

Pokud by tento rozměr vyšel menší než Schwarzschildův poloměr, nemohla by neutronová hvězda s těmito parametry vůbec existovat, musela by být černou dírou.



## VI. SPECIÁLNÍ RELATIVITA

### 1. Maticový zápis Lorentzovy transformace

**Zadání:** Ukažte, jak lze Lorentzovu transformaci (LT) přepsat maticově.

**Řešení:** Napišme nejprve Lorentzovu transformaci v rozepsaném tvaru (pohyb se děje v ose  $x$ , čas píšeme na nultou pozici):

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\y' &= y; \\z' &= z.\end{aligned}\tag{189}$$

Provedeme-li v LT následující substituce

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{v}{c}; \\ \gamma &= 1/\sqrt{1 - \beta^2},\end{aligned}\tag{190}$$

lze pak transformaci čtyř souřadnic (časová  $x_0 = ct$  a tři prostorové  $x_1, x_2, x_3$ ) zapsat jako  $\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}$ :

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \mathbf{\Lambda} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{191}$$

je tzv. Lorentzova matice.

### 2. Determinant LT

**Zadání:** Nalezněte determinant matice Lorentzovy transformace.

**Řešení:**

$$\begin{aligned}\det \mathbf{\Lambda} &= \gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} (1 - \beta^2) = 1.\end{aligned}\tag{192}$$

Vidíme, že determinant je roven 1, a proto se jedná z matematického hlediska o tzv. unitární transformaci, neboli rotaci. Tyto transformace nemění velikost vektorů ani jejich vzájemný úhel. Podobnou transformací jsou zrcadlení s determinantem rovným  $-1$ .

### 3. Inverzní matice k LT

**Zadání:** Nalezněte inverzní matici k matici Lorentzovy transformace.

**Řešení:** V tomto případě stačí zaměnit  $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ , takže je pak  $\gamma \rightarrow \gamma$ ;  $\beta \rightarrow -\beta$  a inverzní matice má tvar

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (193)$$

Transformační rovnice má tvar

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \quad (194)$$

Ověřte, že platí

$$\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = \mathbf{1}. \quad (195)$$

### 4. Úhel rotace – rapidita

**Zadání:** Nalezněte úhel rotace u Lorentzovy transformace.

**Řešení:** Postupujeme jako při obyčejné rotaci v prostoru, kdy se otočíme o určitý úhel v rovině  $(x, y)$ ; souřadnice  $z$  se nemění. Tento obecný případ lze popsat jako transformaci (příklad V.1).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (196)$$

Transformační maticí při této rotaci je matice

$$\mathbf{R} \equiv \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (197)$$

jejíž determinant je  $\det \mathbf{R} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ . Jak je tomu u Lorentzovy transformace? Z Lorentzovy transformační matice se zdá, že jde o rotaci v rovině  $(t, x)$ . Kdyby bylo  $\gamma = \cos \varphi$ , pak z determinantu Lorentzovy matice  $\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = 1$  vychází  $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 = \cos^2 \varphi - 1$ , což nedává  $\sin^2 \varphi$ . Tento problém řeší hyperbolické funkce  $\text{ch}$  a  $\text{sh}$ . Provedeme tedy substituci  $\gamma = \text{ch } u$ . Pak je  $\gamma^2 \beta^2 = \text{ch}^2 u - 1 = \text{sh}^2 u$  a lze volit  $\gamma\beta = \text{sh } u$ . Lorentzova matice získá tvar

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \text{ch } u & -\text{sh } u & 0 & 0 \\ -\text{sh } u & \text{ch } u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (198)$$

který je velice podobný rotační transformační matici, determinant je zjevně roven jedné. Jde o rotaci v rovině  $(t, x)$  o ryze imaginární úhel  $u$ , který se nazývá *rapidita*. Hodnotu rapidity snadno zjistíme:

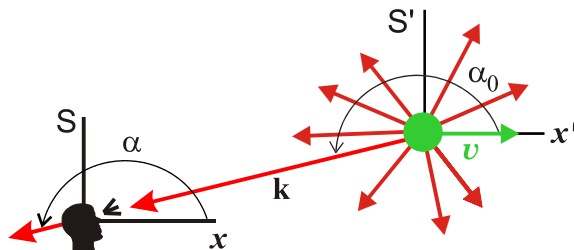
$$\text{th } u = \frac{\text{sh } u}{\text{ch } u} = \frac{\gamma\beta}{\gamma} = \beta = \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad u = \text{arcth } \frac{v}{c}. \quad (199)$$

Rapidita je jednoduchou funkcí vzájemné rychlosti obou soustav.

## 5. Relativistický Dopplerův jev

**Zadání:** Odvoďte relativistický Dopplerův jev pomocí transformace čtyřvektoru  $(\omega/c, \mathbf{k})$ . Proč dochází k Dopplerovu jevu i tehdy, když zdroj pozorovatele jen míjí a jejich vzdálenost se nemění (tzv. transverzální Dopplerův jev)?

**Řešení:** Snadno nalezneme řešení v soustavě  $S'$  spojené se zdrojem záření:



$$k_\mu = \left( \frac{\omega_0}{c}; k_0 \cos \alpha_0; k_0 \sin \alpha_0; 0 \right) = \left( \frac{\omega_0}{c}; \frac{\omega_0}{c} \cos \alpha_0; \frac{\omega_0}{c} \sin \alpha_0; 0 \right). \quad (200)$$

Nyní provedeme Lorentzovu transformaci do soustavy pozorovatele  $S$ :

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ (\omega/c) \cos \alpha \\ (\omega/c) \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ (\omega_0/c) \cos \alpha_0 \\ (\omega_0/c) \sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (201)$$

Z prvního řádku maticového násobení máme výsledek pro transformaci frekvence

$$\omega = \gamma(1 + v/c \cos \alpha_0) \omega_0. \quad (202)$$

Tento vztah je známý jako relativistický Dopplerův jev. V limitě nízkých rychlostí (zanedbáme členy kvadratické a vyšší ve  $v/c$ ) jde je  $c \rightarrow 1$  a  $\omega = (1 + v/c \cos \alpha_0) \omega_0$ . Při vzdalování zdroje je  $\alpha_0 = 180^\circ$  a  $\omega = (1 - v/c) \omega_0$ , při přibližování zdroje je  $\alpha_0 = 0^\circ$  a  $\omega = (1 + v/c) \omega_0$ . Jde o známé nerelativistické Dopplerovy vztahy. Při vyšších rychlostech jsou tyto vztahy modifiko-

vány koeficientem  $\gamma$ . Jestliže zdroj záření pozorovatele míjí ( $\alpha_0 = \pm 90^\circ$ ) je  $\omega = \gamma \omega_0$ . K změně frekvence tedy dochází i v případě, že se zdroj nevzdaluje ani nepřibližuje. Tento jev se nazývá transversální Dopplerův jev a jde o čistě relativistický jev, který nemá v nerelativistické fyzice obdoby. Je způsoben změnou chodu času v pohybující se soustavě. Prostorové relace v transformaci (201) dají vztahy

$$\begin{aligned}\omega \cos \alpha &= \gamma \omega_0 (\beta + \cos \alpha_0), \\ \omega \sin \alpha &= \omega_0 \sin \alpha_0.\end{aligned}\tag{203}$$

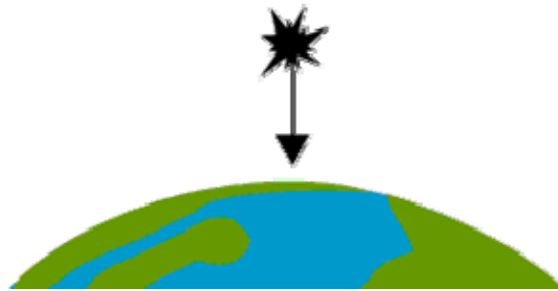
Pokud obě rovnice vydělíme, získáme vztah mezi oběma úhly, který je nezávislý na frekvencích a závisí jen na vzájemné rychlosti soustav:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha_0}{\gamma(\beta + \cos \alpha_0)}.\tag{204}$$

Ze vztahu je zřejmé, že vlnoplocha změnila směr a tato změna závisí jen na vzájemné rychlosti soustav  $v$ . Relativistický Dopplerův jev jsme zde odvodili jen pro světlo ( $\omega = ck$ ) a nikoli pro obecné vlnění látky.

## 6. Mion

**Zadání:** Doba života mionu (těžký elektron) je  $\Delta\tau = 2.2 \times 10^{-6}$  s. Mion vznikl ve výšce  $h = 30$  km nad povrchem Země z kosmického záření a dopadl na Zem. Jakou musel mít minimální rychlost při vzniku?



**Řešení:** Z hlediska pozorovatele na Zemi je mion v pohyblivé soustavě a doba jeho života se prodlužuje na  $\Delta t = \gamma \Delta\tau$ . Mion proto může ulétnout až vzdálenost  $h \leq c\Delta t = c\gamma\Delta\tau$ . Z tohoto vztahu vypočteme rychlost, kterou musí minimálně mít:  $v = c[1 - (c\Delta\tau/h)^2]^{1/2}$ .

**Výsledek:**  $v = 0.99976 c$ .

## VII. GRAVITACE A OBECNÁ RELATIVITA

Zakřivení časoprostoru určuje metrický tenzor, za pomoci něhož je definován interval

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (205)$$

V obecné relativitě se metrický tenzor počítá z Einsteinových rovnic, jejichž řešení jde za rámec tohoto učebního textu. Pokud ale známe metriku, můžeme počítat pohyb částic v této metrice z Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (206)$$

Tečka znamená derivaci podle parametru  $\lambda$ , který parametrizuje vhodným způsobem trajektorii  $x^\mu(\lambda)$  systému. Vhodným parametrem je například vlastní čas částice (pokud nejde o foton). Lagrangeova funkce, která vede na správné pohybové rovnice je

$$L = \sqrt{\left| \frac{ds^2}{d\lambda^2} \right|}. \quad (207)$$

Lagrangeova funkce (207) funguje pro jakoukoli parametrizaci. Její nevýhodou je ale odmocnina, která může komplikovat výpočty. Vhodnější je proto použít Lagrangeovu funkci

$$\tilde{L} = \frac{ds^2}{d\lambda^2}, \quad (208)$$

která vede na stejné pohybové rovnice, pokud je parametrizace volena tak, aby  $L = ds^2/d\lambda^2$  bylo konstantní (to splňuje například vlastní čas, protože platí  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ ). V takovém případě vedou obě Lagrangeovy funkce na stejné pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{d\lambda} \left( 2L \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - 2L \frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (209)$$

V následujících příkladech budeme proto využívat jednodušší Lagrangeovu funkci (208).

### 1. Laplaceův výpočet Schwarzschildova poloměru

**Zadání:** Zjistěte, jak malý poloměr by musel mít objekt o hmotnosti  $M$ , aby úniková rychlost dosáhla rychlosti světla.

**Řešení:** Vyjdeme ze zákona zachování energie pro svislý vrh. Indexy 1 odpovídají vymrštění tělesa hmoty  $m$  z povrchu, indexy 2 otočce:

$$\frac{1}{2} mv_1^2 - G \frac{mM}{r_1} = \frac{1}{2} mv_2^2 - G \frac{mM}{r_2}. \quad (210)$$

Má-li jít jen o únikovou rychlost, položíme  $v_1 = v$ ;  $r_1 = R$ ;  $v_2 = 0$ ;  $r_2 \rightarrow \infty$ , má-li jít navíc o Schwarzschildův poloměr, musí být  $v = c$  a  $R = r_g$ . Proto máme

$$\frac{1}{2} m c^2 - G \frac{mM}{r_g} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (211)$$

**Poznámka:** Tento výpočet provedl Pierre Simon Laplace již v roce 1798. Ještě dříve (1783) upozornil na možnost existence objektů, ze kterých neunikne světlo anglický astronom John Michell. Pojmenování černá díra pochází od Johna Archibalda Wheelera a je až z roku 1967.

## 2. Hustota černé díry

**Zadání:** Určete hustotu černé díry pro vnějšího pozorovatele (z hmotnosti).

**Řešení:**

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi r_g^3 / 3} = \frac{3M}{4\pi (2GM/c^2)^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \frac{1}{M^2}. \quad (212)$$

těleso	hmotnost	horizont	hustota
kámen	1 kg	$10^{-27}$ m	$10^{76}$ g cm <sup>-3</sup>
Země	$6 \times 10^{24}$ kg	9 mm	$10^{27}$ g cm <sup>-3</sup>
Slunce	$2 \times 10^{30}$ kg	3 km	$10^{16}$ g cm <sup>-3</sup>
gal. jádro	$10^8 M_S$	2 au	1.82 g cm <sup>-3</sup>
galaxie	$10^{11} M_S$	30 ly	$10^{-6}$ g cm <sup>-3</sup>

**Poznámka:** Jde o průměrnou hustotu pro vnějšího pozorovatele. Vnější pozorovatel se nikdy neocitne pod horizontem černé díry, aby tuto hustotu vnímal. Hustota velmi hmotných černých děr může být nízká! Jejich extrémní vlastnosti jsou dány jejich celkovou hmotností a malými rozměry horizontu, nikoli hustotou.

## 3. Pohyb fotonu

**Zadání:** Určete dobu pádu fotonu do černé díry. Světlo letí pouze v radiálním směru.

**Řešení:** Pro tento případ použijeme Schwarzschildovu metriku:

$$ds^2 = -c^2(1 - r_g/r) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)} + r^2 d\Omega^2. \quad (213)$$

Víme, že foton ( $ds^2 = 0$ ) padá radiálně ( $\varphi = \theta = 0$ ), a proto

$$0 = -c^2(1 - r_g/r) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)} \Rightarrow$$

$$\frac{dr^2}{(1 - r_g/r)^2} = c^2 dt^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{(1 - r_g/r)} = \pm c dt. \quad (214)$$

Znaménka představují fotony letící ven (+) nebo do (-) černé díry.

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{(1-r_g/r)} = \pm \int_{t_0}^t c dt, \quad (215)$$

odkud integrací získáme (čitatele i jmenovatele vynásobíme  $r$  a rozložíme na parciální zlomky: odečteme a přičteme  $r_g$ )

$$r - r_0 + r_g \ln \frac{r - r_g}{r_0 - r_g} = \pm c(t - t_0) \quad (216)$$

neboli

$$r = r_0 \pm c(t - t_0) - r_g \ln \frac{r - r_g}{r_0 - r_g}. \quad (217)$$

daleko od černé díry je logaritmus na pravé straně nulový a jde o řešení speciální relativity. Pro foton padající do černé díry ( $r \rightarrow r_g$ ) platí znaménko (-), logaritmus konverguje k  $-\infty$  a časový interval je nekonečný. Pro foton vystupující z horizontu černé díry je  $r_0 \rightarrow r_g$ , platí znaménko (+), logaritmus konverguje k  $+\infty$  a časový interval je opět nekonečný. Pokud ani počáteční ani koncový stav neleží na horizontu (na Schwarzschildově poloměru), je doba putování fotonu konečná.

#### 4. Kruhová orbita fotonů kolem černé díry

Výpočet budeme provádět v rovině  $\theta = \pi/2$ , interval a Lagrangeova funkce budou mít tvary

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\varphi^2, \quad (218)$$

$$L = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (219)$$

Z tvaru Lagrangeovy funkce je patrné, že se budou zachovávat dvě zobecněné hybnosti ( $t, \varphi$  jsou cyklické proměnné, v  $L$  se nevyskytují), křivka je parametrizována parametrem  $\lambda$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \text{const}; \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t} = k; \quad (220)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}; \quad \Rightarrow \quad r^2 \dot{\varphi} = b. \quad (221)$$

Rovnice pohybu světla  $ds^2 = 0$  bude po parametrizaci parametrem  $\lambda$  (tečka je derivace podle  $\lambda$ )

$$-c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (222)$$

Po dosazení za  $\dot{t}$  z (220) a za  $\dot{\varphi}$  z (221) dostaneme:

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = c^2 k^2; \quad (223)$$

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{b^2 (1 - r_g/r)}{r^2}. \quad (224)$$

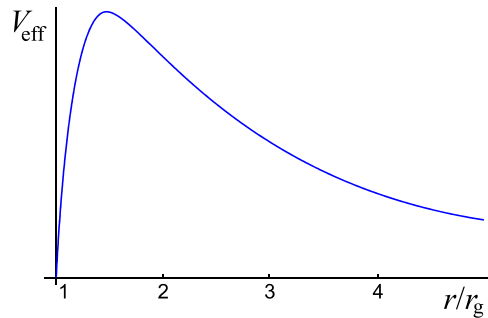
Je zjevné, že vztah (223) je jakousi obdobou zákona zachování energie a že pohyb se může konat jen tam, kde  $c^2 k^2 \geq V_{\text{eff}}$ . Kruhovou orbitu nalezneme z podmínky

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0, \quad (225)$$

ze které plyne

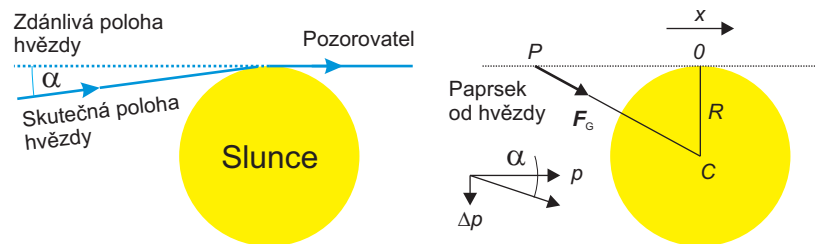
$$r = \frac{3}{2} r_g. \quad (226)$$

Zjevně jde o nestabilní trajektorii, neboť efektivní potenciál má v tomto místě maximum.



## 5. Ohyb světla

Albert Einstein ve své teorii relativity předpověděl, že světelné paprsky procházející kolem Slunce od vzdálených hvězd budou díky zakřivení prostoročasu odchýleny od přímky a pozorovateli (při zatmění Slunce) se tyto hvězdy budou jevit dále od Slunce. Zkusíme tuto úhlovou odchylku spočítat pomocí klasické teorie gravitace. Uvažujme foton jako hmotný bod, pohybující se rychlostí  $c$  a mající hmotnost  $m = E/c^2 = \hbar\omega/c^2$



Slunce na takovýto bod působí gravitační silou

$$\mathbf{F}_G = -G \frac{mM_S}{r^3} \mathbf{r}, \quad (227)$$

$$\text{kde } \mathbf{r} = (x, R) \text{ a } r = \sqrt{x^2 + R^2}.$$

Složka této síly kolmá k ose  $x$  udělují částici impuls (a mění hybnost v tomto směru)



$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt, \quad (228)$$

takže zavedeme-li  $x = ct$ , můžeme pro tuto složku psát

$$\Delta p_{\perp} = GmM_S R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(c^2 t^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{2GmM_S R}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + R^2/c^2)^{3/2}}. \quad (229)$$

Provedeme známou substituci

$$t = \frac{R}{c} \operatorname{tg} z \rightarrow dt = \frac{R}{c \cos^2 z} dz, \quad (230)$$

$$\left| \begin{array}{l} t=0 \rightarrow z=0 \\ t=\infty \rightarrow z=\pi/2 \end{array} \right|,$$

$$\frac{R^2}{c^2} \operatorname{tg}^2 z + \frac{R^2}{c^2} = \frac{R^2}{c^2 \cos^2 z},$$

takže předchozí integrál dostaneme ve tvaru

$$\Delta p_{\perp} = \frac{2GmM_S}{Rc} \int_0^{\pi/2} \cos z dz = \frac{2GmM_S}{Rc}. \quad (231)$$

pro odchylení paprsku pak dostaneme

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta p_{\perp}}{p} = \frac{\Delta p_{\perp}}{mc} = \frac{2GM_S}{Rc^2}. \quad (232)$$

Dosadíme-li sem parametry pro Slunce  $M_S = 2 \times 10^{30}$  kg,  $R = R_S = 7 \times 10^8$  m a ostatní konstanty, vyjde nám odchylení o úhel  $\alpha = 0,874''$ . Při použití přesných, obecně-relativistických úvah bychom dostali výsledek dvakrát větší, tedy

$$\alpha = \frac{4GM_S}{Rc^2} \quad (233)$$

a číselně potom  $\alpha = 1,75''$ . Tato hodnota byla experimentálně ověřena mnoha nezávislými pozorováními.

## 6. Červený posuv fotonu – výpočet ze zákona zachování energie

Foton, který opouští hmotné těleso, se dostává do oblastí s vyšší gravitační potenciální energií (energie gravitačního pole roste k nule). Proto vlastní energie fotonu klesá, foton červená. Uvidíme, že zčervenání je dáno rozdílem gravitačních potenciálů obou míst. Gravitačním potenciálem nazýváme potenciální energii dělenou pohybovou hmotností testovacího tělesa:

$$\begin{aligned}
\text{Gravitace:} \quad W_G &= -G \frac{mM}{r}, & \phi &\equiv \frac{W_G}{m} = -G \frac{M}{r}, \\
\text{Tíže:} \quad W_T &= mgh, & \phi &\equiv \frac{W_T}{m} = gh.
\end{aligned} \tag{234}$$

VypočtĚme změnu frekvence například pro foton stoupající v tíhovém poli:

$$m_1gh_1 + \hbar\omega_1 = m_2gh_2 + \hbar\omega_2. \tag{235}$$

Pohybovou hmotnost fotonu určíme z jeho energie ( $m = E/c^2 = \hbar\omega/c^2$ ):

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar\omega_1}{c^2}gh_1 + \hbar\omega_1 &= \frac{\hbar\omega_2}{c^2}gh_2 + \hbar\omega_2 \Rightarrow \\
\omega_1\left(1 + \frac{gh_1}{c^2}\right) &= \omega_2\left(1 + \frac{gh_2}{c^2}\right) \Rightarrow \\
\omega_2 &= \omega_1 \frac{(1 + gh_1/c^2)}{(1 + gh_2/c^2)} \equiv \omega_1 \left(1 + \frac{gh_1}{c^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{gh_2}{c^2}\right) \equiv \\
&\equiv \omega_1 \left(1 - \frac{g(h_2 - h_1)}{c^2}\right) = \omega_1 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right).
\end{aligned} \tag{236}$$

V odvození jsme použili rozvoj do prvního řádu pro změnu frekvence. Nalezený vztah můžeme po roznásobení pravé strany přepsat pro relativní změnu:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = -\frac{(\phi_2 - \phi_1)}{c^2}, \tag{237}$$

neboli

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\Delta\phi}{c^2}. \tag{238}$$

## 7. Červený posuv fotonu – výpočet z LIS

Chceme-li nalézt změnu frekvence v soustavě S nepohyblivé vzhledem k hmotnému objektu, který foton opouští, musíme nejprve problém vyřešit v soustavě LIS (lokálně inerciálním systému), který volně gravituje (padá) v místě, kde právě foton je. V LIS platí speciální relativita, foton se pohybuje po přímce a frekvenci nemĚní. Vzhledem k S ale LIS za čas  $\Delta t$  zmĚní svou rychlost o  $\Delta v = g\Delta t$ . To se projeví pro pozorovatele v S zmĚnou frekvence v důsledku Dopplerova jevu:

$$\omega_2 = \omega_1 \left(1 - \frac{\Delta v}{c}\right) = \omega_1 \left(1 - \frac{g \Delta t}{c}\right). \tag{239}$$

Celkový časový okamžik, o který nám jde, je doba, po kterou foton letí z polohy  $h_1$  do polohy  $h_2$ , tj.  $\Delta t = (h_2 - h_1)/c$ :

$$\omega_2 = \omega_1 \left( 1 - \frac{g(h_2 - h_1)/c}{c} \right) = \omega_1 (1 - \Delta\phi/c^2). \quad (240)$$

Vztah opět snadno upravíme do podoby pro relativní změnu

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (241)$$

## 8. Červený posuv fotonu – výpočet z metriky

Vyjdeme z Schwarzschildovy metriky v nehybné soustavě S spojené s pozorovatelem či s centrálním objektem. Pohyb fotonu předpokládáme jen v radiální souřadnici:

$$ds^2 = -c^2 \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 \quad (242)$$

Pro zakřivením modifikovaný čas fotonu platí

$$dT^2 = (1 - r_g/r) dt^2. \quad (243)$$

Frekvence fotonu je nepřímo časovému intervalu (např. jednomu kmitu), a proto:

$$\omega \sim \frac{1}{(1 - r_g/r)^{1/2}}. \quad (244)$$

Pro poměr frekvencí v různých místech proto platí

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{(1 - r_g/r_1)^{1/2}}{(1 - r_g/r_2)^{1/2}} \cong \left( 1 - \frac{r_g}{2r_1} \right) \left( 1 + \frac{r_g}{2r_2} \right) \cong \left( 1 - \frac{r_g}{2r_1} + \frac{r_g}{2r_2} \right). \quad (245)$$

Dosadíme-li nyní za Schwarzschildův poloměr a uvážíme definici potenciálu gravitačního pole, máme

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \cong \left( 1 - \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{GM}{c^2 r_2} \right) = \left( 1 + \frac{\phi_1}{c^2} - \frac{\phi_2}{c^2} \right) = (1 - \Delta\phi/c^2). \quad (246)$$

Po vynásobení  $\omega_1$  a úpravě opět máme

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (247)$$

## 9. Poundův-Rebkův experiment

**Zadání:** Určete relativní a absolutní změnu frekvence fotonu v Poundově-Rebkově experimentu. Zdrojem fotonů byl radioaktivní kobalt Co 57 s energií 14,4 keV. Výška věže, ve které se testovala změna frekvence fotonů opouštějících Zemi, byla 22,6 m.

**Řešení:** Relativní změna frekvence je pro červený gravitační posuv dána vztahem:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\Delta\phi}{c^2} = -\frac{g\Delta h}{c^2} = \frac{10 \times 22,6}{9 \times 10^{16}} = 2,5 \times 10^{-15}. \quad (248)$$

Jde o tak minimální změnu, že musela být měřena pomocí Mösbauerova jevu – reakce krystalové mřížky na dopadající foton. Po dlouhou dobu šlo o nejpřesnější lidstvem provedený experiment.

Energie fotonů v SI byla

$$E = 14,4 \text{ keV} = 2,3 \times 10^{-15} \text{ J}. \quad (249)$$

Tomu odpovídá frekvence fotonů

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = 2,2 \times 10^{19} \text{ Hz}. \quad (250)$$

Absolutní změna frekvence je nepatrná:

$$\Delta\omega = \omega \frac{\Delta\phi}{c^2} = \frac{E}{\hbar} \frac{g\Delta h}{c^2} = \frac{14,4 \times 1,6 \times 10^{-16}}{1,05 \times 10^{-34}} \frac{10 \times 22,6}{9 \times 10^{16}} = 54 \text{ kHz}. \quad (251)$$

## 10. Červené posuvy pro typické hvězdy

**Zadání:** Určete gravitační červený posuv pro foton o vlnové délce 500 nm (zelené světlo), který opustí povrch Slunce, bílého trpaslíka a neutronové hvězdy. Předpokládejte, že se foton od objektu vzdálí do nekonečna.

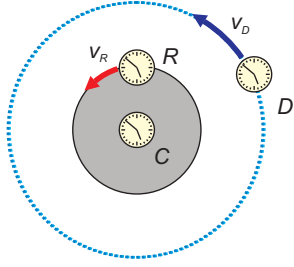
**Řešení:**

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} &= -\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\phi}{c^2} \Rightarrow \\ \lambda &= \lambda_0(1 + \Delta\phi/c^2) = \\ &= \lambda_0 \left[ 1 - G \frac{M}{c^2} \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right) \right] = \\ &= \lambda_0 \left( 1 + \frac{GM}{Rc^2} \right) \end{aligned} \quad (252)$$

Pro jednotlivé hvězdy vychází

	$M$	$R$	$GM/Rc^2$	$\lambda$ (nm)
Slunce	$1 M_S$	700 000 km	$2 \times 10^{-6}$	500,001
bílý trpaslík	$1 M_S$	10 000 km	$1,5 \times 10^{-4}$	500,075
neutronová hvězda	$1 M_S$	20 km	0,074	537

## 11. Hodiny na telekomunikační družici



Uvažujme družici, obíhající Zemi s periodou 12 hodin po kruhové trajektorii. Jak rychle se budou rozcházet hodiny umístěné na družici vzhledem k hodinám umístěným na Zemi na rovníku?

Jelikož se oboje hodiny pohybují, a dokonce každé v jinak silném gravitačním poli Země, bude třeba kromě jevu dilatace času započítat i zakřivení času působené hmotou Země. Vlastní čas  $\tau$  (ať už ten plynoucí na družici či na povrchu Země) můžeme vypočítat pomocí Schwarzschildovy metriky (stejným způsobem, jak se to dělá v STR

s metrikou Minkowského)

$$-c^2 d\tau^2 = ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + r^2 d\theta^2, \quad (253)$$

kde  $r_g = 2GM/c^2$  je Schwarzschildův poloměr a  $t$  je čas měřený stacionárními hodinami umístěnými mimo gravitační pole. Tyto (virtuální) stacionární hodiny mohou být umístěny například ve středu Země. Vytkneme-li z celé pravé strany rovnice (253) diferenciál času, můžeme psát

$$d\tau^2 = \left[ 1 - \frac{r_g}{r} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\dot{r}^2}{1 - r_g/r} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \right] dt^2, \quad (254)$$

kde tečkou jsme označili derivaci příslušné veličiny podle času  $t$ . Zorientujeme-li sférický souřadný systém tak, že úhel  $\theta = \pi/2$  – zeměpisná šířka, tak za předpokladu, že družice i hodiny se „pohybují nad rovníkem“ po kruhových trajektoriích, bude platit, že  $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ , takže rovnice (254) se (po odmocnění) zjednoduší do tvaru

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{v^2}{c^2}} dt = k dt, \quad (255)$$

kde  $v = r\dot{\phi}$  je obvodová rychlost. Vzhledem ke konstantnosti koeficientu  $k$  můžeme diferenciály v předchozím vztahu nahradit konečnými diferencemi, takže čas, o který se během časového intervalu  $\Delta t$  vůči sobě rozejdou hodiny na družici a na rovníku, můžeme spočítat jako

$$\Delta\tau_{DR} = \Delta\tau_D - \Delta\tau_R = (k_D - k_R) \Delta t. \quad (256)$$

Vyjádríme-li

$$k_X = \sqrt{1 - k_{XO} - k_{XS}}, \quad (257)$$

kde  $X = D, R$  (družice, rovník), potom  $k_{XO} = r_g/r_X$  představuje „obecně-relativistickou“ korekci na zakřivení času v gravitačním poli Země a  $k_{XS} = v_X^2/c^2$  představuje korekční člen vyjadřující „speciálně-relativistický“ jev dilatace času.

Pro obvodovou rychlost hodin na rovníku dostaneme

$$v_R = \frac{2\pi}{T_R} r_R = 463,8 \text{ m/s}, \quad (258)$$

parametry oběžné dráhy pro družici spočteme ze známé periody  $T_D$  a z faktu, že dostředivá síla nutící obíhat družici po kruhové trajektorii je realizována silou gravitační, takže vyřešením soustavy rovnic

$$m_D \frac{v_D^2}{r_D} = G \frac{m_D M_Z}{r_D^2}, \quad v_D = \frac{2\pi}{T_D} r_D \quad (259)$$

pro  $r_D$  a  $v_D$  postupně dostaneme

$$r_D = \sqrt[3]{\frac{GM_Z T_D^2}{4\pi^2}} = 2,661 \times 10^7 \text{ m}, \quad (260)$$

$$v_D = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM_Z}{T_D}} = 3871 \text{ m/s}.$$

Schwarzschildův poloměr pro Zemi je

$$r_g = \frac{2GM_Z}{c^2} = 8,873 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad (261)$$

takže korekční členy pro rovník jsou

$$k_{RO} = \frac{r_g}{r_R} = 1,391 \times 10^{-9}, \quad k_{RS} = \left(\frac{v_R}{c}\right)^2 = 2,394 \times 10^{-12} \quad (262)$$

odkud je vidět, že gravitační člen je zde dominantní. Pro družici dostaneme

$$k_{DO} = \frac{r_g}{r_D} = 3,334 \times 10^{-10}, \quad k_{DS} = \left(\frac{v_D}{c}\right)^2 = 1,667 \times 10^{-10}. \quad (263)$$

Tyto hodnoty bychom mohli přímo dosadit do vzorců (256) a (257), nicméně vzhledem k jejich malým velikostem oproti jedničce by příslušné výpočty na kalkulačce nebyly možné (zkuste si to). Proto provedeme Taylorův rozvoj odmocniny ve vztahu (257)

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2, \quad (264)$$

takže vztah (256) přejde do jednoduchého tvaru

$$\Delta\tau_{DR} = \frac{1}{2}(k_{RO} + k_{RS} - k_{DO} - k_{DS})\Delta t, \quad (265)$$

takže po dosazení dostaneme  $\Delta\tau_{DR} = 4,467 \times 10^{-10} \Delta t$ , což znamená, že každý den se hodiny na družici oproti hodinám na rovníku předběhnou o  $\Delta\tau_{DR} = 38,6 \mu\text{s}$ , což je nezanedbatelná hodnota a je třeba ji korigovat, aby hodiny na družici i na Zemi byly synchronní. Pokud tuto hodnotu vynásobíme rychlostí světla, rozejde se určení polohy bez korekce za jediný den o cca 10 kilometrů.

## 12. Cesta do centra Galaxie

**Zadání:** O kolik let zestárne posádka mezigalaktické rakety při cestě do centra naší Galaxie (kteréžto od Slunce leží ve vzdálenosti cca 8 kiloparseků)?

**Řešení:** Dá se předpokládat, že cesta nějaký čas potrvá, a proto by posádka rakety měla být vystavena podmínkám podobným těm, které panují na Zemi, takže mimo jiné by její členové měli být vystaveni silovému působení o velikosti  $F_0 = mg$  (tíhová síla). Pohon rakety by tedy měl být vyřešený takovým způsobem (a nebudeme zde řešit, jak se to zařídí), aby ji urychlovala konstantní síla (která bude působit i na posádku) o velikosti právě  $F_0$ . Relativistická pohybová rovnice má tvar

$$F_0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{M_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (266)$$

kde  $M_0$  je klidová hmotnost rakety,  $v$  je její okamžitá rychlost (respektive složka v příslušném směru) a  $c$  je rychlost světla ve vakuu. Její integrací s počáteční podmínkou  $v(0) = 0$  dostaneme

$$F_0 t = \frac{M_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$v = \frac{F_0 t / M_0}{\sqrt{1 + (F_0 t / M_0 c)^2}} = \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt/c)^2}}, \quad (267)$$

kde  $g = F_0 / M_0$  je „tíhové zrychlení“, které pociťuje posádka (nejedná se o zrychlení rakety!). Vzorec (267) je relativistický, takže pro konečnou sílu působící konečnou dobu bude vždy platit, že  $v < c$  a dále

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt/c)^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g}{\sqrt{1/t^2 + (g/c)^2}} = \frac{g}{g/c} = c. \quad (268)$$

Pro zjednodušení dalších výpočtů přejdeme od jednotek SI k těmto jednotkám: sekunda (s)  $\rightarrow$  rok (y), metr (m)  $\rightarrow$  světelný rok (ly), m/s  $\rightarrow$  ly/y. Pro rychlost světla dostaneme (z definice světelného roku)  $c = 3 \times 10^8$  m/s = 1 ly/y, pro tíhové zrychlení  $g$  potom

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \frac{1 / (9,46 \times 10^{15}) \text{ ly}}{1 / (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2 \text{ y}^2} =$$

$$= 1,031 \frac{\text{ly}}{\text{y}^2} \approx 1 \frac{\text{ly}}{\text{y}^2}. \quad (269)$$

Pro rychlost rakety (267) pak můžeme psát

$$v = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad [\text{ly/y}, \text{y}]. \quad (270)$$

Vzdálenost, jakou raketa za čas  $t$  urazí, snadno spočteme z definice rychlosti

$$l = \int_0^t \frac{t' dt'}{\sqrt{1+t'^2}} = \left| \begin{array}{l} 1+t'^2 = y \\ 2t' dt' = dy \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{1+t^2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{1+t^2} - 1. \quad (271)$$

Dobu letu rakety (z hlediska pozemského pozorovatele) bychom našli jako inverzní funkci k právě vypočtenému vztahu ve tvaru

$$t_L = \sqrt{(1+l)^2 - 1}. \quad (272)$$

Vzhledem k tomu, že by bylo nepraktické do centra Galaxie doletět rychlostí blízkou rychlosti světla (posádka by asi nepřežila manévry brzdění), bylo by lepší cestu provést tak, že raketa bude polovinu vzdálenosti silou  $F_0$  urychlována, poté se otočí o  $180^\circ$ , motory zůstanou zapnuté a síla  $F_0$  ji bude brzdít, takže na konci cesty se zastaví a na posádku bude pořád působit zrychlení o velikosti  $g$ . Pro dobu letu tak dostaneme vzorec

$$t_L = 2\sqrt{(1+l/2)^2 - 1}. \quad (273)$$

Dobu letu  $t_L$  vyměřuje čas plynoucí v „inerciální“ vztažné soustavě na Zemi, vůči které se raketa pohybuje velkou rychlostí, posádka v raketě vnímá svůj *vlastní čas*, který plyne pomaleji. Pro diferenciál vlastního času  $\tau$  platí známý vztah

$$d\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2} dt, \quad (274)$$

jehož integrací dostaneme pro danou funkční závislost  $v(t)$  dobu, o kterou zestárne posádka v raketě. Při použití nových jednotek tak dostaneme

$$\tau_L = 2 \int_0^{t_L/2} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt = 2 \int_0^{t_L/2} \sqrt{1 - \frac{t^2}{1+t^2}} dt' =$$

$$= 2 \int_0^{t_L/2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 2 \operatorname{arg} \sinh\left(\frac{t_L}{2}\right). \quad (275)$$

**Závěr:** Centrum Galaxie leží ve vzdálenosti  $l = 8 \text{ kpc} = 26\,160 \text{ ly}$ . Doba letu (měřeno ze Země) se spočte z této vzdálenosti dosazením do vzorce (273) jako  $t_L = 26\,162 \text{ y}$ . Dobu, o kterou zestárne posádka v raketě, vypočteme ze vztahu (275) jako  $\tau_L = 20,3 \text{ y}$ . Pokud posádka rakety v okamžiku dosažení centra Galaxie pošle světelným paprskem zprávu na Zemi, (z hlediska posádky to je 20,3 let po startu), řídicí středisko tuto zprávu zaznamená v době 52 322 let po startu rakety. Podobně bychom dostali, že cesta do galaxie v Andromedě (M 31,  $l = 2,9 \text{ Mly}$ ) by trvala  $t_L = 2,9$  miliónů let, ale posádka by přitom zestárla pouze o  $\tau_L = 29,8$  let. Řídicí středisko si na zprávu o šťastném doletu počká 5,8 miliónů let.



### 13. Efektivní potenciál částice v okolí černé díry

Výpočet budeme provádět v rovině  $\theta = \pi/2$ , interval a Lagrangeova funkce budou mít tvary

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\varphi^2, \quad (276)$$

$$L = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (277)$$

Z tvaru Lagrangeovy funkce je patrné, že se budou zachovávat dvě zobecněné hybnosti ( $t$ ,  $\varphi$  jsou cyklické proměnné, v  $L$  se nevyskytují), křivka je parametrizována vlastním časem  $\tau$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \text{const}; \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t} = k; \quad (278)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}; \quad \Rightarrow \quad r^2 \dot{\varphi} = b. \quad (279)$$

Rovnice pohybu částice  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$  bude po parametrizaci vlastním časem (tečka je derivace podle  $\tau$ )

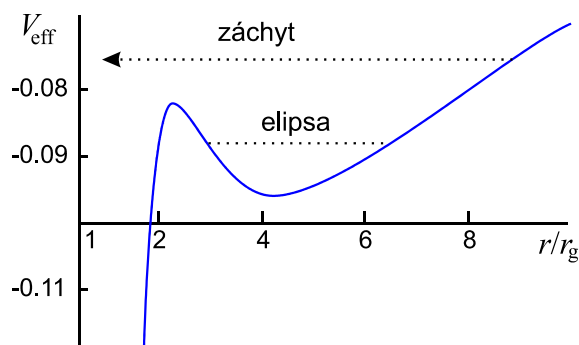
$$-c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2 = -c^2. \quad (280)$$

Po dosazení za  $\dot{t}$  z (278) a za  $\dot{\varphi}$  z (279) dostaneme:

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = c^2(k^2 - 1); \quad (281)$$

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{b^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}{r^2} - c^2 \frac{r_g}{r}. \quad (282)$$

Je zjevné, že vztah (281) je jakousi obdobou zákona zachování energie a že pohyb se může konat jen tam, kde  $c^2(k^2 - 1) \geq V_{\text{eff}}$ .



Pro střední hodnoty momentu hybnosti  $b$  má efektivní potenciál dva extrémy. První z nich je maximum a znamená nestabilní orbitu na vnitřní straně akrečního disku. Druhý extrém je stabilní kruhová orbita v blízkosti černé díry. Z průběhu potenciálu je patrné, že zde existují i eliptické orbity. Pro malé hodnoty momentu hybnosti tomu tak ale není. Najděme nyní oba extrémy z podmínky

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{b^2 (1 - r_g/r)}{r^2} - c^2 \frac{r_g}{r} \right] = 0 \Rightarrow \quad (283)$$

$$c^2 r_g r^2 - 2b^2 r + 3b^2 r_g = 0$$

Odsud snadno nalezneme oba extrémy:

$$r_{1,2} = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - 3c^2 b^2 r_g^2}}{c^2 r_g} \quad (284)$$

Menší z obou kořenů je nestabilní maximum (viz obrázek). Větší z obou kořenů je stabilní kruhová orbita, která existuje za podmínky

$$b^2 \geq 3c^2 r_g^2 \quad (285)$$

Pro mezní hodnotu momentu hybnosti má poslední stabilní kruhová orbita poloměr

$$r_2 = \frac{b^2}{c^2 r_g} = \frac{3c^2 r_g^2}{c^2 r_g} = 3r_g \quad (286)$$

Poslední stabilní kruhová orbita tedy existuje na třech Schwarzschildových poloměrech.

## 14. Beckensteinova teplota černé díry

**Zadání:** Odvoďte teplotu černé díry (Beckensteinův postup)

**Řešení:** Představme si, že do černé díry je spuštěna krabice se zářením. V blízkosti horizontu černé díry je záření „vysypáno“ do černé díry a prázdná krabice je vytažena zpět. Poté ji opět naplníme zářením. Celý tento cyklus lze chápat jako tepelný stroj. Koncový stav myšlenkového experimentu je stejný jako výchozí. Při spouštění je krabice těžší než při vytažování a tepelný stroj tak koná práci. „Plnění“ krabice zářením představuje ohříváč tepelného stroje o teplotě záření  $T$ . Sama černá díra funguje jako chladič o teplotě  $T_0$ . Maximální účinnost zařízení je dána Carnotovým vztahem

$$\eta = 1 - T_0/T \quad (287)$$

Maximální účinnost nalezneme i z fyzikální podstaty myšlenkového experimentu. Zařízení by dosahovalo ideální účinnosti (1), kdyby všechny fotony byly vysypány na Schwarzschildově poloměru. To by ale znamenalo krabici nulové výšky, do které by se nevešel foton. Skutečná maximální účinnost ( $<1$ ) je proto realizována pro krabici o výšce rovné vlnové délce („foton se právě vejde do krabice“) a je rovna

$$\eta \cong 1 - \lambda/r_g \quad (288)$$

Účinnost se zhoršuje s rostoucí vlnovou délkou (velikostí krabice) a je nulová, je-li krabice veliká jako Schwarzschildův poloměr. Porovnáním obou vztahů zjistíme teplotu chladiče (černé díry):

$$T_0 = \frac{\lambda T}{r_g}. \quad (289)$$

Teplotu záření  $T$  určíme z ekvipartičního teorému

$$\hbar\omega = kT \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = kT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi\hbar c}{k\lambda}. \quad (290)$$

Po dosazení do předchozího vztahu získáme teplotu černé díry

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar c/k}{r_g}. \quad (291)$$

#### Poznámky:

- V černé díře může mizet látka přinášející entropii z okolí. Přiřazení teploty černé díře umožňuje přiřadit černé díře také entropii a udržet v platnosti druhou větu termodynamickou: Entropie uzavřeného systému se nemění nebo roste. Rolí entropie zde přebírá plocha horizontu.
- S. Hawking ukázal, že díky kvantovým procesům v blízkosti horizontu černá díra září jako absolutně černé těleso s Beckensteinovou teplotou.
- Maximum vyzařování černé díry je řádově na Schwarzschildově poloměru.
- Pro černou díru, která by vznikla z hvězdy o hmotnosti našeho Slunce vychází teplota černé díry  $10^{-7}$  K, tedy vypařování černé díry této velikosti je zanedbatelné. Teploty různých černých děr naleznete v tabulce v následujícím příkladu.

## 15. Vypařování černé díry

**Zadání:** Nalezněte průběh poloměru, hmotnosti, teploty a intenzity vypařující se černé díry.

**Řešení:** Vyjdeme ze základních vztahů

$$\begin{aligned} (1) \quad dE &= dM c^2, \\ (2) \quad r_g &= 2GM/c^2, \\ (3) \quad I &= \sigma T^4, \\ (4) \quad r_g &\cong \lambda_{\max} = b/T. \end{aligned} \quad (292)$$

První vztah je Einsteinův vztah pro energii, ukazuje, jak se mění hmota černé díry s vyzařovanou energií. Druhý vztah je vztah pro Schwarzschildův poloměr. Září-li černá díra jako absolutně černé těleso, platí pro ni Stefan Boltzmannův vztah (3) a Wienův zákon (4). Maximum vyzařování je řádově na Schwarzschildově poloměru. Nyní nalezneme vztah pro časovou změnu hmotnosti černé díry:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &\stackrel{(1)}{=} -\frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{c^2} P = -\frac{1}{c^2} I S \stackrel{(3)}{=} \\ &= -\frac{1}{c^2} \sigma T^4 4\pi r_g^2 \stackrel{(4)}{=} -\frac{1}{c^2} \sigma \frac{b^4}{r_g^4} 4\pi r_g^2 \Rightarrow \end{aligned} \quad (293)$$

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{4\pi\sigma b^4}{c^2} \frac{1}{r_g^2} \stackrel{(2)}{=} -\frac{\pi\sigma b^4 c^2}{G^2} \frac{1}{M^2}. \quad (294)$$

Získali jsme tak diferenciální rovnici pro hmotnost černé díry

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\alpha}{M^2}; \quad \alpha \equiv \frac{\pi\sigma b^4 c^2}{G^2}. \quad (295)$$

Rovnici snadno řešíme separací

$$\int_{M_0}^M M^2 dM = -\int_{t_0}^t \alpha dt. \quad (296)$$

Po integraci nalezneme výsledek

$$M(t) = \sqrt[3]{M_0^3 - 3\alpha(t-t_0)}; \quad \alpha \equiv \frac{\pi\sigma b^4 c^2}{G^2}. \quad (297)$$

Hmotnost díky vypařování postupně klesá z počáteční hmotnosti  $M_0$  až na nulu. Dobu odpaření určíme z podmínky na nulovou hmotnost:

$$\Delta t = M_0^3 / 3\alpha. \quad (298)$$

Pro různé počáteční hmotnosti vycházejí doby vypaření černé díry (uvedena je i Beckenstein-Hawkingova teplota, Schwarzschildův poloměr a hustota):

Těleso	$M$	$R_g$	$\rho$	$T$	$\Delta t$
Proton	$1.7 \times 10^{-27}$ kg	$10^{-54}$ m	$10^{130}$ g cm <sup>-3</sup>	$10^{51}$ K	$10^{-102}$ s
Pl. hmotnost	$5 \times 10^{-8}$ kg	$10^{-35}$ m	$10^{91}$ g cm <sup>-3</sup>	$10^{31}$ K	$10^{-43}$ s
Kámen	1 kg	$10^{-27}$ m	$10^{76}$ g cm <sup>-3</sup>	$10^{24}$ K	$10^{-21}$ s
Země	$6 \times 10^{24}$ kg	9 mm	$10^{27}$ g cm <sup>-3</sup>	1 K	$10^{46}$ let
Slunce	$2 \times 10^{30}$ kg	3 km	$10^{16}$ g cm <sup>-3</sup>	$10^{-7}$ K	$10^{62}$ let
Jádro galaxie	$10^8 M_S$	2 au	$1.82$ g cm <sup>-3</sup>	$10^{-14}$ K	$10^{86}$ let
Galaxie	$10^{11} M_S$	30 ly	$10^{-6}$ g cm <sup>-3</sup>	$10^{-17}$ K	$10^{95}$ let

Ze vztahů (2), (4) a (3) určíme, jak se mění Schwarzschildův poloměr, teplota a intenzita. Zřejmě

$$r_g \sim M, \quad T \sim M^{-1}, \quad P \sim M^{-2}, \quad I \sim M^{-4}. \quad (299)$$

Schwarzschildův poloměr a hmotnost vypařující se černé díry klesají k nule. Teplota, intenzita a výkon v závěrečných fázích mají charakter exploze.

## 16. Zakřivení prostoru v okolí černé díry

Prostorčas v okolí nerotujících, kulově symetrických objektů popisuje Schwarzschildova metrika. Její prostorová část má tvar

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (300)$$

a říká nám, že když infinitezimálně měníme souřadnici  $r$ ,  $\theta$  a  $\varphi$ , posuneme se v prostoru o vzdálenost  $dl$ . Ve Schwarzschildově metrice je  $\theta$  polární úhel (stejně jako ve sférických souřadnicích),  $\varphi$  je azimut (stejně jako ve sférických souřadnicích), ale  $r$  není radiální vzdálenost jako ve sférických souřadnicích, jedná se o takzvaný redukovaný obvod, který je definovaný následujícím způsobem: kolem hmotného objektu nakreslíme kružnici (kterou může opsat satelit na kruhové oběžné dráze). Změříme její obvod  $o$ , a nadefinujeme redukovaný obvod jako

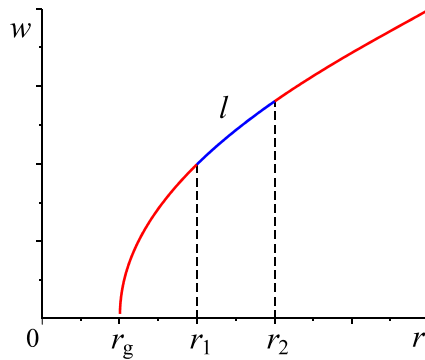
$$r \equiv \frac{o}{2\pi}. \quad (301)$$

Redukovaný obvod této kružnice je v eukleidovském prostoru roven jejímu poloměru, ale ne v prostoru zakřiveném přítomností hmoty. Pro výpočet radiální vzdálenosti mezi dvěma body tedy potřebujeme znát obvody kružnic, na kterých leží, potom spočítat  $r_1 = o_1/2\pi$ ,  $r_2 = o_2/2\pi$ , a protože pro posunutí radiálním směrem zřejmě platí  $d\varphi = d\theta = 0$ , z metriky dostaneme

$$l = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - r_g/r}}. \quad (302)$$

Tato vzdálenost je větší než rozdíl redukovaných obvodů, protože prostor je působením hmoty zakřivený. To si lze názorně představit zavedením další pomocné prostorové osy  $w$ , která je kolmá na osu  $r$ , a při změně souřadnice  $r$  se mění i souřadnice  $w = w(r)$ , jinými slovy, radiální pohyb lze popsat jako křivočarý pohyb po křivce  $w(r)$  v rovině  $w$ - $r$ . Je tedy třeba určit funkční závislost  $w(r)$ . Vyjdeme ze vzorce pro délku křivky definovanou funkčním předpisem  $w(r)$ . Příslušný (křivkový) integrál má tvar

$$l = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + \dot{w}^2(r)} dr. \quad (303)$$



Oba integrály (302), (303) musí ve stejných mezích dávat stejný výsledek. To bude platit tehdy, jestliže bude

$$\frac{1}{\sqrt{1-r_g/r}} = \sqrt{1+\dot{w}^2(r)} \quad \Rightarrow \quad \dot{w} = \frac{dw}{dr} = \sqrt{\frac{r_g}{r-r_g}}. \quad (304)$$

Provedeme separaci proměnných

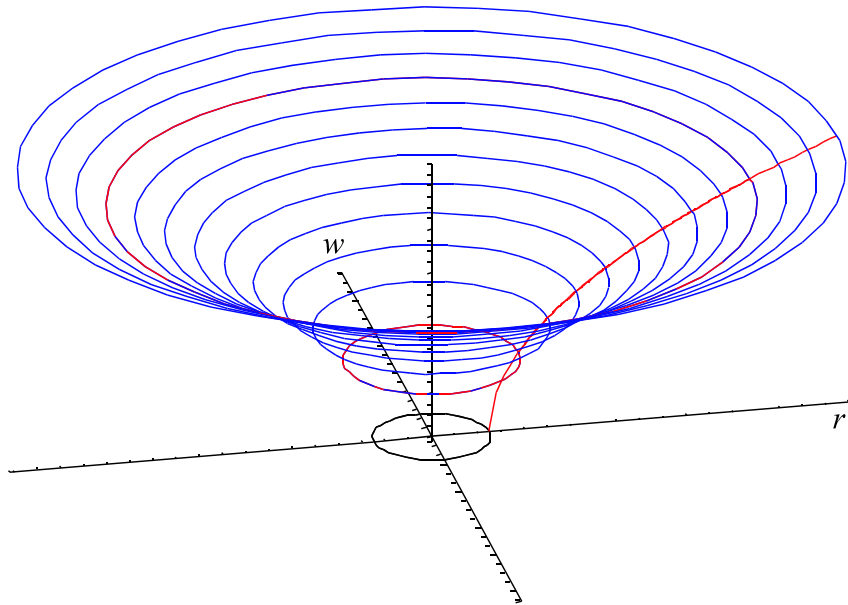
$$dw = \sqrt{\frac{r_g}{r-r_g}} dr \quad \Rightarrow \quad \int_0^w dw' = \sqrt{r_g} \int_{r_g}^r \frac{dr'}{\sqrt{r'-r_g}} \quad \Rightarrow \quad (305)$$

$$\Rightarrow \quad w = 2\sqrt{r_g} \sqrt{r-r_g}.$$

Dolní mez u levého integrálu jsme zvolili libovolně (vyjadřuje pouze posunutí grafu funkce v prostoru, které nemá na délku křivky vliv), napravo lze integrovat pouze pro  $r \geq r_g$ . Rovinnou plochu, kterou dostaneme například tak, že nastavíme  $\theta = \pi/2$  pro kterou má prostorová část Schwarzschildovy metriky tvar

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-r_g/r} + r^2 d\varphi^2,$$

si můžeme představit jako zakřivenou do tvaru trychtýře na obrázku.



## VIII. ROZPÍNÁNÍ VESMÍRU

### Metriky:

kartézský systém:	$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
polární systém:	$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$
sférický systém:	$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2,$ $dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2,$
Minkowského geometrie (STR):	$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$ $ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2,$
Schwarzschildova geometrie:	$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\Omega^2,$ kde $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ je Schwarzschildův poloměr.
Fridmanova (FLWR) geometrie	$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right],$ kde $a(t)$ je expanzní funkce, $k$ je Gaussova skalární křivost vesmíru.

### Další vztahy:

Einsteinova-Fridmanova rovnice	$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho_{\text{záření}} + \frac{8}{3} \pi G \rho_{\text{látky}} - \frac{c^2 k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3},$
rovnice adiabatické izolace vesmíru	$p dV + dU = 0,$ $p \frac{da^3}{dt} + \frac{d}{dt} (a^3 \rho_E) = 0,$
stavová rovnice	$p = p(\rho_E),$
stavová rovnice pro fotonový plyn	$p = \rho_E / 3,$
vztah mezi hmotou a energií	$E = mc^2,$ $\rho_E = \rho_m c^2.$

## 1. Objem koule

**Zadání:** Určete objem koule v 3D.

**Řešení:** Pro sférickou metriku platí:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 \quad (306)$$

takže metrický tenzor je

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (307)$$

pro objem koule máme

$$V = \int d\mu = \int \sqrt{\det(g_{ij})} dr d\varphi d\theta = \int r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \quad (308)$$

Po dosazení mezí dostaneme

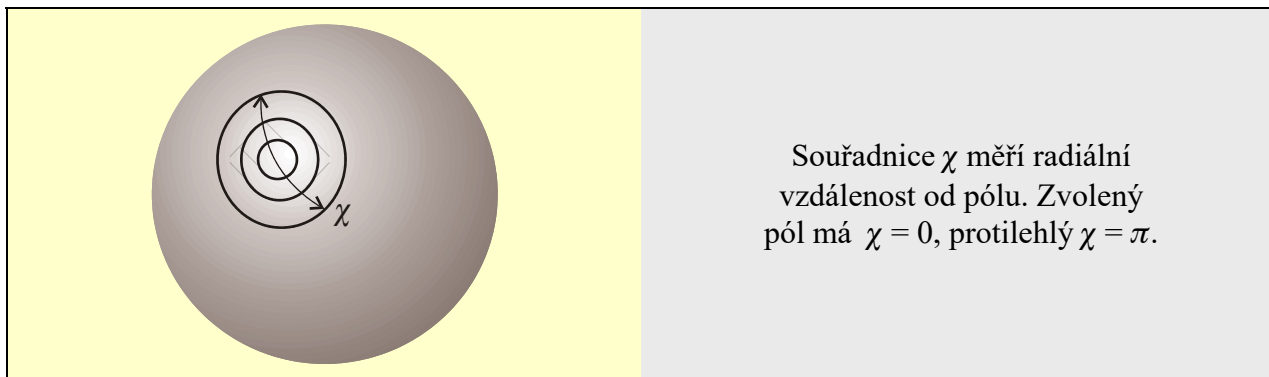
$$V = \left( \int_0^R dr \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left( \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad (309)$$

což je známý vztah pro určení objemu koule.

**Poznámka:** Infinitesimální míru množiny vždy můžeme určit jako odmocninu z determinantu metriky vynásobenou diferenciály všech proměnných.

## 2. Objem vesmíru

**Zadání:** Určete objem 3D zakřiveného vesmíru pomocí Fridmanovy metriky.



**Řešení:** Pro tento problém použijeme Fridmanovu metriku pro homogenní, isotropní vesmír

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (310)$$

Pro kladné zakřivení vesmíru ( $k > 0$ ) můžeme  $k$  psát jako  $k = 1/R^2$  a využít substituci



$$\begin{aligned} r &= R \sin \chi; \\ \chi &\in (0, \pi). \end{aligned} \quad (311)$$

Prostorová část metriky získá tvar:

$$\begin{aligned} dl^2 &= a^2 R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) = \\ &= a^2 R^2 d\chi^2 + a^2 R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2 + a^2 R^2 \sin^2 \chi d\theta^2. \end{aligned} \quad (312)$$

Prostorová část metrického tenzoru proto je

$$\begin{pmatrix} a^2 R^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & a^2 R^2 \sin^2 \chi \end{pmatrix} \quad (313)$$

Výsledný objem pak dostaneme po výpočtu determinantu podobně jako v předchozím příkladě, tj.

$$\begin{aligned} V &= a^3 R^3 \left( \int_0^\pi \sin^2 \chi d\chi \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left( \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) = \\ &= a^3 R^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\pi^2 a^3 R^3 \end{aligned} \quad (314)$$

Vesmír s kladnou křivostí má tedy konečný objem, je uzavřený sám do sebe, a byť nemá žádnou hranici, je ve smyslu objemu konečný.

Jinak je tomu v případě vesmíru se zápornou křivostí. ( $k < 0$ ;  $R^2 = 1/|k|$ ). Metrika má tvar

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1+(r/R)^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (315)$$

Tentokrát lze výhodně použít substituci

$$\begin{aligned} r &= R \operatorname{sh} \chi; \\ \chi &\in (0, \infty) \end{aligned} \quad (316)$$

při níž nabývá metrika tvaru

$$dl^2 = a^2 R^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\Omega^2). \quad (317)$$

Podobným postupem jako u modelu s kladnou křivostí nyní pro objem dostáváme  $V \rightarrow \infty$ . Tento model vesmíru má nekonečný objem.

**Poznámka:** Ve Fridmanově geometrii vedou prostory s kladnou křivostí na konečný objem vesmíru, modely se zápornou a nulovou křivostí na nekonečný objem. To ale platí jen pro vesmíry jednoduše souvislé („bez děr“). Vesmír, kterému by ve dvou dimenzích odpovídal například toroid nebo dvojtoroid již není jednoduše souvislý. Upustíme-li od požadavku na jednoduchou souvislost, může existovat vesmír s konstantní zápornou křivostí a přesto konečným objemem.

### 3. Metrika na povrchu čtyřrozměrné koule

**Zadání:** nalezněte metriku na povrchu čtyřrozměrné koule.

**Řešení:** Víme-li, že rovnice popisující povrch koule o poloměru  $R$  umístěné ve středu kartézských souřadnic je  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , můžeme obdobný vztah pro kouli čtyřrozměrnou napsat ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2, \quad (318)$$

kde  $w$  je čtvrtá prostorová souřadnice a platí, že  $x \perp y \perp z \perp w$ . Pro element délky v těchto souřadnicích bude platit (Pythagorova věta)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2. \quad (319)$$

Proměnnou  $w$  z předchozího vzorce můžeme vyloučit, neboť pro popis trojrozměrné „plochy“ nám stačí tři souřadnice. Spočítáme totální diferenciál rovnice (318)

$$2x dx + 2y dy + 2z dz + 2w dw = 0 \Rightarrow dw = -\frac{x dx + y dy + z dz}{w} \quad (320)$$

a výsledek dosadíme do vztahu (319), přičemž  $w$  si vyjádříme z rovnosti (318). Dostaneme tak

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(x dx + y dy + z dz)^2}{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad (321)$$

Takto získanou metriku přepíšeme pomocí sférických souřadnic  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$  pomocí definičních vztahů

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (322)$$

Příslušné diferenciály pak mají tvar

$$\begin{aligned} dx &= dr \cos \varphi \sin \theta - r \sin \varphi d\varphi \sin \theta + r \cos \varphi \cos \theta d\theta, \\ dy &= dr \sin \varphi \sin \theta + r \cos \varphi d\varphi \sin \theta + r \sin \varphi \cos \theta d\theta, \\ dz &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\vartheta. \end{aligned} \quad (323)$$

Dosazením těchto vztahů do jednotlivých členů vzorce (321) postupně dostaneme (zkuste si to spočítat)

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \\ xdx + ydy + zdz &= r dr, \\ R^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= R^2 - r^2, \end{aligned} \quad (324)$$

takže metrika (321) třírozměrného povrchu čtyřrozměrné koule vyjádřená pomocí sférických souřadnic má tvar

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} = \\ &= \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned} \quad (325)$$

a pokud zavedeme novou veličinu  $k = 1/R^2$ , dostaneme metriku (325) ve tvaru

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (326)$$

který by nám měl být důvěrně známý (jedná se o prostorovou část Fridmanovy metriky homogenního izotropního vesmíru – ta je ještě vynásobena expanzní funkcí vyjadřující dynamiku vesmíru).

#### 4. Kosmologický posuv

**Zadání:** Odvoďte vztah pro kosmologický červený posuv.

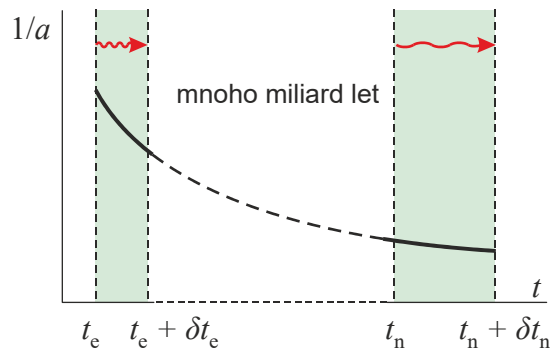
**Řešení:** Budeme uvažovat dlouhodobé šíření světelného pulzu ve vesmíru a jeho změny vlivem Fridmanovy metriky

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (327)$$

Pro světlo je  $ds^2 = 0$ , souřadnicový systém zvolíme tak, aby vymizely úhlové závislosti, a proto

$$\frac{c dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (328)$$

Impulz se začal šířit v místě  $r_e$ , v čase  $t_e$  a trval dobu  $\delta t_e$ . K pozorovateli dolétl po mnoha miliardách let do místa  $r_n$ , v čase  $t_n$  a trvá  $\delta t_n$ .



Pro šíření počátku impulzu platí

$$\int_{t_e}^{t_n} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{r_e}^{r_n} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (329)$$

a pro šíření „posledního“ fotonu impulzu platí

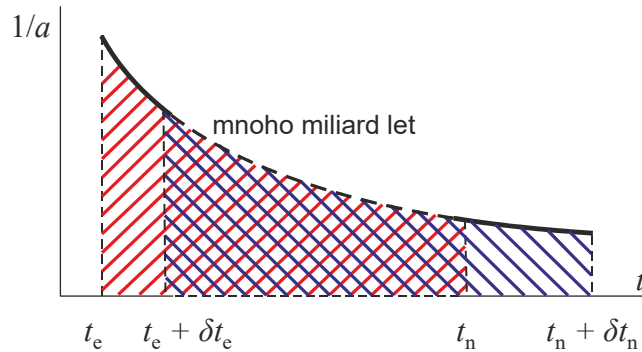
$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_n + \delta t_n} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{r_e}^{r_n} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (330)$$

Nás zajímá délka impulzu a její změny, tedy rozdíl dvou posledních vztahů:

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_n + \delta t_n} \frac{c dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_n} \frac{c dt}{a(t)} = 0. \quad (331)$$

Oba integrály probíhají přes obrovský časový úsek, v průběhu kterého se expanzní funkce změnila mnohonásobně. Uvědomíme-li si ale, že integrál má význam plochy pod křivkou  $1/a$ , odečte se při integraci společná plocha obou integrálů a zbude

$$\int_{t_n}^{t_n + \delta t_n} \frac{c dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{c dt}{a(t)} = 0 \quad (332)$$



Tyto integrály jsou již jen přes dobu trvání impulsu, nikoli přes celou dobu šíření. Protože je doba impulsu nesrovnatelně menší než doba trvání vesmíru, je možno považovat expanzní funkci  $a(t)$  v době vyslání impulsu za konstantní a v době přijetí také:

$$\int_{t_n}^{t_n + \delta t_n} \frac{c dt}{a_n} - \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{c dt}{a_e} = 0. \quad (333)$$

Nyní jde o integrály z konstanty a řešení je jednoduché:

$$\begin{aligned} \frac{c \delta t_n}{a_n} - \frac{c \delta t_e}{a_e} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{c \delta t_e}{a_e} &= \frac{c \delta t_n}{a_n} \Rightarrow \\ \frac{\lambda_e}{a_e} &= \frac{\lambda_n}{a_n} \end{aligned} \quad (334)$$

Vyslaný impuls se tedy natahuje tak, jak se mění expanzní funkce. Stručně lze říci, že při putování vesmírem se vlnová délka záření natahuje přesně tak, jak se „nafukuje“ vesmír.

Jako míra změny vlnové délky se zavádí červený posuv

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a - a_e}{a_e} \quad (335)$$

Největší měřené červené posuvy mají hodnotu kolem 10.

## 5. Kvazar

**Zadání:** Kvazar má kosmologický posuv  $z = 2,5$ . Určete pozorovanou vlnovou délku čáry  $\lambda = 680$  nm. Jaké byly rozměry vesmíru v době, kdy kvazar vyslal záření?

**Řešení:** Pro oba výpočty použijeme vztah pro kosmologický červený posuv:

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e} \Rightarrow \lambda = (z+1) \lambda_e = 3,5 \lambda_e = 2300 \text{ nm}, \quad (336)$$

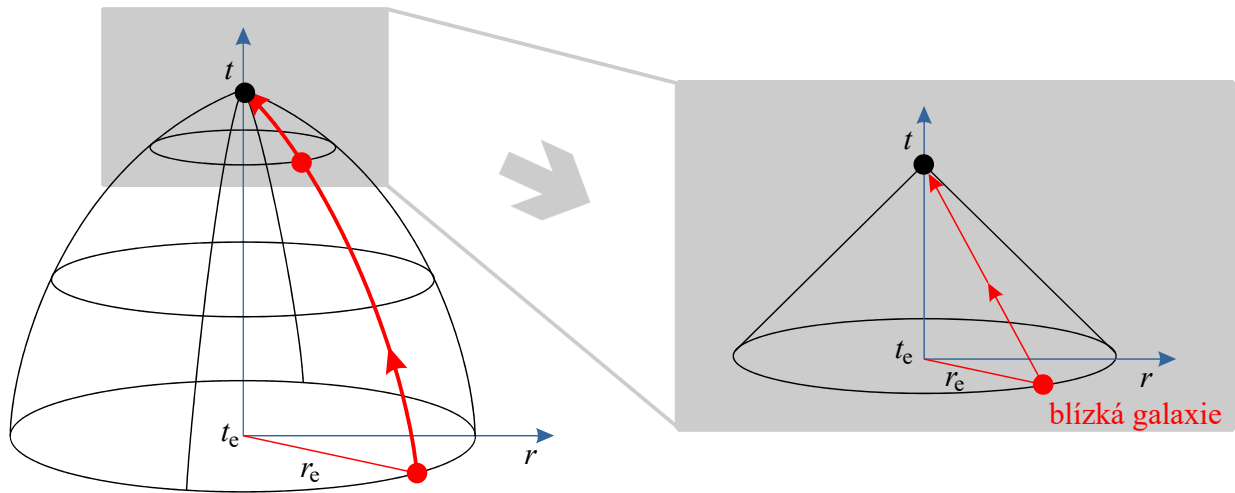
$$z \equiv \frac{a - a_e}{a_e} \Rightarrow a_e = \frac{a}{z+1} = 0,29 a = 29 \% a. \quad (337)$$

Pozorovaná vlnová délka bude mimořádně natažená, až na 2 300 nm a vesmír měl v době vyslání světla kvazarem 29 % dnešních rozměrů.

## 6. Linearizace kosmologického posuvu

**Zadání:** Nalezněte vztah pro kosmologický červený posuv za předpokladu, že signál nebyl vyslán příliš dávno. Ukažte, že v takovém případě platí lineární Hubblův vztah a kosmologický posuv lze interpretovat jako Dopplerův jev.

**Řešení:** Kužel minulosti je v FRW metrice zakřivený, pokud ale nebyl signál vyslán příliš dávno, lze ho v prvním přiblížení, jak uvidíme, považovat za eukleidovský kužel:



Pokud bychom interpretovali červený posuv galaxií jako Dopplerův jev, měl by platit vztah (index e označuje emisi signálu):

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{v}{c} = \frac{Hl}{c}. \quad (338)$$

Ve skutečnosti je kužel minulosti zakřivený a platí jiný vztah:

$$z \equiv \frac{a - a_e}{a_e}. \quad (339)$$

Představme si nyní, že signál byl vyslán relativně blízkou galaxií v nepříliš vzdálené minulosti. Potom můžeme provést rozvoj

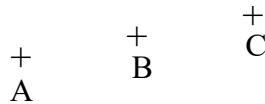
$$z = \frac{a - a_e}{a_e} \approx \frac{\frac{da}{dt} (t - t_e)}{a_e} \sim \frac{\dot{a}}{a_e} dt = H dT = \frac{H dl}{c}, \quad (340)$$

kde jsme označili  $dt$  dobu šíření pulzu. Je tedy zřejmé, že pro pulzy z ne příliš velké minulosti (je možné udělat lineární rozvoj expanzní funkce) platí Hubbleův vztah, kosmologický posuv lze interpretovat jako Dopplerův jev a kužel minulosti jako eukleidovský.

## 7. Hubbleův zákon a kosmologický princip

**Zadání:** Dokažte, že je-li vesmír homogenní a expanze probíhá ve všech jeho místech stejně, musí platit mezi rychlostí expanze a vzdáleností objektů lineární závislost (tzv. Lemaitrův-Hubbleův zákon).

**Řešení:** Předpokládejme, že body A, B a C jsou na přímce a platí  $AB = BC$ .



Z homogenity vesmíru na velkých měřítcích plyne vztah  $v_{BA} = v_{CB}$ . Pro rychlost  $v_{CA}$  platí:

$$v_{CA} = v_C - v_A = v_C - v_B + v_B - v_A = v_{CB} + v_{BA} = 2 v_{BA}. \quad (341)$$

Odsud okamžitě plyne lineární vztah

$$v = Hd. \quad (342)$$

## 8. Pokles hustoty energie záření s expanzí

**Zadání:** Ukažte, že hustota záření (při expanzi vesmíru) klesá úměrně se čtvrtou mocninou expanzní funkce

**Řešení:** Tlak je úměrný hustotě energie. Například v tíhovém poli je potenciální energie  $mgh$  a její hustota  $\rho gh$  je přímo rovna hydrostatickému tlaku způsobenému tíží. U světelného záření je tlak roven třetině hustoty energie:

$$p = \frac{1}{3} \rho_E \quad (343)$$

Vesmír jako celek můžeme považovat za adiabaticky izolovaný, tj.

$$dQ = 0, \quad (344)$$

$$dU + pdV = 0, \quad (345)$$

$$d\left(\rho_E \frac{4}{3} \pi a^3\right) + \frac{1}{3} \rho_E \frac{4}{3} \pi da^3 = 0, \quad (346)$$

$$a^3 d\rho_E + 3\rho_E a^2 da + \rho_E a^2 da = 0, \quad (347)$$

$$a^3 d\rho_E + 4\rho_E a^2 da = 0, \quad (348)$$

$$\frac{d\rho_E}{\rho_E} + 4 \frac{da}{a} = 0, \quad (349)$$

$$\ln \rho_E a^4 = K, \quad (350)$$

$$\rho_E \sim \frac{1}{a^4}. \quad (351)$$

**Poznámky:**

- To, že hustota energie  $\Delta E/\Delta V$  záření klesá se čtvrtou mocninou rozměrů vesmíru je způsobeno tím, že energie v čitateli klesá díky natahování vlnové délky s expanzí jako  $1/a$  a objem ve jmenovateli roste jako  $a^3$ .
- Podle Stefanova-Boltzmanova zákona je hustota energie také úměrná  $T^4$ . Proto teplota expandujícího vesmíru klesá jako  $1/a$ .

## 9. Základní řešení Einsteinovy-Fridmanovy rovnice

**Zadání:** Nalezněte řešení Einsteinovy-Fridmanovy rovnice s nulovou křivostí (odpovídá našemu vesmíru) a nulovým kosmologickým členem pro hustotu energie a) konstantní, b)  $1/a^3$ ; c)  $1/a^4$ .

**Řešení:** Podle Einsteinovy-Fridmanovy rovnice je

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho. \quad (352)$$

- |                                    |                         |               |                           |
|------------------------------------|-------------------------|---------------|---------------------------|
| a) pro $\rho = \text{const}$ plyne | $\dot{a} \sim a$        | $\Rightarrow$ | $a(t) \sim \exp(\chi t),$ |
| b) pro $\rho \sim 1/R^3$ plyne     | $\dot{a} \sim a^{-1/2}$ | $\Rightarrow$ | $a(t) \sim t^{2/3},$      |
| c) pro $\rho \sim 1/R^4$ plyne     | $\dot{a} \sim a^{-1}$   | $\Rightarrow$ | $a(t) \sim t^{1/2}.$      |

První případ odpovídá vakuové hustotě energie, která je dána hustotou virtuálních párů a nezávisí na momentálním stavu expanze. Stejně se chová člen s kosmologickou konstantou. Vede na exponenciální nárůst expanzní funkce, tzv. inflaci nebo zrychlenou expanzi (De Sitterův vesmír). Druhý případ odpovídá koherentnímu prachu či látce a nastal v pozdějších fázích vesmíru, v tzv. éře látky. Poslední případ odpovídá částicím s nulovou klidovou hmotou (záření). V prvních fázích existence vesmíru dominovalo záření (éra záření), od 400 000 roků látka (éra látky) a od cca 6 miliard let temná energie (éra zrychlené expanze).

## 10. Horizont částic (pozorovatelného vesmíru)

**Zadání:** Určete tzv. *horizont částic*, tj. maximální vzdálenost, ze které k nám dolétly částice za dobu existence vesmíru. Této vzdálenosti se také někdy říká *horizont pozorovatelného vesmíru*, protože do větší vzdálenosti není možné dohlédnout, i když tam také částice jsou. Jejich světlo k nám ale za dosavadní dobu existence vesmíru nestihlo ještě dolétnout.

**Řešení:** Za částice vezmeme fotony (pohybují se nejrychleji). Šíření světla je v souřadnicích unášených expandujícím vesmírem (tzv. *comoving coordinates*) dáno rovnicí

$$-c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1-kr^2} = 0. \quad (353)$$

Separaci získáme v integrální podobě rovnici šíření světla za celou dobu existence vesmíru:

$$\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_{r_0}^{r_i} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (354)$$

Horizont částic je dán vztahem

$$R_H(t) = \int_{r_0}^{r_i} dl = \int_{r_0}^{r_i} \frac{a(t)dr}{\sqrt{1-kr^2}} = a(t) \int_{r_0}^{r_i} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (355)$$

Poslední integrál vyjádříme ze vztahu (354):

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}. \quad (356)$$

Vidíme, že horizont částic přirozeným způsobem závisí na průběhu expanzní funkce. Uveďme výsledek jednoduché integrace pro různé situace:

	$a(t)$	$R_H(t)$
bez expanze	1	$ct$
záření	$At^{1/2}$	$2ct$
látka	$At^{2/3}$	$3ct$
energie vakua, $\Lambda$ člen	$A \exp[\chi t]$	$c \left( \frac{e^{\chi t} - 1}{\chi} \right)$

*Poznámka 1:* V našem vesmíru po většinu jeho existence dominovala látka a tak můžeme odhadnout (při stáří 14 miliard let), že  $R_H = 3 \times 14 \times 10^9 \text{ ly} \approx 42$  miliard ly

*Poznámka 2:* Někdy se zavádí tzv. *horizont událostí*. Jde o maximální hodnotu všech horizontů částic branou i do libovolné budoucnosti, tj.

$$R_u = \max_{t \in (0, \infty)} R_H(t). \quad (357)$$

Zpravidla počítáme limitu  $R_H(t)$  pro  $t \rightarrow \infty$ . Tato limita je nekonečná (maximum a tedy ani horizont událostí neexistují) pro všechny případy s výjimkou  $\Lambda$  členu pro  $\chi < 0$ .

## 11. Expanze při Hubbleově konstantě neměnné v čase

**Zadání:** Jak by vypadala expanze vesmíru, kdyby se Hubbleova konstanta neměnila s časem?

**Řešení:** Nejprve napíšeme definici Hubbleovy konstanty



$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \text{const} \quad (358)$$

a upravíme ji na jednoduchou lineární rovnici,

$$\dot{a} - Ha = 0, \quad (359)$$

jejímž řešením je

$$a(t) = a_0 \exp [H(t - t_0)] \quad (360)$$

Konstantní Hubblova konstanta tedy odpovídá inflačnímu či zrychlenému řešení.

## 12. Hubblova konstanta pro různé entity

**Zadání:** Určete Hubblovu konstantu pro různé druhy expanze

**Řešení:** Z definice  $H \equiv \dot{a}/a$  nalezneme  $H$  pro různé průběhy expanzní funkce:

bez expanze:	$a = 1$	$H = 0$
záření:	$a \sim t^{1/2}$	$H = 1/(2t)$
látka	$a \sim t^{2/3}$	$H = 2/(3t)$
vakuum	$a \sim e^{\chi t}$	$H = \chi$

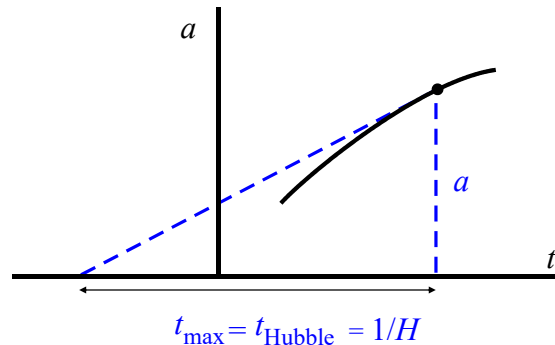
## 13. Maximální stáří vesmíru pro Fridmanovu expanzi

**Zadání:** Odhadněte z hodnoty Hubblovy konstanty maximální stáří vesmíru.

**Řešení:** Při řešení vycházíme z toho, že vesmír se rozpíná a derivace expanzní funkce se s časem zmenšuje. Směrnici tečny můžeme napsat buď jako derivaci expanzní funkce podle času nebo ji vyjádřit z odpovídajícího trojúhelníka:

$$\left. \begin{array}{l} \text{tg } \alpha = \dot{a} \\ \text{tg } \alpha = \frac{a}{t_{\max}} \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{a} = \frac{a}{t_{\max}} \Rightarrow t_{\max} = \frac{a}{\dot{a}} = \frac{1}{H}. \quad (361)$$

Maximální možné stáří vesmíru je tedy dáno hodnotou Hubblovy konstanty. Při dnes udávané hodnotě  $71 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$  vychází asi 14 miliard let.



## 14. Stáří vesmíru tvořeného pouze hmotou

**Zadání:** Určete stáří vesmíru tvořeného pouze hmotou.

**Řešení:** Víme, že pro expanzní funkci plochého vesmíru tvořeného pouze hmotou platí

$$a(t) = Ct^{2/3}, \quad (362)$$

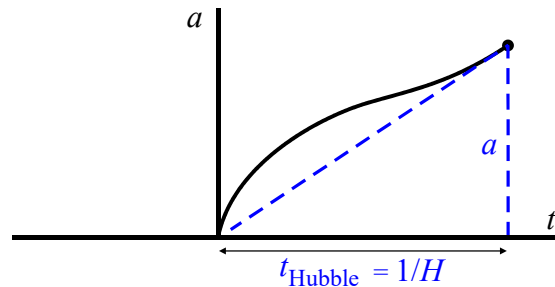
kde  $C$  je nějaká konstanta. Podaří-li se nám změřit Hubbleovu „konstantu“ pro dnešní vesmír a víme-li, že pro ni platí

$$H(t_0) = H_0 = \frac{1}{a(t_0)} \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad (363)$$

dostaneme ihned

$$\frac{da}{dt} = \frac{2C}{3t^{1/3}} \Rightarrow H_0 = \frac{2}{3t_0} \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} = \frac{2}{3} t_{\max}, \quad (364)$$

což znamená, že stáří takového vesmíru je dvoutřetinové oproti maximálnímu stáří vesmíru (Hubbleovu času), které jsme spočítali v minulém příkladu. Vzhledem k tomu, že se dlouhou dobu předpokládalo, že vesmír je tvořen výhradně hmotou, tento vzorec se k odhadování stáří Vesmíru používal. Dnes víme, že jsme ve fázi zrychlené expanze a Hubbleův čas zhruba odpovídá skutečnému stáří vesmíru.



## 15. Poměr energie látky a záření ve vesmíru

**Zadání:** Určete poměr energie látky a záření dnes. Při jaké teplotě vesmíru byla tato energie v minulosti vyrovnána?

**Řešení:** Přibližně je ve vesmíru 1 miliarda fotonů na tři nukleony. Poměr obou energií je:

$$\frac{E_{\text{látky}}}{E_{\text{záření}}} = \frac{3m_0c^2}{10^9\hbar\omega} = \frac{3m_0c^2}{10^9\hbar 2\pi c/\lambda}, \quad (365)$$

Za vlnovou délku dosadíme z Wienova zákona ( $\lambda = b/T$ ):

$$\frac{E_{\text{látky}}}{E_{\text{záření}}} = 3 \times 10^{-9} \frac{bm_0c}{2\pi\hbar T} \quad (366)$$

Dosadíme-li hmotnost nukleonu ( $1.67 \times 10^{-27}$  kg) a dnešní teplotu reliktního záření (2.73 K), vyjde asi  $3 \times 10^3$ . V dnešním vesmíru je tedy zjevná nadvláda látky nad zářením. Obě energie byly vyrovnány při teplotě záření cca  $10^3$  až  $10^4$  K.

## 16. Stavová rovnice expandující entity

**Zadání:** Nalezněte stavovou rovnici entity, která při expanzi mění hustotu energie s expanzní funkcí jako  $C/a^\alpha$ . Objem přitom roste se třetí mocninou expanzní funkce, tj.  $V \sim a^3$ .

**Řešení:**

Pro danou entitu napíšeme první větu termodynamickou v adiabatickém přiblížení (diferenciál tepla je nulový, vesmír nevyměňuje teplo s okolím).

$$\begin{aligned} dU + pdV &= 0 \\ d(\rho_E V) + pdV &= 0 \\ d\left(\frac{C}{a^\alpha} a^3\right) + pda^3 &= 0 \end{aligned} \quad (367)$$

$$(3-\alpha)Aa^{2-\alpha}da + 3pa^2da = 0$$

$$(3-\alpha)\frac{C}{a^\alpha} + 3p = 0,$$

$$p = \left(\frac{\alpha}{3} - 1\right)\frac{C}{a^\alpha}, \quad (368)$$

$$p = w\rho_E; \quad w \equiv \left(\frac{\alpha}{3} - 1\right). \quad (369)$$

Výsledkem je lineární vztah mezi tlakem a hustotou energie s koeficientem  $w$ , který je jedním ze základních kosmologických parametrů. Shrňme veškeré dosavadní výsledky do tabulky:

koeficient $\alpha$ ( $\rho \sim 1/a^\alpha$ )	expanzní funkce	Hubblova konstanta	horizont částic	stavová rovnice	parametr $w$	entita
$\alpha = 4$	$Ct^{1/2}$	$\frac{1}{2t}$	$2ct$	$p = \rho/3$	$+1/3$	záření ( $m_0 = 0$ )
$\alpha = 3$	$Ct^{2/3}$	$\frac{2}{3t}$	$3ct$	$p = 0$	$0$	látka ( $m_0 \neq 0$ )
$\alpha = 2$	$Ct$	$\frac{1}{t}$	$ct \ln(t/t_0)$	$p = -\rho/3$	$-1/3$	křivost ( $k < 0$ )
$\alpha = 0$	$Ce^{\chi t}$	$\chi$	$c\left(\frac{e^{\chi t} - 1}{\chi}\right)$	$p = -\rho$	$-1$	projevy vakua

**Poznámka 1:** Podstatná je hodnota parametru  $w$  pro temnou energii. Aby docházelo k pozorované zrychlené expanzi vesmíru, musí podle rovnic obecné teorie relativity platit, že  $w < -1/3$ . Pro vakuovou energii spojenou s kvantově mechanickými procesy ve vakuu je  $w = -1$  a expanzní funkce roste exponenciálně. Pokud by dokonce bylo  $w < -1$  ( $\alpha < 0$ ), bude expanze natolik překotná, že zasáhne samotnou strukturu látky a rozerve v budoucnu samotná atomová jádra. Této situaci říkáme *big rip* – velké rozervání. Z měření WMAP, CBI, 2dF a SDSS vychází, že parametr  $w$  se pro temnou energii nachází v intervalu hodnot  $< -1; -0,78$ .

**Poznámka 2:** Úlohu lze řešit obráceně, tj. ze znalosti stavové rovnice určovat změnu hustoty energie:

$$dU + pdV = 0 \quad \Rightarrow \quad d(\rho_E a^3) + p da^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (370)$$

$$d\rho_E = -3(\rho_E + p) \frac{da}{a} \quad (371)$$

Pokud nyní známe stavovou rovnici, snadno dopočteme separací průběh hustoty energie s expanzí:

$$\begin{aligned} p = 0 & \quad \Rightarrow \quad \rho_E \sim 1/a^3, \\ p = \rho_E/3 & \quad \Rightarrow \quad \rho_E \sim 1/a^4, \\ p = -\rho_E & \quad \Rightarrow \quad \rho_E \sim \text{const}. \end{aligned} \quad (372)$$

## IX. POHYBY ČÁSTIC V POLÍCH

### 1. Náboj v elektrickém poli

**Zadání:** Řešte relativisticky urychlování náboje z nulové rychlosti ve směru pole.

**Řešení nerelativistické:** Budeme integrovat pohybovou rovnici

$$m\ddot{x} = QE \quad \Rightarrow \quad v \equiv \dot{x} = \frac{QE}{m}t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{QE}{2m}t^2 \quad (373)$$

Nerelativistické řešení má zjevné vady, například  $\lim_{t \rightarrow \infty} v = \infty$ . Náboj je neomezeně urychlován.

**Řešení relativistické:** Budeme integrovat relativistickou pohybovou rovnici

$$\frac{d}{dt}(mv) = QE \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v \right) = QE \quad \Rightarrow \quad \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v = QEt. \quad (374)$$

Vidíme, že po první integraci jsme nedostali rychlost samotnou, ale vztah, ze kterého teprve musíme rychlost vypočítat:

$$\frac{m_0^2 v^2}{1-v^2/c^2} = Q^2 E^2 t^2 \quad \Rightarrow \quad m_0^2 v^2 = Q^2 E^2 t^2 (1-v^2/c^2) \quad \Rightarrow \quad (375)$$

$$v = \frac{QEt}{m_0 \sqrt{1 + \frac{Q^2 E^2 t^2}{m_0^2 c^2}}}. \quad (376)$$

Výraz pro rychlost již není tak jednoduchý, zato ale nediverguje,  $\lim_{t \rightarrow \infty} v = c$ . Chcete-li znát polohu, je třeba provést ještě jednu integraci

$$x = \int_0^t \frac{QEt}{m_0 \sqrt{1 + \frac{Q^2 E^2 t^2}{m_0^2 c^2}}} dt = \frac{m_0 c^2}{QE} \left[ \sqrt{1 + \frac{Q^2 E^2 t^2}{m_0^2 c^2}} \right]_0^t = \frac{m_0 c^2}{QE} \left( \sqrt{1 + \frac{Q^2 E^2 t^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right). \quad (377)$$

### 2. Larmorův poloměr

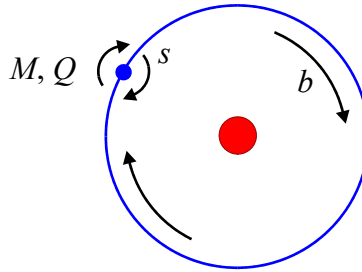
**Zadání:** Určete Larmorův poloměr pro

- elektron s energií 10 keV v magnetickém poli Země ( $B = 5 \times 10^{-5}$  T),
- proton ve Slunečním větru s rychlostí 300 km/s ( $B = 5 \times 10^{-9}$  T),
- iont  $\text{He}^+$  s energií 1 keV ve sluneční atmosféře v blízkosti slunečních skvrn ( $B = 5 \times 10^{-2}$  T).

**Řešení:** Převeďte údaje na rychlost a potom je  $r_L = mv/QB$ . Vyjde a) několik metrů, b) stovky kilometrů, c) desítky centimetrů.

### 3. Magnetický moment nabité částice

**Zadání:** Částice s nábojem  $Q$  rotuje rychlostí  $v$ . Nalezněte magnetický moment částice.



**Řešení:** Magnetický moment je součin proudu a plochy, kterou obtéká

$$\mu = IS = \frac{Q}{T} \pi r^2 = \frac{Q}{2\pi r/v} \pi r^2 = \frac{Q}{2} r v = \frac{Q}{2M} M r v = \frac{Q}{2M} b. \quad (378)$$

Vztah platí i vektorově:

$$\boldsymbol{\mu} = I \mathbf{S} = \frac{Q}{2M} \mathbf{b} \quad (379)$$

**Poznámka:** Magnetický moment je až na konstantu  $Q/2M$  úměrný momentu hybnosti. Rotuje-li nabitá částice, chová se jako malý magnetek. Magnetický moment je kvantován stejně jako moment hybnosti. Proto se kvantové číslo určující projekci momentu hybnosti do libovolné osy nazývá magnetické kvantové číslo. Pozor! Uvědomíme-li si, že projekce momentu hybnosti do libovolné osy je jen násobkem Planckovy konstanty, ( $b = m\hbar$ ), může magnetický moment nabývat jen násobky základního kvanta (Bohrova magnetonu):

$$\mu = \frac{Q\hbar}{2M} m ; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (380)$$

I nepohyblivá částice může mít nenulový magnetický moment způsobený spinem (vlastní rotační moment). Ve skutečnosti je magnetický moment částice dán kombinací orbitálních a spinových vlastností ( $b = j\hbar$ ) a u vztahu (380) je tzv. Landého faktor  $g$ , jehož hodnota se určuje z kvantově mechanických úvah:

$$\mu = g \frac{|Q|\hbar}{2M} j ; j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (381)$$

Do znaménka  $g$  se zahrnuje znaménko náboje. Pro elektron  $g = -2$ ; pro proton  $g = 5.68$  a pro neutron  $g = -3.86$ .

### 4. Magnetická rezonance

**Zadání:** Určete rezonanční frekvenci magnetického dipólu ve vnějším magnetickém poli.

**Řešení:** Ve vnějším magnetickém poli má magnetický dipól energii  $W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ , dipól se snaží získat minimální možnou energii a zorientovat se podél silokřivek. Tím dojde k precesnímu pohybu, který známe u setrvačníků. V mikrosvětě jsou ale rotační pohyby kvantovány a precesní úhel  $\theta$  nemůže být libovolný. Pohyb se děje jen po některých kuželových plochách. Rozdíl energie při přechodu z jedné plochy na druhou je kompenzován vyzářením nebo pohlcením rezonančního fotonu. Určíme tedy nejprve možné hodnoty potenciální energie setrvačniku:

$$W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu_z B; \quad \mu_z = g \frac{|Q|\hbar}{2M} j; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (382)$$

Rozdíl dvou sousedních energetických hladin tak vychází

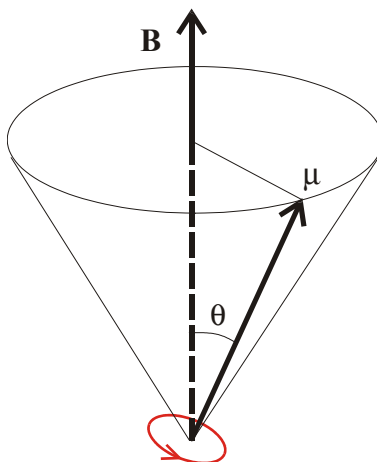
$$\Delta W = g \frac{|Q|\hbar}{2M} B. \quad (383)$$

Hledaná rezonanční frekvence fotonů je

$$\omega_{\text{rez}} = \frac{\Delta W}{\hbar} = \frac{|Q|}{2M} gB = KgB; \quad (384)$$

$$K = \begin{cases} 1.44 \text{ MHz/T} & \text{atom} \\ 0.76 \text{ kHz/T} & \text{jádro} \end{cases}$$

Konstanta  $K$  je charakteristická pro daný typ rezonance. V celém atomu je dána vlastnostmi elektronů v atomárních obalech, v jádře je dána především vlastnostmi protonů. Elektronová i jaderná magnetická rezonance jsou základem moderních zobrazovacích metod.



## 5. Magnetický moment jako invariant

**Zadání:** V pomalu se měnících polích se magnetický moment částice zachovává. Částice při pohybu „upravuje“ svoji rychlost podle velikosti pole. Určete proto magnetický moment jako funkci rychlosti a magnetického pole.

**Řešení:**

$$\boldsymbol{\mu} = I \mathbf{S} = \frac{Q}{2M} \mathbf{b} = \frac{Q}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \Rightarrow \quad (385)$$

$$\mu = \frac{Q}{2} r_{\perp} v_{\perp} = \frac{Q}{2} \frac{mv_{\perp}}{QB} v_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$$

Kolmá složka rychlosti pohybu se při oběhu nabitě částice kolem siločar nastavuje podle hustoty siločar (velikosti pole). Hustota siločar se nesmí podstatně změnit za jednu otočku částice.

## 6. Magnetické zrcadlo

**Zadání:** Určete podmínku odrazu na magnetickém zrcadle, je-li částice do zrcadla nastřelena pod úhlem  $\theta_0$  v poli o velikosti  $B_0$ .

**Řešení:** Zákon zachování energie nám v magnetickém poli dává

$$\frac{mv_{\perp}^2}{2} + \frac{mv_{\parallel}^2}{2} + Q\phi = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_{\perp}^2}{2} + \frac{mv_{\parallel}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad (386)$$

$$v^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad v = \text{const}.$$

Magnetické pole tedy neovlivňuje velikost rychlosti, způsobuje jen změnu směru rychlosti, tj. přelévání mezi podélnou a kolmou složkou, neboli úhel náklonu k silokřivce. Ten je dán dalším zákonem zachování – magnetickým momentem částice:

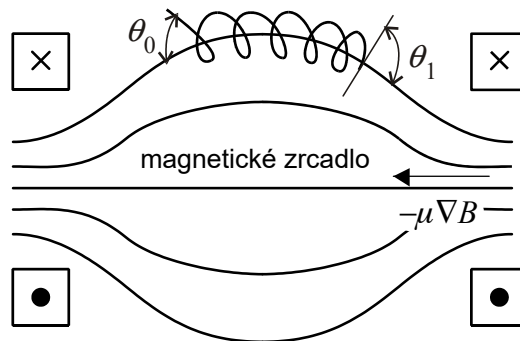
$$\frac{v_{\perp}^2}{2B} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2B} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin^2 \theta}{B} = \text{const}. \quad (387)$$

Ve dvou různých místech zrcadla tedy platí:

$$\frac{\sin^2 \theta_0}{B_0} = \frac{\sin^2 \theta_1}{B_1}. \quad (388)$$

Při odražení částice musí být úhel pohybu vzhledem k silokřivce  $\theta_1 = \pi/2$  a pole musí dosáhnout hodnoty

$$B_1 = \frac{B_0}{\sin^2 \theta_0}. \quad (389)$$



## 7. Gravitační drift

**Zadání:** Nalezněte rychlost driftu elektronů v gravitačním poli naší Země 300 km nad Zemí ( $B \sim 5 \times 10^{-5}$  T).

**Řešení:** Nejprve určete velikost gravitační síly, případně tíhovou sílu v dané výšce. Potom nalezněte driftovou rychlost ze vztahu

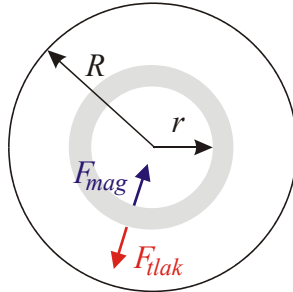
$$v_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{QB^2} \approx \frac{F}{QB} \quad (390)$$

Vyjde, že gravitační drift je zcela zanedbatelný pro elektrony i pro ionty ( $10^{-6}$  m/s,  $10^{-3}$  m/s).



## 8. Bennettův pinč

**Zadání:** Nalezněte průběh tlaku v proudovém vlákne s konstantní proudovou hustotou.



**Řešení:** Nejprve určíme z Ampérova zákona pole uvnitř vlákna ve vzdálenosti  $r$  od centra:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \Rightarrow H \cdot 2\pi r = j \cdot \pi r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu j}{2} r = \frac{\mu I}{2\pi R^2} r. \quad (391)$$

Samo magnetické pole uvnitř pinče vzrůstá lineárně se vzdáleností směrem od centra. Na povrchu vlákna je největší a vně vlákna klesá jako  $1/r$ . Na libovolnou vrstvu v průřezu pinče působí směrem ven síla gradientu tlaku látky a směrem dovnitř síla gradientu tlaku pole, obě síly jsou v rovnováze:

$$-\frac{dp_l}{dr} - \frac{dp_m}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{dp_l}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( \frac{B^2}{2\mu} \right) = -\frac{\mu I^2}{4\pi^2 R^4} r. \quad (392)$$

Získali jsme tak diferenciální rovnici pro tlak látky, kterou snadno integrujeme. Integrační konstantu určíme z podmínky  $p(R) = 0$ :

$$p_l(r) = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^4} (R^2 - r^2). \quad (393)$$

Tlak klesá od centra k okrajům vlákna parabolicky, v centru má hodnotu

$$p_l(0) = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^2}. \quad (394)$$

**Poznámka:** Podobným způsobem se počítá rovnováha hvězd. Gradient tlaku látky je vyrovnáván gravitační silou. Po sestavení rovnice rovnováhy se integruje (zpravidla numericky) od centra směrem ven. Výpočet se zastaví v okamžiku, kdy tlak vychází nulový a integrace se dostala až na povrch hvězdy.