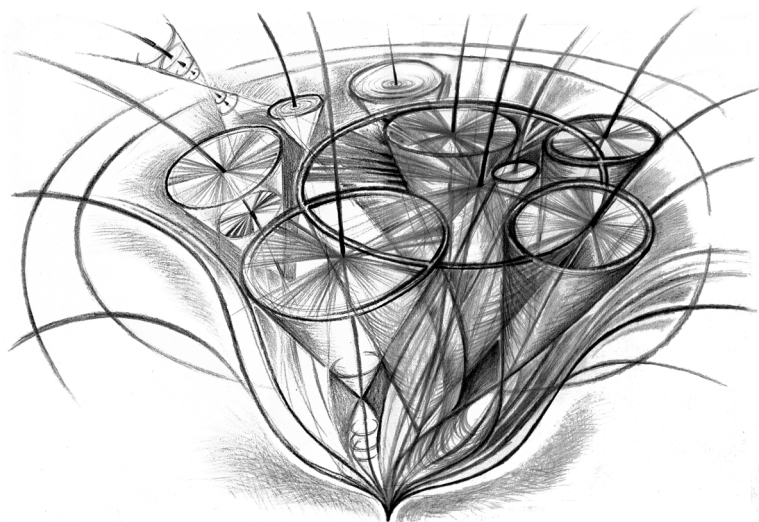


VYBRANÉ KAPITOLY Z TEORETICKÉ FYZIKY II



Petr Kulhánek

**Statistická fyzika
Elektromagnetické pole
Relativita**

AGA 2024

Text © Petr Kulháněk
ISBN: 978-80-906638-3-1

Obsah

PŘEDMLUVA	8
1. STATISTICKÁ FYZIKA	11
1.1 VYBRANÉ KAPITOLY Z TERMODYNAMIKY	12
1.1.1 První a druhá věta termodynamická	13
1.1.2 Termodynamické potenciály.....	14
1.2 ZÁKLADNÍ POJMY STATISTICKÉ FYZIKY	18
1.2.1 Slovníček pojmů	18
1.2.2 Ergodický problém	22
1.2.3 Liouvilleův teorém	23
1.3 GIBBSŮV KANONICKÝ SOUBOR	26
1.3.1 Odvození rozdělení.....	26
1.3.2 Konstanty rozdělení	27
1.3.3 Partiční suma a její význam	30
1.4 JEDNODUCHÉ PŘÍKLADY	33
1.4.1 Ideální plyn	33
1.4.2 Částice ve vnějším poli	35
1.4.3 Klasický oscilátor	40
1.5 DALŠÍ PŘÍKLADY	42
1.5.1 Kvantový oscilátor (vibrátor).....	42
1.5.2 Kvantový rotátor	47
1.5.3 Dvouatomární plyn	50
1.5.4 Anharmonický oscilátor.....	52
1.5.5 Dvouhadinový systém	54
1.6 GRANDKANONICKÝ SOUBOR.....	56
1.6.1 Odvození rozdělení.....	56
1.6.2 Konstanty rozdělení	57
1.6.3 Partiční suma	58
1.7 FERMIONY A BOSONY.....	61
1.7.1 Fermiho-Diracovo a Boseho-Einsteinovo rozdělení.....	62
1.7.2 Soubory fermionů (trpaslík a neutronová hvězda).....	65
1.7.3 Soubor fotonů (Planckův vyzařovací zákon).....	68
1.8 FLUKTUACE A ENTROPIE	77
1.8.1 Fluktuace	77
1.8.2 Entropie	80

1.9	MAGNETICKÝ AKTIVNÍ SYSTÉMY	83
1.9.1	Základní pojmy	83
1.9.2	Magneticky aktivní materiály	87
1.9.3	Mřížové modely	93
2.	ELEKTROMAGNETICKÉ POLE	99
2.1	MAXWELLOVY ROVNICE	100
2.1.1	Zákon zachování náboje	100
2.1.2	Lorentzova pohybová rovnice	101
2.1.3	Elektrický a magnetický dipól	102
2.1.4	Maxwellovy rovnice	105
2.1.5	Úplnost soustavy	111
2.1.6	Materiálové vztahy	112
2.1.7	Podmínky na rozhraní	115
2.2	ELEKTROSTATIKA	119
2.2.1	Poissonova rovnice a její řešení	119
2.2.2	Zajímavé příklady	122
2.2.3	Energie elektrického pole	126
2.2.4	Multipólový rozvoj	128
2.2.5	Elektrický dipól ve vnějším poli	132
2.3	MAGNETOSTATIKA	133
2.3.1	Vektorový potenciál	133
2.3.2	Poissonova rovnice a její řešení	134
2.3.3	Biotův-Savartův zákon	136
2.3.4	Multipólový rozvoj	136
2.3.5	Magnetický dipól	138
2.4	ZÁKONY ZACHOVÁNÍ	141
2.4.1	Zákon zachování energie	141
2.4.2	Zákon zachování hybnosti	142
2.4.3	Tlak pole	146
2.4.4	Zákon zachování momentu hybnosti	148
2.4.5	Pole jako reálná entita	149
2.5	ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY	150
2.5.1	Základní pojmy	150
2.5.2	Vlny ve vakuu	156
2.5.3	Vlny v anizotropním prostředí	159
2.5.4	Vlny ve vodivém prostředí	162
2.5.5	Světlo na rozhraní dvou prostředí	163
2.5.6	Raytracing	169
2.6	ELEKTROMAGNETICKÉ POTENCIÁLY	171
2.6.1	Definice potenciálů	171
2.6.2	Potenciály a tenzor elektromagnetického pole	172
2.6.3	Maxwellovy rovnice v potenciálech	173
2.6.4	Potenciály ve volném prostoru	175
2.6.5	Retardované a advanceované potenciály	175

2.7 ZÁŘENÍ NABITÝCH ČÁSTIC.....	178
2.7.1 Zářivý multipólový rozvoj	178
2.7.2 Elektrické dipólové záření	181
2.7.3 Thomsonův rozptyl.....	184
2.7.4 Rayleighův rozptyl.....	186
2.7.5 Brzdné záření elektronů na iontech.....	187
2.7.6 Cyklotronní záření	189
2.7.7 Vyšší momenty záření	191
2.7.8 Liénardovy-Wiechertovy potenciály.....	192
2.7.9 Relativistické brzdné a synchrotronní záření	195
2.8 POLE V DUTINĚ.....	199
2.8.1 Potenciály v dutině	199
2.8.2 Vlastní kmity pole.....	200
2.8.3 Energie a hybnost pole v dutině.....	201
2.8.4 Hamiltonovy rovnice	203
2.8.5 Tepelné záření.....	205
3. RELATIVITA.....	209
3.1 SPECIÁLNÍ RELATIVITA	210
3.1.1 Lorentzova transformace	210
3.1.2 Minkowského metrika	219
3.1.3 Relativistická dynamika.....	230
3.1.4 Relativistické paradoxy.....	233
3.2 ZÁKLADY OBECNÉ RELATIVITY.....	236
3.2.1 Princip ekvivalence.....	236
3.2.3 Kovariantní derivace.....	240
3.2.4 Rovnice geodetiky	244
3.2.5 Newtonovská limita	248
3.3 DILATACE ČASU A ČERVENÝ GRAVITAČNÍ POSUV	252
3.3.1 Různé pohledy na dilataci.....	254
3.3.2 Poundův-Rebkuův experiment	256
3.3.3 Hafeleho-Keatingův experiment.....	257
3.3.4 Gravity Probe A.....	259
3.3.5 Berkeleyyský experiment	260
3.4 EINSTEINŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON.....	262
3.4.1 Riemannův tenzor křivosti.....	262
3.4.2 Rovnice kontinuity v klasické fyzice.....	268
3.4.3 Tenzor energie a hybnosti.....	271
3.4.4 Einsteinův gravitační zákon.....	273
3.5 GRAVITAČNÍ VLNY.....	278
3.5.1 Vlnová rovnice.....	278
3.5.2 Vlastnosti gravitačních vln	279
3.5.3 Nepřímá pozorování gravitačních vln.....	283
3.5.4 Detekce gravitačních vln	284
3.5.5 Budoucí detektory.....	288

3.6 SFÉRICKÝ ZDROJ GRAVITACE	292
3.6.1 Schwarzschildovo řešení.....	292
3.6.2 Diagramy vnoření.....	298
3.6.3 Černé díry	301
3.6.4 Pohyby ve Schwarzschildově geometrii	304
3.6.5 Gravitační čočky.....	312
3.6.6 Strhávání časoprostoru rotujícím tělesem.....	315
3.7 STRUČNÝ ÚVOD DO KOSMOLOGIE	322
3.7.1 Fridmanova metrika.....	322
3.7.2 Vlastnosti Fridmanovy metriky	326
3.7.3 Kosmologický červený posuv.....	328
3.7.4 Expanzní funkce	330
3.7.4 Kosmologická konstanta.....	332
SEZNAM SYMBOLŮ.....	335
REJSTŘÍK OSOBNOSTÍ.....	341
Statistická fyzika.....	342
Elektromagnetické pole	349
Relativita.....	358
REJSTŘÍK POJMŮ	371
LITERATURA	374
CO NAJDETE V DALŠÍCH DÍLECH?	379
Vybrané kapitoly z teoretické fyziky I.....	380
Vybrané kapitoly z teoretické fyziky III.....	382



Předmluva

Milí čtenářové,

držíte v rukou druhý díl „Vybraných kapitol“. Jeho struktura je stejná jako u dílu prvního. Jediným rozdílem je, že veškerá potřebná matematika ke studiu je záměrně soustředěna v prvním dílu. Matematické minimum tak nemusíte hledat roztroušené v různých dodatcích, jak tomu bylo v předchozím vydání, ale najdete ho soustředěné na jednom jediném místě. Doufám, že toto řešení je výrazně praktičtější.

Druhý díl „Vybraných kapitol“ je věnován statistické fyzice, elektromagnetickému poli a relativitě. Ve statistické fyzice se čtenář seznámí s popisem velkého množství systémů, které tvoří statistický soubor. Obrovské množství jedinců stejného druhu neumožňuje kompletní popis všech trajektorií na úrovni teoretické mechaniky ani na těch největších počítačích světa. Proto se při popisu využívá statistické přiblížení, v němž na základě chování jednoho jedince usuzujeme na vlastnosti velkého souboru takových jedinců. Ústředním nástrojem při statistickém popisu přírodních dějů je kanonická a grandkanonická partiční suma. Probrána jsou základní statistická rozdělení jak v klasické fyzice, tak Fermiho-Diracovo a Boseho-Einsteinovo rozdělení v kvantové mechanice. Poznatky jsou aplikovány například na elektronový a fotonový plyn. Výsledkem je mj. kompletní odvození Planckova vyzařovacího zákona. Aplikace statistického přístupu je ukázána také na rotačních a vibračních stavech molekul. Probrány jsou i základy mřížových modelů feromagnetik. S nerovnovážnou statistikou se student setká až ve třetím díle „Vybraných kapitol“.

Druhá část této učebnice je věnována elektromagnetickému poli. Elektřina a magnetismus jsou rubem a lícem téže mince. Měnící se magnetické pole vytváří pole elektrické a měnící se pole elektrické dává vzniknout poli magnetickému. Od roku 1873, kdy James Clerk Maxwell publikoval své monumentální dílo „*A Treatise on Electricity and Magnetism*“, už uplynulo hodně vody. Maxwelllova elektrodynamika předpověděla existenci mnoha jevů, které změnily za jediné století naši civilizaci k nepoznání. Dnes si náš život už sotva dokážeme představit bez elektrických a elektronických pomocníků. Elektromagnetické děje se podílejí i na procesech ve vesmíru – prach v mlhovinách se elektrostaticky lepí do zárodků, z nichž vznikají planety, hvězdy jsou obřimi plazmovými koulemi s výraznými elektromagnetickými projevy a magnetická pole se prolínají vesmírem na všech škálách. Naše technologie nevyužívají elektřinu a magnetismus jen v elektrických strojích a elektronických zařízeních. Razantní nástup fyziky plazmatu přinesl zcela nevídané aplikace – nanášení ultrapevných povrchů, úpravy tkanin, plazmové řezání a obrábění a plazmovou medicínu, která je doslova hitem posledních let. Podstatná část učebního textu o elektromagnetizmu je věnována záření nabitých částic, které souvisí se změnou hybnosti nabitě částice, ať už ve směru pohybu (např. brzděné záření), tak ve směru kolmém na trajektorii (např. cyklotronní a synchrotronní záření). Probrány jsou ale i relativně všední formy interakce záření s látkou, například Thomsonův rozptyl či Rayleighův rozptyl zodpovědný za modrou barvu oblohy. Vyvrcholením části o elektrodynamice je popis elektromagnetického pole v rezonační dutině jako soustavy harmonických oscilátorů, které splňují klasické Hamiltonovy rovnice.

Poslední část této učebnice je věnována relativitě. Maxwellova elektrodynamika ukázala, že se rychlosti transformují jinak, než tomu je v klasické mechanice. Úprava mechaniky dle požadavků elektrodynamiky vedla ke speciální relativitě. Albert Einstein ji dále zobecnil na libovolné souřadnicové soustavy, a tím dal vzniknout obecné relativitě, současné velmi úspěšné teorii gravitační interakce. Z obecné relativity vylýpula celá řada dříve nepředstavitelných jevů – uzavření časoprostoru do černé díry, ohyb světla gravitační čočkou, gravitační vlny, strhávání časoprostoru rotujícím tělesem a existence mnoha dalších procesů, nad nimiž se i více než sto let od zrodu této teorie stále tají dech. Seznámíme se sice jen se základy obecné relativity, ale i ty mohou čtenáře zaujmout natolik, že se pustí do hlubšího studia této nádherné fyzikální teorie.

Proměnné jsou ve všech třech dílech reprezentovány zásadně šikmým řezem písma. Základním řezem jsou zobrazeny funkce, zkratky, číslice a různé matematické operace. Tučným řezem písma jsou sázeny vektory, tenzory a složené objekty. Ve výjimečných případech, kdy by mohlo dojít k nejednoznačnosti či záměně, jsou nad vektory a tenzory šipky. Latinské indexy znamenají pořadí veličiny, souřadnicové osy atd. Řeckými písmeny jsou označeny složky čtyřvektorů, například A_α , kde $\alpha = 0$ (časová složka), 1, 2, 3 (prostorové složky).

Počet písmen abecedy je omezený, proto jsou některé veličiny označeny stejným symbolem. Jejich význam lze ale snadno odhadnout z kontextu. Pomocí při tom může i seznam symbolů zařazený v závěru knihy. Při čtení nepřeskakujte poznámky, často jde o důležité postřehy potřebné k pochopení probíraného jevu. V knize je naleznete na šedém podkladu. Ilustrativní příklady jsou odděleny od ostatního textu na začátku a na konci černým půlkolečkem. Důležité vztahy jsou na levé straně označeny černým trojúhelníkem. Snad toto značení přispěje k lepší orientaci čtenáře v náročném studijním textu.

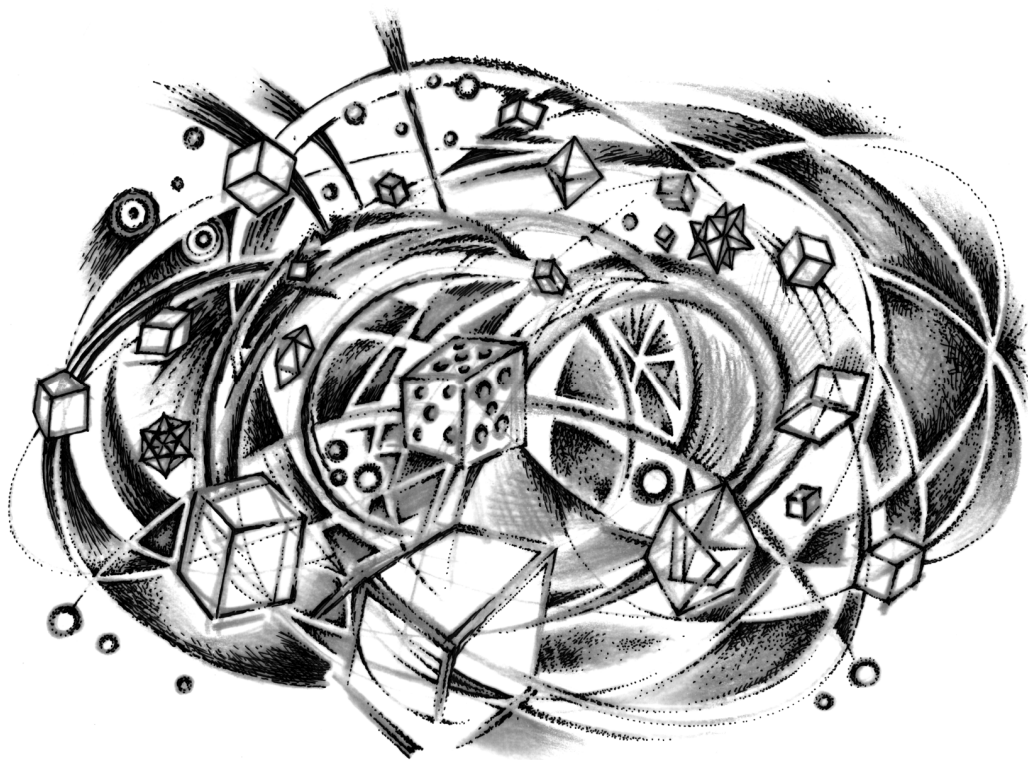
Co říci na závěr? Mé poděkování patří řadě mých studentů, kteří se z textů, na jejichž základě vznikala tato kniha, učili a pečlivě objevovali překlepy a nejasnosti. Mé poděkování patří také Ing. arch. Ivanu Havlíčkovi, který se postaral o úvodní grafiku k jednotlivým kapitolám, obálku a některé obrázky. Budoucím studentům bych chtěl popřát, aby zažili neopakovatelnou a nesdělitelnou závat' z pochopení a porozumění zákonům popisujícím děje probíhající v přírodě kolem nás.

Petr Kulhánek, 2020, 2024, Praha

Odkazy na kompletní nahrávky přednášek k této učebnici naleznou čtenáři na serveru aldebaran.cz v sekci *Studium*. Zde si také můžete stáhnout elektronickou podobu většiny částí této učebnice a další doplňující materiály k přednáškám.



1. Statistická fyzika



1.1 Vybrané kapitoly z termodynamiky

Chceme-li popisovat chování velkého souboru mnoha stejných systémů (klasickým příkladem je plyn složený z mnoha stejných molekul), můžeme v podstatě použít jen čtyři přístupy:

- 1) chování prohlásíme za „boží zázrak“ a dále nezkoumáme.
- 2) na základě výsledků jednoduchých experimentů se snažíme nalézt zákony, kterými se soubor řídí. Například zjistíme, že v uzavřené nádobě roste tlak s rostoucí teplotou či rostoucím počtem částic a naopak tlak plynu klesá, budeme-li zvětšovat rozměry nádoby. Kombinací těchto vztahů můžeme nalézt stavovou rovnici. Vždy však musíme mít na mysli, že jde o odvození na základě experimentů, bez zkoumání podstaty jevů samotných a ne vždy budeme zcela rozumět, kdy odvozené zákony přesně platí. Tímto přístupem se zabývá *termodynamika* a nazývá se popisný, odvozený ze zkušenosti, neboli *fenomenologický*.
- 3) pokusíme se vypočítat trajektorii každé částičky tvořící soubor ze základních zákonů, například z Hamiltonových rovnic. Tento postup musí nutně selhat u souborů mnoha částic, kde je takový popis nad naše možnosti. Můžeme ale použít různé numerické metody, nepopisovat všechny systémy ze souboru a podobně.
- 4) zákony popisující chování souboru jako celku se pokoušíme odvodit teoreticky ze znalosti chování jednotlivých členů systému statistickými metodami. Získané výsledky mají pravděpodobnostní charakter, ale u souborů mnoha částic to vůbec není na závadu, spíše naopak. Tímto přístupem se zabývá *statistická fyzika*.

Soubor systémů popisovaný metodami statistické fyziky může být velmi rozmanitý. Může jít o jednoduchý monoatomární plyn, o neutronovou hvězdu složenou z neutronů či o feromagnetikum složené z mnoha elementárních magnetků (spinů). Systémy popisovaného souboru mohou být jak klasické, tak kvantové. Již v kvantové teorii jsme se zmínili o mimořádné důležitosti harmonického oscilátoru, a proto i v této části budeme věnovat pozornost souboru kvantových harmonických oscilátorů.

Samozřejmě si odvodíme jednoduché zákony ideálního plynu, stavovou rovnici, ze statistického hlediska se seznámíme s pojmem entropie. Stejně tak ale budeme studovat kvantové systémy fermionů a bosonů nebo mnoha elementárních kvantových rotátorů (například rotujících molekul). Statistická fyzika je mimořádně krásná a elegantní partie fyziky, s jejímiž počátky jsou spjata jména takových velikánů, jako byli například Ludwig Boltzmann či Josiah Gibbs nebo v kvantové statistice Enrico Fermi, Paul Dirac, Satyendra Bose a Albert Einstein.

Než se ale pustíme do vlastní konstrukce statistické fyziky, musíme se seznámit s některými základními pojmy z termodynamiky. Tato část není v žádném případě nějakým systematickým výkladem termodynamiky. Jde jen o přehled některých pojmů z tohoto oboru, které budou potřeba k porovnání výsledků termodynamiky a statistické fyziky. V termodynamice budeme hovořit o popisované *soustavě*. Ve statistické fyzice pak budeme důsledně rozlišovat *systém* (jedna popisovaná entita) a *soubor* (velké množství těchto entit).

Ke studiu této části byste z matematiky měli znát Pfaffovy diferenciální formy. Jejich základy naleznete ve „Vybraných kapitolách I“, v kapitole 3.9.

1.1.1 První a druhá věta termodynamická

První věta termodynamická není nic jiného než zákon zachování energie soustavy: *Vnitřní energie soustavy se může zvýšit dodaným teplem nebo přidáním dalších částic a snížit soustavou vykonanou prací.*

$$dU = dQ - dA + dU_N . \quad (1.1)$$

Sama vnitřní energie soustavy je úplným diferenciálem. Členy na pravé straně ale úplnými diferenciály nejsou. Plyne to z mnoha experimentů. Dodané teplo $\int dQ$ je různé po různých cestách ve fázovém prostoru (p, V, T) , a závisí tak na cestě. Podobně je to i s dalšími členy na pravé straně. Podívejme se na jednotlivé členy podrobněji:

Práce vykonaná soustavou (dA)

Práce vykonaná soustavou může být nejrůznější povahy: mechanické, elektrické, magnetické, polarizační, elastické, atd. a výsledný výraz je součtem mnoha členů. Prozatím se ale spokojíme jen s výrazem pro mechanickou práci, elektrické a magnetické členy budeme diskutovat později.

$$dA = F dl + \dots = pS dl + \dots = p dV + \dots \quad (1.2)$$

Vnitřní energie spojená se změnou počtu částic (dU_N)

Přicházejí-li do soustavy další částice z vnějšku, roste vnitřní energie soustavy úměrně přírůstku částic:

$$dU_N = \mu dN . \quad (1.3)$$

Koeficient úměrnosti μ se nazývá chemický potenciál soustavy a závisí na typu látky, ze které se soustava skládá. Z matematického hlediska o žádný skutečný potenciál nejde a název má jen historický původ. Obsahuje-li soustava více druhů částic, je přírůstek vnitřní energie spojený se změnou počtu částic dán součtem podobných členů přes všechny druhy částic (používáme sumační konvenci):

$$dU_N = \mu_k dN_k . \quad (1.4)$$

Tepelná energie (dQ)

Teplo je jedním z ústředních pojmů termodynamiky a je proto obzvláště nepříjemnou záležitostí, že není ve tvaru úplného diferenciálu. Naštěstí lze ukázat, že vždy existuje integrační faktor, který teplo převede na diferenciální formu ve tvaru úplného diferenciálu. To je obsahem *druhé věty termodynamické*, která se vyskytuje v mnoha podobách. Pro nás bude nejdůležitější tvar: *Diferenciál tepla má integrační faktor. Je jím převrácená hodnota absolutní teploty. Nově vzniklou úplnou diferenciální formu nazýváme entropie a označujeme ji dS:*

$$dS \equiv \frac{1}{T} dQ . \quad (1.5)$$

- Existují i jiné formulace druhé věty termodynamické, které mají hluboký význam pro termodynamiku, například: *Neexistuje perpetuum mobile druhého druhu (stroj trvale a cyklicky konající práci ochlazením teplotní lázně)*. To, jak spolu obě formulace souvisí, může čtenář nalézt v každé učebnici termodynamiky.
- Ke správnému integračnímu faktoru lze dojít například rozбором Carnotova cyklu, kde se ukazuje, že integrace dQ závisí na cestě integrace, ale integrace veličiny dQ/T je *nezávislá* na cestě, a je proto úplným diferenciálem.
- To, že převrácená hodnota teploty je správným integračním faktorem diferenciálu tepla, lze také ukázat porovnáním derivací „křížem“ u diferenciálu entropie.
- V termodynamice rovnovážných dějů má entropie význam diferenciálu tepla, který je integračním faktorem opraven na úplný diferenciál. Pro entropii platí všechny tvrzení věty o pěti ekvivalencích: integrál z entropie *nezávisí* na cestě, integrál po uzavřené křivce (cyklický děj) je nulový, atd. Proto vždy dáváme přednost entropii a místo diferenciálu tepla píšeme:

$$\blacktriangleright \quad dQ = T dS . \quad (1.6)$$

Po vyjádření všech veličin na pravé straně první věty termodynamické (1.1) získáme tvar, který budeme používat:

$$\blacktriangleright \quad dU = T dS - p dV + \mu_k dN_k . \quad (1.7)$$

V posledním členu používáme sumační konvenci, sčítá se přes všechny druhy částic, jejichž počet se může měnit (například v plazmatu elektrony, neutrální částice a ionty).

1.1.2 Termodynamické potenciály

V minulé kapitole jsme se seznámili se dvěma veličinami, které tvoří diferenciální formy ve tvaru úplného diferenciálu. Jde o vnitřní energii a entropii. Existuje však postup, kterým můžeme vytvářet celou řadu dalších, velmi užitečných úplných diferenciálních forem. Nyní zmíníme o entalpii, volné energii, Gibbsově potenciálu a grandkanonickém potenciálu. Význam těchto veličin je pro statistickou fyziku velmi důležitý.

Entalpie H

Pravou stranu diferenciálu vnitřní energie (1.7) „zúplníme“ v členu $p dV$. Zapišeme ho jako $d(pV) - V dp$ a první člen převedeme na levou stranu. Tak získáme novou veličinu ve tvaru úplného diferenciálu, tzv. entalpii:

$$dU = T dS - p dV + \mu_k dN_k ,$$

$$dU = T dS - d(pV) + V dp + \mu_k dN_k ,$$

$$d(U + pV) = T dS + V dp + \mu_k dN_k .$$

Pro nově zavedenou veličinu můžeme napsat celou řadu relací. Známe její definici (na-levo v závorce) a také známe její první diferenciál (pravá strana rovnosti). Z tvaru prvního diferenciálu poznáme, na kterých veličinách entalpie závisí. Navíc víme, že jde o úplný diferenciál, tj. parciální derivace entalpie dají koeficienty diferenciální formy na pravé straně:

$$\begin{aligned}
 H &\equiv U + pV, \\
 dH &= T dS + V dp + \mu_k dN_k, \\
 H &= H(S, p, N_k), \\
 T &= \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{p, N_k}, \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_{S, N_k}, \quad \mu_k = \left(\frac{\partial H}{\partial N_k} \right)_{S, p, N_{i \neq k}}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ze znalosti entalpie můžeme určit teplotu, objem a chemické potenciály soustavy. Z první relace (1.8) můžeme také určit za pomoci entalpie vnitřní energii soustavy:

$$U = H - pV = H - p \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right). \tag{1.9}$$

Tato rovnice se nazývá *Gibbsova-Helmholtzova rovnice prvního druhu*. Z vnitřní energie pak můžeme počítat tepelné kapacity soustavy i další veličiny.

Poznámka 1: Indexy u parciálních derivací znamenají, že příslušné veličiny jsou při derivování konstantní, zkrátka si jich nevšímáme tak, jak jsme běžně zvyklí. V termodynamice, kde děje závisí na cestě, bývá zvykem tuto cestu explicitně vyznačovat. V našem textu budeme automaticky rozumět, že veličiny, podle kterých se derivace neprovádí, jsou konstantní, a indexy nadále nebudeme psát.

Poznámka 2: Písmeno H znamená velké řecké éta (souvisí se slovem *enthalpy*).

Volná energie F

Budeme postupovat obdobně jako u entalpie, jen nyní ve výrazu (1.7) pro vnitřní energii doplníme člen $T dS$:

$$\begin{aligned}
 dU &= T dS - p dV + \mu_k dN_k, \\
 d(U - TS) &= -S dT - p dV + \mu_k dN_k.
 \end{aligned}$$

Opět tak získáváme novou diferenciální formu ve tvaru úplného diferenciálu, kterou nazýváme *volná energie*. Stejně jako u entalpie můžeme kromě definice ihned napsat celou řadu relací:

$$\begin{aligned}
 F &\equiv U - TS, \\
 dF &= -S dT - p dV + \mu_k dN_k, \\
 \blacktriangleright \quad F &= F(T, V, N_k),
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right), \quad p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right), \quad \mu_k = \left(\frac{\partial F}{\partial N_k} \right).$$

Právě volná energie má ve statistické fyzice mimořádný význam. Uvidíme totiž, že tuto veličinu na základě statistických úvah budeme schopni zjistit. Volná energie je funkcí snadno představitelných veličin: teploty, objemu soustavy a počtu částic různých druhů.

Poznáme-li tuto funkci, snadno pouhým derivováním určíme entropii soustavy, jejíž intuitivní pochopení často naráží na problémy. Derivováním volné energie podle objemu zjistíme tlak v soustavě, tedy stavovou rovnici, a derivováním podle počtu částic můžeme určit chemické potenciály soustavy. Co více si přát? Snad ještě vnitřní energii, ale ani to není problém. Z definice volné energie $F = U - TS$ určíme $U = F + TS$ a dosadíme již vypočtenou hodnotu entropie:

$$\blacktriangleright \quad U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right). \quad (1.11)$$

Jde o tzv. *Gibbsovu-Helmholtzovu rovnici druhého druhu*, jež je východiskem k mnoha dalším odvozeným veličinám, které se počítají z vnitřní energie.

■ **Příklad 1.1:** Dokažte, že Gibbsovu-Helmholtzovu rovnici (1.11) lze zapsat v jednoduchém tvaru $U = \partial(\beta F)/\partial\beta$, kde $\beta \equiv 1/T$. ■

Gibbsův potenciál G

Naprostoj stejným postupem jako v předchozích případech zúplníme diferenciál vnitřní energie v obou členech $p dV$ a $T dS$. Výsledkem je nová veličina, Gibbsův potenciál, pro který zřejmě platí:

$$\begin{aligned} G &\equiv U - TS + pV, \\ dG &= -S dT + V dp + \mu_k dN_k, \\ G &= G(T, p, N_k), \\ S &= -\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right), \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right), \quad \mu_k = \left(\frac{\partial G}{\partial N_k} \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Gibbsův potenciál má velký význam pro chemii a termodynamiku, my ho ve statistické fyzice nevyužijeme. Kulaté závorky znamenají, že veškeré ostatní veličiny (kromě té, podle které se derivuje) jsou drženy konstantní, indexy již nevypisujeme.

Grandkanonický potenciál Ω

Posledním z potenciálů, který pro nás bude mít velký význam, je grandkanonický potenciál. Diferenciál vnitřní energie zúplníme v členech $T dS$ a μdN . Výsledek je:

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv U - TS - \mu_k N_k, \\ d\Omega &= -S dT - p dV - N_k d\mu_k, \\ \blacktriangleright \quad \Omega &= \Omega(T, V, \mu_k), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$S = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right), \quad p = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right), \quad N_k = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_k} \right).$$

Ve statistické fyzice souborů s proměnným počtem částic budeme schopni, alespoň teoreticky, určit právě grandkanonický potenciál. Z něho pak již snadno nalezneme

entropii soustavy, tlak (stavovou rovnicí) a počty jednotlivých částic. Z definice grandkanonického potenciálu potom vypočteme vnitřní energii:

$$\blacktriangleright \quad U = \Omega + TS + \mu_k N_k = \Omega - T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right) - \mu_k \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_k} \right), \quad (1.14)$$

kteřá je východiskem k výpočtu mnoha dalších veličin. Pokud chcete termodynamiku studovat hlouběji, zkuste si sehnat sice starší, ale vynikající učebnici Jozefa Kvasnici [3]. Od stejného autora existuje i velmi podrobná učebnice statistické fyziky [4]. Další informace o statistické fyzice se dozvíte z publikací [5], [6], [7].



1.2 Základní pojmy statistické fyziky

1.2.1 Slovníček pojmů

System

Systemem rozumíme jakoukoli popisovanou entitu. Sadu nezávislých parametrů nutných k popisu nazýváme zobecněné souřadnice. Standardními postupy teoretické mechaniky přiřadíme každé zobecněné souřadnici zobecněnou hybnost. Známe-li počáteční hodnoty souřadnic a hybností, můžeme v klasické fyzice předpovědět trajektorii systému za pomoci Hamiltonových rovnic. Jde-li o kvantový systém, je stav dán vektorem v Hilbertově prostoru a časový vývoj určíme působením evolučního operátoru. V tomto případě má trajektorie pravděpodobnostní charakter a je kvantově „rozmazána“.

Fázový prostor

Fázovým prostorem nazýváme prostor zobecněných souřadnic a hybností (q, p) . Nepíšeme-li indexy, automaticky myslíme celé množiny všech zobecněných souřadnic a hybností. Proč se používají hybnosti namísto rychlostí? Je pro to několik důvodů:

- Chceme-li sledovat časový vývoj, používáme Hamiltonovy rovnice pro polohy a hybnosti.
- Svět je na elementární úrovni kvantově rozmazán díky Heisenbergovým relacím neurčitosti. Ty platí opět mezi zobecněnou souřadnicí a jí příslušející zobecněnou hybností.
- Je-li situace symetrická vzhledem k posunutí v některé zobecněné souřadnici, zachovává se příslušná zobecněná hybnost. Tyto dvě veličiny neoddělitelně patří k sobě.
- Poissonovy závorky zobecněných souřadnic a odpovídajících zobecněných hybností jsou rovny jedné, ostatní závorky jsou nulové.
- Ve statistické fyzice uvidíme, že ve fázovém prostoru s osami (q, p) se při statistickém vývoji mnoha systémů zachovává objem a soubor systémů se chová jako nestlačitelná kapalina (Liouvilleův teorém), což je pro popis velmi výhodné.

Soubor

Souborem rozumíme velké množství stejných systémů se stejným fázovým prostorem. Systémy mohou mít různé počáteční podmínky a ve fázovém prostoru jsou v daném okamžiku reprezentovány množinou mnoha bodů. Při časovém vývoji se jednotlivé body přesouvají po svých fázových trajektoriích daných Hamiltonovými rovnicemi.

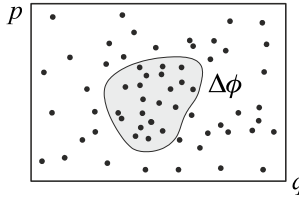
Fázový objem

Ve fázovém prostoru můžeme standardním způsobem zavést elementární objem fázového prostoru jako $2f$ rozměrný diferenciál (f je počet stupňů volnosti)

$$d\phi = dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f = \prod_k dq_k \prod_k dp_k = d^f q d^f p. \quad (1.15)$$

Jde o přirozené zobecnění „běžného“ objemu ve třech dimenzích, kde je $dV = dx dy dz$. Konečná oblast Ω fázového prostoru má potom objem

$$\Delta\phi = \int_{\Omega} d\phi = \int_{\Omega} d^f q d^f p. \quad (1.16)$$



Obr. 1.1: Fázový objem s jednou prostorovou a jednou hybnostní souřadnicí

● Příklad 1.2: Fázový objem oscilátoru

Určete fázový objem, který zaujímají ve fázovém prostoru harmonické oscilátory, jejichž maximální energie je E . Určete také, jaký objem zaujímá jedno kvantum energie harmonického oscilátoru.

Řešení: Z teoretické mechaniky víme, že fázovou trajektorií harmonického oscilátoru je elipsa. Harmonický oscilátor při svém pohybu zachovává energii, proto můžeme rovnici elipsy jednoduše zapsat jako rovnici energetické „nadvlochy“

$$H \equiv \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = E. \quad (1.17)$$

Na této nadvloše (v tomto případě obyčejné elipse) se nacházejí oscilátory, které mají energii právě E . Uvnitř elipsy leží trajektorie oscilátorů s nižší energií, vně elipsy trajektorie oscilátorů s vyšší energií. Energetická nadvlocha vymezuje ve fázovém prostoru množinu (včetně hranice), v níž se mohou nacházet oscilátory, jejichž energie je menší nebo rovna E . Fázový objem této množiny bude

$$\phi = \int_{\Omega} dx dp; \quad \Omega = \left\{ (x, p) : \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{p^2}{2m} \leq E \right\}. \quad (1.18)$$

Provedeme-li substituce $\xi = (m\omega^2/2)^{1/2} x$; $\eta = p/(2m)^{1/2}$, zjednoduší se oblast integrace na kruh (dvojměrnou kouli)

$$\phi = \frac{2}{\omega} \int_{\Omega} d\xi d\eta; \quad \Omega = \left\{ (\xi, \eta) : \xi^2 + \eta^2 \leq E \right\}. \quad (1.19)$$

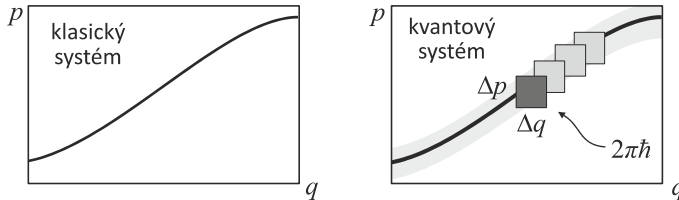
Výsledkem integrálu je objem 2D koule $V_2(E^{1/2})$, v tomto případě jde o obyčejnou plochu kruhu o poloměru $E^{1/2}$:

$$\phi = 2\pi E / \omega. \quad (1.20)$$

Energetické spektrum harmonického oscilátoru „skáče“ po kvantech $\Delta E = \hbar\omega$, jednomu kvantu tedy bude příslušet velikost fázového prostoru

$$\blacktriangleright \quad \Delta\phi = 2\pi \Delta E / \omega = 2\pi\hbar\omega / \omega = 2\pi\hbar. \quad (1.21)$$

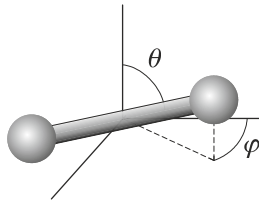
Hodnota $2\pi\hbar$ znamená velikost jednoho (jednorozměrného) stavu ve fázovém prostoru. Současně jde o velikost „pixelu“ rozmazání fázové trajektorie v kvantové teorii.



Obr. 1.2: Objem stavu ve fázovém prostoru

● Příklad 1.3: Fázový objem molekuly

Vypočítejte fázový objem, který ohraničuje energetická nadplocha molekuly chovající se jako tuhá činka.



Obr. 1.3: Molekula jako tuhá činka

Řešení: Molekula má celkem 5 stupňů volnosti. Může se pohybovat jako celek (tento pohyb popíšeme souřadnicemi těžiště molekuly x, y, z) a může rotovat ve dvou nezávislých úhlech (popíšeme je úhly θ a φ sférických souřadnic). Fázový prostor má tak 5 souřadnicových os a 5 hybnostních os, je tedy desetirozměrný. Molekula o hmotnosti m se ve fázovém prostoru vždy nachází v některém bodě tzv. energetické nadplochy (každý z obou atomů má hmotnost $m/2$ a je vzdálen od těžiště $l/2$)

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\right)^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = \text{const.}$$

Standardním postupem určíme hamiltonián

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{2}{ml^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right).$$

Nyní se již můžeme pustit do výpočtu objemu oblasti fázového prostoru, kterou uzavírá energetická nadplocha:

$$\begin{aligned}\phi &= \int_{H \leq E} dx dy dz d\varphi d\theta dp_x dp_y dp_z dp_\varphi dp_\theta \Rightarrow \\ \phi &= \int_V dx dy dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{p_1^2 + \dots + p_5^2 \leq E} \sqrt{2m^{5/2} l^2} d^5 p \Rightarrow \\ \phi &= 2^{5/2} \pi V m^{5/2} l^2 E^{5/2} V_5(1).\end{aligned}$$

V druhém řádku jsme provedli standardní substituce, podobně jako v předchozím příkladě. Diferenciál páté hybnosti má dvě části, ale integrál první z nich je nulový. Veličina $V_5(1)$ je objem jednotkové pětirozměrné koule. ■

Váhový faktor

Každý stupeň volnosti je v kvantové teorii rozmazán s hodnotou „pixelu“ $2\pi\hbar$, kterou zaujímá jeden kvantový stav (a nemusí jít jen o kvantový oscilátor, pro který jsme tuto hodnotu odvodili). Ve více dimenzích je velikost „základního pixelu“ neboli velikost jednoho kvantového stavu $(2\pi\hbar)^f$ (jde o prostý součin „pixelů“ jednotlivých dimenzí). Velmi výhodné bude zavést bezrozměrný fázový objem výrazem

$$\blacktriangleright \quad d\Gamma \equiv \frac{d\phi}{(2\pi\hbar)^f}; \quad \Delta\Gamma = \int_\phi \frac{d^f q d^f p}{(2\pi\hbar)^f}. \quad (1.22)$$

Tato bezrozměrná veličina se nazývá váhový faktor, využívá se zejména u kvantových systémů. Jde vlastně o fázový objem vydělený velikostí jednoho kvantového stavu, Γ má tedy význam počtu kvantových stavů obsažených ve fázovém objemu ϕ .

Hustota pravděpodobnosti

Bude-li soubor obsahovat velké množství systémů, můžeme zavést *hustotu počtu systémů* v elementu fázového objemu $\Delta N/\Delta\phi$. Čím bude toto číslo vyšší, tím více je v daném místě systémů a tím vyšší je pravděpodobnost nalézt v dané oblasti nějaký systém. *Hustota pravděpodobnosti* je úměrná hustotě počtu systémů ve fázovém prostoru. Z důvodu normování se někdy hustota pravděpodobnosti dělí ještě celkovým počtem částic. Také je možné využít bezrozměrný fázový objem (váhový faktor) a tak jsou celkem 4 možnosti zavedení a normování hustoty pravděpodobnosti:

$$\rho \equiv \frac{dN}{d\phi}, \quad dw = \rho d\phi, \quad \int dw = \int \frac{dN}{d\phi} d\phi = N; \quad (1.23)$$

$$\blacktriangleright \quad \rho \equiv \frac{1}{N} \frac{dN}{d\phi}, \quad dw = \rho d\phi, \quad \int dw = \int \frac{1}{N} \frac{dN}{d\phi} d\phi = 1; \quad (1.24)$$

$$\rho \equiv \frac{dN}{d\Gamma}, \quad dw = \rho d\Gamma, \quad \int dw = \int \frac{dN}{d\Gamma} d\Gamma = N; \quad (1.25)$$

$$\blacktriangleright \quad \rho \equiv \frac{1}{N} \frac{dN}{d\Gamma}, \quad dw = \rho d\Gamma, \quad \int dw = \int \frac{1}{N} \frac{dN}{d\Gamma} d\Gamma = 1. \quad (1.26)$$

Celková pravděpodobnost je normována buď k jedné (tak tomu je nejčastěji v matematice) nebo k celkovému počtu částic. V této učebnici budeme využívat druhé a čtvrté možnosti normování hustoty pravděpodobnosti (k jedné).

Středování přes fázový prostor

Je-li známa hustota pravděpodobnosti, můžeme průměrovat dynamické proměnné přes fázový prostor. Sečteme hodnoty dynamické proměnné A pro všechny systémy s vahou danou hustotou pravděpodobnosti ρ :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &\equiv \int A(q, p) dw = \int A(q, p) \rho d\phi && \text{nebo} \\ \blacktriangleright \langle A \rangle &\equiv \int A(q, p) dw = \int A(q, p) \rho d\Gamma && \text{nebo} \\ \langle A \rangle &\equiv \sum A_n w_n. \end{aligned} \quad (1.27)$$

První případ platí, použijeme-li fázový prostor, druhý, použijeme-li váhový faktor, třetí pro systém s diskrétními stavy, kde prostě sčítáme přes pravděpodobnosti jednotlivých stavů. Pravděpodobnosti splňují normovací podmínku

$$\int dw = 1; \quad \sum_n w_n = 1. \quad (1.28)$$

1.2.2 Ergodický problém

Střední hodnotu dynamické proměnné $A(q, p)$ v souboru mohou v zásadě určit dvojím způsobem. První z možností je středování přes soubor pomocí zavedené hustoty pravděpodobnosti:

$$\langle A \rangle \equiv \int A(q, p) dw = \int A(q, p) \rho d\Gamma. \quad (1.29)$$

Druhou z možností je zvolit si jeden ze systémů souboru a průměrovat veličinu A po dostatečně dlouhou dobu τ :

$$\bar{A} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} A(q(t), p(t)) dt. \quad (1.30)$$

Samozřejmě by výsledek limity neměl záviset na počátečním čase t_0 . Velmi diskutovnou a velmi starou je otázka, zda obojím způsobem získáme též výsledek:

$$\langle A \rangle \stackrel{?}{=} \bar{A}. \quad (1.31)$$

Tento problém se nazývá ergodický problém, je vyřešen kladně v mnoha jednotlivých případech, ale obecné řešení pro mechanické systémy známo není. V tomto textu budeme středovat veličiny pomocí vztahu (1.29) a budeme doufat, že i průměrování (1.30) by vedlo ke stejnému výsledku.

1.2.3 Liouvilleův teorém

Proudění zpravidla popisujeme hustotou a tokem nějaké aditivní veličiny A . Může jít o tok hmotnosti, náboje, tepla, energie a podobně. Hustota a tok jsou definovány vztahy

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta V}, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$$

a tvoří relativistický čtyřvektor (ρ, \mathbf{j}) transformující se pomocí Lorentzovy matice. Veličina $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ je rychlostní pole. Jestliže se při proudění veličina A zachovává, platí rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0. \quad (1.33)$$

Jde o součet přes časovou i všechny prostorové derivace:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0.$$

V našem případě je věc jen nepatrně složitější. Aditivní veličinou je počet systémů v souboru, hustotou je hustota pravděpodobnosti. Tok ale musíme brát ve fázovém prostoru všech souřadnic a hybností

$$\mathbf{j} = (\rho \dot{q}_1, \dots, \rho \dot{q}_f, \rho \dot{p}_1, \dots, \rho \dot{p}_f),$$

stejně tak jako divergence v rovnici kontinuity bude obsahovat derivace přes všechny osy fázového prostoru:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho \dot{p}_k}{\partial p_k} = 0.$$

Je jasné, že pokud se systémy ve fázovém prostoru neztrácejí, musí takový zákon zachování počtu systémů platit. Provedme nyní derivace součinů:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \rho = 0.$$

Ve třetím a pátém členu využijeme Hamiltonovy rovnice

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

a dostaneme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} \rho = 0.$$

Díky záměnnosti druhých parciálních derivací se nakonec oba zmíněné členy vyruší. Dostáváme tak rovnici kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k = 0.$$

Vzhledem k tomu, že $\rho = \rho(t, q_k, p_k)$ dostáváme tak

$$\blacktriangleright \quad \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (1.34)$$

Hustota pravděpodobnosti se nemění a pravděpodobnost výskytu systémů ve fázovém prostoru se chová jako nestlačitelná kapalina. Rovnice (1.34) se nazývá Liouvilleův teorém a má ve statistické fyzice zásadní důležitost.

Poznámka: Rovnici kontinuity můžeme obdobně upravit i u proudění běžné tekutiny, kterou popsujeme pouze hustotním a rychlostním polem:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (\rho u_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} u_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \rho = 0.$$

První dva členy dávají úplnou časovou derivaci hustoty a poslední člen lze upravit za pomoci divergence:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

Je jasné, že proudění normální tekutiny je nestlačitelné, tj. $d\rho/dt = 0$, je-li $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

Hustota pravděpodobnosti je podle vztahu (1.34) konstantní. Kolik konstant máme ve výpočtu k dispozici? Počítáme-li zobecněné souřadnice a zobecněné hybnosti z Hamiltonových rovnic, vyjde řešení závislé na počátečním stavu (f polohách a f hybnostech), tj. obsahuje $2f$ integračních konstant pohybu, přesněji $2f - 1$, protože jednu konstantu spotřebujeme na volbu počátku časové osy t_0 :

$$\begin{aligned} q_k &= q_k(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{2f-1}), \\ p_k &= p_k(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{2f-1}). \end{aligned}$$

Kdybychom získané řešení dokázali beze zbytku invertovat a spočítat tyto integrační konstanty

$$\alpha_k = \alpha_k(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f),$$

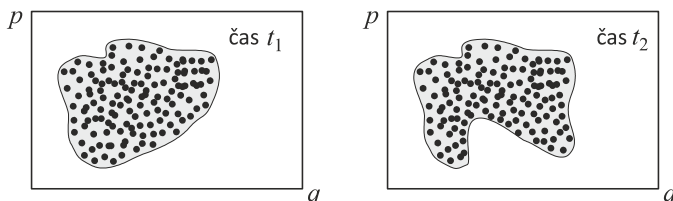
získali bychom všechny zákony zachování souboru. Bohužel ne vždy jsou definovány na celém oboru a z mechaniky máme zajištěnu existenci jen sedmi základních zákonů zachování: energie, hybnosti a momentu hybnosti. Má-li být úplná derivace hustoty pravděpodobnosti podle Liouvilleova teorému konstantní, je rozumné předpokládat, že je funkcí těchto známých integrálů pohybu:

$$\rho = \rho(E, \mathbf{p}, \mathbf{L}).$$

Vybereme-li souřadnicový systém pohybující se s těžištěm souboru a rotující spolu s ním, zůstává jediná nenulová veličina, na které může záviset hustota pravděpodobnosti – energie:

$$\blacktriangleright \quad \rho = \rho(E). \quad (1.35)$$

Jde o nejzávažnější důsledek Liouvillova teorému.



Obr. 1.4: Liouvilův teorém. Fázový objem se může měnit, ale jeho velikost zůstává konstantní.

Díky nestlačitelnosti „proudící pravděpodobnosti“ se nemění fázový objem zaujímaný vybranou makroskopickou částí systémů. Jestliže systémy zaujímaly na začátku ve fázovém prostoru určitý objem ϕ , bude se tento objem v průběhu časového vývoje různě deformovat, ale jeho velikost se nebude měnit. Tento objem (nebo váhový faktor) tedy bude opět jen funkcí energie systému

$$\blacktriangleright \quad \phi = \phi(E); \quad \Gamma = \Gamma(E). \quad (1.36)$$

To je jen jiná formulace Liouvillova teorému. Více se dozvíte v publikaci [8].

Hustota energetických stavů

Pro element pravděpodobnosti můžeme díky Liouvillovu teorému psát

$$dw = \rho d\Gamma = \rho(E) d\Gamma(E) = \rho \frac{d\Gamma}{dE} dE = \rho(E) \gamma(E) dE, \quad (1.37)$$

kde jsme označili

$$\gamma(E) \equiv \frac{d\Gamma}{dE} \quad (1.38)$$

tzv. hustotu energetických stavů (vzpomeňte si, že Γ má význam počtu kvantových stavů v uvažovaném fázovém objemu). U spojitých problémů je hustota energetických stavů spojitou funkcí, mnohdy má však i diskrétní část:

$$\gamma(E) = g(E) + \sum_n g_n \delta(E - E_n). \quad (1.39)$$

Symbol δ znamená Diracovu distribuci (analogie Kroneckerova delta v prostorech l_2 u prostorů L_2). Koeficienty g_n nazýváme stupeň degenerace stavu n .

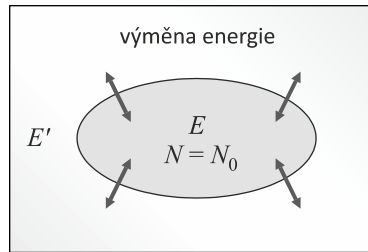


1.3 Gibbsův kanonický soubor

1.3.1 Odvození rozdělení

Při odvození použijeme následující předpoklady:

- Systém o N částicích může vyměňovat energii s okolím. Znamená to tedy například možnost výměny tepelné energie přes stěny systému.
- Počet částic systému je konstantní. Systém nevyměňuje částice s okolím, částice v něm nevznikají ani nezanikají.
- Jediným vnějším parametrem je objem systému (je dán vnějšími faktory, tvarem nádoby). Práce obecně může záviset na mnoha vnějších faktorech: $dA = A_k da_k$. Veličiny A_k nazýváme zobecněné síly a veličiny a_k vnější parametry. V našem jednoduchém příkladě máme jediný člen $dA = pdV$.
- Energie vázaná na povrch soustavy $E_{\partial V}$ je zanedbatelná vzhledem k celkové energii soustavy E_V , tj. zanedbáme povrchové jevy.
- Budeme podle Liouvillova teorému předpokládat, že hustota pravděpodobnosti i fázový objem závisejí jen na energii soustavy.



Obr. 1.5: Gibbsův kanonický soubor

Uvedené předpoklady lze jednoduše vyjádřit matematickými vztahy:

- (1) $E \neq \text{const}$,
- (2) $N = \text{const}$,
- (3) $dA = pdV$,
- (4) $E_{\partial V} \ll E_V$,
- (5) $\phi = \phi(E)$; $\rho = \rho(E)$.

První věta termodynamická bude pro tuto soustavu mít jednoduchý tvar

$$dU = T dS - p dV. \quad (1.41)$$

Vzhledem k tomu, že počet částic soustavy se nemění, je poslední člen v (1.7) nulový. Proměnné okolí budeme označovat čárkou. Pravděpodobnost, že systém i s okolím nalezneme ve stavu s určitou energií, je dána aditivností energie a multiplikatívností fázového objemu:

$$dw_{\text{tot}} = \rho(E_{\text{tot}}) d\Gamma_{\text{tot}} = \rho(E + E') d\Gamma d\Gamma'. \quad (1.42)$$

Pro nezávislé subsystémy se ale pravděpodobnosti násobí a mělo by proto také platit:

$$dw_{\text{tot}} = dw(E) dw(E') = \rho(E) d\Gamma(E) \rho(E') d\Gamma(E') = \rho(E) \rho(E') d\Gamma d\Gamma'. \quad (1.43)$$

Porovnáním obou možností zjistíme, že pro hustotu pravděpodobnosti musí platit vztah

$$\rho(E + E') = \rho(E) \rho(E'). \quad (1.44)$$

V matematice se ukazuje, že existuje jediná funkce s touto vlastností, a tou je obecná exponenciála

$$\rho(E) = e^{c_1 + c_2 E}. \quad (1.45)$$

V exponenciále označíme konstanty lineární kombinace písmeny α , $-\beta$. Volba znaménka je v tuto chvíli nepodstatná, a kdyby nebyla správná, β by vyšlo záporné. Uvidíme, že ve skutečnosti s rostoucí energií systému klesá pravděpodobnost jeho výskytu, a proto je minus před energií správné. Uveďme výraz jak pro spojitý, tak pro diskretní případ:

$$\rho(E) = e^{\alpha - \beta E}; \quad w_n = e^{\alpha - \beta E_n}. \quad (1.46)$$

Hodnoty konstant α a β odvodíme z podmínky, že statistické výsledky musí limitně přecházet ve známé zákony termodynamiky. V diskretním případě závisí možné hodnoty energetického spektra na vnějších parametrech systému, v našem případě na objemu zaujímaném systémem, tj. $E_n = E_n(V)$.

1.3.2 Konstanty rozdělení

Určeme nyní konstanty α a β . Nalezneme diferenciál střední hodnoty energie a porovnáme ho s první větou termodynamickou. Odvození je možné provést spojitě nebo diskretně, například pro střední hodnotu energie můžeme ve spojitém případě psát

$$U = \int E dw = \int E \rho(E) d\Gamma = \int E \rho(E) \gamma(E) dE \quad (1.47)$$

a v diskretním

$$U = \sum E_n w_n = \sum E_n(V) w_n. \quad (1.48)$$

My se v tomto odvození budeme držet diskretního případu a naopak některé příští odvození pro změnu povedeme spojitě. Nalezneme tedy diferenciál výrazu (1.48):

$$dU = \sum \left[\left(\frac{\partial E_n}{\partial V} dV \right) w_n \right] + \sum E_n dw_n.$$

Hustota energie n -tého stavu odpovídá tlaku generovanému n -tým stavem (až na znaménko). V mechanice je tlak hustotou energie: $p = \Delta F / \Delta S = \Delta F \Delta l / (\Delta S \Delta l) = -\Delta E / \Delta V$.

Znaménko se volí záporné (síla je minus gradient energie). V druhém výrazu použijeme geniální trik, energii E_n vyjádříme pomocí pravděpodobnosti (1.46):

$$dU = - \sum (p_n w_n dV) + \sum \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} \ln w_n \right) dw_n .$$

V součtech ponecháme jen výrazy, přes které se opravdu počítá, ostatní členy vytkneme:

$$dU = - \sum (p_n w_n) dV + \frac{\alpha}{\beta} d \sum w_n - \frac{1}{\beta} \sum (\ln w_n dw_n) .$$

V prvním výrazu je střední hodnota parciálních tlaků rovna celkovému tlaku. V druhém výrazu je součet všech pravděpodobností roven jedné a diferenciál jednotky je nulový. Třetí výraz upravíme podle vztahu $f dg = d(fg) - g df$:

$$dU = - p dV - \frac{1}{\beta} d \sum (w_n \ln w_n) + \frac{1}{\beta} \sum (w_n d \ln w_n) .$$

Nyní ukažme, že poslední výraz je nulový:

$$\sum (w_n d \ln w_n) = \sum \left(w_n \frac{1}{w_n} dw_n \right) = \sum dw_n = d \sum w_n = d 1 = 0 .$$

Ze statistických úvah jsme tak konečně dostali výraz pro diferenciál energie, který můžeme porovnat s první větou termodynamickou $dU = -pdV + TdS$:

$$dU = - p dV - \frac{1}{\beta} d \sum (w_n \ln w_n) . \quad (1.49)$$

Je zřejmé, že koeficient β musí být úměrný převrácené hodnotě absolutní teploty a suma v druhém výrazu entropii. To platí až na libovolný multiplikativní koeficient, který musí být určen experimentálně:

► $\beta = 1 / (k_B T), \quad (1.50)$

► $S = -k_B \sum (w_n \ln w_n) . \quad (1.51)$

Poznámka 1: Tak jako v každé fyzikální teorii je i ve statistice jedna volitelná konstanta k_B . Nazýváme ji Boltzmannova konstanta a volbou její hodnoty můžeme vytvářet různé statistické teorie. Jen jedna z nich bude ale odpovídat reálné přírodě. Jde o stejnou situaci, jakou jsme poznali v kvantové teorii při zavedení Planckovy konstanty. Po porovnání prvních odvozených vztahů (například stavové rovnice ideálního plynu) se skutečností zjistíme hodnotu Boltzmannovy konstanty

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1} . \quad (1.52)$$

Poznámka 2: Navíc jsme získali statistický výraz pro entropii (1.51), který středuje logaritmus pravděpodobnosti n -tého stavu. Z hlediska statistiky je až na konstanty entropie rovna střední hodnotě logaritmu pravděpodobnosti:

$$S = -k_B \langle \ln w \rangle . \quad (1.53)$$

Poznámka 3: Vztah mezi entropií a pravděpodobností realizace systému odvodil již Ludwig Boltzmann a je znám jako Boltzmannova rovnice ve tvaru

$$S = -k_B \ln P. \quad (1.54)$$

Možná vás překvapí znaménko minus ve vztahu pro entropii. Uvědomíme-li si, že je pravděpodobnost normovaná k jedné, tj. každá dílčí pravděpodobnost je menší než jedna, je logaritmus pravděpodobnosti záporný. Znaménko minus před vztahem tedy zajišťuje nezápornou hodnotu entropie. Porovnáním s první větou termodynamickou jsme zjistili význam koeficientu β v pravděpodobnostním rozdělení. Dalšími úpravami statistické definice entropie a opětovným porovnáním s termodynamikou získáme ještě význam koeficientu α :

$$S = -k_B \sum [w_n \ln w_n].$$

Za $\ln w_n$ dosadíme ze vztahu $w_n = e^{\alpha - \beta E_n} \Rightarrow \ln w_n = \alpha - \beta E_n$, proto platí

$$\begin{aligned} S &= -k_B \sum [w_n (\alpha - \beta E_n)] = \\ &= -k_B \alpha \sum w_n + k_B \beta \sum E_n w_n = \\ &= -k_B \alpha + k_B \beta U. \end{aligned}$$

Snadno nyní určíme neznámý koeficient α :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-S + k_B \beta U}{k_B} = \frac{-S + U/T}{k_B} = \\ &= \frac{U - TS}{k_B T} = \frac{F}{k_B T}. \end{aligned}$$

Získali jsme tak hodnoty obou koeficientů:

$$\blacktriangleright \quad \alpha = \frac{F}{k_B T}; \quad \beta = \frac{1}{k_B T}. \quad (1.55)$$

Pravděpodobnostní rozdělení tedy je (pro spojitý i diskrétní případ):

$$\blacktriangleright \quad \rho(E) = e^{\frac{F-E}{k_B T}}; \quad w_n(E) = e^{\frac{F-E_n}{k_B T}}. \quad (1.56)$$

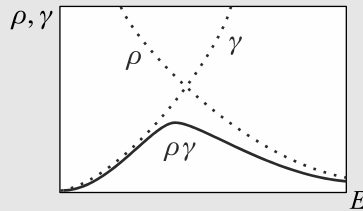
Často výrazy zkracujeme právě pomocí koeficientu $\beta = 1/k_B T$:

$$\blacktriangleright \quad \rho(E) = e^{\beta(F-E)}; \quad w_n(E) = e^{\beta(F-E_n)}. \quad (1.57)$$

Odvozené vztahy se nazývají Gibbsovo kanonické rozdělení. Je pojmenováno podle významného amerického fyzika Josiaha Gibbse (1839–1903), který se zabýval termodynamikou a statistickou fyzikou. Mimo jiné také zformuloval známé Gibbsovo pravidlo fází platné při změně skupenství. V kvantové teorii máme místo hustoty pravděpodobnosti operátor hustoty

$$\hat{\rho} = \exp[\beta(F - \hat{H})]. \quad (1.58)$$

Poznámka: Ve výrazu pro pravděpodobnost $dw = \rho d\Gamma = \rho\gamma dE$ je hustota pravděpodobnosti ρ exponenciálně klesající funkcí energie. Naopak hustota energetických stavů γ s rostoucí energií roste. Výsledná hustota pravděpodobnosti proto má maximum v okolí určité charakteristické energie, která je v systému zastoupena s největší pravděpodobností.



Obr. 1.6: Hustota pravděpodobnosti a hustota stavů

1.3.3 Partiční suma a její význam

Nyní známe obě dvě konstanty rozdělení a z normovací podmínky můžeme určit volnou energii. A to je právě klíč k úspěchu. Známe-li volnou energii, můžeme jejím derivováním zjistit mnoho informací o systému, například stavovou rovnici. Výpočet volné energie provedeme paralelně v diskrétním i spojitém případě, abyste oba postupy mohli porovnat. V levé části bude diskrétní výpočet, v pravé spojitý:

$$\begin{array}{l|l}
 \sum w_n = 1 & \Rightarrow \\
 \sum e^{\beta(F - E_n)} = 1 & \Rightarrow \\
 \sum e^{-\beta E_n} = e^{-\beta F} & \Rightarrow \\
 \ln\left(\sum e^{-\beta E_n}\right) = -\beta F & \Rightarrow \\
 F = -k_B T \ln\left(\sum e^{-\beta E_n}\right); & \\
 \hline
 \int \rho d\Gamma = 1 & \Rightarrow \\
 \int e^{\beta(F - E)} d\Gamma = 1 & \Rightarrow \\
 \int e^{-\beta E} d\Gamma = e^{-\beta F} & \Rightarrow \\
 \ln\left(\int e^{-\beta E} d\Gamma\right) = -\beta F & \Rightarrow \\
 F = -k_B T \ln\left(\int e^{-\beta E} d\Gamma\right). &
 \end{array}$$

Veličina nacházející se v logaritmu v kulaté závorce se nazývá *partiční funkce* (partiční suma, stavová suma) a je ústřední veličinou statistické fyziky, označujeme ji Z . Vzhledem k tomu, že argument logaritmu by měl být bezrozměrný, je použití váhového faktoru namísto fázového objemu vhodnější. V podstatě každý statistický výpočet začíná určením partiční (stavové) sumy. Popišme si nyní základní konstrukci statistického výpočtu:

Schéma statistického výpočtu

- 1) Zjistíme, jakých energií E_n může systém nabývat. V klasickém případě jde vždy o všechny hodnoty energií, které se v systému mohou vyskytnout. V kvantovém případě musíme určit spektrum Hamiltonova operátoru (například řešit Schrödingerovu rovnici).

- 2) Nalezneme partiční funkci Z jako součet tzv. Boltzmannových faktorů $e^{-\beta E}$ přes celý obor energetického spektra:

$$Z = \sum e^{-\beta E_n} ; \quad \text{resp.} \quad Z = \int e^{-\beta E} d\Gamma . \quad (1.59)$$

Právě tento krok může být komplikovaný. Často se řeší grafickými či numerickými metodami. Je třeba sečíst skutečně možnosti a na žádnou nezapomenout.

- 3) Logaritmováním nalezneme volnou energii F , stěžejní statistickou veličinu:

$$F = -k_B T \ln Z . \quad (1.60)$$

- 4) Ze znalosti volné energie určíme entropii a tlak (stavovou rovnici) systému podle vztahu (1.10):

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right), \quad p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right) . \quad (1.61)$$

- 5) Určíme další odvozené veličiny, tj. vnitřní energii a její derivace (například měrná tepla, susceptibilitu atd.). Výchozím bodem může být Gibbsova-Helmholtzova rovnice (1.11) pro výpočet vnitřní energie ze známé volné energie

$$U = F + TS = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) . \quad (1.62)$$

Význam partiční sumy:

- Partiční suma je součtem všech Boltzmannových faktorů přes možné hodnoty energie (diskrétním či spojitým)

$$Z = \sum e^{-\beta E_n} ; \quad \text{resp.} \quad Z = \int e^{-\beta E} d\Gamma .$$

- V kvantové teorii lze partiční sumu zapsat pomocí operátoru energie:

$$Z = \sum e^{-\beta E_n} = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right),$$

kde symbol $\text{Tr}()$ znamená stopu (součet diagonálních prvků v nějaké reprezentaci) funkce operátoru uvedeného v závorce. Výsledný výraz je znám jako Slaterova rovnice. Je pojmenovaná podle význačného amerického fyzika Johna Clarka Slatera (1900–1976), který se zabýval především kvantovou teorií.

- Partiční suma má jednoznačný vztah k volné energii a můžeme ji určit z experimentálního měření volné energie:

$$F = -k_B T \ln Z \quad \Rightarrow \quad Z = e^{-\beta F} .$$

- Partiční suma je převrácenou hodnotou normovací konstanty v pravděpodobnostním rozdělení, stačí dosadit za F z předchozího vztahu:

$$\rho(E) = e^{\beta(F-E)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} ; \quad w_n(E) = e^{\beta(F-E_n)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} .$$

- Partiční suma je Laplaceovým obrazem hustoty energetických stavů $\gamma(E)$:

$$Z = \int e^{-\beta E} d\Gamma = \int_0^{\infty} e^{-\beta E} \gamma(E) dE .$$

Naopak, známe-li partiční sumu (například z experimentálního změření volné energie), dostaneme po provedení inverzní Laplaceovy transformace hustotu energetických stavů:

$$\gamma(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\beta E} Z(\beta) d\beta .$$

Shrňme jednotlivé významy partiční sumy:

$$\begin{aligned} Z &= \sum e^{-\beta E_n} ; \\ Z &= \text{Tr } e^{-\beta \hat{H}} ; \\ \blacktriangleright \quad Z &= e^{-\beta F} ; \\ Z &= \frac{1}{K} ; \\ Z &= \mathcal{L}_\beta(\gamma) . \end{aligned} \tag{1.63}$$

Nyní již víme vše, co je třeba k zahájení a někdy i k úspěšnému dokončení statistického výpočtu. V příští kapitole se s tímto postupem seznámíme na jednoduchých příkladech.

● Příklad 1.4: Maximum kanonického rozdělení

Dokažte, že kanonické rozdělení má maximum při $E_n = \langle E \rangle$.

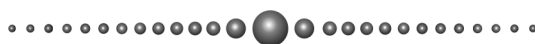
Řešení: Uvažujme diskrétní kanonické rozdělení $w_n(\beta) = A \exp[-\beta E_n]$. Z normovací podmínky nalezneme normovací konstantu A :

$$\sum w_k = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sum_k e^{-\beta E_k}} \Rightarrow w_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_k e^{-\beta E_k}} .$$

Tak, jak už víme z dřívějšíka, je normovací konstanta rovna převrácené hodnotě partiční sumy. Nyní najdeme podmínku pro maximum vzhledem k parametru β :

$$\frac{\partial w_n}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow E_n = \sum_k E_k w_k \Rightarrow E_n = \langle E \rangle .$$

Nejvíce je v systému zastoupen stav odpovídající střední hodnotě energie. ▀



1.4 Jednoduché příklady

1.4.1 Ideální plyn

Nyní provedeme poprvé kompletní statistický výpočet podle postupu z kapitoly 1.3.3. Systémem bude N stejných klasických částic, které neinteragují ani vzájemně, ani s okolím (potenciální energie je nulová). Souborem by bylo mnoho těchto systémů (systémem je například nádoba naplněná plynem, souborem je mnoho těchto nádob). Rozhodli jsme se tedy popisovat nádobu jako celek, to nám umožní například zjistit tlak v této nádobě. Postupujme nyní přesně podle dříve uvedeného schématu:

1) Energetické spektrum. Energie systému může nabývat libovolné nezáporné hodnoty a je dána pouze součtem kinetických energií všech částic:

$$E = \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m}.$$

2) Partiční funkce. Nalezneme partiční funkci jako součet (v tomto případě spojitý, tedy integrál) všech Boltzmannových faktorů:

$$\begin{aligned} Z &= \int e^{-\beta E} d\Gamma = \int \exp \left[- \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{p}_a^2}{2mk_B T} \right] \frac{d^{3N}x d^{3N}p}{(2\pi\hbar)^{3N}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}} V^N \int \exp \left[- \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{p}_a^2}{2mk_B T} \right] d^{3N}p = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}} V^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \frac{\xi^2}{2mk_B T} \right] d\xi \right)^{3N} = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}} V^N \left(\sqrt{2\pi mk_B T} \right)^{3N}. \end{aligned}$$

kde jsme rozepsali do složek jednotlivé hybnosti, $3N$ součtů v argumentu exponenciály jsme převedli na součin exponenciál. Integrál se tak stal součinem $3N$ stejných integrálů Gaussova typu (I.3.576). Výsledná partiční suma tedy je

$$\begin{aligned} Z(T, V, N) &= A^N V^N T^{3N/2}; \\ A &\equiv (2\pi mk_B)^{3/2} / (2\pi\hbar)^3. \end{aligned} \tag{1.64}$$

3) Volná energie. Volnou energii snadno určíme ze vztahu (1.60):

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z = -Nk_B T \ln \left(A V T^{3/2} \right).$$

4) Termodynamické veličiny. Určíme nyní entropii a tlak (stavovou rovnici) jako partiální derivace (1.10) volné energie. Chemický potenciál je vzhledem ke konstantnímu počtu částic nepotřebný.

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) = +Nk_B \ln(AVT^{3/2}) + \frac{3Nk_B}{2}, \quad (1.65)$$

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right) = \frac{Nk_B T}{V}. \quad (1.66)$$

Provedeme-li limitní přechod k nulové teplotě (tedy k absolutní nule), bude první část ve vztahu (1.65) pro entropii divergovat k $-\infty$. To je dáno tím, že v oblasti nízkých teplot selhává klasický výpočet a bylo by třeba provést výpočet kvantový. Po takovém výpočtu by se první část výrazu s klesající teplotou blížila k nule. První část výrazu (1.65) závisí prostřednictvím koeficientu A na Planckově konstantě. To je proto, že Planckova konstanta určuje velikost jednoho stavu ve fázovém prostoru a entropie jako statistická veličina souvisí s pravděpodobností výskytu určitého stavu. Druhá část vztahu pro entropii má charakter integrační konstanty $S_0 = 3Nk_B/2$, která je hodnotou entropie při teplotě absolutní nuly (její nenulová hodnota je mimo jiné předmětem třetí věty termodynamické, o které jsme se nezmiňovali). Pověšme si, že velikost entropie je úměrná počtu částic. To je logické, jde o tepelnou energii vynásobenou integračním faktorem a energie je v počtu částic aditivní. Entropii budeme věnovat samostatnou kapitolu později.

Druhý odvozený vztah (1.66) je stavovou rovnicí ideálního plynu ($pV = Nk_B T$) a na Planckově konstantě samozřejmě nemůže záviset. Tlak je v tomto vztahu klasickým projevem nekvantového plynu. Uveďme i alternativní vyjádření pro stavovou rovnici:

$$p = \frac{Nk_B T}{V}; \quad (1.67)$$

$$p = nk_B T; \quad n \equiv \frac{N}{V}. \quad (1.68)$$

Veličinu n nazýváme koncentrace částic. Stavová rovnice se někdy vyjadřuje i za pomoci univerzální plynové konstanty, pro naše účely nebude takové vyjádření nutné.

5) Vnitřní energie. Vnitřní energii bychom mohli určit přímou integrací z její definice, tj. $U = \langle E \rangle = \int E dw$, ale rychlejší je využít definici volné energie $F = U - TS$:

$$\begin{aligned} U &= F + TS = \\ &= -Nk_B T \ln(AVT^{3/2}) + \frac{3Nk_B T}{2} + Nk_B T \ln(AVT^{3/2}) = \frac{3}{2} Nk_B T \end{aligned}$$

Výsledek tedy je

$$U = \frac{3}{2} Nk_B T; \quad u \equiv \frac{U}{N} = \frac{3}{2} k_B T, \quad (1.69)$$

kde u je energie jedné částice. Vnitřní energie opět nezávisí na Planckově konstantě, povšimněte si, že každý stupeň volnosti systému přispívá k vnitřní energii hodnotou $k_B T/2$. Toto tvrzení je známo jako *ekvipartiční teorém*.

Na závěr vypíšeme všechny odvozené vztahy pro ideální plyn:

$$\begin{aligned}
 Z &= A^N V^N T^{3N/2}; & A &= \left(\frac{mk_B}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}, \\
 F &= -Nk_B T \ln(AVT^{3/2}), \\
 S &= \frac{3Nk_B}{2} + Nk_B \ln(AVT^{3/2}), & (1.70) \\
 p &= \frac{Nk_B T}{V}, \\
 U &= \frac{3}{2} Nk_B T.
 \end{aligned}$$

Poznámka: Zpravidla se výpočet partiční sumy provádí jen pro systém s jednou jedinou částicí. Partiční sumu jedné částice označujeme malým písmenem z . Jak je z výpočtu vidět, budeme-li mít N nezávislých částic, bude celková partiční suma součinem integrálů partičních sum jednotlivých částic. Pro identické nekvantové částice proto platí

$$Z = z_1 z_2 \dots z_N = z^N. \quad (1.71)$$

Partiční suma je multiplikativní v počtu částic, volná energie, entropie, tlak a vnitřní energie jsou naopak aditivní veličiny.

1.4.2 Částice ve vnějším poli

Prozkoumejme nyní vlastnosti hustoty pravděpodobnosti částice ve vnějším potenciálním poli $V(x, y, z)$. Souborem je mnoho takovýchto částic. Fázovým prostorem bude n -tice souřadnic a hybností (x, y, z, p_x, p_y, p_z) . Energie systému má tvar

$$E = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(x, y, z).$$

Element pravděpodobnosti bude

$$dw = \rho d\phi = e^{\beta(F-E)} d^3x d^3p = K e^{-\beta E} d^3x d^3p.$$

Pokud bychom namísto fázového prostoru využili váhový prostor, budeme mít

$$dw = \rho d\Gamma = e^{\beta(F-E)} \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \tilde{K} e^{-\beta E} d^3x d^3p.$$

Z toho je patrné, že obě vyjádření vedou na stejný finální vztah, normovací konstantu musíme v obou případech určit z podmínky $\int dw = 1$. Po dosazení za energii získáváme výsledné pravděpodobnostní rozdělení:

$$dw(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = K \exp \left[-\beta \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(x, y, z) \right) \right] d^3x d^3p. \quad (1.72)$$

Vzhledem k vlastnostem exponenciální funkce vidíme, že výsledek lze napsat jako součin pravděpodobnosti pro souřadnice a pro hybnosti, tj. rozdělení souřadnic a hybností je nezávislé

$$dw = dw_1(\mathbf{x}) dw_2(\mathbf{p});$$

$$dw = K_1 \exp\left[-\frac{V(x, y, z)}{k_B T}\right] d^3x \times K_2 \exp\left[-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mk_B T}\right] d^3p.$$

V případě vhodného tvaru potenciální energie se může rozdělení rozpadnout dokonce i na násobky pravděpodobností v jednotlivých osách. Pro hybnosti to jde vždy automaticky. V dalším textu budeme obě pravděpodobnosti probírat odděleně, proto je budeme značit jediným symbolem dw .

$$dw(\mathbf{p}) = dw(p_x) dw(p_y) dw(p_z);$$

$$dw(\mathbf{p}) = K_x \exp\left[-\frac{p_x^2}{2mk_B T}\right] dp_x \times K_y \exp\left[-\frac{p_y^2}{2mk_B T}\right] dp_y \times K_z \exp\left[-\frac{p_z^2}{2mk_B T}\right] dp_z.$$

Všechny tři elementy pravděpodobnosti jsou dány stejnou funkcí (exponenciálou), proto jsou pravděpodobnosti všech tří projekcí hybností shodné. Konstanty rozdělení můžeme snadno určit z normovací podmínky $\int dw = 1$, která platí pro každou část rozdělení zvlášť.

Barometrická formule

Zabývejme se nyní rozdělením poloh částic v tíhovém poli $V = mgy$. Hmotnost jedné částice je m , výška nad povrchem y . Pravděpodobnost výskytu částice bude

$$dw(x, y, z) = K \exp\left[-\frac{mgy}{k_B T(y)}\right] dx dy dz.$$

Je evidentní, že pravděpodobnost výskytu částice nezávisí na souřadnicích x , z , přes které můžeme integrovat a výsledek integrace zahrnout do normovací konstanty. Zůstane jen pravděpodobnost výskytu částice ve svislém směru:

$$dw(y) = C \exp\left[-\frac{mgy}{k_B T(y)}\right] dy. \quad (1.73)$$

Hustota pravděpodobnosti výskytu částice dw/dy musí být úměrná počtu jedinců v dané oblasti fázového prostoru (v tomto případě jen v objemu), tedy koncentraci $n(y)$ částic nad zemí:

$$n(y) = n_0 \exp\left[-\frac{mgy}{k_B T(y)}\right]. \quad (1.74)$$

Nyní již snadno určí tlak $p = nk_B T$:

$$p(y) = n_0 k_B T(y) \exp\left[-\frac{mgy}{k_B T(y)}\right]. \quad (1.75)$$

Jde o známou Boltzmannovu *barometrickou formuli*, která popisuje pokles tlaku částic s výškou v atmosféře. Známe-li teplotní profil atmosféry, snadno dopočteme výškový profil tlaku.

► Příklad 1.5: Rotující válec

Určete hustotu plynu ve válci o poloměru R a délce L , který rotuje kolem své osy úhlovou rychlostí ω .

Řešení: Potenciální energii jedné rotující částice určíme jako záporně vzatou rotační energii ($T + V = \text{const}$)

$$V(r) = -\frac{J\omega^2}{2} = -\frac{mr^2\omega^2}{2}.$$

Z barometrické formule máme okamžitě koncentraci částic

$$n(r) = n_0 \exp\left[\frac{mr^2\omega^2}{2k_B T}\right].$$

Boltzmannovo pravděpodobnostní rozdělení

Zabývejme se nyní rozdělením jedné složky hybnosti či rychlosti. Pro konkrétnost uvažujme projekci hybnosti či rychlosti do osy x , mohli bychom však zvolit libovolnou osu:

$$dw(p_x) = K \exp\left[-\frac{p_x^2}{2mk_B T}\right] dp_x.$$

Určeme nejprve konstantu rozdělení z normovací podmínky. Integraci provedeme za pomoci vztahu (I.3.576):

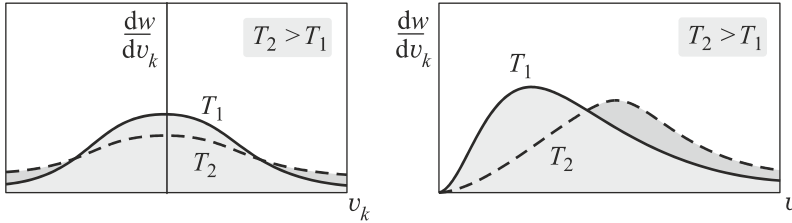
$$\begin{aligned} \int dw(p_x) &= 1 \quad \Rightarrow \\ \int_{-\infty}^{+\infty} K \exp\left[-\frac{p_x^2}{2mk_B T}\right] dp_x &= 1 \quad \Rightarrow \\ K\sqrt{2\pi mk_B T} &= 1 \quad \Rightarrow \\ K &= \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_B T}}. \end{aligned}$$

Boltzmannovo rozdělení v hybnostech či rychlostech má tedy charakter Gaussova balíku $y = A \exp(-ax^2)$:

►
$$dw(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_B T}} \exp\left[-\frac{p_x^2}{2mk_B T}\right] dp_x; \quad (1.76)$$

►
$$dw(v_x) = \frac{m}{\sqrt{2\pi mk_B T}} \exp\left[-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right] dv_x. \quad (1.77)$$

Nejpravděpodobnější projekcí hybnosti nebo rychlosti je nulová hodnota, to je dáno chaotičností pohybu. Čím vyšší je teplota, tím vyšší je podíl částic s vysokými rychlostmi. Kladné i záporné projekce jsou zastoupeny stejně, rozdělení je symetrické. Plocha pod rozdělením je vždy rovna jedné, tj. celkové pravděpodobnosti výskytu částice.



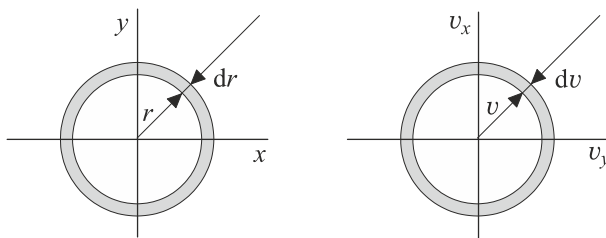
Obr. 1.7: Boltzmannovo rozdělení (nalevo)
a Maxwelllovo rozdělení (napravo)

Maxwellovo pravděpodobnostní rozdělení

V tomto odstavci se budeme zabývat rozdělením velikosti celkové rychlosti částice, tzv. Maxwellovým rozdělením. Nejprve napíšeme rozdělení ve všech třech rychlostech, které je součinem rozdělení v jednotlivých osách:

$$dw(\mathbf{v}) = dw(v_x) dw(v_y) dw(v_z) = \frac{m^3}{(2\pi mk_B T)^{3/2}} \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}\right] dv_x dv_y dv_z .$$

Přejdeme-li v prostoru (x, y, z) k sférickým souřadnicím a přes úhlové proměnné integrujeme, zůstane jediná proměnná – vzdálenost od počátku r a objemový element bude $dV = 4\pi r^2 dr$. Nyní provedeme tutéž operaci, ale v rychlostním prostoru, tj. s osami označenými (v_x, v_y, v_z) . Výsledek je analogický: objemový element bude mít hodnotu $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$.



Obr. 1.8: Sférický element v rychlostním prostoru

Nyní již můžeme napsat rozdělení ve velikostech rychlostí (Maxwellovo rozdělení)

$$\blacktriangleright \quad dw(v) = \frac{4\pi m^3}{(2\pi mk_B T)^{3/2}} v^2 \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right] dv . \quad (1.78)$$

Jde o funkci typu $y = x^2 \exp[-x^2]$, průběh vidíme na obrázku 1.7 napravo. Pravděpodobnost nalézt částici s konkrétní rychlostí má maximum závislé na teplotě. Je málo pravdě-

podobné nalézt částici s nízkou i s vysokou rychlostí. U vysokých rychlostí pravděpodobnost nalezení částice s touto rychlostí exponenciálně klesá. Částice s vysokými rychlostmi z chvostu Maxwellova rozdělení mohou mít únikovou rychlost od Země a zemská atmosféra je ztrácí. Prohlédněte si hustotu pravděpodobnosti dw/dv na obrázku.

Typické rychlosti

Ze znalosti rozdělení můžeme snadno určit nejpravděpodobnější hodnotu rychlosti (při ní má rozdělení maximum), střední hodnotu velikosti rychlosti (dělí plochu pod křivkou rozdělení na dvě stejné poloviny) a střední kvadratickou rychlost (ta je důležitá pro určení středních kvadratických fluktuací, kterým budeme věnovat samostatnou kapitolu). Nejpravděpodobnější rychlost určíme jako maximum hustoty pravděpodobnosti:

$$\frac{d}{dv} v^2 \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}.$$

Střední hodnotu velikosti rychlosti spočteme z definice, která vede na integrál typu (I.3.575):

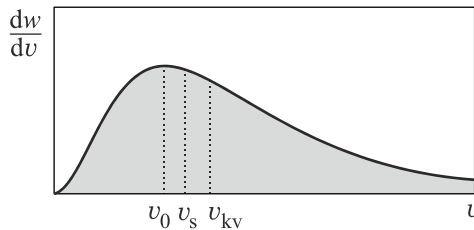
$$v_s = \langle v \rangle = \int_0^{\infty} v dw(v) = \frac{4\pi m^3}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \int_0^{\infty} v^3 \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right] dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}.$$

Střední kvadratická hodnota vede na jednoduchý integrál typu (I.3.574):

$$v_{kv} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{\infty} v^2 dw(v)} = \sqrt{\frac{4\pi m^3}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \int_0^{\infty} v^4 \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right] dv} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$$

Všechny tři charakteristické rychlosti se liší nepatrně a jsou řádově shodné:

$$\blacktriangleright \quad v_0 = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad ; \quad v_s = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad ; \quad v_{kv} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}. \quad (1.79)$$



Obr. 1.9: Nejpravděpodobnější, střední a kvadratická rychlost

S rostoucí teplotou se hodnota střední rychlosti částic zvyšuje. Pomocí nejpravděpodobnější rychlosti, které se někdy říká tepelná rychlost, lze Boltzmannovo i Maxwellovo rozdělení jednoduše zapsat jako

$$dw(\mathbf{v}) = C \exp\left[-\frac{\mathbf{v}^2}{v_0^2}\right] d^3\mathbf{v}; \quad dw(v) = A v^2 \exp\left[-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right] dv. \quad (1.80)$$

1.4.3 Klasický oscilátor

Termodynamické veličiny

Za systém budeme nyní považovat soustavu N stejných nezávislých harmonických oscilátorů. Označme ε energii jednoho oscilátoru a z partiční sumu jednoho oscilátoru. Určeme tyto veličiny:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} .$$

$$z = \int \exp \left[-\frac{m \omega^2 x^2}{2k_B T} - \frac{p^2}{2mk_B T} \right] \frac{dx dp}{2\pi\hbar} \quad \Rightarrow$$

$$z = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{m \omega^2 x^2}{2k_B T} \right] dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{p^2}{2mk_B T} \right] dp \right) = \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m\omega^2}} \sqrt{2\pi m k_B T} \quad \Rightarrow$$

$$z = \frac{k_B T}{\hbar \omega} ; \quad Z = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^N .$$

Povšimněte si, že partiční suma je bezrozměrná, je podílem tepelné energie a energie elementárního kvanta energie oscilátoru. Váhový prostor nám opět zanechá Planckovu konstantu \hbar do nekvantového výpočtu. V klasických veličinách Planckova konstanta přirozeným způsobem vymizí. Dále již jen určíme jednotlivé termodynamické veličiny:

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln \frac{k_B T}{\hbar \omega} ,$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = N k_B + N k_B \ln \frac{k_B T}{\hbar \omega} ,$$

$$U = F + TS = N k_B T .$$

Partiční suma je opět multiplikativní v počtu částic, ostatní veličiny jsou aditivní. Entropie má opět konstantní člen a logaritmický člen, který diverguje v limitě $T \rightarrow 0$, protože klasický výpočet nelze na situaci v okolí absolutní nuly aplikovat. Zapišme přehledně dosažené výsledky pro klasický oscilátor:

$$Z = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^N ;$$

►

$$F = -N k_B T \ln \frac{k_B T}{\hbar \omega} ; \tag{1.81}$$

$$S = N k_B + N k_B \ln \frac{k_B T}{\hbar \omega} ;$$

$$U = N k_B T .$$

Pravděpodobnostní rozdělení

Napišme na závěr ještě pravděpodobnostní rozdělení v polohách a hybnostech klasického oscilátoru s určenými normovacími konstantami (normovací konstanty jsou převrácenou hodnotou odpovídající části partiční sumy):

$$dw(x) = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\pi k_B T}} \exp\left[-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T}\right] dx, \quad (1.82)$$

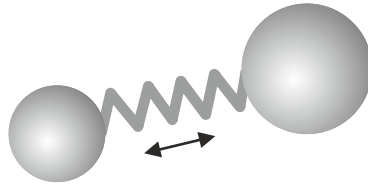
$$dw(p) = \sqrt{\frac{1}{2\pi m k_B T}} \exp\left[-\frac{p^2}{2m k_B T}\right] dp.$$

Obě rozdělení mají charakter Gaussova balíku a v principu jsou u souboru mnoha oscilátorů při dané teplotě možné i velmi velké výchylky z rovnovážné polohy a velké hybnosti. Jsou ale velmi nepravděpodobné. Povšimněte si, že na teplotě závisí jak amplituda, tak pološířka Gaussova balíku.



1.5 Další příklady

1.5.1 Kvantový oscilátor (vibrátor)



Termodynamické veličiny

Problém jednoho harmonického oscilátoru je definován vztahy (I.2.50)

$$\hat{H}|n\rangle = \varepsilon_n |n\rangle; \quad \hat{H} \equiv \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{\mathbf{X}}^2.$$

Energetické spektrum harmonického oscilátoru (I.2.63) jsme odvodili několika způsoby (Schrödingerova, Diracova, Heisenbergova reprezentace):

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad |n\rangle = \psi_n(\xi) = \alpha_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nezávislá proměnná a normovací koeficienty jsou dány vztahy

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x; \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} n! 2^n}}.$$

Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu partiční funkce, nejprve pro jeden oscilátor:

$$\begin{aligned} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}{k_B T}\right] = \\ &= \exp\left[-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}\right] = \\ &= \exp\left[-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)\right]^n. \end{aligned}$$

Zbývá řada je geometrická řada, kterou lze snadno sečíst za pomoci vztahu (I.3.584), exponentem je kvantové číslo n :

$$z = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \frac{1}{e^{+\frac{\hbar\omega}{2k_B T}} - e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}} = \frac{1}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)}.$$

Pro N nezávislých oscilátorů je partiční funkce příslušnou mocninou,

$$Z = 2^{-N} \operatorname{sh}^{-N}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right).$$

Nyní nalezneme standardním postupem volnou energii, entropii a vnitřní energii systému:

$$F = -k_B T \ln Z = N k_B T \ln \left[2 \operatorname{sh}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \right];$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -N k_B \ln \left[2 \operatorname{sh}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \right] + \frac{N \hbar\omega}{2T} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2k_B T};$$

$$U = F + TS = \frac{N \hbar\omega}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2k_B T}.$$

Shrňme dosažené výsledky (místo teploty použijeme koeficient β):

$$Z = 2^{-N} \operatorname{sh}^{-N}(\beta \hbar\omega/2);$$

$$F = N k_B T \ln \left[2 \operatorname{sh}(\beta \hbar\omega/2) \right];$$



$$S = -N k_B \ln \left[2 \operatorname{sh}(\beta \hbar\omega/2) \right] + \frac{1}{2} N \beta \hbar\omega k_B \operatorname{cth}(\beta \hbar\omega/2); \quad (1.83)$$

$$U = \frac{N \hbar\omega}{2} \operatorname{cth}(\beta \hbar\omega/2).$$

Poslední vztah pro vnitřní energii odvodil Albert Einstein v roce 1906. V tomto kvantovém případě již entropie pro $T \rightarrow 0$ nediverguje. Nalezneme střední energii soustavy harmonických oscilátorů v limitě nízkých a vysokých teplot:

$$1) T \rightarrow 0: \quad U = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{N \hbar\omega}{2} \operatorname{cth}(\beta \hbar\omega/2) = N \frac{\hbar\omega}{2}.$$

$$2) k_B T \gg \hbar\omega: \quad U = \frac{N \hbar\omega}{2} \operatorname{cth}(\beta \hbar\omega/2) \rightarrow \frac{N \hbar\omega}{2} \frac{2}{\beta \hbar\omega} = N k_B T.$$

Případ nízkých teplot je ryze kvantový. Při absolutní nule jsou všechny oscilátory v základním stavu a vnitřní energie je rovna počtu oscilátorů násobeným energií základního stavu. Při vysokých teplotách jde naopak o ryze klasický případ. Střední tepelná energie je podstatně větší než základní energetické kvantum a vnitřní energie je dána klasickým vztahem (1.81). Teplota, při které je střední tepelná energie rovna vibračnímu kvantu (argument exponenciál je roven jedné, $\hbar\omega \approx k_B T$) se nazývá *vibrační teplota*,

označujeme ji T_V . Limita nízkých teplot znamená $T \ll T_V$, limita vysokých teplot znamená $T \gg T_V$. Pro vibrační teplotu máme vztah

$$\blacktriangleright \quad T_V = \frac{\hbar\omega}{k_B}. \quad (1.84)$$

Pro různé kvantové vibrátory (například vibrující molekuly či krystalovou mříž) jde o charakteristickou veličinu. Frekvence oscilací a tedy i vibrační teplota klesají s hmotností oscilujících jedinců. Například pro molekulu vodíku je vibrační teplota 6 100 K, zatímco pro hmotnější molekulu dusíku je vibrační teplota „jen“ 3 340 K.

● Příklad 1.6: Morseův potenciál

Určete vibrační teplotu pro dvojici atomů, jejichž interakce je popsána Morseovým potenciálem (podle amerického fyzika Philipa Morseho) [10]

$$\begin{aligned} V(r) &= V_0 \left[1 - e^{-\alpha(r-r_0)} \right]^2 = \\ &= V_0 - 2V_0 e^{-\alpha(r-r_0)} + V_0 e^{-2\alpha(r-r_0)}. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Řešení: Nejprve určíme minimum potenciální energie tak, že první derivaci položíme rovnu nule. Snadno zjistíme, že minimum je v bodě $r = r_0$. Tuhost oscilací je při malých výchylkách z rovnovážné polohy rovna druhé derivaci potenciální energie v minimu (I.1.26). Z tuhosti oscilátoru určíme frekvenci:

$$\omega = \sqrt{V''(r_0)/m}.$$

Nyní již snadno odvodíme obecný vztah pro vibrační teplotu:

$$T_V = \frac{\hbar\omega}{k_B} = \frac{\hbar}{k_B} \sqrt{V''(r_0)/m}.$$

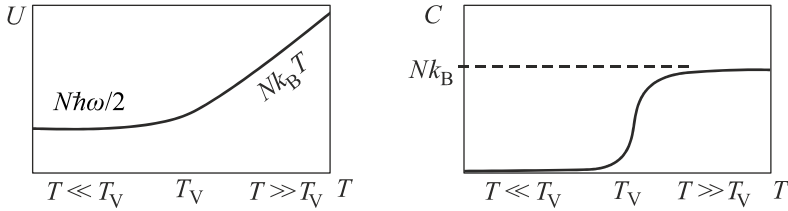
Z charakteristického průběhu potenciální energie lze snadno určit vibrační teplotu. V našem případě dostaneme po provedení derivací výsledný vztah

$$T_V = \frac{\hbar\omega}{k_B} = \frac{\hbar\alpha}{k_B} \sqrt{\frac{2V_0}{m}}.$$

Určeme nyní tepelnou kapacitu soustavy harmonických oscilátorů

$$C \equiv \frac{\partial U}{\partial T} = Nk_B \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right)^2 \text{sh}^{-2} \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right). \quad (1.86)$$

Na následujících obrázcích jsou vykresleny vypočtené průběhy vnitřní energie a tepelné kapacity. Při nízkých teplotách je vnitřní energie dána nulovými kmity ($N \hbar\omega/2$), při vysokých teplotách je lineární funkcí teploty. K přechodu mezi oběma průběhy dochází v okolí vibrační teploty. Při nízkých teplotách vibrační stupně volnosti nepřispívají k tepelné kapacitě. Říkáme, že při teplotách výrazně nižších, než je vibrační teplota, jsou vibrační stupně volnosti „zamrzlé“. Při vysokých teplotách přispívají vibrační stupně volnosti k měrnému teplu konstantní hodnotou.



Obr. 1.10: Průběh vnitřní energie a tepelné kapacity pro kvantový oscilátor

Každý vibrační stupeň volnosti přidává při vysokých teplotách k tepelné kapacitě systému hodnotu k_B . V krystalických látkách je tepelná kapacita vztažená na počet vibrujících jedinců blízká hodnotě $3 k_B$. Tento vztah v krystalech experimentálně objevili francouzští fyzici Pierre Louis Dulong (1785–1838) a Alexis Thérèse Petit (1791–1820) v roce 1819. Boltzmannovu konstantu můžeme interpretovat jako tepelnou kapacitu jednoho jednorozměrného harmonického oscilátoru. Poznamenejme, že u krystalických látek je pokojová teplota nad vibrační teplotou (na rozdíl od dvouatomárních plynů).

Pravděpodobnost nalezení vibrátoru v energetickém stavu

Pravděpodobnost je dána Boltzmannovým faktorem

$$w_n = C \exp\left[-\frac{(n+1/2)\hbar\omega}{k_B T}\right].$$

Normovací konstantu určíme buď z podmínky, že součet všech pravděpodobností je roven jedné, nebo si uvědomíme, že jde o převrácenou hodnotu partiční sumy. Výsledný vztah je:

$$\blacktriangleright \quad w_n = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega} \quad . \quad (1.87)$$

Opět provedme rozbor v limitě nízkých a vysokých teplot:

$$1) \quad T \ll T_V: \quad w_n = \lim_{T \rightarrow 0} 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \exp\left(-\frac{(n+1/2)\hbar\omega}{k_B T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n \neq 0; \end{cases}$$

$$2) \quad T \gg T_V: \quad w_n = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \exp\left(-\frac{(n+1/2)\hbar\omega}{k_B T}\right) \rightarrow 2 \cdot \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \cdot 1 = \frac{\hbar\omega}{k_B T}.$$

První případ je opět ryze kvantový a vidíme, že při absolutní nule je obsazen jen základní energetický stav. Druhý případ je naopak klasický. Při vysoké teplotě jsou všechny stavy zastoupeny rovnoměrně.

Pravděpodobnost nalezení vibrátoru v dané poloze

Výpočet hustoty pravděpodobnosti lze provést přímo (vlnové funkce jsou reálné)

$$\rho(x) = \langle x | \hat{\rho} | x \rangle = \langle x | e^{-\beta\hat{H}} | x \rangle = \langle x | n \rangle \langle n | e^{-\beta\hat{H}} | m \rangle \langle m | x \rangle = \sum_{n,m} \psi_n^* w_n \delta_{nm} \psi_m = \sum_n \psi_n^2 w_n.$$

Za vlnové funkce dosadíme příslušné Hermitovy polynomy a za pravděpodobnosti rozdělení v energetické reprezentaci (1.87). Je třeba „jen“ sečíst příslušnou řadu Hermitových polynomů, což není snadné. Jinou možností je nepřímý výpočet za pomoci triku, na který přišel švýcarsko-americký jaderný fyzik, jeden z ředitelů komplexu CERN a nositel Nobelovy ceny za fyziku, Felix Bloch (1905–1983). Využijeme působení operátorů $\hat{p}\hat{p}$ a $\hat{x}\hat{p}$ v x -reprezentaci a v Heisenbergově maticové reprezentaci:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dx} &= \sum_n 2\psi_n \frac{d\psi_n}{dx} w_n = \frac{2}{-i\hbar} \sum_n \psi_n (-i\hbar \partial \psi_n / \partial x) w_n = \frac{2i}{\hbar} \sum_n \psi_n (\hat{P}\psi_n) w_n = \\ &= \frac{2i}{\hbar} \sum_{n,k} \psi_n P_{nk} \psi_k w_n = - \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} (\sqrt{k+1} \psi_{k+1} \psi_k - \sqrt{k} \psi_{k-1} \psi_k) w_k = \\ &= - \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k+1} (w_k - w_{k+1}) \psi_{k+1} \psi_k = \\ &= - \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k+1} w_k \psi_{k+1} \psi_k . \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili maticového rozpisu operátoru hybnosti podle kapitoly I.2.3.3 a reálnost vlnových funkcí. Zcela analogicky budeme hledat působení operátoru $\hat{x}\hat{p}$:

$$\begin{aligned} x\rho &= \langle x | \hat{x}\hat{p} | x \rangle = \langle x | \hat{x} e^{-\beta\hat{H}} | x \rangle = \sum_{n,k} \psi_n \psi_k X_{nk} w_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{k+1} \psi_{k+1} \psi_k + \sqrt{k} \psi_{k-1} \psi_k) w_k = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k+1} (w_k + w_{k+1}) \psi_{k+1} \psi_k = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (1 + e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k+1} w_k \psi_{k+1} \psi_k . \end{aligned}$$

Působení obou dvou operátorů vede na tutěž řadu. V tom právě tkví geniální Blochův trik. Vydělením obou získaných rovností se zbavíme nepříjemné řady a získáme jednoduchou rovnici

$$\frac{d\rho}{dx} = - \frac{2m\omega}{\hbar} \frac{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})}{(1 + e^{-\beta\hbar\omega})} \rho ,$$

která vede na diferenciální rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{2m\omega}{\hbar} \operatorname{th}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) x dx .$$

Řešení je snadné, integrační konstantu určíme jako vždy z normovací podmínky:

$$\blacktriangleright \quad \rho(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \exp[-\lambda x^2]; \quad \lambda(T) \equiv \frac{m\omega}{\hbar} \operatorname{th}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right). \quad (1.88)$$

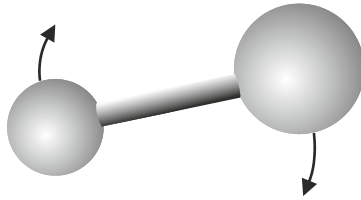
Tuto dnes slavnou formuli odvodil Felix v roce 1932. Formule má velký význam v teorii kmitů krystalové mříže. Odvodme, tak jako v minulých případech, limitu při nízkých a vysokých teplotách:

$$1) \quad T \ll T_V : \quad \rho(x) \rightarrow \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right] = \psi_0^2(x).$$

$$2) \quad T \gg T_V : \quad \rho(x) \rightarrow \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\pi k_B T}} \exp\left[-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T}\right].$$

První případ odpovídá opět ryze kvantovému řešení, jde o hustotu pravděpodobnosti oscilátoru v základním kvantovém stavu. Příklad vysokých teplot dává klasický výsledek (1.82).

1.5.2 Kvantový rotátor



Prozkoumejme nyní vlastnosti rotující částice s nenulovým momentem hybnosti \mathbf{L} a nenulovým momentem setrvačnosti J . Může jít například o rotující dvouatomovou molekulu nebo nějaký podobný systém. Nejprve odvodíme partiční sumu pro systém tvořený jedinou molekulou. Standardní translační vztah $p^2/2m$ u rotačních pohybů přejde v analogický vztah $L^2/2J$:

$$\varepsilon = \frac{L^2}{2J} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2J}; \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Využili jsme vztah (I.2.149) pro kvantování velikosti momentu hybnosti. Nesmíme zapomenout, že každý takový energetický stav je degenerován, vyskytuje se $2l+1$ krát, jednotlivé stavy se stejnou energií se liší magnetickým kvantovým číslem, které nabývá hodnot $m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$. Proto v partiční sumě musíme každý Boltzmannův faktor vzít v úvahu tolikrát, kolikrát je daný stav degenerován:

$$z = \sum_{l=0}^{\infty} g_l \exp\left[-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2J k_B T}\right] = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp\left[-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2J k_B T}\right].$$

Poprvé se setkáváme s řadou, která není analyticky řešitelná. Tuto řadu můžeme sečíst jen numericky nebo v limitě nízkých či vysokých teplot. Oblast nízkých a vysokých teplot je dána argumentem exponenciály. Je-li argument roven jedné, dostáváme cha-

rakteristickou teplotu, při níž je tepelná energie rovna rotační energii. Vyjdeme-li ze vztahu $\hbar^2 \approx 2J k_B T$, dostaneme pro tzv. *rotační teplotu* vztah

$$\blacktriangleright \quad T_R = \frac{\hbar^2}{2k_B J} . \quad (1.89)$$

Rotační teplota je pro daný systém, podobně jako vibrační teplota, zcela charakteristickou veličinou. Hodnoty rotačních a vibračních teplot některých plynů naleznete v následující tabulce:

plyn	rotační teplota	vibrační teplota
H ₂	85 K	6100 K
HCl	15 K	4140 K
N ₂	3 K	3340 K
O ₂	2 K	2230 K

Pokusme se sečíst řadu pro partiční sumu alespoň v limitě nízkých a vysokých teplot:

Nízké teploty

Při nízkých teplotách ($T \ll T_R$) exponenciály v řadě s rostoucím l prudce klesají, členy řady velmi rychle konvergují, a proto stačí vzít v úvahu první dva členy řady:

$$z = 1 + 3 \exp \left[-\frac{\hbar^2}{J k_B T} \right] = 1 + 3 \exp(-2T_R / T) .$$

Standardním postupem určíme termodynamické veličiny v limitě nízkých teplot:

$$Z = \left[1 + 3 \exp(-2T_R / T) \right]^N ,$$

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln \left[1 + 3 \exp(-2T_R / T) \right] .$$

Druhý člen je malý, proto můžeme provést Taylorův rozvoj do prvního řádu $\ln(1+x) \sim x$ a pro volnou energii máme jednodušší formuli

$$F \approx -3N k_B T \exp(-2T_R / T) .$$

Nyní nalezneme entropii a vnitřní energii

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = 3N k_B \exp(-2T_R / T) + 6N k_B \frac{T_R}{T} \exp(-2T_R / T) ,$$

$$U = F + TS = 6N k_B T_R \exp(-2T_R / T) .$$

Vysoké teploty

Při vysokých teplotách ($T \gg T_R$) je obsazeno mnoho stavů s velkým l a součet můžeme nahradit integrací:

$$z = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp \left[-l(l+1) \frac{T_R}{T} \right] \approx \int_0^{\infty} (2x+1) \exp \left[-x(x+1) \frac{T_R}{T} \right] dx .$$

V integrálu provedeme substituci $\xi = x(x+1)$:

$$z \approx \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{T_R}{T} \xi\right] d\xi = \frac{T}{T_R}.$$

Standardním postupem určíme termodynamické veličiny v limitě vysokých teplot:

$$Z = (T/T_R)^N,$$

$$F = -k_B T \ln Z = -Nk_B T \ln(T/T_R),$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk_B [1 + \ln(T/T_R)],$$

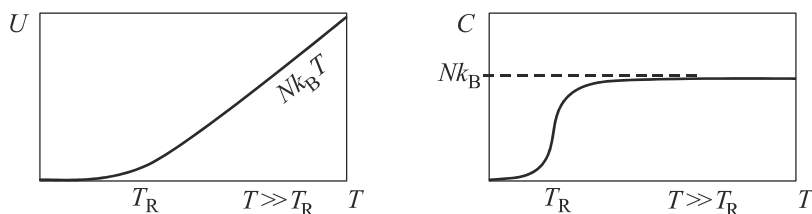
$$U = F + TS = Nk_B T.$$

Jak jsme mohli očekávat, dostáváme v limitě vysokých teplot klasické výsledky. Sepišme na závěr výsledky v limitě nízkých i vysokých teplot do přehledné tabulky:

$T \ll T_R$	$T \gg T_R$
$Z = [1 + 3 \exp(-2T_R/T)]^N$	$Z = (T/T_R)^N$
$F \doteq -3Nk_B T \exp(-2T_R/T)$	$F = -Nk_B T \ln(T/T_R)$
$S = 3Nk_B \exp(-2T_R/T) +$ $+ 6Nk_B \frac{T_R}{T} \exp(-2T_R/T)$	$S = Nk_B [1 + \ln(T/T_R)]$
$U = 6Nk_B T_R \exp(-2T_R/T)$	$U = Nk_B T$

(1.90)

Situace je obdobná jako u oscilátoru. Do rotační teploty není systém schopen absorbovat teplo. Jeho stupně volnosti jsou „zamrzlé“. Nad rotační teplotou přispívá k tepelné kapacitě každý rotátor hodnotou Boltzmannovy konstanty.



Obr. 1.11: Průběh vnitřní energie a tepelné kapacity pro kvantový rotátor

U dvouatomárních molekul jsou rotační teploty podstatně nižší než vibrační. Při postupném zahřívání plynu se nejprve uvolní rotační stupně volnosti a teprve později vibrační stupně volnosti.

❖ **Příklad 1.7:** Určete nejpravděpodobnější rotační kvantové číslo pro kvantový rotátor (stav s nejvyšším zastoupením).

Řešení: Pravděpodobnost, že se systém nachází ve stavu s vedlejším kvantovým číslem l je dána výše odvozenou formulí

$$w_l = A(2l+1) \exp\left[-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2Jk_B T}\right] = A(2l+1) \exp\left[-l(l+1)\frac{T_R}{T}\right].$$

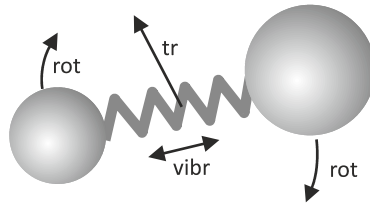
Při nízkých teplotách systém nerotuje, pravděpodobnost je téměř nulová. Při vysokých teplotách nalezneme standardním postupem maximum (s proměnnou l budeme zacházet jako se spojitou proměnnou):

$$\frac{\partial w_l}{\partial l} = 0 \quad \Rightarrow \quad l_{\max} = \sqrt{\frac{T}{2T_R}} - \frac{1}{2} \approx \sqrt{\frac{T}{2T_R}}.$$

Z vypočteného vztahu můžeme zjistit typická vedlejší kvantová čísla rotujících molekul při dané teplotě. ▀

1.5.3 Dvuatomární plyn

Uvažujme nyní systém složený z N dvuatomových molekul s rozlišitelnými atomy (jinak bychom se museli zabývat symetrií vlnových funkcí). Tak se chová řada plynů. Energie jedné molekuly bude složena z translační energie, vibrační energie, rotační energie a energie dalších (například jaderných) stupňů volnosti.



Partiční suma pro jednu molekulu bude *součinem* partičních sum jednotlivých stupňů volnosti a termodynamické veličiny budou *součtem* odpovídajících členů:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_{\text{tr}} + \mathcal{E}_{\text{vib}} + \mathcal{E}_{\text{rot}} + \mathcal{E}_{\text{nuc}} + \dots \\ z &= \sum e^{-\beta(\mathcal{E}_{\text{tr}} + \mathcal{E}_{\text{vib}} + \mathcal{E}_{\text{rot}} + \dots)} = \\ &= \int e^{-\beta\mathcal{E}_{\text{tr}}} d\Gamma \cdot \sum e^{-\beta\mathcal{E}_{\text{vib}}} \cdot \sum e^{-\beta\mathcal{E}_{\text{rot}}} \dots = \\ &= z_{\text{tr}} \cdot z_{\text{vib}} \cdot z_{\text{rot}} \dots \end{aligned}$$

Celková partiční suma pro N částic potom bude:

$$Z = z_{\text{tr}}^N \cdot z_{\text{vib}}^N \cdot z_{\text{rot}}^N \dots$$

Základní termodynamické veličiny jsou podle své definice aditivní a bude pro ně platit

$$\begin{aligned}
 F &= -k_B T \ln Z = F_{\text{tr}} + F_{\text{vib}} + F_{\text{rot}} + \dots, \\
 S &= -\frac{\partial F}{\partial T} = S_{\text{tr}} + S_{\text{vib}} + S_{\text{rot}} + \dots, \\
 U &= F + TS = U_{\text{tr}} + U_{\text{vib}} + U_{\text{rot}} + \dots, \\
 C_V &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_{\text{tr}} + C_{\text{vib}} + C_{\text{rot}} + \dots.
 \end{aligned}$$

Zkoumejme nyní příspěvek k tepelné kapacitě jednotlivých stupňů volnosti:

Translační stupně volnosti

$$U_{\text{tr}} = \frac{3}{2} N k_B T \quad \Rightarrow \quad c \equiv \frac{1}{N} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} k_B.$$

Translační stupně volnosti přispívají k měrné tepelné kapacitě plynu (tepelná kapacita vztážená na počet částic) konstantní hodnotou.

Vibrační stupně volnosti

$$U_{\text{vib}} = \frac{N \hbar \omega}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar \omega}{2 k_B T} \right) \quad \Rightarrow \quad c \equiv \frac{1}{N} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = k_B \left(\frac{\hbar \omega}{2 k_B T} \right)^2 \operatorname{sh}^{-2} \left(\frac{\hbar \omega}{2 k_B T} \right).$$

Na následujících obrázcích jsou vykresleny vypočtené průběhy. Při nízkých teplotách je vnitřní energie dána nulovými kmity ($N\hbar\omega/2$), při vysokých teplotách je lineární funkcí teploty. K přechodu mezi oběma průběhy dochází v okolí vibrační teploty. Při nízkých teplotách vibrační stupně volnosti nepřispívají k měrnému teplu. Říkáme, že při teplotách výrazně nižších, než je vibrační teplota jsou vibrační stupně volnosti „zamrzlé“. Při vysokých teplotách přispívají vibrační stupně volnosti k měrnému teplu konstantní hodnotou. Provedeme-li limity malých a velkých teplot, dostaneme:

$$\begin{aligned}
 T \ll T_V &\quad \Rightarrow \quad U = N \hbar \omega / 2, & C = 0, & \quad c = 0; \\
 T \gg T_V &\quad \Rightarrow \quad U = N k_B T, & C = N k_B, & \quad c = k_B.
 \end{aligned}$$

Každý vibrační stupeň volnosti přidává při vysokých teplotách k tepelné kapacitě plynu hodnotu k_B . Jak už víme, Boltzmannovu konstantu můžeme interpretovat jako tepelnou kapacitu jedné vibrující molekuly.

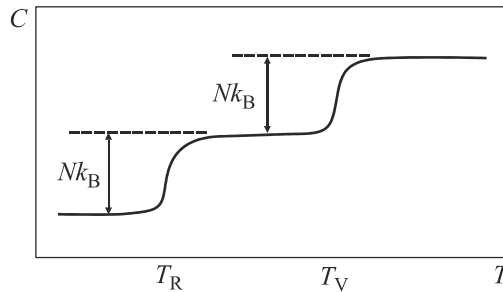
Rotační stupně volnosti

Pro rotační stupně volnosti neznáme analytický průběh vnitřní energie a tepelné kapacity při konstantním objemu. Známe ale hodnoty v limitě nízkých a vysokých teplot vzhledem k rotační teplotě, viz (1.90):

$$\begin{aligned}
 T \ll T_R &\quad \Rightarrow \quad U = 6 N k_B T_R \exp(-2T_R / T), & C = 0, & \quad c = 0; \\
 T \gg T_R &\quad \Rightarrow \quad U = N k_B T, & C = N k_B, & \quad c = k_B.
 \end{aligned}$$

Vidíme, že rotační stavy přispívají k měrnému teplu stejným způsobem jako vibrační stavy, příspěvek se projeví při teplotách vyšších než je rotační teplota. Při teplotách

nižších jsou rotační stavy opět „zamrzlé“. Každý rotační stav přispěje k tepelné kapacitě opět hodnotou Boltzmannovy konstanty. Výsledný průběh měrné tepelné kapacity má schodovitý charakter:



Obr. 1.12: Tepelná kapacita dvouatomárního plynu

Při zvyšování teploty přibývají další stupně volnosti, každý „rozmrzlý“ stupeň volnosti přispěje k měrné tepelné kapacitě hodnotou k_B . Každý translační stupeň volnosti přispívá k měrné tepelné kapacitě nezávisle na teplotě hodnotou $k_B/2$, tj. celkem $3k_B/2$. O rotačních a vibračních spektrech se můžete dočíst další detaily v učebnici [6].

Poznámka: U kyanu HCN odpovídá přechod mezi druhou a první rotační hladinou vlnové délce 1,3 mm, což koresponduje s vlnovým maximem reliktního záření. Právě reliktní záření proto způsobuje rotační excitace mezihvězdného kyanu. Rotační teplota kyanu je 15 K.

1.5.4 Anharmonický oscilátor

Velmi zajímavá situace nastane, pokud v Taylorově rozvoji potenciální energie v okolí minima je důležitý i třetí (asymetrie minima) nebo dokonce čtvrtý člen. Nyní již nejde o harmonické oscilace, ale o anharmonický oscilátor s energií ve tvaru

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + a_3 x^3 + a_4 x^4. \quad (1.91)$$

Za předpokladu vysoké teploty ($k_B T \gg \hbar\omega$) můžeme počítat klasickou partiční sumu pro N nezávislých oscilátorů. Za nízké teploty by se problém musel řešit kvantově. Pro jeden oscilátor máme:

$$\begin{aligned} z &\equiv \int e^{[-\beta E]} \frac{dp dx}{2\pi\hbar} = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \exp \left[- \left(\frac{p^2}{2mk_B T} + \frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T} + \frac{a_3 x^3}{k_B T} + \frac{a_4 x^4}{k_B T} \right) \right] dp dx = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi mk_B T}}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[- \frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T} \right] \exp \left[- \frac{a_3 x^3}{k_B T} - \frac{a_4 x^4}{k_B T} \right] dx \end{aligned} \quad (1.92)$$

Je třeba poznamenat, že jakkoli malý anharmonický člen třetího řádu vede k nekonzvergentnímu integrálu (1.92). Konvergenci zajišťuje přítomnost členu čtvrtého řádu s $a_4 > 0$. Nyní budeme předpokládat, že anharmonické členy jsou malé ve srovnání s harmonickým a provedeme rozvoj druhé exponenciály do druhého řádu v argumentu:

$$z \approx \frac{\sqrt{2\pi m k_B T}}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T}\right] \left(1 - \frac{a_3 x^3}{k_B T} - \frac{a_4 x^4}{k_B T} + \frac{1}{2k_B^2 T^2} (a_3 x^3 + a_4 x^4)^2\right) dx.$$

Jde o součet Gaussových integrálů s různými mocninami x násobícími základní exponenciálu. Integrály s lichými mocninami jsou nulové, ponecháme proto jen sudé členy do šestého řádu v x :

$$z \approx \frac{\sqrt{2\pi m k_B T}}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T}\right] \left(1 - \frac{a_4 x^4}{k_B T} + \frac{a_3^2 x^6}{2k_B^2 T^2} + \dots\right) dx$$

Po triviální integraci za pomoci vztahu (I.3.574), nebo v programových prostředích MATLAB, Mathematica atp., dostaneme

$$\begin{aligned} z &\approx \frac{\sqrt{2\pi m k_B T}}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m\omega^2}} \left(1 - 3\frac{a_4 k_B T}{m^2 \omega^4} + \frac{15}{2} \frac{a_3^2 k_B T}{m^3 \omega^6} + \dots\right) \Rightarrow \\ z &\approx \frac{k_B T}{\hbar\omega} - 3\frac{a_4 k_B^2 T^2}{\hbar m^2 \omega^5} + \frac{15}{2} \frac{a_3^2 k_B^2 T^2}{\hbar m^3 \omega^7} + \dots \Rightarrow \\ Z &\approx \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} - 3\frac{a_4 k_B^2 T^2}{\hbar m^2 \omega^5} + \frac{15}{2} \frac{a_3^2 k_B^2 T^2}{\hbar m^3 \omega^7} + \dots\right)^N. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Nyní určíme standardním způsobem termodynamické veličiny

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} - 3\frac{a_4 k_B^2 T^2}{\hbar m^2 \omega^5} + \frac{15}{2} \frac{a_3^2 k_B^2 T^2}{\hbar m^3 \omega^7} + \dots\right), \quad (1.94)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \Rightarrow$$

$$S \approx N k_B \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} - 3\frac{a_4 k_B^2 T^2}{\hbar m^2 \omega^5} + \frac{15}{2} \frac{a_3^2 k_B^2 T^2}{\hbar m^3 \omega^7} + \dots\right) + N k_B \frac{1 - 6\frac{a_4 k_B T}{m^2 \omega^4} + 15\frac{a_3^2 k_B T}{m^3 \omega^6} + \dots}{\left(1 - 3\frac{a_4 k_B T}{m^2 \omega^4} + \frac{15}{2} \frac{a_3^2 k_B T}{m^3 \omega^6} + \dots\right)},$$

$$U = F + TS = N k_B T \frac{1 - 6\frac{a_4 k_B T}{m^2 \omega^4} + 15\frac{a_3^2 k_B T}{m^3 \omega^6} + \dots}{\left(1 - 3\frac{a_4 k_B T}{m^2 \omega^4} + \frac{15}{2} \frac{a_3^2 k_B T}{m^3 \omega^6} + \dots\right)} \Rightarrow,$$

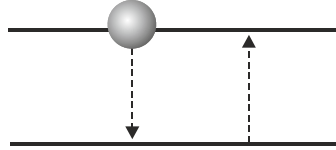
$$U \approx Nk_B T \left(1 - 3 \frac{a_4 k_B T}{m^2 \omega^4} + \frac{15}{2} \frac{a_3^2 k_B T}{m^3 \omega^6} + \dots \right), \quad (1.95)$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} \approx Nk_B + Nk_B^2 \left(\frac{15 a_3^2}{m^3 \omega^6} - \frac{6 a_4}{m^2 \omega^4} \right) T + \dots. \quad (1.96)$$

Vidíme, že anharmoničnost vibrací v krystalech nebo molekulách vede k narušení Du-longova Petitova zákona. V tepelné kapacitě se objevuje lineární a případně i kvadratický člen v teplotě.

Poznamenejme, že pokud položíme čtvrtou mocninu x v rozvoji energie (1.91) přesně rovnou nule, nebude integrál (1.92) konvergovat a systém bude nestabilní, při rostoucí výchylce z rovnováhy půjde potenciální energie k nekonečné hodnotě. Pokud budeme předpokládat, že čtvrtá mocnina x v rozvoji je byť jen velmi malá, zajistíme konvergenci integrálu i stabilitu zkoumaného systému.

1.5.5 Dvuhladinový systém



Nalezněme chování kvantového systému s dvěma blízkými energetickými hladinami $\varepsilon_0 = 0$ a $\varepsilon_1 = \varepsilon$ s degeneračními faktory g_0 a g_1 . Partiční suma pro jednu částici bude mít jen dva členy

$$z = g_0 + g_1 \exp(-\beta\varepsilon). \quad (1.97)$$

Nyní budeme postupovat standardně:

$$Z = \left[g_0 + g_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \right]^N, \quad (1.98)$$

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln \left[g_0 + g_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \right], \quad (1.99)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = N k_B \ln \left[g_0 + g_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \right] + \frac{N\varepsilon/T}{\left[1 + g \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \right]}; \quad g \equiv \frac{g_0}{g_1}, \quad (1.100)$$

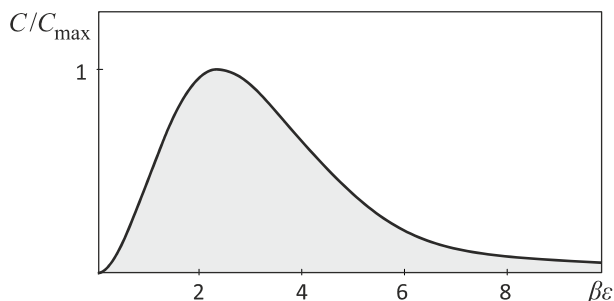
$$U = F + TS = \frac{N\varepsilon}{\left[1 + g \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \right]}, \quad (1.101)$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{Ng \varepsilon^2}{k_B T^2} \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{\left[1 + g \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)\right]^2}, \quad (1.102)$$



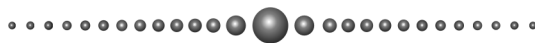
$$c_V = \frac{C_V}{N} = \frac{g \varepsilon^2}{k_B T^2} \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{\left[1 + g \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)\right]^2}. \quad (1.103)$$

Dostali jsme velmi známý vztah pro příspěvek dvouhladinového systému k měrnému teplu. Příspěvek konverguje k nule v oblasti nízkých i vysokých teplot. To znamená, že existuje teplota, při které je příspěvek k měrnému teplu maximální. Maximum je možné určit numericky, pro $g = 1$ vychází $c_{\max} \sim 0,34 k_B$.



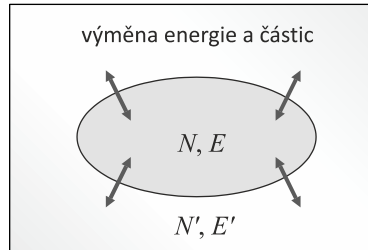
Obr. 1.13: Tepelná kapacita dvouhladinového systému

Více se o tepelných kapacitách, rotačních a vibračních spektrech a vztahu mezi termodynamikou, statistickou fyzikou a chemií dozvíte z online učebnice [9]. Zajímavé informace o spektroskopii rotačních a vibračních stavů naleznete také v publikaci [10].



1.6 Grandkanonický soubor

1.6.1 Odvození rozdělení



Na rozdíl od kanonického rozdělení připouštíme u grandkanonického rozdělení výměnu částic s okolím. Ostatní předpoklady jsou stejné jako u kanonického rozdělení. Systém samozřejmě může s okolím vyměňovat energii, zanedbáme povrchové jevy a jediným vnějším parametrem systému bude prozatím objem. Opět předpokládáme platnost Liouvillova teorému. První větu termodynamickou budeme psát ve standardním tvaru (pro jednoduchost uvažujeme jeden druh částic):

$$dU = T dS - p dV + \mu d\bar{N}. \quad (1.104)$$

Vzhledem k tomu, že N ve statistice znamená okamžitý počet částic v systému, musíme střední počet v první větě označit symbolem s pruhem. Pravděpodobnostní rozdělení v diskrétním, resp. spojitým případě označíme

$$w_{nN} = w_{nN}(E); \quad \text{resp.} \quad \rho_N = \rho_N(E). \quad (1.105)$$

Index n čísluje kvantové stavy systému, index N počet částic v systému. Požadujeme aditivnost v energii a počtu částic systému a jeho okolí:

$$E_{\text{tot}} = E + E'; \quad N_{\text{tot}} = N + N'. \quad (1.106)$$

Podobně jako v kanonickém případě požadujeme nezávislost (multiplikativnost) pravděpodobnostních rozdělení systému a okolí:

$$w_{nN+N'}(E + E') = w_{nN}(E) w_{nN'}(E'). \quad (1.107)$$

Řešením je jediné exponenciální funkce typu

$$w_{nN}(E_{nN}) = e^{c_1 + c_2 E_{nN} + c_3 N} = e^{\alpha - \beta E_{nN} + \gamma N}. \quad (1.108)$$

Pro spojitý případ bude mít hustota pravděpodobnosti tvar

$$\rho_N(E_N) = e^{\alpha - \beta E_N + \gamma N}. \quad (1.109)$$

Konstanty lineární kombinace jsme označili α , $-\beta$, γ a určíme je v následující kapitole.

1.6.2 Konstanty rozdělení

Při určení konstant budeme postupovat obdobně jako u kanonického rozdělení, tj. porovnáme diferenciál vnitřní energie s termodynamickým vztahem. Postup je poněkud pracný a čtenář, kterého to nezajímá, si může přechíst výsledek na konci této kapitoly. V principu pro určení tří konstant musíme využít tři rovnice: jde o normování pravděpodobnosti, středování energie a středování počtu částic (poslední rovnice nebyla třeba u kanonického rozdělení). Problém můžeme řešit jak diskrétně, tak spojitě (v levém sloupci naleznete diskrétní vztahy, v pravém sloupci jejich spojitě analogie):

$$\begin{aligned} \sum_{n,N} w_{nN} &= 1, & \sum_N \int \rho_N(E_N) d\Gamma_N &= 1, \\ \sum_{n,N} E_{nN} w_{nN} &= U, & \sum_N \int E \rho_N(E_N) d\Gamma_N &= U, \\ \sum_{n,N} N w_{nN} &= \bar{N}; & \sum_N N \int \rho_N(E_N) d\Gamma_N &= \bar{N}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

I ve spojitěm případě musíme počítat přes všechny možné počty částic. Odvození budeme provádět v diskrétním případě. Podobně jako u kanonického rozdělení nejprve nalezeme diferenciál vnitřní energie:

$$dU = d \sum_{n,N} E_{nN}(V) w_{nN} = \sum_{n,N} \left[\left(\frac{\partial E_{nN}}{\partial V} dV + \frac{\partial E_{nN}}{\partial N} dN \right) w_{nN} \right] + \sum_{n,N} E_{nN} dw_{nN}.$$

Derivaci energie podle objemu budeme opět interpretovat jako parciální tlak, změna energie s počtem částic je parciální chemický potenciál, v posledním členu vyjádříme E_{nN} z rozdělení (1.108):

$$dU = \sum_{n,N} (-p_{nN} w_{nN} dV) + \sum_{n,N} (\mu_{nN} w_{nN} dN) + \sum_{n,N} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} N - \frac{1}{\beta} \ln w_{nN} \right) dw_{nN}.$$

První člen interpretujeme stejně jako u kanonického rozdělení jako mechanickou práci. Poslední člen roznásobíme a vytkneme konstanty:

$$dU = -p dV + \sum_{n,N} \mu_{nN} w_{nN} dN + \frac{\gamma}{\beta} \sum_{n,N} N dw_{nN} + \frac{\alpha}{\beta} d \sum_{n,N} w_{nN} - \frac{1}{\beta} \sum_{n,N} \ln w_{nN} dw_{nN}.$$

Třetí a pátý člen upravíme podle vztahu pro derivaci součinu $f dg = d(fg) - gdf$, čtvrtý člen je nulový (součet pravděpodobností je roven jedné a diferenciál jednotky je nulový):

$$dU = -p dV + \sum_{n,N} \mu_{nN} w_{nN} dN + \frac{\gamma}{\beta} d \sum_{n,N} N w_{nN} - \frac{\gamma}{\beta} \sum_{n,N} w_{nN} dN - \frac{1}{\beta} d \sum_{n,N} (\ln w_{nN}) w_{nN}.$$

Jako jeden z posledních kroků sloučíme druhý a čtvrtý člen:

$$dU = -p dV + \sum_{n,N} \left(\mu_{nN} - \frac{\gamma}{\beta} \right) w_{nN} dN + \frac{\gamma}{\beta} d\bar{N} - \frac{1}{\beta} d \sum_{n,N} w_{nN} \ln w_{nN}.$$

Má-li tento výraz korespondovat s první větou termodynamickou (1.104), musí platit

$$\blacktriangleright \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad \gamma = \frac{\mu}{k_B T}, \quad S = -k_B \sum_{n,N} w_{nN} \ln w_{nN}. \quad (1.111)$$

Druhá podmínka ($\gamma/\beta = \mu$) nám zajistí korespondenci třetího členu s odpovídajícím členem první věty termodynamické a současně vypadnutí členu druhého. Ostatní podmínky jsou shodné s kanonickým rozdělením. V tuto chvíli tedy máme určeny dvě konstanty. Zbývá jediná neurčená konstanta rozdělení – normovací konstanta α . Tu určíme například ze vztahu pro entropii:

$$S = -k_B \sum_{n,N} w_{nN} \ln w_{nN} = -k_B \sum_{n,N} w_{nN} (\alpha - \beta E_{nN} + \gamma N) = -k_B \alpha + k_B \beta U - k_B \gamma \bar{N}.$$

Po triviálních úpravách dopočteme hledanou konstantu:

$$\blacktriangleright \quad \alpha = \frac{U - TS - \mu \bar{N}}{k_B T} = \frac{\Omega}{k_B T}. \quad (1.112)$$

Nyní známe všechny konstanty a můžeme napsat výsledné rozdělení v diskrétním i spojitým případě:

$$\blacktriangleright \quad w_{nN} = e^{\beta(\Omega - E_{nN} + \mu N)}; \quad \rho_N = e^{\beta(\Omega - E_N + \mu N)}. \quad (1.113)$$

Grandkanonický potenciál zjevně souvisí s normováním pravděpodobnosti, použijeme-li explicitně vypsanou normovací konstantu, má rozdělení často používaný tvar

$$\blacktriangleright \quad w_{nN} = K \exp \left[\frac{-E_{nN} + \mu N}{k_B T} \right]; \quad \rho_N = K \exp \left[\frac{-E_N + \mu N}{k_B T} \right]. \quad (1.114)$$

1.6.3 Partiční suma

Podobný význam, jako měla volná energie u kanonického rozdělení, má grandkanonický potenciál u systémů s proměnným počtem částic. Grandkanonický potenciál vypočteme z normovací podmínky rozdělení. Výpočet provedeme v diskrétním (nalevo) i spojitým (napravo) případě.

$$\begin{array}{l|l} \sum_{n,N} w_{nN} = 1 \Rightarrow & \sum_N \int \rho_N d\Gamma_N = 1 \Rightarrow \\ \sum_{n,N} e^{\beta(\Omega - E_{nN} + \mu N)} = 1 \Rightarrow & \sum_N \int e^{\beta(\Omega - E_N + \mu N)} d\Gamma_N = 1 \Rightarrow \\ \sum_{n,N} e^{-\beta E_{nN} + \beta \mu N} = e^{-\beta \Omega} \Rightarrow & \sum_N \int e^{-\beta E_N + \beta \mu N} d\Gamma_N = e^{-\beta \Omega} \Rightarrow \end{array}$$

Nyní už snadno vypočteme grandkanonický potenciál Ω :

$$\Omega = -k_B T \begin{cases} \ln \left(\sum_{n,N} e^{-\beta E_{nN} + \beta \mu N} \right); & \text{diskrétní případ,} \\ \ln \left(\sum_N \int e^{-\beta E_N + \beta \mu N} d\Gamma_N \right); & \text{spojitý případ.} \end{cases} \quad (1.115)$$

Veličina nacházející se v logaritmu v kulaté závorce se nazývá *grandkanonická partiční funkce* a je ústřední veličinou statistické fyziky s proměnným počtem částic, označujeme ji Ξ (velké kší). Vzhledem k tomu, že argument logaritmu by měl být bezrozměrný, je použití váhového faktoru namísto fázového objemu vhodnější.

Schéma statistického výpočtu s proměnným počtem částic

- 1) Nejprve zjistíme, jakých energií E_{nN} může systém nabývat. V klasickém případě půjde o všechny hodnoty energií, které se v systému mohou vyskytnout. V kvantovém případě musíme určit spektrum Hamiltonova operátoru (například řešit Schrödingerovu rovnici).

- 2) Nalezneme partiční funkci Ξ jako součet všech veličin $e^{-\beta E + \beta \mu N}$ přes celý obor energetického spektra:

$$\Xi = \sum_{n,N} e^{-\beta E_{nN} + \beta \mu N}; \quad \text{resp.} \quad \Xi = \sum_N \int e^{-\beta E_N + \beta \mu N} d\Gamma_N. \quad (1.116)$$

- 3) Určíme grandkanonický potenciál

$$\Omega = -k_B T \ln \Xi. \quad (1.117)$$

- 4) Určíme základní termodynamické veličiny S, p, N :

$$S = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right), \quad p = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right), \quad \bar{N} = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right). \quad (1.118)$$

- 5) Určíme vnitřní energii U a její derivace:

$$U = \Omega + TS + \mu \bar{N}. \quad (1.119)$$

- 6) Vzhledem k tomu, že grandkanonický potenciál je funkcí chemického potenciálu μ , je třeba ho ze všech odvozených termodynamických vztahů vyloučit. Teoreticky to lze provést nezávisle na (1.118) z relace

$$\bar{N} = \sum_{n,N} N w_{nN} \Rightarrow \bar{N} = \bar{N}(T, V, \mu) \Rightarrow \mu = \mu(\bar{N}, T, V). \quad (1.120)$$

Prakticky může vyloučení chemického potenciálu z rovnic činit problémy. Chemický potenciál však lze také chápat jako parametr v parametrickém zadání křivek. Poznáme-li například z (1.118) závislosti $p = p(T, V, \mu)$ a $\bar{N} = \bar{N}(T, V, \mu)$, můžeme do grafu s osami (p, \bar{N}) vykreslovat souřadnice (p, \bar{N}) pro určitý interval hodnot μ , a tím zkonstruovat graficky závislost tlaku na průměrném počtu částic.

Vztah grandkanonické a kanonické partiční sumy

Upravme nyní vztah pro grandkanonickou partiční sumu:

$$\Xi = \sum_{n,N} e^{-\beta E_{nN} + \beta \mu N} = \sum_N \left[\left(\sum_n e^{-\beta E_{nN}} \right) \cdot (e^{\beta \mu})^N \right].$$

Označíme-li Z_N kanonickou partiční sumu pro N částic a zavedeme-li tzv. *fugacitu* (značíme ji malým řeckým dzéta)

$$\zeta \equiv e^{\beta \mu}, \quad (1.121)$$

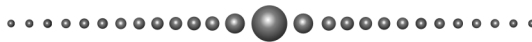
dostaneme přehledný vztah

$$\Xi = \sum_N Z_N \zeta^N. \quad (1.122)$$

Uvedený vztah platí v klasické fyzice, kde jsou v systému N částic jednotlivé částice v principu rozlišitelné. V kvantové teorii jsou částice nerozlišitelné a každá z $N!$ možných permutací částic je stejným stavem. Ve vztahu (1.122) je každá permutace v součtu započítána, to znamená, že jeden stav je započten namísto jednou vícekrát ($N!$ krát). V kvantové teorii je proto správným vztahem výraz

$$\Xi = \sum_N \frac{Z_N}{N!} \zeta^N, \quad (1.123)$$

který silně připomíná Taylorův rozvoj ve fugacitě. Koeficienty jsou kanonické partiční sumy pro N částic.



1.7 Fermiony a bosony

Nerozlišitelné částice

V kvantové teorii můžeme předpovědět jen pravděpodobnost výskytu částice v nějakém místě a čase. Tato pravděpodobnost má maximum v místě klasické trajektorie, se vzdáleností od ní zpravidla exponenciálně ubývá a dosti daleko od klasické trajektorie je sice velmi malá, nikoli však nulová. Máme-li dvě stejné částice, nikdy si nemůžeme být jisti, která částice je která. Pravděpodobnost výskytu jedné částice v místě druhé je nenulová. Hovoříme o tom, že stejné částice jsou v kvantové teorii *nerozlišitelné*. To ve svém důsledku vede k rozdělení všech částic na dva základní typy, *fermiony* a *bosony*, které se liší svými vlastnostmi a chováním (viz kapitola I.2.8). Fermiony mají poločíselný spin, dva nemohou být ve stejném kvantovém stavu (splňují Pauliho vylučovací princip), jejich vlnová funkce je antisymetrická a jejich kreační a anihilační operátory splňují antikomutační relace. Naopak bosony mají celočíselný spin, ve stejném kvantovém stavu jich může být libovolné množství, jejich vlnová funkce je symetrická a jejich kreační a anihilační operátory splňují komutační relace. Všechny polní částice tvořící interakce (fotony, gluony, W^+ , W^- , Z^0) jsou bosony se spinem 1. K bosonům také patří částice složené ze dvou kvarků (mezony), které mají spin roven 0 (skalární mezony) nebo 1 (vektorové mezony). Všechny základní stavební kameny hmoty (kvarky a leptony) jsou naopak fermiony se spinem 1/2. K fermionům také patří částice složené ze tří kvarků (hadrony), například neutron a proton. Z hlediska statistiky mají, zejména při nízkých teplotách, fermiony a bosony zcela odlišné chování a jejich pravděpodobnostní rozdělení jsou různá. Fermiony podléhají Fermiho-Diracovu rozdělení a bosony Boseho-Einsteinovu rozdělení.

Reprezentace obsazovacích čísel

Obsazovacím číslem nazýváme počet částic v daném energetickém stavu:

energie stavu	obsazovací číslo
ε_1	N_1
ε_2	N_2
ε_3	N_3
\vdots	\vdots

Pro fermiony může obsazovací číslo (z důvodu platnosti Pauliho vylučovacího principu) nabývat jen hodnot 0, 1. Pro bosony může jít o jakékoli celé nezáporné číslo 0, 1, 2, ... V reprezentaci obsazovacích čísel můžeme pro počet částic a celkovou energii psát

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_i N_i ; \\
 E_N &= \sum_i \varepsilon_i N_i .
 \end{aligned}
 \tag{1.124}$$

Grandkanonickou partiční sumu můžeme upravit v reprezentaci obsazovacích čísel následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\Xi &= \sum'_{N,n} e^{-\beta E_{nN} + \beta \mu N} = \sum_{N_1, N_2, \dots} \exp \left[-\beta \sum_i (\varepsilon_i N_i - \mu N_i) \right] = \\ &= \sum_{N_1, N_2, \dots} \prod_i \exp[-\beta (\varepsilon_i N_i - \mu N_i)] = \prod_i \sum_{N_i} \exp[-\beta N_i (\varepsilon_i - \mu)].\end{aligned}$$

Čárka nad symbolem součtu má naznačit, že všechny permutace částic považujeme v kvantové teorii za jeden jediný stav a do celkového součtu přispějí tyto permutace jediným členem. Je vidět, že celková grandkanonická suma se rozpadá na součin partiálních grandkanonických sum jednotlivých stavů:

$$\Xi = \prod_i \Xi_i; \quad \Xi_i = \sum_{N_i} \exp[-\beta N_i (\varepsilon_i - \mu)]. \quad (1.125)$$

V důsledku toho jsou termodynamické veličiny dány součty jednotlivých příspěvků:

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_i \Omega_i; & \Omega_i &= -k_B T \ln \Xi_i, \\ S &= \sum_i S_i; & S_i &= -\left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial T} \right), \\ p &= \sum_i p_i; & p_i &= -\left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial V} \right), \\ \bar{N} &= \sum_i \bar{N}_i; & \bar{N}_i &= -\left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial \mu} \right).\end{aligned} \quad (1.126)$$

1.7.1 Fermiho-Diracovo a Boseho-Einsteinovo rozdělení

Fermiho-Diracovo rozdělení

Zabývejme se nejprve fermiony. Podle Pauliho vylučovacího principu nemohou být dva fermiony ve stejném kvantovém stavu. V daném stavu tedy není buď žádný fermion, nebo je přítomen jeden jediný

$$N_i = 0, 1. \quad (1.127)$$

Partiční suma i -tého stavu má proto v reprezentaci obsazovacích čísel jen dva členy:

$$\Xi_i = \sum_{N_i} \exp[-\beta N_i (\varepsilon_i - \mu)] = 1 + \exp[-\beta (\varepsilon_i - \mu)].$$

Snadno dopočteme grandkanonický potenciál i -tého stavu

$$\Omega_i = -k_B T \ln \Xi_i = -k_B T \ln \left(1 + \exp[-\beta (\varepsilon_i - \mu)] \right)$$

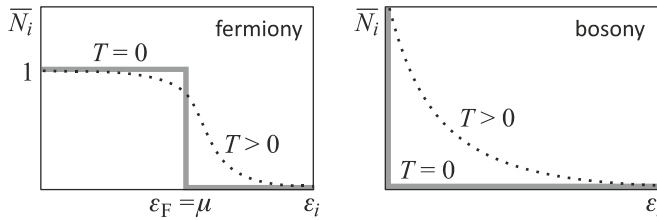
a střední počet částic v i -tém stavu

$$\bar{N}_i = -\frac{\partial \Omega_i}{\partial \mu} = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] + 1}. \quad (1.128)$$

Tento výraz se nazývá Fermiho-Diracovo rozdělení. Nalezněme jeho průběh v limite nízkých teplot ($T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$):

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \bar{N}_i = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] + 1} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \varepsilon_i < \mu, \\ 0 & \text{pro } \varepsilon_i > \mu. \end{cases}$$

Všechny stavy jsou zaplněné po jedné částici až po tzv. Fermiho mez $\varepsilon_F = \mu$. Nad Fermiho mezi jsou stavy neobsazené. Fermiho mez je tak poslední obsazenou energetickou hladinou při nulové teplotě. Chemický potenciál je při absolutní nule roven Fermiho mezi. Fermiony se chovají „nesnášenlivě“. Je-li nějaký stav obsazen částicí, další částice již tento stav nemůže obsadit. Při absolutní nule se snaží zaujmout stav s co nejnižší energií. Je-li již obsazen, obsadí nejbližší další volný. Tím dojde k tomu, že při absolutní nule jsou obsazené všechny stavy až po Fermiho mez. Rozdělení je pojmenováno podle italského fyzika Enrica Fermiho (1901–1954) a podle anglického fyzika Paula Adriana Maurice Diraca (1902–1984).



Obr. 1.14: Rozdělení fermionů (nalevo) a bosonů (napravo)

Boseho-Einsteinovo rozdělení

Nalezněme nyní rozdělení souboru bosonů. Bosony nesplňují Pauliho vylučovací princip a v daném stavu jich může být libovolné množství. Obsazovací čísla proto jsou:

$$N_i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.129)$$

Grandkanonická partiční suma i -tého stavu bude nekonečnou řadou

$$\begin{aligned} \Xi_i &= \sum_{N_i=0}^{\infty} \exp[-\beta N_i (\varepsilon_i - \mu)] = \\ &= \sum_{N_i=0}^{\infty} (\exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)])^{N_i}. \end{aligned}$$

Jde o geometrickou řadu, kterou bez problémů sečteme:

$$\Xi_i = \frac{1}{1 - \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)]}. \quad (1.130)$$

Snadno dopočteme grandkanonický potenciál i -tého stavu

$$\begin{aligned}\Omega_i &= -k_B T \ln \Xi_i = \\ &= +k_B T \ln(1 - \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)])\end{aligned}$$

a střední počet částic v i -tém stavu

$$\blacktriangleright \quad \bar{N}_i = -\frac{\partial \Omega_i}{\partial \mu} = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] - 1}. \quad (1.131)$$

Tento výraz se nazývá Boseho-Einsteinovo rozdělení. Je pojmenováno podle indického fyzika Satyendry Boseho (1854–1948) a německo-amerického fyzika Alberta Einsteina (1879–1955), Povšimněte si, že od Fermi-Diracova rozdělení se liší jen znaménkem. To je pro vztahy popisující fermiony a bosony typické (symetrická a antisymetrická vlnová funkce, komutátor a antikomutátor). Z podmínky pro konvergenci geometrické řady plyne, že chemický potenciál souboru bosonů musí splňovat podmínku

$$\mu \leq \varepsilon_0. \quad (1.132)$$

Nalezneme průběh rozdělení v limitě nízkých teplot ($T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$):

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \bar{N}_i = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] - 1} = \begin{cases} \infty & \text{pro } \varepsilon_i = \varepsilon_0 = \mu, \\ 0 & \text{pro } \varepsilon_i > \varepsilon_0. \end{cases}$$

Mlčky jsme při součtu geometrické řady předpokládali nekonečný počet částic. Při absolutní nule všechny obsadí základní energetický stav. V reálných systémech je počet částic konečný. Boseho-Einsteinovo rozdělení při nulové i nenulové teplotě je znázorněno na obrázku 1.14 napravo. Stav látky, při kterém se částice hromadí v základním stavu, nazýváme *bosonový kondenzát* neboli BEC (*Bose-Einstein Condensate*). Typickým příkladem jsou Cooperovy páry elektronů, které při nízkých teplotách vykazují jako bosonový kondenzát supravodivé a supratekuté vlastnosti.

Obě rozdělení lze souhrnně zapsat

$$\blacktriangleright \quad \bar{N}_i = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] \pm 1}. \quad (1.133)$$

Znaménko „+“ platí pro fermiony a „-“ pro bosony. Za jakých podmínek obě rozdělení splynou? Je zřejmé, že k tomu dojde tehdy, lze-li zanedbat jedničku ve jmenovateli, tj. exponenciála převládne a $\bar{N}_i \ll 1$. Potom

$$\bar{N}_i \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{N}_i \sim \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)]} \sim K \exp[-\beta\varepsilon_i]$$

a obě rozdělení přechází v Boltzmannovo rozdělení. Kvantové stavy jsou většinou prázdné a jen tu a tam je některý obsazený. K této situaci dochází, je-li

- vysoký počet kvantových stavů,
- řídký plyn (malý počet částic),
- vysoké teploty (částice excitovány do vysokých energetických stavů).

Shrňme na závěr vlastnosti fermionů a bosonů do přehledné tabulky:

	fermiony	bosony
spin	1/2, 3/2, ...	0, 1, 2, ...
příklady částic	elektrony, neutrina, kvarky	všechny polní částice
hamiltonián	$\hat{H}(1,2) = \hat{H}(2,1)$	$\hat{H}(1,2) = \hat{H}(2,1)$
vlnová funkce	$ 1,2\rangle = - 2,1\rangle$	$ 1,2\rangle = + 2,1\rangle$
kreační a anihilační operátory	$[a_k^+, a_l]_+ = \delta_{kl}$	$[a_k^+, a_l]_- = \delta_{kl}$
statistika (\bar{N}_i)	$\frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] + 1}$	$\frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] - 1}$

1.7.2 Soubory fermionů (trpaslík a neutronová hvězda)

V závěrečných fázích vývoje hvězd může snahu gravitace zhroutit hvězdu do černé díry zastavit tlak degenerovaného elektronového plynu (bílý trpaslík) nebo degenerovaného neutronového plynu (neutronová hvězda). Proto se budeme zabývat souborem fermionů nenulové hmotnosti. Základní charakteristiky obou částic jsou

$$s = 1/2; \quad \mu \neq 0; \quad m_0 \neq 0. \quad (1.134)$$

Nenulový chemický potenciál vyžaduje provést dopočet podle vztahu (1.120), nenulová klidová hmotnost znamená vztah mezi hybností a energií (pro nerelativistický případ):

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}; \quad p = \sqrt{2m\varepsilon}; \quad dp = \frac{1}{2}\sqrt{2m} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon. \quad (1.135)$$

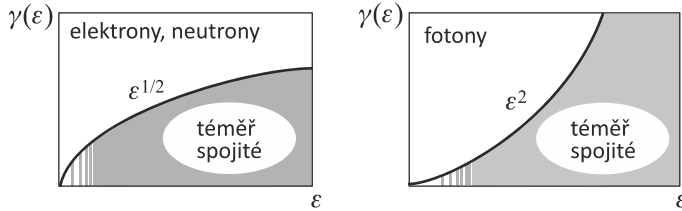
Určeme nyní element váhového faktoru

$$d\Gamma_\varepsilon = g \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \rightarrow \frac{4\pi gV}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp = \frac{4\pi gV}{(2\pi\hbar)^3} \cdot 2m\varepsilon \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2m} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon.$$

Pro váhový faktor nerelativistických fermionů tedy platí

$$\begin{aligned} d\Gamma_\varepsilon &= \gamma(\varepsilon) d\varepsilon; \\ \gamma(\varepsilon) &= \alpha V \varepsilon^{1/2}; \\ \alpha &\equiv \frac{g m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}}. \end{aligned} \quad (1.136)$$

V příští kapitole uvidíme, že počet kvantových stavů neroste tak jako u fotonů, ale přesto má rostoucí tendenci a pro vyšší energie lze hustotu energetických stavů považovat za téměř spojitou.



Obr. 1.15: Hustota energetických stavů fermionů (nalevo). Napravo je pro srovnání hustota energetických stavů pro fotony.

Grandkanonická partiční funkce odpovídající jednomu energetickému stavu je

$$\Xi_{\varepsilon} = \sum_{N_{\varepsilon}=0}^1 e^{-\beta N_{\varepsilon}(\varepsilon-\mu)} = 1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}; \quad (1.137)$$

Termodynamické veličiny, které nás zajímají, pro tento stav dávají

$$\Omega_{\varepsilon} = -k_B T \ln \Xi_{\varepsilon} = -k_B T \ln \left[1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} \right]; \quad (1.138)$$

$$\bar{N}_{\varepsilon} = -\frac{\partial \Omega_{\varepsilon}}{\partial \mu} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}; \quad (1.139)$$

$$U_{\varepsilon} = \varepsilon \bar{N}_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}. \quad (1.140)$$

Nyní nalezneme integrální veličiny, tedy součty přes všechny stavy. Logaritmické závislosti v grandkanonickém potenciálu se zbavíme integrací per partes. Výpočty jsou jinak zcela přímočaré:

$$\begin{aligned} \Omega &= \int \Omega_{\varepsilon} d\Gamma_{\varepsilon} = \int_0^{\infty} -k_B T \ln \left[1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} \right] \alpha V \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \\ &= -k_B T \alpha V \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} \ln \left[1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} \right] d\varepsilon = \\ &= -k_B T \alpha V \left\{ \left[\frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \ln \left[1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} \right] \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} (-\beta) \frac{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}} d\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

První výraz z integrace per partes je nulový – horní mez vynuluje logaritmická závislost, dolní mocinná závislost. Druhý člen s integrálem bychom mohli řešit numericky, ale pro naše účely postačí ho ponechat v obecné podobě:

$$\Omega = -\frac{2}{3} \alpha V \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon. \quad (1.141)$$

Z grandkanonického potenciálu určíme snadno tlak, tedy stavovou rovnici

$$p = -\frac{\partial \Omega}{\partial V} = \frac{2}{3} \alpha \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon. \quad (1.142)$$

Další termodynamické veličiny získáme opět integrací veličin odpovídajících jednomu stavu:

$$\bar{N} = \int \bar{N}_{\varepsilon} d\Gamma_{\varepsilon} = \alpha V \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon; \quad (1.143)$$

$$U = \int U_{\varepsilon} d\Gamma_{\varepsilon} = \alpha V \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon. \quad (1.144)$$

Integrály v jednotlivých vztazích je nutné nalézt numericky. Pokud vydělíme poslední dva vztahy objemem, získáme trojici intenzivních veličin popisujících fermionový plyn:

$$p = \frac{2}{3} \alpha \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon; \quad (1.145)$$

$$n \equiv \frac{\bar{N}}{V} = \alpha \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon; \quad (1.146)$$

$$u \equiv \frac{U}{V} = \alpha \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon. \quad (1.147)$$

I bez výpočtu integrálů je patrný vztah mezi tlakem a hustotou vnitřní energie pro fermiony o nenulové hmotnosti:

►
$$p = \frac{2}{3} u. \quad (1.148)$$

Hvězdy ve fázích bílého trpaslíka nebo neutronové hvězdy jsou v závěrečných fázích svého vývoje. V centru neprobíhá termojaderná fúze, a i když teplota nitra je z „lidského“ hlediska značná, z hlediska aktivního života hvězdy je zanedbatelná a pro hvězdu v podstatě znamená nulovou teplotu. V limitě nízkých teplot ($\beta \rightarrow \infty$) lze integrály snadno vypočítat, protože

$$\bar{N}_{\varepsilon} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{pro } \varepsilon \leq \mu_0; \\ 0 & \text{pro } \varepsilon > \mu_0, \end{cases}$$

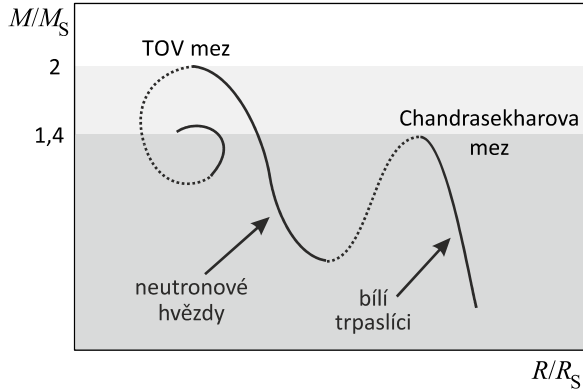
kde μ_0 je chemický potenciál v limitě absolutní nuly. Integrace přes „schodovité“ rozdělení se nyní stává triviální záležitostí:

$$p = \frac{4}{15} \alpha \mu_0^{5/2}; \quad n = \frac{2}{3} \alpha \mu_0^{3/2}; \quad u = \frac{2}{5} \alpha \mu_0^{5/2}. \quad (1.149)$$

Chemický potenciál je parametrem rovnic a lze ho snadno vyloučit z rovnice pro koncentraci částic:

$$\blacktriangleright \quad \mu_0 = \text{const } n^{2/3} \quad \Rightarrow \quad p = \text{const } n^{5/3}; \quad u = \frac{3}{2} p. \quad (1.150)$$

Fermionový plyn vykazuje polytropní chování s koeficientem 5/3. I při nulové teplotě existuje obrovský nenulový tlak způsobený kvantovými procesy („nesnášenlivostí“ fermionů). Plyn se střední tepelnou energií menší než Fermiho mez ($k_B T < \mu_0$) nazýváme degenerovaný. V případě relativistického výpočtu vyjde polytropní koeficient 4/3, což je právě na hranici stability a nestability polytropní hvězdy (viz poslední díl „Vybrané kapitoly III“, kapitola III.1.5).



Obr. 1.16: Stabilní konfigurace (plnou čarou) hvězdy bez probíhající termojaderné syntézy

1.7.3 Soubor fotonů (Planckův vyzařovací zákon)

Fotony jsou částice elektromagnetické interakce šířící se rychlostí světla. Jejich základní charakteristiky (spin, chemický potenciál, klidová hmotnost, elektrický náboj) jsou

$$s = 1; \quad \mu = 0; \quad m_0 = 0; \quad Q_e = 0. \quad (1.151)$$

Ve speciální relativitě platí pro energii částice jednoduchý vztah

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (1.152)$$

Pro malé hybnosti vztah přejde v nerelativistický výraz (1.135). Nyní ale máme fotony šířící se rychlostí světla, jejichž klidová hmotnost je nulová (jen takové částice se mohou šířit rychlostí světla). Pro jejich energii vychází po dosazení za $m_0 = 0$ jednoduchý vztah:

$$\varepsilon = pc. \quad (1.153)$$

Představme si soubor fotonů uzavřený v nějaké oblasti o objemu V při teplotě T . Na fotony budeme v prvním přiblížení nahlížet jako na spojitý systém a určíme element váhového prostoru systému skládajícího se z jednoho fotonu. Degenerační faktor $g = 2$, protože elektromagnetické záření je příčné a existují dva nezávislé příčné módy (polarizace) záření. U elementu váhového faktoru provedeme automaticky všechny proveditelné integrace, element hybnostního prostoru převedeme do sférických souřadnic a hybnost převedeme podle vztahu (1.153) na energii:

$$d\Gamma_\varepsilon = g \frac{d\phi}{(2\pi\hbar)^3} = 2 \frac{dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{(2\pi\hbar)^3} \rightarrow \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp = \frac{V \varepsilon^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} d\varepsilon .$$

Získali jsme tak vztah pro hustotu energetických stavů, která kvadraticky roste s energií:

$$d\Gamma_\varepsilon = \gamma(\varepsilon) d\varepsilon ; \quad \gamma(\varepsilon) = \frac{V \varepsilon^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} . \quad (1.154)$$

Hustota energetických stavů fotonů roste podstatně rychleji, než tomu bylo u fermionových stavů a můžeme ji považovat za spojitou veličinu. Je to dobře patrné z obrázku 1.15. Napišme přehledně základní statistické a termodynamické veličiny pro jeden stav:

$$\Xi_\varepsilon = \sum_{N_\varepsilon=0}^{\infty} e^{-\beta N_\varepsilon \varepsilon} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon}} , \quad (1.155)$$

$$\Omega_\varepsilon = -k_B T \ln \Xi_\varepsilon = k_B T \ln \left[1 - e^{-\beta \varepsilon} \right] , \quad (1.156)$$

$$\bar{N}_\varepsilon = - \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial \Omega_\varepsilon}{\partial \mu} = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon} - 1} . \quad (1.157)$$

$$U_\varepsilon = \varepsilon \bar{N}_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{e^{\beta \varepsilon} - 1} . \quad (1.158)$$

Všechny tyto vztahy již byly odvozeny dříve, viz např. (1.131), stačilo jen položit $\mu = 0$. Nyní přistoupíme k výpočtu celkových termodynamických veličin:

$$\Omega = \int_0^{\infty} \Omega_\varepsilon d\Gamma_\varepsilon = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} k_B T \int_0^{\infty} \varepsilon^2 \ln \left[1 - e^{-\beta \varepsilon} \right] d\varepsilon .$$

Po integraci per partes (obdobně jako u fermionového plynu) dostaneme:

$$\Omega = - \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta \varepsilon} - 1} d\varepsilon . \quad (1.159)$$

Integrál je v tomto případě analyticky řešitelný, viz (I.3.591), ale pro naše účely ho můžeme ponechat v obecném tvaru. Nyní určíme tlak, střední počet fotonů a vnitřní energii:

$$p = - \frac{\partial \Omega}{\partial V} = \frac{1}{3} \frac{1}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta \varepsilon} - 1} d\varepsilon , \quad (1.160)$$

$$\bar{N} = \int \bar{N}_\varepsilon d\Gamma_\varepsilon = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{e^{\beta \varepsilon} - 1} d\varepsilon , \quad (1.161)$$

$$U = \int_0^{\infty} \varepsilon \bar{N}_\varepsilon d\Gamma_\varepsilon = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta \varepsilon} - 1} d\varepsilon . \quad (1.162)$$

Po zavedení intenzivních veličin (poslední dva výrazy vydělíme objemem) máme:

$$p = \frac{1}{3} \frac{1}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon, \quad (1.163)$$

$$n = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon, \quad (1.164)$$

$$u = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon. \quad (1.165)$$

Všimněte si, že i bez provedení integrace zjistíme porovnáním rovnic (1.163) a (1.165) vztah mezi tlakem záření a hustotou energie

►
$$p = \frac{1}{3} u. \quad (1.166)$$

Ze vztahu (1.165) nalezneme snadno diferenciál hustoty energie

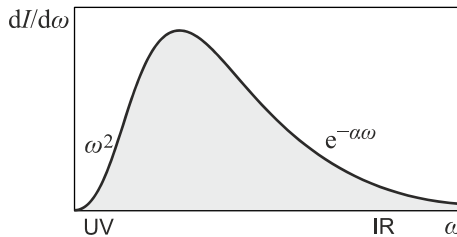
$$du = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon. \quad (1.167)$$

Tok energie neboli intenzitu záření ($I=uc$) můžeme nyní napsat jako funkci energie stavu ε , úhlové frekvence ($\varepsilon = \hbar\omega$) nebo vlnové délky ($\omega = 2\pi c/\lambda$):

$$dI(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3 c^2} \frac{\varepsilon^3}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) - 1} d\varepsilon; \quad (1.168)$$

$$dI(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega; \quad (1.169)$$

$$dI(\lambda) = -16\pi^2 \hbar c^2 \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda k_B T}\right) - 1} d\lambda. \quad (1.170)$$



Obr. 1.17: Planckův vyzařovací zákon

Jde o slavný Planckův vyzařovací zákon odvozený v roce 1901. Asi nejčastěji se používá intenzita záření připadající na frekvenční interval $dI/d\omega$. Průběh je na obrázku 1.17.

Pro nízké frekvence je $dI/d\omega \approx \omega^2$ (ve jmenovateli $\exp[x] - 1 \approx x$). Pro vysoké frekvence dominuje exponenciála a platí $dI/d\omega \approx \exp[-\hbar\omega/k_B T]$. Vztah pro nízké frekvence se nazývá Rayleighův-Jeansův zákon. Byl znám ještě před objevem Planckova zákona. Vztah diverguje pro vysoké frekvence (tzv. UV katastrofa).

Wienův posunovací zákon

Nalezneme nyní maximum vyzařování odpovídající Planckovu zákonu. Toto maximum je závislé na teplotě a určíme ho derivováním vztahu (1.169):

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\hbar\omega}{k_B T} \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) = 3 \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1 \right].$$

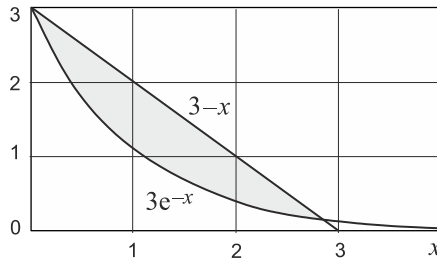
Výsledná rovnice je transcendentní rovnice typu

$$x e^x = 3(e^x - 1); \quad x \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T}.$$

Obě strany vydělíme exponenciálou a polynomiální závislosti převedeme nalevo:

$$3 - x = 3e^{-x}.$$

V tomto tvaru je možné snadno rovnici řešit graficky, tj. do grafu vykreslíme levou a pravou stranu a nalezneme průsečík obou křivek:



Obr. 1.18: Grafické řešení rovnice $3 - x = 3e^{-x}$.

Obě křivky se protínají v bodě $x_0 = 2,822$, a proto

$$\omega_{\max} = \frac{2,822 k_B T}{\hbar}.$$

Ve vlnové délce platí rozdělení (3.170). Obdobným postupem získáme maximum ve vlnové délce (Wienův posunovací zákon):

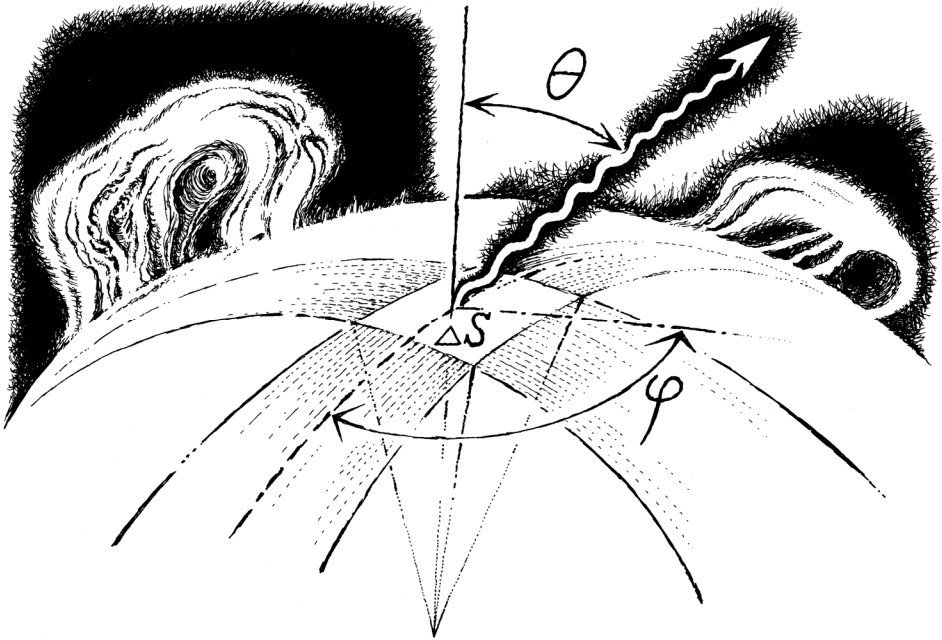
$$\blacktriangleright \quad \lambda_{\max} = \frac{b}{T}; \quad b = 0,00289 \text{ K m}. \quad (1.171)$$

Čím teplejší těleso, tím na kratších vlnových délkách vyzařuje. Reliktní záření ($T \sim 3 \text{ K}$) má maximum pro vlnové délky přibližně 1 mm, člověk ($T \sim 300 \text{ K}$) pro vlnové délky asi 10 μm , chladné hvězdy ($T \sim 3\,000 \text{ K}$) vyzařují v IR oboru na délce asi 1 000 nm,

hvězdy jako Slunce ($T \sim 6\,000\text{ K}$) ve viditelném spektru na vlnové délce 500 nm a velmi horké hvězdy ($T \sim 30\,000\text{ K}$) vyzařují v UV na vlnové délce 100 nm.

Stefanův-Boltzmannův zákon

Z Planckova vyzařovacího zákona můžeme také najít celkovou vyzářenou energii za jednotku času z jednotkové plochy tělesa.



Obr. 1.19: K integraci Planckova zákona přes úhlové závislosti

Intenzita vyzářená v daném směru (φ, θ) na frekvenční interval $d\omega$ je rovna $dI(\omega)$, v celém oboru frekvencí jde o hodnotu

$$I_{\varphi, \theta} = \int_0^{\infty} \cos \theta dI(\omega) . \quad (1.172)$$

Tuto hodnotu budeme středovat přes celý prostorový úhel Ω (k pozorovateli se dostanou paprsky pod různými úhly z různých plošek)

$$I = \langle I_{\varphi, \theta} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int I_{\varphi, \theta} d\Omega \quad (1.173)$$

(celý prostorový úhel je 4π). Element prostorového úhlu ve sférických souřadnicích je

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{dl_{\varphi} dl_{\theta}}{r^2} = \frac{r d\varphi \cdot r \sin \theta d\theta}{r^2} = \sin \theta d\varphi d\theta ; \quad (1.174)$$

$$I = \frac{1}{4\pi} \int \left[\int_0^\infty \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \cos \theta \, d\omega \right] d\Omega.$$

Vztah budeme integrovat přes celé frekvenční spektrum a přes vnější prostorovou polokouli:

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \cos \theta \sin \theta \, d\varphi \right) d\theta \right) d\omega.$$

Integrace přes úhly je triviální a dává

$$I = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} d\omega.$$

Jako poslední krok provedeme substituci $x = \hbar\omega/k_B T$:

$$I = \frac{k_B^4}{4\hbar^3 \pi^2 c^2} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \frac{k_B^4}{4\hbar^3 \pi^2 c^2} T^4 \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} T^4.$$

Výpočet integrálu naleznete ve „Vybraných kapitolách I“, kap. 3.10.4. Výsledkem je známý Stefanův-Boltzmannův zákon

$$\blacktriangleright \quad I = \sigma T^4; \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5,8 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}. \quad (1.175)$$

Poznámka: Při odvození Planckova zákona jsme váhový faktor odvodili spojitě. Fotony jsme si ale mohli představit jako stojaté vlny v krabici ve tvaru kvádrů, které mají vlnové vektory ve směru souřadnicových os a uzly na hranicích kvádrů. Výsledek by byl stejný jako při našem odvození.

● Příklad 1.8: Teplota Slunce

Určete povrchovou teplotu Slunce, víte-li, že maximum vyzařování je na vlnové délce 500 nm.

Řešení: Podle Wienova zákona je povrchová teplota rovna

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}} \sim 5\,800 \text{ K}.$$

Horké hvězdy vyzařují obecně na kratší vlnové délce. Typické modré hvězdy mají povrchovou teplotu přes 9 000 K, žluté a zelené hvězdy okolo 6 000 K, červené hvězdy jen asi 3 000 K. Wiennův zákon lze aplikovat i na podstatně chladnější tělesa. Například člověk s povrchovou teplotou cca 310 K vyzařuje přibližně jako černé těleso s maximum vyzařování na vlnové délce 10 μm . V této oblasti musí být proto maximálně citlivá čidla pro detekci osob.



● Příklad 1.9: Výkon Slunce

Nalezněte celkový zářivý výkon Slunce, znáte-li jeho povrchovou teplotu $T = 5\,800\text{ K}$.

Řešení: Zářivý výkon Slunce určíme ze Stefanova-Boltzmannova zákona:

$$P_S = IS = \sigma T^4 4\pi R_S^2 = 4 \times 10^{26}\text{ W}. \quad (1.176)$$

Obrovská hodnota zářivého výkonu Slunce je dána jeho velkou hmotností. V průměru produkuje jeden kilogram sluneční hmoty výkon velmi malý. Při hmotnosti Slunce $2 \times 10^{30}\text{ kg}$ jde pouze o $0,0002\text{ W/kg}$. ▀

● Příklad 1.10: Sluneční konstanta

Určete intenzitu slunečního záření v okolí Země.

Řešení: Sluneční konstanta je intenzita slunečního záření (energie kolmo dopadající na jednotkovou plochu za jednotku času) nad atmosférou naší Země. Tuto veličinu můžeme spočítat jako podíl celkového výkonu Slunce a celkové plochy povrchu koule procházející Zemí se středem ve Slunci:

$$I_Z = \frac{P_S}{4\pi R_{ZS}^2} = 1,4\text{ kW m}^{-2}. \quad (1.177)$$

U naší Země dopadá na každý metr čtvereční plochy, kolmo postavené ke Slunečnímu záření, výkon $1,4\text{ kW}$. Tento ohromný výkon je přímo využíván ve slunečních panelech kosmických sond a ve slunečních elektrárnách. Při povrchu Země je tento výkon snížen rozptylem v atmosféře. Kromě jaderné energie pochází veškerá běžně dostupná energie na Zemi ze sluneční energie. Dopadající výkon slunečního záření je například částečně absorbován rostlinami a pomocí fotosyntézy ukládán do energie chemických vazeb. Po mnoha letech je tato energie zpětně využita při spalování uhlí, nafty nebo benzínu. Dopadající záření způsobuje také odpařování vody z povrchu Země a umožňuje tak vodní koloběh. Proto i energie využívaná ve vodních elektrárnách má prapůvod ve sluneční energii. ▀

● Příklad 1.11: Teplota planety

Určete rovnovážnou teplotu planety ve vzdálenosti d od mateřské hvězdy, jejíž teplota je T_* a poloměr R_* . Planeta má odrazivost povrchu (albedo) A .

Řešení: Nejprve určíme zářivý výkon hvězdy, který je dán Stefanovým-Boltzmannovým zákonem:

$$P_* = I_* S = \sigma T_*^4 4\pi R_*^2.$$

Spočtěme intenzitu hvězdného záření na oběžné dráze planety, tedy ve vzdálenosti d (hvězda vyzařuje do celého prostoru, tj. budeme uvažovat povrch koule o poloměru d):

$$I_P = \frac{P_*}{4\pi d^2} = \frac{\sigma T_*^4 4\pi R_*^2}{4\pi d^2} = \frac{\sigma T_*^4 R_*^2}{d^2}.$$

Toto záření bude planeta absorbovat přibližně průmětem svého povrchu otočeného ke hvězdě, z celkového dopadajícího záření se část A odrazí a $(1-A)$ pohltí. Výkon pohlcovaný planetou tedy bude:

$$P_P = (1-A)I_P \pi R_P^2 = (1-A) \frac{\sigma T_*^4 R_*^2}{d^2} \pi R_P^2.$$

Nyní sestavíme celkovou energetickou bilanci planety za předpokladu, že nemá jiný zdroj energie. Pohlcený výkon se vyzařuje celým povrchem planety dle Planckova resp. Stefanova-Boltzmannova zákona:

$$\begin{aligned} P_P &= \sigma T_P^4 4\pi R_P^2, \\ (1-A) \frac{\sigma T_*^4 R_*^2}{d^2} \pi R_P^2 &= \sigma T_P^4 4\pi R_P^2, \\ T_P &= \sqrt[4]{\frac{(1-A)}{4}} \sqrt{\frac{R_*}{d}} T_*. \end{aligned} \quad (1.178)$$

Naše Země má albedo kolem 0,25 (75 % záření pohltí) a rovnovážná teplota vychází přibližně 280 K. ▀

▀ Příklad 1.12: Záření husté jako voda

Určete, při jaké fázi expanze vesmíru (při jaké teplotě) mělo záření hustotu stejnou jako voda.

Řešení: Mezi hustotou hmoty a energie platí jednoduchý vztah plynoucí z Einsteinovy formule

$$\rho_E = \rho_M c^2. \quad (1.179)$$

Hustota hmoty ρ_M bude odpovídat hustotě vody. Hustotu energie záření určíme z toku energie, který je dán Stefanovým-Boltzmannovým zákonem:

$$\rho_E = \frac{I}{c} = \frac{\sigma T^4}{c}. \quad (1.180)$$

Porovnáním obou vztahů určíme teplotu vesmíru, při které mělo elektromagnetické záření hustotu stejnou jako voda:

$$T = \sqrt[4]{\frac{\rho_M c^3}{\sigma}} = 8 \times 10^8 \text{ K}.$$

Vesmír měl tuto teplotu asi 4 minuty po Velkém třesku a právě se v něm začínaly tvořit první lehké prvky. ▀

▀ Příklad 1.13: Energie fotonů při expanzi

Určete závislost hustoty energie fotonů na expanzní funkci vesmíru.

Řešení: U soustavy nerelativistických fermionů jsme získali mezi tlakem a hustotou energie vztah $p = \frac{2}{3} u$, pro fotonový plyn vyšlo $p = \frac{1}{3} u$, v klasické mechanice je $p = u$. Proto se někdy zavádí obecný vztah mezi tlakem a hustotou energie ve tvaru

$$p = wu, \quad (1.181)$$

kde je parametr w charakteristický pro danou entitu. Snadno určíme pokles hustoty energie záření ($w = 1/3$) s rostoucími rozměry tepelně izolovaného systému (například celého vesmíru, který nemá žádné okolí). Pro $dQ = 0$ zůstane z první věty termodynamické jen.

$$dU = -p dV,$$

$$d(uV) = -\frac{1}{3}u dV.$$

Předpokládejme, že je objem roven třetí mocnině rozměrů (u vesmíru jde o tzv. expanzní funkci), tj.

$$d(uR^3) = -\frac{1}{3}u dR^3,$$

$$R^3 du + 3R^2 u dR + u R^2 dR = 0,$$

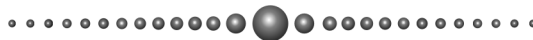
$$\frac{du}{u} + 4 \frac{dR}{R} = 0,$$

$$\ln u R^4 = K,$$

$$u \sim \frac{1}{R^4}. \quad (1.182)$$

Hustota energie záření (resp. částice s nulovou klidovou hmotou) klesá jako $u \sim 1/R^4$. To je dáno tím, že s rostoucím objemem klesá hustota jako $1/R^3$, ale navíc se při expanzi prodlužuje vlnová délka fotonů, která expanzi vesmíru „sleduje“. Tím se dále snižuje energie fotonů (je úměrná $1/\lambda$) a výsledný pokles je roven $1/R^4$. ■

O fyzice fermionů a bosonů se můžete dozvědět více informací v publikacích [11], [12].



1.8 Fluktuační a entropie

1.8.1 Fluktuační

V minulých kapitolách jsme zavedli střední hodnotu dynamické proměnné A středovanou přes soubor

$$\langle A \rangle \equiv \sum_n A_n w_n .$$

Definujme nyní odchylku veličiny A od střední hodnoty

$$\Delta A \equiv A - \langle A \rangle . \quad (1.183)$$

Střední hodnota odchylek je samozřejmě nulová (je zhruba stejně kladných i záporných odchylek od střední hodnoty):

$$\langle \Delta A \rangle = 0 . \quad (1.184)$$

Chceme-li přesto znát průměrnou velikost odchylek, musíme průměrovat buď absolutní hodnoty odchylek, nebo kvadráty odchylek (průměr z kvadrátů je třeba samozřejmě nakonec odmocnit, aby měl výsledek stejný rozměr jako původní veličina):

$$\Delta A_{\text{abs}} \equiv \langle |\Delta A| \rangle ; \quad \Delta A_{\text{kv}} \equiv \sqrt{\langle (\Delta A)^2 \rangle} . \quad (1.185)$$

Druhá z veličin se nazývá *střední kvadratická fluktuace* veličiny A . Velký význam má ve statistice i sama neodmocněná veličina (průměr z kvadrátů odchylek, *rozptyl*, *variance* nebo *druhý centrální moment* veličiny A):

$$\begin{aligned} \text{var } A &\equiv \langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 . \end{aligned}$$

Tedy platí:

$$\text{var } A \equiv \langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 . \quad (1.186)$$

Fluktuační různých fyzikálních veličin úzce souvisí s důležitými charakteristikami systému. Například fluktuace velikosti rychlosti v souvisí s teplotou, fluktuace energie E souvisí s tepelnou kapacitou, fluktuace počtu částic N s kompresibilitou systému ($\partial V / \partial p$) a fluktuace magnetizace M (hustoty dipólového momentu) se susceptibilitou ($\partial M / \partial H$). Tyto charakteristiky systému lze relativně snadno experimentálně měřit. Při počítačových simulacích je naopak snadné sledovat fluktuace simulovaných veličin a z nich usuzovat na měrná tepla, kompresibilitu a susceptibilitu systému. Nalezneme nyní varianci velikosti rychlosti.

Fluktuace rychlosti

Odvoďme nyní vztahy pro variance (rozptyly) velikosti rychlosti a kvadrátu rychlosti. Využijeme při tom hodnotu střední kvadratické rychlosti a střední rychlosti ze vztahu (1.79), vyšší mocniny rychlosti získáme přímou integrací přes Maxwellovo rozdělení:

$$\text{var } v = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = v_{kv}^2 - v_s^2 = \frac{3k_B T}{m} - \frac{8k_B T}{\pi m} = (3 - 8/\pi) \frac{k_B T}{m}.$$

$$\text{var } v^2 = \langle v^4 \rangle - \langle v^2 \rangle^2 = 15 \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2 - 9 \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2 = 6 \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2.$$

Obě variance tedy úzce souvisí s teplotou:

$$\blacktriangleright \quad \text{var } v = (3 - 8/\pi) \frac{k_B T}{m}; \quad (1.187)$$

$$\blacktriangleright \quad \text{var } v^2 = 6 \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2. \quad (1.188)$$

Fluktuace energie

Spočítáme z definice tepelnou kapacitu při stálém objemu

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\sum_n E_n w_n \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\sum_n E_n(V) \exp \left[\frac{F(T, V) - E_n(V)}{k_B T} \right] \right) \Rightarrow$$

$$C_V = \sum_n E_n \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial T} k_B T - (F - E_n) k_B}{(k_B T)^2} \right) \exp \left[\frac{F - E_n}{k_B T} \right] \Rightarrow$$

$$C_V = \sum_n E_n \left(\frac{-S k_B T - (F - E_n) k_B}{(k_B T)^2} \right) w_n.$$

Získaný výraz rozdělíme na jednotlivé členy a ze součtu vytkneme veličiny, přes které se nesčítá:

$$C_V = -\frac{S}{k_B T} \sum_n E_n w_n - \frac{F}{k_B T^2} \sum_n E_n w_n + \frac{1}{k_B T^2} \sum_n E_n^2 w_n.$$

Nyní jsou již úpravy jednoduché:

$$C_V = -\frac{S}{k_B T} U - \frac{F}{k_B T^2} U + \frac{1}{k_B T^2} \langle E^2 \rangle \Rightarrow$$

$$C_V = \frac{-(F + TS)U + \langle E^2 \rangle}{k_B T^2} = \frac{-UU + \langle E^2 \rangle}{k_B T^2} = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{k_B T^2}.$$

Rozptýl energie proto je

$$\blacktriangleright \quad \text{var } E = k_{\text{B}} T^2 C_V . \quad (1.189)$$

Po vztazích (1.187) a (1.188) jsme tedy dokázali další z fluktučních vztahů. Tepelná kapacita je dána fluktuacemi energie systému! Kdyby energie nefluktovala, systém by měl při stálém objemu nulovou tepelnou kapacitu.

Disperze dynamické proměnné A

Disperze je bezrozměrná charakteristika fluktuací (tzv. *relativní fluktuační*), jejíž kvadrát je definován vztahem

$$(\delta_A)^2 \equiv \frac{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}{\langle A \rangle^2} . \quad (1.190)$$

V čitateli je variance A , ve jmenovateli kvadrát střední hodnoty. Pro disperzi energie snadno získáme vztah

$$(\delta_E)^2 \equiv \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{\langle E \rangle^2} = \frac{\text{var } E}{U^2} = \frac{k_{\text{B}} T^2 C_V}{U^2} . \quad (1.191)$$

Určeme disperzi energie pro ideální plyn, kde pro počet stupňů volnosti f je $U = f N k_{\text{B}} T / 2$ a $C_V = f N k_{\text{B}} / 2$:

$$\blacktriangleright \quad \delta_E \sim \frac{1}{\sqrt{N}} . \quad (1.192)$$

Čím větší počet částic systém obsahuje, tím menší fluktuační vykazují. Systémy s velkým počtem částic mají minimální relativní fluktuační celkové energie. Systémy s malým počtem částic mají velké relativní fluktuační energie.

Fluktuační fyzikálních veličin mají ve fyzice mimořádný význam. Sama příroda na nejelementárnější úrovni nutí veličiny fluktuovat. Malá fluktuační libovolně zobecněné souřadnice vede podle Heisenbergových relací neurčitosti na velkou fluktuační odpovídající zobecněné hybnosti a naopak. I sama kvantová pole lze chápat jako zobecněné souřadnice, jimž přísluší zobecněné hybnosti. Ani u polí nelze fluktuační potlačit a jsou jim vlastní. Zodpovídají za tvorbu virtuálních párů ve vakuu i za samotnou složitou strukturu časoprostoru v malých měřítkách. Fluktuační mají význam také v teorii chyb, právě fluktuační totiž způsobují předpověditelné chyby měření. Další význam fluktuační je v numerických simulacích. Sledováním fluktuační lze zjišťovat měrné teplo, susceptibilitu či kompresibilitu systému. Přestože jsme fluktuačním věnovali relativně malou část této učebnice, mají pro statistickou fyziku mimořádný význam.

● Příklad 1.14: Spektrální čára

Nalezněte profil spektrální čáry způsobený chaotickým pohybem atomů zdroje.

Řešení: Pohybuje-li se zdroj záření vzhledem k pozorovateli, mění se přijímaná frekvence podle Dopplerova jevu

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \right) = \omega_0 \left(1 + \frac{v_z}{c} \right) .$$

Je-li zdrojem záření například nějaký zahřátý plyn či obálka hvězdy, jednotlivé atomy se pohybují různými rychlostmi ve shodě s Maxwellovým-Boltzmannovým rozdělením. Pozorovatel vidí jednotlivé emisní akty frekvenčně posunuté a celkovým výsledkem je Dopplerovo rozšíření spektrální čáry. Ze vztahu pro Dopplerův jev určíme fluktuaci frekvence záření:

$$\blacktriangleright \quad \omega - \omega_0 = \omega_0 \frac{v_z}{c} \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega^2 = \omega_0^2 \frac{v_z^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \langle \Delta\omega^2 \rangle = \omega_0^2 \frac{\langle v_z^2 \rangle}{c^2} = \omega_0^2 \frac{k_B T}{m c^2} .$$

Nalezli jsme tak kvadratickou fluktuaci (varianci, rozptyl) frekvence. Je úměrná kvadrátu základní frekvence a podílu tepelné energie a klidové energie jedné zářící částice. Čím chladnější plyn září, tím užší je spektrální čára. Nalezněme nyní přesný profil čáry. Intenzita čáry bude dána zářením, které přichází k pozorovateli od všech částic. Frekvenční závislost je způsobena Dopplerovým jevem. Částice s určitou projekcí rychlosti v_z do směru k pozorovateli budou přispívat k intenzitě na odpovídající frekvenci. Kanonickým rozdělením bude dáno množství částic s danou rychlostí (a tedy i intenzita na dané frekvenci):

$$dI(v_z) = K \exp[-m v_z^2 / 2k_B T] dv_z .$$

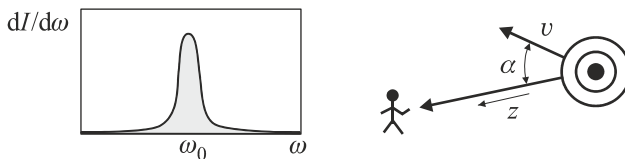
Rychlost v_z převedeme na frekvenci pomocí Dopplerova vztahu

$$\omega = \omega_0 (1 + v_z / c) \quad \Rightarrow \quad v_z = c(\omega - \omega_0) / \omega_0$$

a dosadíme do vztahu pro intenzitu:

$$\blacktriangleright \quad dI(\omega) = I_0 \exp\left[-\frac{m c^2}{2k_B T} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2\right] d\omega . \quad (1.193)$$

Spektrální čára získává vlivem Dopplerova jevu profil Gaussova balíku.



Obr. 1.20: Profil čáry způsobený chaotickým pohybem zdrojů

1.8.2 Entropie

Entropie je veličina, kterou jsme zavedli v termodynamice rovnovážných procesů jako diferencíál tepla vynásobený integračním faktorem. Entropie je úplnou diferencíální formou. Statistická fyzika nám poskytla další možnou (statistickou) definici entropie jako střední hodnotu logaritmu pravděpodobnosti (až na nepodstatnou konstantu):

$$dS = \frac{dQ}{T}; \quad S = -k_B \sum_n w_n \ln w_n .$$

Tím entropie souvisí s pravděpodobností realizace daného stavu systému. Pro entropii platí velmi zajímavé tvrzení:

Entropie rovnovážného stavu je extrémální \Leftrightarrow systém podléhá kanonickému, respektive grandkanonickému rozdělení \Leftrightarrow systém je v termodynamické rovnováze.

Termodynamickou rovnováhou nazýváme stav, ve kterém se systém už nijak nevyvíjí a neexistují žádné makroskopické toky (ty by byly svědectvím o procesech, jež teprve vedou k budoucí termodynamické rovnováze). V rovnováze platí kanonické (grandkanonické) rozdělení a podle předchozího tvrzení entropie dosahuje při rovnováze extrému (maxima). Nerovnovážné děje v uzavřeném izolovaném systému směřují k tomuto maximu a zvyšují neuspořádanost systému. A naopak, přijmeme-li extrémalnost entropie v rovnovážném stavu jako výchozí princip, musí platit kanonické (grandkanonické) rozdělení. Dokažme tuto implikaci pro grandkanonické rozdělení:

$$\begin{aligned} S &= -k_B \sum_n w_n \ln w_n, \\ \sum_n w_n &= 1, \\ \sum_n E_n w_n &= U, \\ \sum_n N_n w_n &= \bar{N}. \end{aligned}$$

Jde o hledání extrému entropie za tří vazebních podmínek. Extrémy s vazebními podmínkami se hledají metodou Lagrangeových multiplikátorů. Zavedeme funkci:

$$\begin{aligned} F(w_l, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \\ &= -k_B \sum_n w_n \ln w_n + \lambda_1 \left(\sum_n w_n - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_n E_n w_n - U \right) + \lambda_3 \left(\sum_n N_n w_n - \bar{N} \right). \end{aligned}$$

Jde o entropii, k níž jsou přidány vazby (nulové výrazy) s multiplikátory λ . Nyní budeme zkoumat podmínku extrémalnosti nově zavedené funkce tří proměnných.

$$\frac{\partial F}{\partial w_l} = 0 \quad \Rightarrow \quad -k_B \ln w_l - k_B + \lambda_1 + \lambda_2 E_l + \lambda_3 N_l \quad \Rightarrow \quad w_l = e^{c_1 + c_2 E_l + c_3 N_l}.$$

Odvozená podmínka je skutečně grandkanonickým rozdělením. Grandkanonické rozdělení je tak přirozeným způsobem provázáno s extrémalností entropie. V případě kanonického rozdělení je počet částic konstantní a extrémalnost entropie zkoumáme jen za přítomnosti dvou vazeb. Výsledkem podobné úvahy pro konstantní počet částic je kanonické rozdělení.

Entropická síla

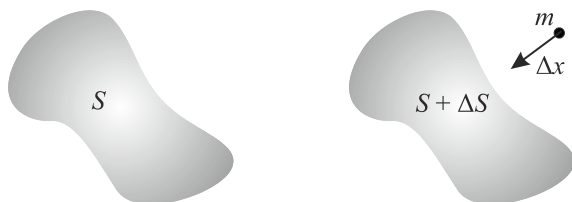
Předpokládejme, že v okolí systému je nějaká hmotná částice, která se pohne. Svým pohybem může způsobit nárůst entropie systému. Situace může být i opačná: změna entropie systému způsobí pohyb okolní částice, tedy situaci, při které na částici působí síla. Energetická bilance bude:

$$T\Delta S = F\Delta x, \quad (1.194)$$

resp.

$$\mathbf{F} = T\nabla S. \quad (1.195)$$

Takovou sílu nazýváme entropickou silou. Do kategorie entropických sil patří například pružnost gumičky, jež souvisí se změnou entropie při jejím natahování. V roce 2010 se holandský fyzik Erik Verlinde pokusil vysvětlit gravitační působení jako entropickou sílu způsobenou kvantovými projevy mikrosvěta. Ve své teorii se opíral jednak o nárůst entropie a jednak o holografický princip (tvrzení, že veškerá informace o systému může být zakódována na ménědimenzionálním útvaru – například entropie černé díry souvisí s jejím povrchem). Nakolik jsou Verlindeho úvahy utopií, nebo nadějnou hypotézou, není zatím známé.



Obr. 1.21: Princip entropické síly

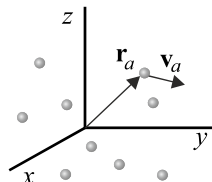
O entropii se můžete dozvědět více v publikaci [13]. S Verlindeho pracemi o gravitaci jako entropické síle se můžete seznámit v publikacích [14], [15], [16].



1.9 Magneticky aktivní systémy

1.9.1 Základní pojmy

Soustava nabitých částic



Obr. 1.22: Soustava nábojů v okolí počátku souřadnic

Představme si systém složený z N nabitých částic, které jsou schopné reagovat na vnější elektrická a magnetická pole, vytvářet vlastní pole a vzájemně interagovat prostřednictvím těchto polí. Budeme-li chtít úlohu řešit v celé šíři, musíme počítat *pole* z Maxwellových rovnic doplněných o materiálové vztahy (vztahy popisující jak systém reaguje na přítomnost polí jako celek) a dále počítat *pohyby částic* z Lorentzovy pohybové rovnice. Označme polohu a -té částice \mathbf{r}_a a rychlost a -té částice \mathbf{v}_a . Soustava částic vykazuje jako celek dipólový elektrický a magnetický moment. Zopakujme v této kapitole některé pojmy z elektřiny a magnetismu, které budeme ke statistickému popisu potřebovat.

Elektrický dipól

Elektrický dipólový moment \mathbf{p}_E soustavy částic je definován vztahem

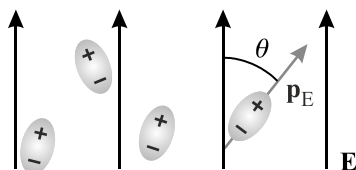
$$\mathbf{p}_E = \sum_a Q_a \mathbf{r}_a . \quad (1.196)$$

Pro dvojici částic s opačným nábojem a vzájemným polohovým vektorem \mathbf{d} dá tato definice výraz (pro malá d hovoříme o elementárním dipólu)

$$\mathbf{p}_E = +Q\mathbf{r}_+ - Q\mathbf{r}_- = Q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = Q\mathbf{d} .$$

Interakce dipólu s vnějším elektrickým polem je dána energetickým předpisem

$$W_{\text{int}} = -\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{E} . \quad (1.197)$$



Obr. 1.23: Elektrický dipól v elektrickém poli

Nejnižší interakční energii má dipól mířící ve směru intenzity elektrického pole. Za nízkých teplot nebo v silném poli bude soustava dipólů seřazena ve směru pole. Při vysokých teplotách a slabém poli bude naopak docházet k fluktuacím a poloha dipólu bude popsána odpovídajícím statistickým rozdělením.

● Příklad 1.15: Elektrické dipóly

Nalezněte rozdělení souboru elektrických dipólů ve vnějším poli.

$$W_{\text{int}} = -\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{E} = -p_E E \cos \theta \quad \Rightarrow$$

$$dw(\varphi, \theta) = K \cdot \exp\left[\frac{p_E E \cos \theta}{k_B T}\right] d\Omega \quad \Rightarrow$$

$$dw(\varphi, \theta) = K \cdot \exp\left[\frac{p_E E \cos \theta}{k_B T}\right] \sin \theta d\varphi d\theta \quad \Rightarrow$$

$$dw(\theta) = C \cdot \exp\left[\frac{p_E E \cos \theta}{k_B T}\right] \sin \theta d\theta.$$

Polarizaci nazýváme hustotu elektrického dipólového momentu

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_E}{\Delta V}. \quad (1.198)$$

Zatímco elektrický dipólový moment \mathbf{p}_E je aditivní veličina, vektor polarizace \mathbf{P} je intenzivní veličina (hustota, jež nezávisí na počtu částic). Materiálový vztah mezi indukci a intenzitou elektrického pole lze zapsat za pomoci polarizace (polarizace popisuje reakci systému na elektrické pole):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}). \quad (1.199)$$

Pro slabá pole lze odezvu systému považovat za lineární a provést Taylorův rozvoj vektoru polarizace do prvního řádu (používáme sumační konvenci):

$$P_k = \frac{\partial P_k}{\partial E_l} E_l \equiv \varepsilon_0 \kappa_{kl} E_l; \quad (1.200)$$

$$\kappa_{kl} \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial P_k}{\partial E_l}. \quad (1.201)$$

Příslušná matice koeficientů se nazývá *tenzor elektrické susceptibility*. Permittivita vakua v definici zajišťuje bezrozměrnost susceptibility. Vektorově lze psát

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{\kappa}} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.202)$$

Vztah mezi indukci a intenzitou v limitě slabých polí dává

$$D_k = \varepsilon_{kl} E_l; \quad \varepsilon_{kl} \equiv \varepsilon_0 (\delta_{kl} + \kappa_{kl}), \quad (1.203)$$

$$\mathbf{D} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}; \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 (\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{\kappa}}). \quad (1.204)$$

Matice ε_{kl} se nazývá *tenzor permitivity*. Pole \mathbf{D} a \mathbf{E} nemusí mířit ve stejném směru. V další kapitole uvidíme, že tenzor susceptibility, a tedy i permitivity, je symetrický. V homogenním izotropním prostředí je matice susceptibility dokonce diagonální a její všechny prvky na diagonále jsou stejné. V limitě slabých polí platí v tomto případě ještě jednodušší vztah

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (1.205)$$

Hustota vnitřní energie soustavy elektrických dipólů v elektrickém poli je dána vztahem (plyne z Maxwellových rovnic, v základních kurzech fyziky jde o hustotu energie kondenzátoru)

$$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} . \quad (1.206)$$

V první větě termodynamické budeme potřebovat jen diferenciál hustoty energie, proto se můžeme omezit na lineární rozvoj vektoru polarizace

$$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}) = \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} , \quad (1.207)$$

$$du_E = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} . \quad (1.208)$$

První člen souvisí s hustotou energie pole, druhý člen odpovídá reakci látky (v našem případě soustavy dipólů) na přiložené elektrické pole. Tato reakce souvisí s polarizací látky a koresponduje s vnitřní energií systému

$$\blacktriangleright \quad du = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} . \quad (1.209)$$

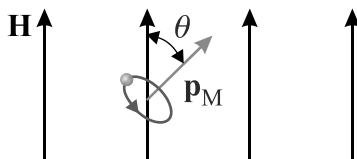
Obdobně jako u elektrického dipólu budeme nyní definovat základní vztahy pro interakci magnetického pole se soustavou magnetických dipólů.

Magnetický dipól

Magnetický dipólový moment soustavy částic je definován vztahem

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{p}_M = \frac{1}{2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a . \quad (1.210)$$

Představme si nyní nejjednodušší situaci – jednu nabitou částici obíhající po malé kružnici (tzv. elementární magnetický dipól).



Obr. 1.24: Magnetický dipól v magnetickém poli

Pro velikost magnetického dipólového momentu (T označuje periodu oběhu, I proud způsobený oběhem náboje) bude podle (1.210) platit

$$p_M = \frac{Qrv}{2} = \frac{Qr}{2} \frac{2\pi r}{T} = \frac{Q}{T} \pi r^2 = IS .$$

Magnetický dipólový moment systému stejných částic souvisí s celkovým momentem hybnosti \mathbf{L} (hmotnost částice označíme m_0 , aby se nepletla s magnetickým kvantovým číslem):

$$\mathbf{p}_M = \frac{Q}{2} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a = \frac{Q}{2m_0} \sum_a m_0 \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a = \frac{Q}{2m_0} \mathbf{L}. \quad (1.211)$$

Vzhledem k tomu, že je v mikrosvětě moment hybnosti kvantován, je odpovídajícím způsobem kvantován i magnetický moment. Interakce dipólu s vnějším magnetickým polem je dána energetickým předpisem

$$\blacktriangleright \quad W_{\text{int}} = -\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{p}_M \cdot \mathbf{H}. \quad (1.212)$$

Magnetické dipóly, obdobně jako elektrické dipóly, mají snahu se seřadit ve směru magnetického pole, kdy mají nejnižší možnou energii. Hustotu magnetického dipólového momentu

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_M}{\Delta V} \quad (1.213)$$

nazýváme *magnetizace*. Zatímco magnetický dipólový moment \mathbf{p}_M je aditivní veličina, vektor magnetizace \mathbf{M} je intenzivní veličina (hustota, jež nezávisí na počtu částic). Materiálový vztah mezi indukcí a intenzitou magnetického pole lze zapsat s pomocí vektoru magnetizace (magnetizace popisuje reakci systému na magnetické pole):

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H})]. \quad (1.214)$$

Pro slabá pole lze odezvu systému považovat za lineární a provést Taylorův rozvoj vektoru magnetizace do prvního řádu (používáme sumační konvenci):

$$M_k = \frac{\partial M_k}{\partial H_l} H_l = \chi_{kl} H_l; \quad (1.215)$$

$$\blacktriangleright \quad \chi_{kl} \equiv \frac{\partial M_k}{\partial H_l}. \quad (1.216)$$

Príslušná matice koeficientů se nazývá *tenzor magnetické susceptibility*. Vektorově lze psát

$$\mathbf{M} = \tilde{\chi} \cdot \mathbf{H}. \quad (1.217)$$

Vztah mezi indukcí a intenzitou v limitě slabých polí dává

$$B_k = \mu_{kl} H_l; \quad \mu_{kl} \equiv \mu_0 (\delta_{kl} + \chi_{kl}). \quad (1.218)$$

$$\mathbf{B} = \tilde{\mu} \cdot \mathbf{H}; \quad \tilde{\mu} = \mu_0 (\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\chi}). \quad (1.219)$$

Matice μ_{kl} se nazývá tenzor permeability. Pole \mathbf{B} a \mathbf{H} nemusí mířit ve stejném směru. V další kapitole uvidíme, že tenzor susceptibility, a tedy i permeability, je symetrický. V homogenním izotropním prostředí je matice susceptibility dokonce diagonální a její všechny prvky na diagonále jsou stejné. V limitě slabých polí platí v tomto případě ještě jednodušší vztah

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.220)$$

Hustota vnitřní energie soustavy elektrických dipólů v magnetickém poli je dána vztahem (plyne z Maxwellových rovnic, v základních kurzech fyziky jde o hustotu energie cívky)

$$u_M = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.221)$$

V první větě termodynamické budeme potřebovat jen diferenciál hustoty energie, proto se můžeme omezit na lineární rozvoj vektoru magnetizace

$$u_M = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H} \cdot (\mathbf{H} + \tilde{\chi} \cdot \mathbf{H}) = \frac{\mu_0 \mathbf{H}^2}{2} + \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H} \cdot \tilde{\chi} \cdot \mathbf{H}, \quad (1.222)$$

$$du_M = \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \tilde{\chi} \cdot d\mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}. \quad (1.223)$$

První člen souvisí s hustotou energie pole, druhý člen odpovídá reakci látky (v našem případě soustavy dipólů) na přiložené magnetické pole. Tato reakce souvisí s magnetizací látky a koresponduje s vnitřní energií systému

►
$$du = \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}. \quad (1.224)$$

1.9.2 Magneticky aktivní materiály

První věta termodynamická a volná energie

Pro interakci elektrických a magnetických polí se systémem známe jen hustotu vnitřní energie. Proto budeme muset i první větu termodynamickou přepsat do hustot. Zavedme

$$u = \frac{U}{V}; \quad s = \frac{S}{V}; \quad f = \frac{F}{V}; \quad n = \frac{N}{V}. \quad (1.225)$$

Postupně jde o hustotu vnitřní energie, hustotu entropie, hustotu volné energie a koncentraci částic. Pozor na kolize tohoto zavedení. Písmen abecedy je žalostně málo, a tak v místech, kde je význam veličiny zřejmý, použijeme k označení i písmeno, které má již jiný význam (typické kolize: magnetické kvantové číslo – hmotnost, elektrický dipólový moment – hybnost, hustota volné energie – počet stupňů volnosti, hustota hmoty – hustota pravděpodobnosti atd.). Převeďme do hustot první větu termodynamickou (1.7) pro konstantní počet částic:

$$du = T ds - \frac{1}{V} p dV.$$

Objem není intenzivní veličinou a jeho výskyt ve vztahu pro hustotu energie je nepřijatelný, proto ho vyjádříme za pomoci hustoty hmoty:

$$\rho V = M \quad \Rightarrow \quad \rho dV + V d\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho}.$$

První věta termodynamická (zapsaná v hustotách) bude mít nyní tvar:

►
$$du = T ds + \frac{p}{\rho} d\rho. \quad (1.226)$$

Nyní přejdeme k elektricky a magneticky aktivním systémům. Na pravé straně přibudou vnitřní energie systému v elektrickém a magnetickém poli (1.209) a (1.224):

$$\blacktriangleright \quad du = T ds + \frac{p}{\rho} d\rho + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}. \quad (1.227)$$

V zákonu zachování energie se objevují další členy vyjadřující, že systém může konat práci elektricky a magneticky. Nezapomeňte, že poslední členy jsou skalárním součinem, tj. každý z nich je součtem tří členů. Provedme zúplnění diferenciálů prvního, třetího a čtvrtého členu na pravé straně:

$$d(u - Ts - \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}) = -s dT + \frac{p}{\rho} d\rho - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{E} - \mu_0 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}.$$

Získáváme tak vztah pro hustotu volné energie a její diferenciál:

$$\begin{aligned} f &= u - Ts - \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}; \\ df &= -s dT + \frac{p}{\rho} d\rho - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{E} - \mu_0 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}; \\ f &= f(T, \rho, \mathbf{E}, \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (1.228)$$

Derivace hustoty volné energie podle jejích proměnných dají jednotlivé koeficienty diferenciálu:

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T}; \quad p = \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}; \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{E}}; \quad \mathbf{M} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{H}}. \quad (1.229)$$

Znalost hustoty volné energie umožňuje zjistit hustotu entropie, stavovou rovnici, vektor polarizace a vektor magnetizace, tedy reakce vyvolané v systému vnějšími poli. Poslední dvě relace jsou vektorové, ve složkách mají tvar

$$P_k = -\frac{\partial f}{\partial E_k}; \quad M_k = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial f}{\partial H_k}.$$

Pomocí vztahů (1.201) a (1.216) můžeme z hustoty volné energie určit i tenzory elektrické a magnetické susceptibility

$$\kappa_{kl} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 f}{\partial E_k \partial E_l}; \quad \chi_{kl} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 f}{\partial H_k \partial H_l} \quad (1.230)$$

a samozřejmě podle vztahů (1.203) a (1.218) i tenzory permitivity a permeability:

$$\varepsilon_{kl} \equiv \varepsilon_0 \delta_{kl} - \frac{\partial^2 f}{\partial E_k \partial E_l}; \quad \mu_{kl} \equiv \mu_0 \delta_{kl} - \frac{\partial^2 f}{\partial H_k \partial H_l}. \quad (1.231)$$

Na první pohled je patrné, že obě susceptibility, permitivita i permeabilita jsou symetrické tenzory, jak jsme již dříve avizovali. Znalost hustoty volné energie nám umožní výpočet základních charakteristik systému, a to jak termodynamických, tak elektrických a magnetických.

Střední kvadratická fluktuační magnetizace

Uvažujme jen magneticky aktivní materiál. Odvození provedeme diskrétně, magnetizace souvisí s momentem hybnosti částic a ten je kvantovaný. Jednotlivé možné stavy magnetizace budeme indexovat indexem n .

$$w_n = \exp[\beta(F - W_{\text{int}})] = \exp[\beta(F + \mu_0 V \mathbf{M}_n \cdot \mathbf{H})]. \quad (1.232)$$

Střední hodnota magnetizace bude dána vztahem

$$\langle \mathbf{M} \rangle \equiv \sum_n \mathbf{M}_n w_n. \quad (1.233)$$

Nalezneme susceptibilitu, pro jednoduchost jen v jednorozměrném problému:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \left(\sum_n M_n \exp[\beta f(T, H) V + \beta \mu_0 M_n V H] \right); \\ \chi &= \sum_n \left(M_n \beta \left(\frac{\partial f}{\partial H} V + \mu_0 V M_n \right) \exp[\dots] \right). \end{aligned}$$

Podobně jako jsme postupovali u odvození fluktuační energie, oddělíme jednotlivé členy a vytkneme ze součtu veličiny, přes které se nesčítá:

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_n (M_n \beta (-\mu_0 \langle M \rangle V + \mu_0 M_n V) w_n); \\ \chi &= -\beta \mu_0 \langle M \rangle V \sum_n M_n w_n + \beta \mu_0 V \sum_n M_n^2 w_n; \\ \chi &= -\beta \mu_0 V \langle M \rangle^2 + \beta \mu_0 V \langle M^2 \rangle; \\ \chi &= \beta \mu_0 V (\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2). \end{aligned}$$

Získali jsme tak jednoduchý vztah mezi susceptibilitou a fluktuační magnetizací:

$$\blacktriangleright \quad \chi = \beta \mu_0 V (\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2) = \beta \mu_0 V \text{var } M. \quad (1.234)$$

Dokázali jsme tak další z velmi důležitých fluktuačních vztahů.

Zdroje magnetického momentu, Landéův faktor

Zdrojem magnetického momentu částice může být jak orbitální (\mathbf{L}), tak spinový (\mathbf{S}) moment hybnosti částice. Jak se vůbec v kvantové teorii sčítají dva momenty hybnosti? Uveďme jen přehled výsledků pro dva momenty označené \mathbf{L} a \mathbf{S} bez ohledu na to, co znamenají:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{L} & L = \sqrt{l(l+1)} \hbar & L_3 = m_L \hbar; & m_L = -l, -l+1, \dots, l-1, l \\ \mathbf{S} & S = \sqrt{s(s+1)} \hbar & S_3 = m_S \hbar; & m_S = -s, -s+1, \dots, s-1, s \\ \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} & J = \sqrt{j(j+1)} \hbar; & J_3 = m_J \hbar; & m_J = -j, -j+1, \dots, j-1, j \end{array}$$

samo výsledné kvantové číslo j může nabývat hodnot $j = |l - s|, \dots, l + s$.

I neutrální částice (například neutron) může být zdrojem magnetického dipólového momentu, za který odpovídá nenulový spin. Magnetický dipólový moment (1.211) je modifikován takto:

$$\mathbf{p}_M = g \frac{Q}{2m_0} \mathbf{J}. \quad (1.235)$$

Veličina \mathbf{J} je celkový moment částice a faktor g je charakteristický pro konkrétní částici:

$$\begin{aligned} g &= -2; & \text{elektron,} \\ g &= +5,68; & \text{proton,} \\ g &= -3,86; & \text{neutron.} \end{aligned}$$

Trochu složitější je situace v takovém systému, jakým je celý atom. Zde dochází k LS vazbě – interakci kolektivních orbitálních a spinových stupňů volnosti celého systému. Výsledek je shodný se vztahem (1.235), jen faktor g je dán složitější formulí

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (1.236)$$

a nazývá se *Landéův faktor*. Pro zájemce zde naznačíme odvození tohoto faktoru. V kvantově mechanickém Hamiltoniánu popisuje interakci atomu s vnějším polem člen

$$\hat{H}_{\text{int}} = \text{const} (\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{H}.$$

Koeficient 2 u spinového momentu je dán anomálním magnetickým momentem elektronu. V časovém průměru přispívají k interakci z orbitální i spinové části jen složky rovnoběžné s celkovým momentem \mathbf{J} . Nalezneme proto projekci kombinace vektorů $\mathbf{L} + 2\mathbf{S}$ do celkového momentu \mathbf{J} :

$$P_{\mathbf{J}}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) = \frac{|\mathbf{J}\rangle \langle \mathbf{J} | \mathbf{L} + 2\mathbf{S} \rangle}{\langle \mathbf{J} | \mathbf{J} \rangle} = \frac{\mathbf{J} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S})}{J^2} \mathbf{J}.$$

Tuto projekci se pokusíme převést na kvadráty velikostí základních momentů J^2, L^2, S^2 :

$$P_{\mathbf{J}}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) = \frac{\mathbf{J} \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{S})}{J^2} \mathbf{J} = \frac{J^2 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}}{J^2} \mathbf{J} = \frac{J^2 + (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot \mathbf{S}}{J^2} \mathbf{J} = \frac{J^2 + S^2 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{J^2} \mathbf{J}.$$

Člen $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ určíme z rovnosti $J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 = L^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + S^2$. Výsledek je

$$P_{\mathbf{J}}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) = \frac{J^2 + S^2 + (J^2 - L^2 - S^2)/2}{J^2} \mathbf{J} = \frac{3J^2 + S^2 - L^2}{2J^2} \mathbf{J} = \left(1 + \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2J^2} \right) \mathbf{J}.$$

Využijeme-li nyní kvantování těchto veličin, máme výsledek

$$P_{\mathbf{J}}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) = \left(1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right) \mathbf{J}.$$

Faktor v závorce je právě Landéův faktor, který multiplikativně modifikuje celkový moment hybnosti \mathbf{J} v důsledku LS vazby.

Interakce magnetických momentů

Energie interakce magnetického momentu s vnějším polem je dána vztahem

$$W_{\text{int}} = - \mathbf{p}_M \cdot \mathbf{B} = - g \frac{Q}{2m_0} \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.237)$$

Moment \mathbf{J} bude mít snahu orientovat se buď ve směru vnějšího pole, nebo proti směru pole, podle znaménka faktoru g . Celý výraz se často píše v podobě

$$W_{\text{int}} = - g \frac{Q}{2m_0} J_z B = - g \frac{Q}{2m_0} m_J \hbar B = - m_J g \frac{Q \hbar}{2m_0} B.$$

Zlomek ve výrazu se nazývá *Bohrův magneton* μ_B (předpokládáme, že jde o elementární náboj $Q=e$) – znaménko je nepodstatné, protože magnetické kvantové číslo m_J probíhá záporné i kladné hodnoty.

$$\blacktriangleright \quad W_{\text{int}} = m_J g \mu_B B; \quad \mu_B \equiv \frac{e \hbar}{2m_0}, \quad m_J = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \quad (1.238)$$

Pro systém magnetických momentů musíme uvážit i interakci momentů mezi sebou a namísto indukce magnetického pole je výhodná intenzita pole, která souvisí s volnou energií systému:

$$W_{\text{int}} = \sum_{a,b} W_0(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) - g \mu_0 \frac{Q}{2m_0} \sum_a \mathbf{J}_a \cdot \mathbf{H}. \quad (1.239)$$

Zeemanův jev

Ve vnějším magnetickém poli se původně jedna energetická hladina rozštěpí podle vztahu (1.238) na $2j+1$ podhladin. To vede na štěpení spektrálních čar nazývané *Zeemanův jev*. Rozdíl energie dvou sousedních podhladin je $\Delta E = g \mu_B B$, z tohoto vztahu můžeme snadno určit vzdálenost mezi rozštěpenými čarami.

Magnetická rezonance

Systém magnetických dipólů ve vnějším magnetickém poli je schopen pohlcovat kvanta elektromagnetického záření, která odpovídají rozdílu energetických hladin interakce dipólu s vnějším polem. Procházející elektromagnetické pole vlastně způsobuje přeskoky magnetického dipólu mezi stavy s různým m_J . Energetické spektrum (1.238) je ekvidistantní a rezonanční (pohlcované) fotony tak musí splňovat relaci:

$$\hbar \omega_{\text{rez}} = g \mu_B B.$$

Snadno dopočteme rezonanční frekvenci

$$f_{\text{rez}} = K B; \quad K = \begin{cases} 1,44 \text{ MHz T}^{-1} & \text{pro atom,} \\ 0,76 \text{ kHz T}^{-1} & \text{pro jádro.} \end{cases} \quad (1.240)$$

Magnetická rezonance se využívá jako úspěšná zobrazovací metoda. Předmět je vnořen do pole B a ozářen elektromagnetickým zářením rezonanční frekvence. Rezonance na celých atomech (respektive jejich obalech) se nazývá *elektronová magnetická rezonance* (EMR) a rezonance na částicích jádra *jaderná magnetická rezonance* (NMR – *Nuclear Magnetic Resonance*).

Curieův zákon

Uvažujme nyní nejjednodušší možný systém složený z N elementárních magnetických dipólů, které mohou mít jen dvě projekce magnetického dipólového momentu $\pm\mu_B/2$ (jsou například tvořeny částicemi se spinem $1/2$). Interakce jednoho dipólu s vnějším magnetickým polem má jen dvě možné energetické hodnoty:

$$W_{\text{int}} = -\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{B} = \pm \frac{\mu_B}{2} B = \pm \frac{\mu_0 \mu_B H}{2}.$$

Ve skalárním součinu se uplatnila jen projekce magnetického dipólového momentu do směru pole, tedy jedna ze dvou možných hodnot. Partiční suma jednoho dipólu bude mít jen dva členy:

$$z = \exp\left[+\frac{\mu_0 \mu_B H}{2k_B T}\right] + \exp\left[-\frac{\mu_0 \mu_B H}{2k_B T}\right] = 2 \operatorname{ch}\left[\frac{\mu_0 \mu_B H}{2k_B T}\right].$$

Partiční suma soustavy N vzájemně neinteragujících dipólů bude

$$Z_N = z^N = \left(2 \operatorname{ch}\left[\frac{\mu_0 \mu_B H}{2k_B T}\right]\right)^N.$$

Standardním způsobem určíme hustotu volné energie a z ní magnetizaci, susceptibilitu a permeabilitu:

$$f = -\frac{1}{V} k_B T \ln Z_N = -\frac{Nk_B T}{V} \ln \left[2 \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_0 \mu_B H}{2k_B T}\right)\right],$$

$$M = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial f}{\partial H} = n \frac{\mu_B}{2} \operatorname{th}\left[\frac{\mu_0 \mu_B H}{2k_B T}\right], \quad (1.241)$$

$$\chi = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 f}{\partial H^2} = n \frac{\mu_0 \mu_B^2}{4k_B T} \operatorname{cosh}^{-2}\left[\frac{\mu_0 \mu_B H}{2k_B T}\right], \quad (1.242)$$

$$\mu \equiv \mu_0 - \frac{\partial^2 f}{\partial H^2} = \mu_0 + n \frac{\mu_0^2 \mu_B^2}{4k_B T} \operatorname{cosh}^{-2}\left[\frac{\mu_0 \mu_B H}{2k_B T}\right]. \quad (1.243)$$

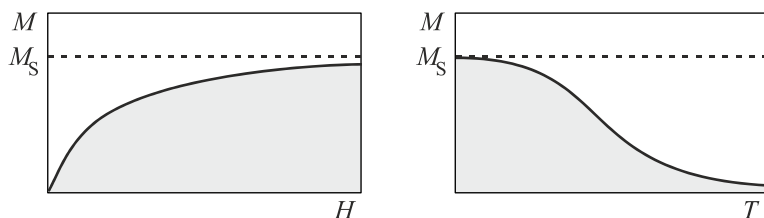
I takto jednoduchý systém (dvě možnosti orientace elementárních magnetů) má nelineární chování. Magnetizace není lineární funkcí intenzity pole, ale obecnou funkcí $M = M(H)$. Magnetizace vykazuje při vysoké intenzitě pole a nízké teplotě saturaci (získá maximální hodnotu nezávislou na velikosti intenzity pole). Všechny spiny jsou za těchto podmínek zorientovány ve směru pole. Hodnota saturace je

$$M_S = n \mu_B / 2.$$

Provedeme-li linearizaci vztahu pro slabá pole, dostáváme

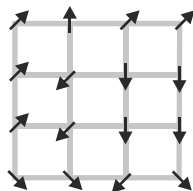
$$M = \chi H; \quad \chi \equiv \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H=0} = \frac{n\mu_0\mu_B^2}{4k_B T}. \quad (1.244)$$

Susceptibilita je nepřímo úměrná teplotě magnetika. Tento vztah se nazývá *Curieův zákon* a platí jen v limitě slabých polí. Je pojmenován podle francouzského fyzika Pierra Curieho (1859–1906).



Obr. 1.25: Závislost magnetizace na magnetickém poli a na teplotě

1.9.3 Mřížové modely



Připustíme-li více možných hodnot spinů a jejich interakci navzájem, je výpočet partiční sumy většinou nepřekonatelným problémem. Proto se často využívá relativně jednoduchý model spinů lokalizovaných ve vrcholech pravoúhlé mříže, který v mnoha případech svým chováním velmi dobře odpovídá skutečným materiálům. Zpravidla se předpokládá, že spolu vzájemně interagují jen nejbližší spiny v sousedních vrcholech mříže, takové sousední vrcholy označujeme $\langle a, b \rangle$. Interakční předpis je analogický výrazu (1.239), jen součet vzájemné interakce probíhá přes nejbližší sousedy:

$$W_{\text{int}} = \sum_{\langle a, b \rangle} W_0(\boldsymbol{\sigma}_a, \boldsymbol{\sigma}_b) - K \sum_a \boldsymbol{\sigma}_a \cdot \mathbf{H}. \quad (1.245)$$

Veličiny $\boldsymbol{\sigma}$ charakterizují spinový moment a jsou úměrné magnetickému momentu. Podle typu vzájemné interakce W_0 rozlišujeme jednotlivé modely.

Isingův model

Jde o nejjednodušší možný model. Spiny mohou nabývat jen dvou hodnot (například „nahoru“ a „dolů“) a interakční energie je dána předpisem (veškeré koeficienty a konstanty jsou zahrnuty do interakčních konstant J a K)

$$W_{\text{int}} = -J \sum_{\langle a, b \rangle} \sigma_a \sigma_b - K \sum_a \sigma_a H; \quad \sigma \in \{-1, +1\}. \quad (1.246)$$

Hodnota $+1$ označuje spin mířící vzhůru, hodnota -1 spin mířící dolů. Pro $J > 0$ přispějí dva sousední shodně orientované spiny k energii hodnotou $-J$, dva opačně orientované spiny hodnotou $+J$. Při nízkých teplotách má systém snahu zaujmout co nejnižší energii a vznikají proto domény souhlasně orientovaných spinů (*Weissovy domény*). Jejich teorii rozpracoval francouzský fyzik Pierre-Ernest Weiss (1865–1940). Při vysokých teplotách jsou spiny orientovány náhodně. Již tento jednoduchý model vykazuje pro $J > 0$ základní vlastnosti *feromagnetik*. Při nízkých teplotách existuje *uspořádaná fáze*, při vysokých teplotách *chaotická fáze*. Mezi oběma fázemi nastává fázový přechod při tzv. Curieově teplotě T_C . Pro $J < 0$ jsou při nízkých teplotách preferovány nesouhlasně orientované spiny a systém vykazuje *antiferomagnetické* vlastnosti. V jednorozměrném problému je nalezení partiční sumy i za přítomnosti vnějších polí triviální záležitostí. Úlohu analyticky vyřešil v rámci své disertační práce Ernst Ising (1900–1998) v roce 1925. Ukázal, že v lineárním řetězci spinů je situace natolik jednoduchá, že nedochází k fázovému přechodu. Ve dvou dimenzích vyřešil problém s pomocí vytříbených grafických metod Lars Onsager (1903–1976) v roce 1944. Ve 2D Isingově modelu již Curieův fázový přechod existuje. Obecné analytické řešení ve třech dimenzích není známé a partiční suma, magnetizace a susceptibilita se dohledávají numericky.

Isingův výpočet v jedné dimenzi (1925)

Předpokládejme jednorozměrný řetězec N spinů na mřížce s periodickými okrajovými podmínkami, tedy platí

$$\sigma_{N+1} = \sigma_1. \quad (1.247)$$

Pro partiční sumu bude platit

$$Z_N = \sum_{\sigma} e^{\left[\beta J \sum_{a=1}^N \sigma_a \sigma_{a+1} + \beta K \sum_{a=1}^N \sigma_a H \right]}. \quad (1.248)$$

Nyní provedeme symetrizaci druhé části výrazu

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma} e^{\left[\beta J \sum_{a=1}^N \sigma_a \sigma_{a+1} + \beta K \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N (\sigma_a + \sigma_{a+1}) H \right]} = \\ &= \sum_{\sigma} \prod_{a=1}^N e^{\left[\beta J \sigma_a \sigma_{a+1} + \frac{1}{2} \beta K (\sigma_a + \sigma_{a+1}) H \right]}. \end{aligned} \quad (1.249)$$

Zavedeme-li matici ($\sigma_a = \pm 1$)

$$T_{\sigma_a \sigma_b} = \begin{pmatrix} e^{\beta J + \beta K H}, & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J}, & e^{\beta J - \beta K H} \end{pmatrix}. \quad (1.250)$$

můžeme partiční sumu přepsat do tvaru

$$Z_N = \sum_{\sigma} \prod_{a=1}^N T_{\sigma_a \sigma_{a+1}} = \sum_{\sigma_k = \pm 1} T_{\sigma_1 \sigma_2} T_{\sigma_2 \sigma_3} T_{\sigma_3 \sigma_4} \cdots T_{\sigma_N \sigma_1} = \text{Tr}(T^N). \quad (1.251)$$

Dva shodné sousední indexy znamenají maticové násobení. Výsledkem je stopa T^N , která je invariantem a je stejná v jakékoli bázi. V bázi z vlastních vektorů bude mít matice T na diagonále vlastní čísla, ostatní prvky budou nulové, tj.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (1.252)$$

$$Z_N = \text{Tr} T^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N. \quad (1.253)$$

Předpokládejme, že vlastní čísla jsou seřazena tak, že první z nich je větší. Potom pro velká N bude platit

$$Z_N = \text{Tr} T^N = \lambda_1^N \left[1 + (\lambda_2/\lambda_1)^N \right] \approx \lambda_1^N. \quad (1.254)$$

Klíčovou veličinou je opět volná energie, kterou už snadno určíme:

$$\begin{aligned} F &= -k_B T \ln \lambda_1^N = -N k_B T \ln \lambda_1; \\ f(n, T, H) &= -n k_B T \ln \lambda_1(T, H). \end{aligned} \quad (1.255)$$

Dále už standardním postupem určíme další veličiny, zejména magnetizaci $M = -\partial f / \partial H$, susceptibilitu $\chi = -\partial^2 f / \partial H^2$, tepelnou kapacitu atd. Magnetizace roste z nulové hodnoty do maximální (nasyčené) hodnoty a její průběh odpovídá klasickému feromagnetiku. Výpočet vlastních čísel matice (1.250) je přímočarý, vyjde

$$\lambda_{1,2} = e^{\beta J} \text{ch}(\beta K H) \pm \sqrt{e^{2\beta J} \text{ch}^2(\beta K H) - 2 \text{sh}(2\beta J)}. \quad (1.256)$$

Pottsův model

Jde o Q stavový model s podobným interakčním předpisem jako Isingův model:

$$W_{\text{int}} = - \sum_{\langle a,b \rangle} J \delta_{\sigma_a \sigma_b}; \quad \sigma \in \{1, \dots, Q\}. \quad (1.257)$$

Spiny se mohou orientovat do Q směrů, sousední souhlasně orientované spiny přispějí k energii hodnotou $-J$, ostatní k energii nepřispějí. Model má opět uspořádanou nízkoteplotní fázi, ve které se vyskytují domény souhlasně orientovaných spinů, a vysokoteplotní chaotickou fázi. Obě fáze jsou odděleny Curieovým fázovým přechodem, který probíhá při Curieově teplotě T_C . Model je pojmenován podle australského fyzika Renfreye Pottse (1925–2005).

Z_Q model

Jde o Q stavový model s interakcí danou kosinem vzájemného úhlu mezi spiny:

$$W_{\text{int}} = - \sum_{\langle a,b \rangle} J \cos(\alpha_a - \alpha_b); \quad \alpha = \frac{2\pi}{Q} \sigma; \quad \sigma \in \{1, \dots, Q\}. \quad (1.258)$$

Model má pro velké hodnoty Q tři fáze: 1) nízkoteplotní uspořádanou fázi s typickými doménami; 2) „soft“ fázi při středních teplotách, při které se sousední spiny svou orientací liší jen velmi málo – vznikají charakteristické víry nebo spinové vlny; 3) vysokoteplotní chaotickou fázi. Fázový přechod z nízkoteplotní fáze k „soft“ fázi se nazývá Curieův přechod (T_C), fázový přechod ze „soft“ fáze do vysokoteplotní fáze se nazývá Kosterlitzův-Thoulessův přechod (T_K). Jde o přechod, při kterém je susceptibilita spojitá. Ke ztrátě uspořádanosti při přechodu ze „soft“ do chaotické fáze dochází díky příčným fluktuacím (tzv. Goldstoneovým módům). Přechod opačným směrem (od

neuspořádané k „soft“ fázi) lze chápat jako narušení rotační symetrie, při kterém se objeví Goldstoneovy módy fluktuací. Přechod je nazván podle amerického fyzika Johna Michaela Kosterlitzze a skotského fyzika Davida Thoulesse (1934).

Heisenbergův model

Jde o spojitý model, který připouští veškeré orientace spinů. Energetický předpis interakce je:

$$W_{\text{int}} = - \sum_{\langle a,b \rangle} J \cos(\alpha_a - \alpha_b); \quad \alpha \in <0, 2\pi). \quad (1.259)$$

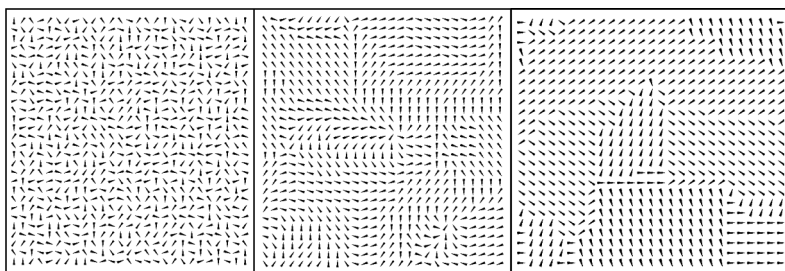
Třírozměrná varianta se nazývá Heisenbergův model, dvojrozměrná varianta se nazývá XY model. Modely mají jen dvě fáze: pro nízkoteplotní „soft“ fázi jsou charakteristické dvojice vírů a spinové vlny; vysokoteplotní fáze má spiny orientovány chaoticky. Obě fáze jsou oddělené Kosterlitzovým-Thoulessovým přechodem. U materiálů tohoto typu neexistuje fáze s doménami. K Heisenbergovým magnetům patří například materiál označovaný GSO s chemickým složením $\text{Gd}_2\text{Sn}_2\text{O}_7$.

Spinová skla

Jde o materiály, u kterých se vazbová konstanta J liší od dvojice spinů ke dvojici. Často má náhodný charakter. Energetický předpis je

$$W_{\text{int}} = - \sum_{\langle a,b \rangle} J_{ab} f(\sigma_a, \sigma_b). \quad (1.260)$$

V takovém materiálu neexistuje korelace na velké vzdálenosti. Pro spinová skla je charakteristická existence mnoha metastabilních stavů, jejichž experimentální studium je mimořádně obtížné. Numerické simulace umožňují alespoň rámcové studium těchto zajímavých materiálů. Ke spinovým sklům patří například materiál s chemickým složením $\text{LiHo}_x\text{Y}_{1-x}\text{F}_4$. Pro vysoký podíl holmia jde o feromagnetikum, pro $x < 0,25$ jde o spinové sklo. Magnetické momenty holmia interagují téměř výhradě dipólově, energetický předpis je obdobný Isingovu modelu, ale s chaotickým chováním interakční konstanty. Jiným velice zajímavým materiálem je sloučenina PrAu_2Si_2 . Přestože jde o dobře uspořádanou krystalickou strukturu, při nízkých teplotách vykazuje vlastnosti spinových skel. Mechanismem vzniku je tzv. dynamická frustrace – jev, při kterém dynamické fluktuace v krystalu znemožní korelace magnetických momentů na větší vzdálenosti. K frustraci dochází tím, že existuje mnoho neslučitelných základních stavů (s nejnižší energií) a jednotlivé silové interakce „soutěží“ o dosažení některého z nich. Výsledkem je vytuhnutí materiálu ve stavu spinového skla s chaotickými vazebnými konstantami.



Obr. 1.27: Monte Carlo simulace Z_2 modelu Metropolisovou metodou. Nalevo je vysokoteplotní chaotická fáze, uprostřed „soft“ fáze a napravo nízkoteplotní domény.

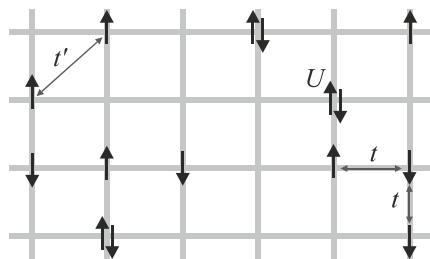
Hubbardův model

Ani bouřlivě se rozvíjející výpočetní technika neumožňuje simulace elektronových systémů s mnoha (například 10^{23}) elektrony. V takových situacích se pokoušíme sledovaný systém rozumně zjednodušit. Natolik rozumně, aby ještě popisoval vlastnosti skutečné látky, kterou chceme zkoumat. Představme si, že elektrony mohou být lokalizovány jen v určitých místech, například ve vrcholech pravidelné mříže. Tak je tomu třeba v krystalických látkách, kde je elektron v blízkosti určitého iontu. Nicméně modely elektronů na mříži mají mnohem širší uplatnění a lze pomocí nich obecně modelovat systémy se silně korelovanými elektrony, například vysokoteplotní supravodiče.

K nejjednodušším modelům tohoto typu patří tzv. Hubbardův model. Elektrony jsou kreovány a anihilovány ve vrcholech mříže tak, aby jejich chování odpovídalo energii systému při dané teplotě. Energie systému se skládá ze dvou odlišných členů:

$$W_{\text{int}} = -t \sum_{\langle a,b \rangle, \sigma} \left(\hat{a}_{a\sigma}^\dagger \hat{a}_{b\sigma} + \hat{a}_{b\sigma}^\dagger \hat{a}_{a\sigma} \right) + U \sum_a n_{a\uparrow} n_{a\downarrow}; \quad n_{a\sigma} \equiv \hat{a}_{a\sigma}^\dagger \hat{a}_{a\sigma}. \quad (1.261)$$

První člen je dán interakcí nejbližších sousedů (součet přes všechny dvojice nejbližších vrcholů). Vazební konstanta této interakce je označena t , symbol \hat{a}^\dagger označuje kreační operátor elektronu se spinem σ v daném vrcholu, symbol \hat{a} anihilační operátor. Tento člen umožňuje „přeskakování“ či „tunelování“ elektronů z jednoho vrcholu mříže do druhého. Druhá část energie je součtem přes všechny vrcholy, symbol $n_{a\sigma}$ znamená počet jedinců se spinem σ v daném vrcholu. Kladná vazební konstanta U znamená repulzi elektronů na malých vzdálenostech. Pokud je ve vrcholu jeden elektron se spinem \uparrow a jeden elektron se spinem \downarrow , přispějí k celkové energetické bilanci kladnou hodnotou U , pokud je ve vrcholu jediný elektron, přispěje tento vrchol nulovou hodnotou. Za nízkých teplot jsou preferovány stavy s co možná nejnižší energií, tedy jediný elektron ve vrcholu mříže. Oba energetické členy znamenají v jistém smyslu párovou interakci. První člen se týká interakce elektronů ve dvou nejbližších vrcholech mříže. Druhý se týká interakce dvojice elektronů v jednom jediném vrcholu (coulombická repulze). V reálných materiálech je podíl vazebních konstant U/t mezi 10 až 50.



Obr. 1.28: Hubbardův model

Model navrhl anglický fyzik John Hubbard (1931–1980) v roce 1963 k popisu chování elektronů v pevných látkách. Pomocí Hubbardova modelu lze snadno simulovat přechod látky mezi vodivým a nevodivým stavem. Dnes se model využívá k popisu chování ultrachladných atomů zachycených v optické mříži (pravidelně se střídající minima a maxima elektrického potenciálu, jež vznikla interferencí dvou nebo více laserových svazků). Původní model byl navržen pro dva fermiony, později se objevila i bosonová varianta Hubbardova modelu a různé další užitečné modifikace. Modely se

nemusí omezovat na pravouhlou mříž, interakce nemusí probíhat jen mezi nejbližšími sousedy, ale například i mezi sousedy na úhlopříčce s vazební konstantou t' , uvažují se modely v mnoha dimenzích atd.

t-J model

V roce 1977 polský fyzik Józef Spałek (*1945) upravil Hubbardův model pro velké hodnoty interakční konstanty U do podoby se dvěma párovými interakcemi mezi nejbližšími vrcholy mříže:

$$W_{\text{int}} = -t \sum_{\langle a,b \rangle, \sigma} \left(\hat{c}_{a\sigma}^\dagger \hat{c}_{b\sigma} + \hat{c}_{b\sigma}^\dagger \hat{c}_{a\sigma} \right) + J \sum_a (\mathbf{S}_a \cdot \mathbf{S}_b - n_a n_b / 4);$$

$$\hat{c}_{a\sigma} \equiv \hat{a}_{a\sigma} (1 - n_{a\sigma}); \quad n_a = n_{a\uparrow} + n_{a\downarrow}; \quad J = \frac{2t^2}{U}; \quad (1.262)$$

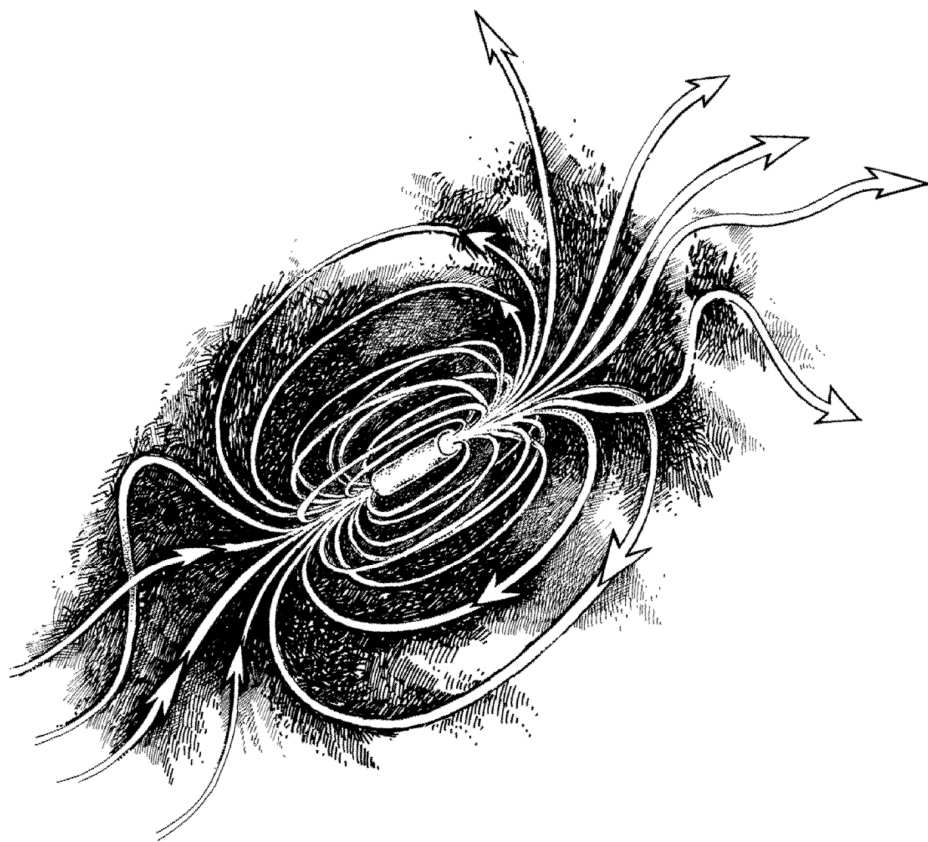
$$\mathbf{S}_a \equiv \left(\hat{a}_{a\uparrow}^\dagger \hat{a}_{b\downarrow}, \hat{a}_{a\downarrow}^\dagger \hat{a}_{b\uparrow}, (n_{a\uparrow} - n_{a\downarrow}) / 2 \right)$$

Model byl nazván podle označení vazebních konstant těchto interakcí jako tzv. t-J model. Člen s vazební konstantou t je podobný prvnímu členu Hubbardova modelu. Druhý člen s vazební konstantou $J = 2t^2/U$ obsahuje skalární součin dvou sousedních spinů, obdobně jako Heisenbergův model. Operátory \mathbf{c} a \mathbf{c}^\dagger vystupující v modelu se nazývají projekce anihilačního a kreačního operátoru. Pomocí tohoto modelu se podařilo vysvětlit chování Mottových izolátorů včetně jejich feromagnetizmu. Mottovy izolátory jsou nevodivé materiály, které by podle standardní pásové teorie měly být vodiči. Nevodivost je způsobena párovými interakcemi elektron-elektron, které pásová teorie neuvažuje. Jev se vyskytuje za nízkých teplot například u NiO nebo CoO. Později se t-J model stal úspěšným i při vysvětlení vysokoteplotní supravodivosti keramických materiálů, například $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$, kterou objevili Karl Alex Müller a Johannes George Bednorz v roce 1986.

Více se o modelech magnetických systémů můžete dozvědět z publikace [17]. Statistická fyzika je mimořádně rozsáhlou fyzikální oblastí a její početné aplikace jsou za hranicemi možností této učebnice.



2. Elektromagnetické pole



2.1 Maxwellovy rovnice

Každá z interakcí má svůj charakteristický náboj, který určuje míru vzájemné interakce jednotlivých těles. U gravitační interakce je oním „nábojem“ hmotnost těles, u elektromagnetické interakce jde o elektrický náboj, u silné interakce o barevný náboj a u slabé interakce o vůni. Je proto přirozené, že se nejprve zaměříme na elektrický náboj částic či těles a vyjádříme si diferenciální podobu zákona zachování elektrického náboje, tzv. rovnici kontinuity. Následující postup neplatí jen pro elektrický náboj, ale pro jakoukoli zachovávající se extenzivní veličinu (extenzivní znamená rostoucí s počtem jedinců, například hmotnost, energie, hybnost, monet hybnosti, teplo, tepelná kapacita atd.). Před čtením této kapitoly byste měli dobře rozumět pojmům tok a cirkulace pole a vektorovým operacím, které s tím souvisí: gradientu, divergenci a rotaci. Podrobnosti naleznete v prvním díle „Vybraných kapitol“, v části I.3.5.

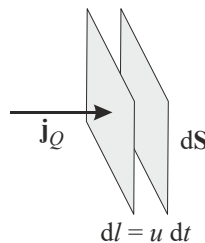
2.1.1 Zákon zachování náboje

Zavedme nejprve hustotu náboje a tok náboje vztahy

$$\rho_Q \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}. \quad (2.1)$$

$$\mathbf{j}_Q \equiv \rho_Q \mathbf{u}. \quad (2.2)$$

Hustota náboje má v soustavě SI jednotku C/m^3 , tok náboje A/m^2 . Tok náboje je vektorová veličina a jako každý vektor má velikost a směr. Směr je jasný na první pohled, jde o směr rychlostního pole, popisujícího tok náboje. Velikost toku snadno zjistíme, pokud budeme sledovat tečení náboje kolmou plochou. Za čas dt se částice dostanou o $dl = u dt$ dále k jiné myšlené ploše:



Obr. 2.1: Tok extenzivní veličiny plochou

Pro velikost toku platí:

$$j_Q = \rho_Q u = \frac{dQ}{dV} \frac{dl}{dt} = \frac{dQ}{dS} \frac{dl}{dt} = \frac{dQ}{dS dt}. \quad (2.3)$$

Tok náboje má tedy význam množství náboje proteklého kolmou jednotkovou plochou za jednotku času. Alternativním názvem této veličiny je *proudová hustota*. Náboj se při

proudění neztrácí ani nepřibývá, jeho časový úbytek z libovolného objemu musí být roven toku veličiny přes plochu obklopující tento objem:

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_Q dV = \oint_{\partial V} \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.4)$$

Hranice objemu V je označena ∂V . Na levé straně přesuneme časovou derivaci do integrace, ρ_Q je ale funkcí času i prostoru, proto se derivace změní na parciální. Na pravou stranu budeme aplikovat Gaussovou větu a plošný integrál převedeme na objemový:

$$-\iiint_V \frac{\partial \rho_Q}{\partial t} dV = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{j}_Q dV. \quad (2.5)$$

Oba integrály nyní spojíme:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_Q \right) dV = 0. \quad (2.6)$$

Uvedený vztah musí při proudění platit v libovolném objemu, a to je možné jen tehdy, je-li argument integrálu nulový (mohl by v principu být nenulový jen v některých bodech nebo plochách, obecně na množině menší dimenze, než přes kterou integrujeme):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_Q = 0. \quad (2.7)$$

Odvozená rovnice je zákonem zachování náboje v diferenciální podobě a nazývá se *rovnice kontinuity pro náboj*. Ukazuje, že čtveřice veličin popisující tečení náboje (ρ_Q, \mathbf{j}_Q) není nezávislá, tyto čtyři funkce splňují v každém bodě prostoru rovnici kontinuity a jsou závislé. Ve stacionárním případě má zákon zachování náboje tvar $\operatorname{div} \mathbf{j}_Q = 0$.

Poznámka 1: Obdobná rovnice kontinuity platí i pro jiné zákony zachování, například energii, hybnost atd. V rovnici kontinuity pak vystupují hustoty a toky těchto veličin. Podrobněji se s diferenciální podobou zákonů zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti pro elektromagnetické pole setkáme v kapitole 2.4.

Poznámka 2: Ve fyzice rozlišujeme extenzivní neboli aditivní veličiny, které rostou s počtem částic (náboj, teplo, energie, hybnost...) a intenzivní veličiny, které na množství částic nezávisí (elektrické pole, magnetické pole, teplota...). U obou typů veličin lze zavést tok. U aditivních veličin je tok roven součinu hustoty dané veličiny a rychlosti proudění, například tok náboje $\mathbf{j}_Q \equiv \rho_Q \mathbf{u}$. U vektorových intenzivních veličin je tok plošným integrálem druhého druhu z dané veličiny, například tok magnetického pole $\psi_B \equiv \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$.

2.1.2 Lorentzova pohybová rovnice

Při sledování pohybu nabitých částic se ukázalo, že elektrické pole urychluje částice, zatímco magnetické pole působí silou kolmou jak na sebe sama, tak na rychlost částice. Výsledky mnoha experimentů lze shrnout do jednoduché formule

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.8)$$

se kterou jsme se již setkali v teoretické mechanice. Časová změna hybnosti částice má elektrickou a magnetickou část. V magnetické části vystupuje vektorový součin, který popisuje prostý fakt, že síla je kolmá jak na rychlost, tak na magnetické pole a že na nepohybující se částice magnetické pole nepůsobí. Magnetická síla způsobuje, že částice kloužou po šroubovicích podél siločar magnetického pole. Pomocí této rovnice můžeme predikovat pohyby částic při známých polích. Rovnice může posloužit i jako definiční rovnice obou polí, neboť ze síly působící na částici můžeme (nejlépe odděleně) určit obě pole \mathbf{E} a \mathbf{B} .

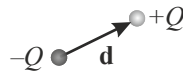
Nás bude ale zajímat nejen reakce částic na daná pole, ale také úloha v jistém smyslu opačná: Jaká pole generují pohybující se částice? Na tuto otázku dává jednoznačnou odpověď soustava Maxwellových rovnic. Než se ale pustíme do jejich analýzy, musíme se ještě seznámit s dvěma pojmy: elektrickým a magnetickým dipólovým momentem.

2.1.3 Elektrický a magnetický dipól

Pro pochopení interakce látky s elektromagnetickým polem jsou klíčové pojmy elektrického a magnetického dipólu. V tuto chvíli se seznámíme s jejich nejjednodušší definicí, kterou později zobecníme pro jakoukoli soustavu nabitých částic.

Elektrický dipól

To, že jsou atomy a molekuly elektricky neutrální, vůbec neznamená, že by elektricky neinteragovaly. Většinou v sobě mají oblast s kladným i záporným nábojem. Nejjednodušší aproximací jejich chování je náhrada elektrickým dipólem: stejným kladným a záporným nábojem separovaným na určité vzdálenosti.



Obr. 2.2: Elektrický dipól

Takový objekt je jako celek elektricky neutrální, ale přesto reaguje na elektrické pole. Elektrický dipólový moment je definován jako součin velikosti náboje a vektoru spojujícího záporný náboj s kladným:

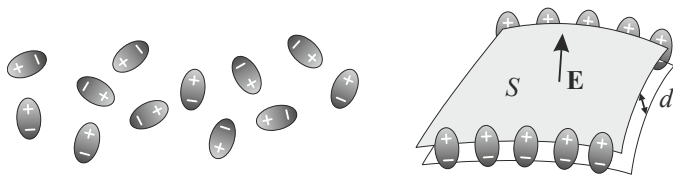
$$\blacktriangleright \quad \mathbf{p}_E \equiv Q\mathbf{d}; \quad [\mathbf{p}_E] = \text{Cm}. \quad (2.9)$$

Představme si, že se látka skládá z velkého množství takových elementárních elektrických dipólů (například polárních vodních molekul). Užitečné je zavést hustotu elektrického dipólového momentu všech takových dipólů:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{P} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_E}{\Delta V}; \quad [\mathbf{P}] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \quad (2.10)$$

$\Delta \mathbf{p}_E$ je celkový dipólový moment všech jedinců v objemové jednotce. Veličinu \mathbf{P} nazýváme polarizace látky a je jasné, že pokud budou dipóly orientovány náhodně, bude výsledná polarizace nulová. Zapneme-li ale elektrické pole, dipóly se budou snažit zorien-

tovat ve směru pole a výsledná polarizace bude nenulová. Snadno určíme rozměr polarizace, je to C/m^2 , což je rozměrově plošný náboj.



Obr. 2.3: Soustava elektrických dipólů pod vlivem pole

A skutečně, při působení pole se na povrchu oblasti zaplněné dipóly (například dielektrika) objeví – díky podobné orientaci dipólů – nenulový plošný elektrický náboj. Představme si původně neutrální atomy, které se vlivem působení elektrického pole polarizovaly, tj. kladný elektrický náboj se posunul ve směru pole a záporný náboj proti směru pole, takže se vytvořily elektrické dipóly se vzdáleností obou nábojů d . Určíme nyní polarizaci (hustotu dipólových momentů ve vrstvě přiléhající k povrchu (obrázek napravo). Velikost hustoty elektrického dipólového momentu bude

$$P = \frac{NQd}{\Delta V} = \frac{NQd}{Sd} = \frac{NQ}{S} \quad (2.11)$$

Velikost vektoru polarizace je tedy pro pole kolmé k povrchu rovna plošné hustotě vázaného náboje σ_b (index b je z anglického „bound“) indukovaného na povrchu dielektrika:

$$P = \sigma_b. \quad (2.12)$$

Vektor polarizace v tomto případě míří ve směru elektrického pole, kterým působíme na dielektrikum. Pokud by elektrické pole nepůsobilo kolmo na povrch dielektrika, ale šikmo, natočí se dipóly ve směru pole a příhraniční vrstva bude mít tloušťku $d \cos \alpha$, kde α je odklon elektrického pole, a tím i dipólů, od normály k povrchu. Výsledkem bude vztah $P \cos \alpha = \sigma_b$, tedy z vektoru polarizace se uplatní jen normálová složka $P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \alpha$:



$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \sigma_b. \quad (2.13)$$

Magnetický dipól

Už jsme si řekli, že nejpřirozenějším pohybem nabitých částic v magnetickém poli je kroužení. Kroužící částice ale generuje magnetické pole. Je-li kroužek malý, vznikne tzv. magnetické dipólové pole. Takovou kroužící částici budeme popisovat veličinou, které se říká magnetický dipólový moment, Je definovaný jako součin plochy a elektrického proudu, který vytváří obíhající částice:

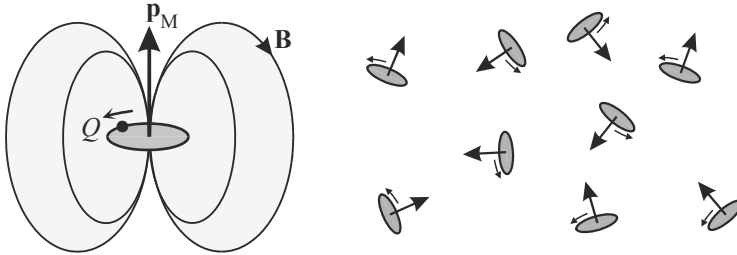


$$\mathbf{p}_M \equiv I \mathbf{S}; \quad [\mathbf{p}_M] = A m^2. \quad (2.14)$$

Magnetický moment míří ve směru normály k ploše obíhané nabitou částicí. Později budeme definovat magnetický moment pro obecnou soustavu pohybujících se nabitých částic. Pokud budeme mít velké množství takových elementárních magnetických momentů, můžeme zavést hustotu magnetického momentu vztahem

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_M}{\Delta V}; \quad [\mathbf{M}] = \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (2.15)$$

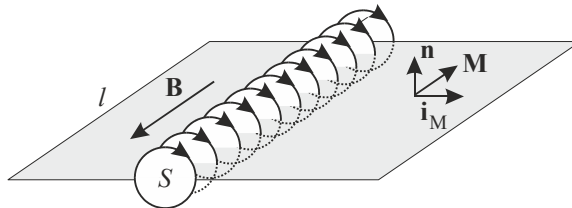
Uvedená veličina se nazývá magnetizace. Její rozměr je A/m. Stejný rozměr má proud vztahovaný na jednotku délky (například protékající napříč nějaké křivky). Nejde o náhodu. Pokud na soustavu magnetických dipólů nepůsobí magnetické pole, mohou být orientovány zcela náhodně a výsledná magnetizace je nulová.



Obr. 2.4: Magnetické dipóly

Představme si magneticky aktivní materiál, ke kterému přiložíme magnetické pole mířící podél povrchu. Nabité částice začnou v magnetickém poli vykonávat krouživý pohyb dle obrázku. Uvnitř materiálu se elektrický proud vzniklý tímto krouživým pohybem vyruší, na povrchu ale zůstane nenulový povrchový proud (magnetizační proud). Jednotlivé kroužící částice budeme považovat za elementární dipóly s magnetickým momentem IS . U povrchu magnetika vybereme jeden válec kroužících částic s objemem Sl a určíme velikost magnetizace v tomto povrchovém válci:

$$M \equiv \frac{NIS}{\Delta V} = \frac{NIS}{Sl} = \frac{NI}{l}.$$



Obr. 2.5: Povrchový proud způsobený magnetickými dipóly

Magnetizace je tedy u povrchu magnetika rovna celkovému povrchovému magnetizačnímu proudu vztahnému na jednotku příčné délky. Takovou veličinu budeme označovat symbolem i :

$$M = i_M. \quad (2.16)$$

V objemových tělesech je zajímavou veličinou proud tekoucí na jednotku plochy, na povrchu těles je důležitý proud tekoucí na jednotku příčné délky. Uvážíme-li směry vektorů (magnetický dipólový moment je kolmý na tekoucí proud i a na normálu k povrchu), pak v našem případě platí vektorový vztah

$$\mathbf{M} \times \mathbf{n} = \mathbf{i}_M. \quad (2.17)$$

Takový vztah platí i při obecném směru magnetického pole a magnetizace materiálu. Pokud míří magnetizace šikmo k povrchu, bude se na genezi proudu podílet jen tečná složka magnetizace, jejíž velikost je rovna $M \sin \alpha$ (α je úhel mezi magnetizací a normálou k povrchu). Proto je ve vztahu (2.17) vektorový součin, který s sebou přináší sinus obou vektorů. V našem případě volně kroužících částic je směr magnetizace opačný než směr magnetického pole (to platí například v plazmatu). Hovoříme o tzv. *diamagnetickém* chování látky.

2.1.4 Maxwellovy rovnice

Nyní máme vše připraveno k tomu, abychom si popsalí jednotlivé rovnice z Maxwellovy soustavy publikované v roce 1873. Dnešní podobu dal rovnicím Oliver Heaviside. Maxwell psal rovnice ve složkovém zápisu a navíc využíval kvaterniony – zobecnění komplexních čísel do čtyř dimenzí. Rovnice jsou popisem experimentálně získaných zkušeností, mj. Coulombova zákona, Ampérova zákona a Faradayova indukčního zákona.

V pasáži věnované zákonu zachování náboje jsme se seznámili s tokem extenzivní veličiny, konkrétně šlo o tok náboje \mathbf{j}_Q . Obdobně můžeme mít tok hmoty, tok energie, tepelný tok atd. Tok je vždy definován jako součin hustoty příslušné veličiny a rychlosti jejího proudění. U vektorových intenzivních veličin (elektrické pole, magnetické pole, rychlostní pole atd.) nazýváme tokem plošný integrál

$$\psi_K \equiv \iint_S \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.18)$$

Míří-li příslušné pole ve směru normály plochy, je tok pole maximální, míří-li podél plochy, je tok plochou nulový. Příslušná plocha může, ale nemusí být uzavřená. Pro nás bude užitečný jak tok magnetického pole, tak tok elektrického pole. Druhou důležitou veličinou je křivkový integrál, v němž nasčítáváme pole podél křivky:

$$C_K \equiv \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.19)$$

Je-li polem síla, dostáváme mechanickou práci vykonanou silou na dané dráze. Jde-li o elektrické pole, je výsledkem napětí mezi počátečním a koncovým bodem křivky. Příslušná křivka může, ale nemusí být uzavřená. Je-li uzavřená, nazýváme integrál (2.19) cirkulací pole \mathbf{K} . Toky a cirkulace polí jsou v soustavě Maxwellových rovnic klíčovými pojmy, se kterými se ještě setkáme.

Gaussova věta magnetostatiky

Z experimentů víme, že magnetické pole všemi body pouze prochází. Nikde nemá žádné zdroje, neexistují magnetické monopóly, ze kterých by vyvěralo. Možná v prvních fázích vesmíru existovaly, ale při inflační fázi se vesmír natolik rozeplnul, že se v pozorovatelné části vesmíru vyskytuje jen několik monopólů, které nemáme šanci zaznamenat. Pokud vyčleníme v prostoru jakýkoli makroskopický objem, bude tok magnetických indukčních čar ohraničující plochou vždy nulový (ty, které vniknou dovnitř, prostor zase opustí):

$$\oiint_{S=\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.20)$$

Po aplikaci Gaussovy věty máme

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0. \quad (2.21)$$

Vzhledem k tomu, že relace platí pro jakýkoli objem, musí být integrand nulový (matematicky přesně by bylo „nulový až na množiny menší míry, resp. dimenze, než je oblast integrace“, těmito „jemnostmi“ se ale nebudeme zabývat a v dalších případech už na ně nebudeme upozorňovat):

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.22)$$

Jde o první z Maxwellových rovnic, která vyjadřuje nezdvořovost magnetického pole.

Coulombův zákon

Z úvodních kurzů fyziky víme, že náboj vytváří elektrické pole

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.23)$$

Tok pole bude pro všechny ohraničující plochy stejný (viz úvodní kurzy matematiky nebo fyziky), proto při výpočtu toku elektrického pole stačí kolem náboje vytvořit kulovou plochu s poloměrem r :

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S E \, dS = E \oiint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.24)$$

Tuto konstrukci je možné zobecnit na jakýkoli náboj, tj. tok elektrického pole uzavřenou plochou musí být úměrný volnému náboji Q plus vázanému náboji Q_b nalézajícímu se v prostoru ohraničeném touto plochou:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q + Q_b}{\epsilon_0}. \quad (2.25)$$

Pokud půjde o látkové prostředí, například dielektrikum, dojde k jeho polarizaci. Uvnitř látky se náboj dipólů vyruší, v blízkosti její hranice nikoli. Na ohraničující ploše vznikne podle (2.13) plošný náboj $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, pod plochou $-\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$. Celkový vázaný náboj v uvažované oblasti bude

$$Q_b = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.26)$$

Po dosazení do (2.25) máme

$$\oiint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q - \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.27)$$

Integrál z pravé strany převedeme nalevo a máme

$$\oiint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (2.28)$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q; \quad \mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}). \quad (2.29)$$

Nově zavedený vektor \mathbf{D} se nazývá elektrická indukce. Zahrnuje v sobě reakci materiálu na vzniklé či působící elektrické pole (tu popisuje vektor polarizace \mathbf{P} , který reprezentuje hustotu vzniklých elektrických dipólů). Vektor polarizace je samozřejmě funkcí přiloženého pole \mathbf{E} . Náboj na pravé straně je volný náboj pod integrační plochou. Rovnice (2.29) je integrální podobou další Maxwellovy rovnice. Převědme vztah do diferenciálního tvaru. Nalevo budeme aplikovat Gaussovu větu (integrál bude přes objem ohraničený integrační plochou), pravou stranu napíšeme jako objemový integrál z hustoty elektrického náboje:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV = \iiint_V \rho_Q \, dV. \quad (2.30)$$

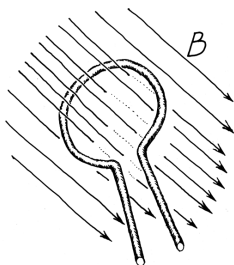
Uvedená relace musí platit pro jakýkoli objem, integrandy musí proto být totožné, tj.

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q. \quad (2.31)$$

Jde o diferenciální podobu *Gaussovy věty elektrostatiky* (zobecněného Coulombova zákona), která říká, že elektrická indukce \mathbf{D} vyvěrá z oblastí kladných nábojů a noří se do oblastí záporných nábojů. Na pravé straně vystupuje hustota volného náboje.

Faradayův indukční zákon

Při svých rozsáhlých experimentech s elektřinou a magnetizmem přišel anglický fyzik Michael Faraday na velmi zajímavou věc. Pokud vodivou smyčkou procházel časově proměnný magnetický tok, vznikalo v ní elektrické napětí a následně tekla elektrický proud. Důležité je, že magnetický indukční tok musí být proměnný.



Obr. 2.6: Faradayův indukční zákon

Toho dosáhneme otáčením smyčky, otáčením magnetu nebo přibližováním či vzdalováním magnetu a smyčky. Na mikroskopické úrovni je elektrický proud samozřejmě generován Lorentzovou silou působící na nabitě částice. Faradayův indukční zákon lze zapsat velmi jednoduše:

$$U = - \frac{d\psi_B}{dt}. \quad (2.32)$$

Elektrické napětí je rovno časové změně magnetického indukčního toku smyčkou. Znaménko minus symbolizuje, že vzniklé napětí a jím generovaný proud působí proti změně, která ho vyvolala (Lenzovo pravidlo). Označíme-li symbolem S plochu smyčky a symbolem $\gamma = \partial S$ hraniční křivku, můžeme snadno přepsat Faradayův indukční zákon do tvaru

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \quad (2.33)$$

Pokud přemístíme časovou derivaci napravo do argumentu integrálu, musíme použít parciální derivaci, neboť je magnetické pole funkcí času i prostoru a při derivování máme na výběr z více proměnných:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} . \quad (2.34)$$

Faradayův indukční zákon zapsaný ve tvaru (2.34) je integrální podobou další z Maxwellových rovnic. Nás bude opět zajímat diferenciální tvar této rovnice. Proto převedeme integrál vlevo za pomoci Stokesovy věty na plošný integrál

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} . \quad (2.35)$$

Oba integrály se musí rovnat pro jakoukoli zvolenou plochu, proto musí být integrandy totožné, což nás přivádí k diferenciální podobě další z Maxwellových rovnic – Faradayova indukčního zákona:

►
$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (2.36)$$

Ampérův zákon

Vodič, kterým protéká elektrický proud, kolem sebe generuje magnetické pole. Velikost pole je úměrná protékajícímu proudu a nepřímo úměrná vzdálenosti od vodiče:

$$B \sim \frac{I}{r} . \quad (2.37)$$

V soustavě jednotek SI tuto úměru zapisujeme ve tvaru

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} , \quad (2.38)$$

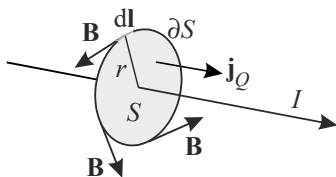
který lze chápat jako definiční vztah permeability vakua μ_0 . Provedeme-li integraci pole podél libovolné uzavřené siločáry ve vzdálenosti R od vodiče (po kružnici, která je hranicí plochy S , píšeme $\gamma = \partial S$, nezaměňte symbol křivky s diferenciální vodivostí), vyjde:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma=\partial S} B dl = B \oint_{\gamma=\partial S} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I .$$

Uvedený výsledek bude platit pro libovolnou plochu a její hraniční křivku, nemusí jít o siločáru. Pokud křivku od vodiče vzdálíme, naroste její délka úměrně vzdálenosti a magnetické pole poklesne nepřímo úměrně vzdálenosti. Obě závislosti se vyrovnají a integrál se nezmění. Zdeformujeme-li křivku, také se nic nestane, a výsledek bude stále stejný. Výsledný tvar Ampérova zákona tedy je:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C. \quad (2.39)$$

Proud I_C je tzv. vodivostní proud (*Conductive*) zodpovědný za vznik magnetického pole \mathbf{B} . Křivkový integrál z magnetické indukce je úměrný vodivostnímu proudu protékající plochou, kterou křivka ohraničuje. Koeficientem úměrnosti je permeabilita vakua. Uvedený zákon platí jen pro stacionární situaci v nemagnetických prostředích.



Obr. 2.7: Křivkový integrál z magnetické indukce

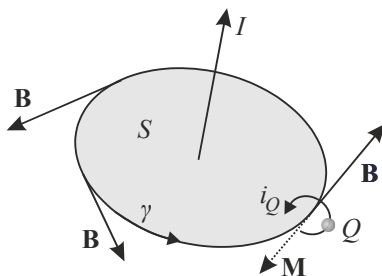
V obecném prostředí začnou částice na hraniční křivce kroužit a vytvoří další sekundární, tzv. magnetizační proudy. Ve výsledném zákoně musíme psát:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_C + I_M). \quad (2.40)$$

Ze vztahu (2.16), resp. (2.17) už víme, že magnetizační proud vztážený na jednotku příčné délky má číselně velikost magnetizace. Co se směru týče, míří kolmo na magnetizaci (ta je v jednoduchých prostředích rovnoběžná s magnetickým polem). V našem případě bude magnetizační proud dán integrací

$$I_M = \oint_{\gamma=\partial S} i_Q dl = \oint_{\gamma=\partial S} M dl = \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.41)$$

Magnetizace \mathbf{M} míří u kroužících částic v opačném směru než má přiložené nebo generované pole \mathbf{B} , v jehož směru míří hraniční křivka γ , skalární součin v posledním členu je tedy záporný. Směry jednotlivých vektorů jsou patrné z obrázku.



Obr. 2.8: Směry vektorů, magnetizace má opačný směr než magnetická indukce

Nyní dosadíme magnetizační proud (2.41) do Ampérova zákona (2.40):

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I_C + \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}.$$

Nyní oba křivkové integrály sloučíme do jednoho, tj. z pravé strany převedeme křivkový integrál přes magnetizaci na levou stranu rovnosti:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = I_C.$$

Ampérův zákon doplněný o reakci materiálu má proto tvar

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_C; \quad \mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{B}). \quad (2.42)$$

Druhý vztah je definičním vztahem intenzity magnetického pole, která v sobě zahrnuje jak původní pole \mathbf{B} , tak reakci látky \mathbf{M} . Proud na pravé straně je vodivostní proud tekoucí plochou uvnitř ohraničující křivky γ . Povšimněte si, že uzávorkování jednotlivých členů je z historických důvodů jiné než v případě elektrického pole (2.29). Rovnici opět převedeme do diferenciálního tvaru. Nalevo použijeme Stokesovu větu, napravo vyjádříme proud pomocí toku volného náboje plochou, kterou ohraničuje zvolená křivka:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.43)$$

Uvedené vztahy musí platit pro libovolnou plochu, proto jsou integrandy totožné:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q. \quad (2.44)$$

Na pravé straně je hustota vodivostního proudu protékaného uvažovanou plochou. Takto zapsaný Ampérův zákon platí jen pro ustálený elektrický proud. Snadno to ukážeme provedením divergence na poslední rovnici. Na levé straně dostaneme nulu (divergence z rotace je vždy nulová), takže by mělo platit

$$\text{div } \mathbf{j}_Q = 0,$$

což je stacionární podoba zákona zachování náboje (2.7). Pro nestacionární děje by zákon zachování náboje neplatil. Proto James Clerk Maxwell do rovnice přidal další člen (tzv. Maxwellův posuvný proud), který zajistí platnost zákona zachování náboje:

$$\blacktriangleright \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.45)$$

Snadno to ověříme. Po aplikaci divergence máme

$$0 = \text{div } \mathbf{j}_Q + \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \text{div } \mathbf{j}_Q + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D}.$$

Za $\text{div } \mathbf{D}$ nyní dosadíme z Maxwellovy rovnice $\text{div } \mathbf{D} = \rho_Q$, viz (2.31), a máme

$$0 = \text{div } \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \rho_Q}{\partial t},$$

což je právě zákon zachování náboje. Rovnice (2.45) říká, že vír magnetického pole může vzniknout jednak v okolí vodiče s proudem, a jednak působením proměnného elektrického pole. Taková situace je například v okolí deskového kondenzátoru (mezi

deskami předpokládáme nezaplňenou mezeru). Pokud teče vodičem střídavý proud, generuje kolem vodiče magnetické pole (směr vřív se střídá ve shodě s momentálním směrem elektrického proudu). Na desky kondenzátoru je přiváděn v některých fázích kladný náboj, v jiných záporný náboj. Díky tomu vznikne mezi deskami časově proměnné elektrické pole, které je zdrojem magnetického pole v okolí desek. Vzdálený pozorovatel z magnetického pole nepozná, že je obvod přerušen deskami kondenzátoru.

2.1.5 Úplnost soustavy

Celá sada Maxwellových rovnic představuje matematický popis výsledků experimentů (magnetostatiky, Coulombova zákona, Ampérova zákona, Faradayova zákona elektromagnetické indukce). Jde tedy o zobecněnou zkušenost získanou za desítky let experimentů s elektrickými a magnetickými ději. James Clerk Maxwell psal svou soustavu ve složkách a, jak jsme se už zmínili, používal kvaternionový formalismus, takže je v původním zápise Maxwellova soustava pro dnešního čtenáře jen obtížně čitelná. Pro naše účely nás bude zajímat diferenciální podoba rovnic. Sepišme všechny obdržené rovnice do jednoho celku:

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.46)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (2.47)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.48)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.49)$$

Nemá žádný větší smysl diskutovat, jak rovnice řadit. Vždy najdeme důvody, pro právě zvolená dvojice k sobě patří: První dvě rovnice jsou testy na zdroje polí, druhé dvě na vřív polí. Navíc druhé dvě rovnice v sobě obsahují časové derivace, tedy jde o rovnice pro časový vývoj polí. Můžeme ale seskupit rovnice jinak: první s třetí neobsahují zdroje polí, druhá a čtvrtá obsahují zdroje polí (hustotu a tok náboje). Nebo můžeme také tvrdit, že k sobě patří první a čtvrtá rovnice – jde o rovnice pro magnetické pole, a druhá se třetí – jde o rovnice pro elektrické pole.

Ať už rovnice seskupíme jakkoli, na jejich vstupu je čtveřice ρ_Q a \mathbf{j}_Q popisující rozložení a pohyb nábojů. Na výstupu jsou elektrická a magnetická pole \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} . Na první pohled zde něco nehraje. Máme 12 neznámých (potřebujeme určit čtveřici vektorů) a k dispozici máme jen 8 rovnic (dvě skalární a dvě vektorové). K úspěšnému řešení je třeba doplnit informace o tom, jak daná látka reaguje na přiložená elektrická a magnetická pole, tedy vztahy mezi oběma elektrickými a oběma magnetickými vektory:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}); \quad (2.50)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{B}). \quad (2.51)$$

Vektor polarizace \mathbf{P} a vektor magnetizace \mathbf{M} popisují, jak látka na přiložená pole zareaguje, tj. zda a v jakém množství se vytvoří elektrické a magnetické dipóly. Tyto tzv.

materiálové vztahy můžeme získat buď experimentálně, nebo pro konkrétní látku teoretickým výpočtem procesů, které se v látce odehrávají. Povšimněte si, že uzávorkování obou vztahů je z historických důvodů různé. Oba vztahy jsou většinou silně nelineární, polarizace a magnetizace bývá složitou funkcí intenzit polí \mathbf{E} a \mathbf{H} . Látka si dokonce může „pamatovat historii“ a vztahy mohou být ovlivněny minulostí systému. Vzpomeňte si například na hysterezní smyčku magneticky aktivních látek. Jen pro velmi slabá pole lze oba vztahy Taylorovsky rozvinout a dostat lineární závislost mezi vektory \mathbf{D} a \mathbf{E} , resp. \mathbf{B} a \mathbf{H} .

Materiálové vztahy přináší dalších šest rovnic do Maxwellovy soustavy, celkový počet rovnic tedy vzroste na 14. Vzhledem k tomu, že máme 12 neznámých, musí být v soustavě dvě rovnice nadbytečné. Ukažme nyní, že první dvě rovnice pro divergence hledaných polí jsou ve skutečnosti jen počátečními podmínkami pro druhé dvě rovnice, které řeší časový vývoj polí. Aplikujme na třetí rovnici soustavy (2.48) operaci divergence:

$$0 = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = f(\mathbf{r}).$$

Vidíme, že z Faradayova indukčního zákona plyne, že $\operatorname{div} \mathbf{B}$ nesmí být funkcí času, ale pouze funkcí prostorových proměnných. Hodnota $\operatorname{div} \mathbf{B}$ je tedy stále stejná, jako byla na počátku. Rovnice $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ říká, že tato funkce byla na počátku nulová a jde o počáteční podmínku k rovnici (2.48). Obdobně je tomu s druhou rovnicí. Aplikujme operaci divergence na Ampérův zákon (2.49):

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{j}_Q + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

První člen na pravé straně vyjádříme ze zákona zachování náboje (2.7):

$$0 = -\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} (-\rho_Q + \operatorname{div} \mathbf{D}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{D} - \rho_Q = g(\mathbf{r}).$$

Kombinace $\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho_Q$ je pouze prostorovou funkcí a nezávisí na čase. Rovnice (2.47) jen říká, že tato funkce je nulová a byla tedy nulová i na počátku. Rovnice (2.47) má tedy charakter počáteční podmínky k Ampérovu zákonu. Ve výsledku máme tedy šest rovnic pro časový vývoj polí (2.48), (2.49) a šest materiálových vztahů, tedy 12 rovnic pro 12 neznámých.

2.1.6 Materiálové vztahy

V předchozí kapitole jsme ukázali, že Maxwellovy rovnice je nutné doplnit materiálovými vztahy popisujícími reakci látky na přiložená pole

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}); \quad (2.52)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{B}). \quad (2.53)$$

Pole \mathbf{E} , \mathbf{B} jsou doplněna o reakce materiálu $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ a $\mathbf{M}(\mathbf{B})$. Je to cena za to, aby jako zdrojové členy v Maxwellových rovnicích vystupovaly jen vodivostní proudy a volné

náboje. Nová pole se započteným vlivem reakce látky označujeme \mathbf{D} , \mathbf{H} . Pole \mathbf{E} , \mathbf{H} nazýváme intenzity, pole \mathbf{D} , \mathbf{B} nazýváme indukce.

Reakci prostředí $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ a $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ můžeme v některých výjimečných případech vypočítat teoreticky. Ukážeme si to později na příkladu elektromagnetické vlny procházející plazmatem. Elektrony začnou vlivem vlny kmitat, čímž vznikne objemová hustota elektrického dipólového momentu (nenulová polarizace prostředí). Ve většině případů se reakce látky na přiložená pole určuje experimentálně. Závislosti $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ a $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ jsou zpravidla silně nelineární, v některých případech dokonce nezávisí jen na aktuálně přiložených polích, ale také na předchozí historii materiálu. Do této kategorie jevů spadají například různá zbytková pole, která jsou důsledkem působení polí na látku v minulosti. V takovém případě nezávisí polarizace a magnetizace jen na okamžitých hodnotách polí, ale také na jejich časových změnách, tj.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}, \ddot{\mathbf{E}}, \dots), \quad (2.54)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B}, \dot{\mathbf{B}}, \ddot{\mathbf{B}}, \dots). \quad (2.55)$$

Předpokládejme pro jednoduchost pouze lineární odezvu materiálu v celé historii a jednorozměrný případ

$$M = \int_{-\infty}^t K(t-t')B(t')dt'. \quad (2.56)$$

Funkce K určuje, jak moc do minulosti si materiál pamatuje expozici polem. Provedme substituci $\tau = t - t'$, parametr τ je čas, který uplynul od minulosti do současnosti:

$$M = \int_0^{\infty} K(\tau)B(t-\tau)d\tau. \quad (2.57)$$

Nyní provedeme Taylorův rozvoj

$$B(t-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^{(k)}(t)}{k!} (-\tau)^k = B(t) - \tau \frac{dB}{dt} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2B}{dt^2} \pm \dots \quad (2.58)$$

Po dosazení do integrace (2.57) je jasné, že magnetizace bude mít tvar

$$M(t) = c_1 B(t) + c_2 \dot{B}(t) + c_3 \ddot{B}(t) + \dots \quad (2.59)$$

Pokud si látka pamatuje historii, je i v lineárním případě magnetizace funkcí nejen pole, ale i jeho časových derivací. Koeficienty c_k jsou výsledky jednotlivých integrací přes τ .

* * *

Zabývejme se dále jednoduchou látkou, která si historii nepamatuje, tj. $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$. Pro slabá pole lze odezvu systému považovat za lineární a provést Taylorův rozvoj vektoru polarizace do prvního řádu (používáme sumační konvenci):

$$P_k \doteq \frac{\partial P_k}{\partial E_l} E_l \equiv \varepsilon_0 \kappa_{kl} E_l; \quad (2.60)$$

►

$$\kappa_{kl} \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial P_k}{\partial E_l} \quad (2.61)$$

Průslušná matice koeficientů κ_{kl} se nazývá *tenzor elektrické susceptibility*. Permittivita vakua v definici zajišťuje bezrozměrnost susceptibility. Vektorově lze psát

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \vec{\kappa} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.62)$$

Vztah mezi indukci a intenzitou $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ v limitě slabých polí dává

$$D_k = \varepsilon_{kl} E_l; \quad \varepsilon_{kl} \equiv \varepsilon_0 (\delta_{kl} + \kappa_{kl}), \quad (2.63)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{D} = \vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}; \quad \vec{\varepsilon} \equiv \varepsilon_0 (\vec{\mathbf{1}} + \vec{\kappa}). \quad (2.64)$$

Matice ε_{kl} se nazývá *tenzor permitivity*. Pole \mathbf{D} a \mathbf{E} nemusí mířit ve stejném směru. Ve statistické fyzice se dokazuje, že tenzory permitivity a susceptibility musí být symetrické. V homogenním izotropním prostředí je matice susceptibility dokonce diagonální a všechny prvky na diagonále jsou stejné. V limitě slabých polí platí v tomto případě jednoduchý vztah

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (2.65)$$

V magnetickém poli je situace obdobná. Definiční vztah intenzity magnetického pole (2.53) přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H})]. \quad (2.66)$$

Magnetizaci jsme zapsali jako funkci pole \mathbf{H} (aby na pravé straně vystupovalo jen jedno z polí). To samozřejmě můžeme, obě pole jsou převeditelná definičním vztahem (2.53). Pro slabá pole lze odezvu systému považovat za lineární a provést Taylorův rozvoj vektoru magnetizace do prvního řádu:

$$M_k \doteq \frac{\partial M_k}{\partial H_l} H_l = \chi_{kl} H_l; \quad (2.67)$$

$$\blacktriangleright \quad \chi_{kl} \equiv \frac{\partial M_k}{\partial H_l}. \quad (2.68)$$

Průslušná matice koeficientů se nazývá *tenzor magnetické susceptibility*. Vektorově lze psát

$$\mathbf{M} = \vec{\chi} \cdot \mathbf{H}. \quad (2.69)$$

Vztah mezi indukci a intenzitou dává v limitě slabých polí

$$B_k = \mu_{kl} H_l; \quad \mu_{kl} \equiv \mu_0 (\delta_{kl} + \chi_{kl}). \quad (2.70)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \vec{\mu} \cdot \mathbf{H}; \quad \vec{\mu} \equiv \mu_0 (\vec{\mathbf{1}} + \vec{\chi}). \quad (2.71)$$

Matice μ_{kl} se nazývá *tenzor permeability*. Pole \mathbf{B} a \mathbf{H} nemusí mířit ve stejném směru. Tenzory susceptibility a permeability musí být symetrické. V homogenním izotropním prostředí je matice susceptibility dokonce diagonální a všechny prvky na diagonále jsou stejné. V limitě slabých polí platí v tomto případě ještě jednodušší vztah

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (2.72)$$

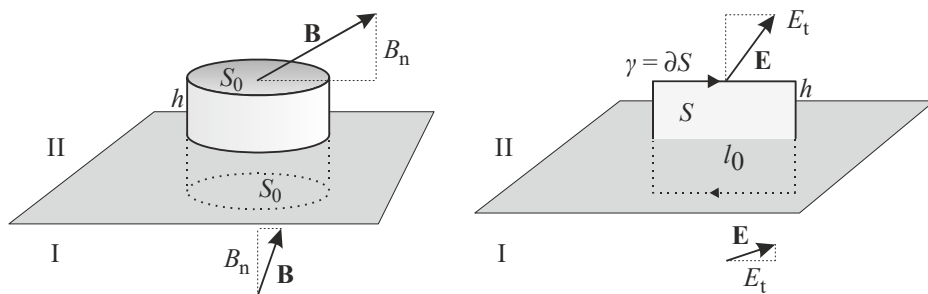
Tenzory elektrické a magnetické susceptibility jsou jakýmsi ukazatelem fázového přechodu, v jehož oblasti mají charakteristické píky v závislosti na nějakém parametru. Shrňme nyní výsledky lineárního přiblížení do přehledné tabulky:

Elektrické pole	Magnetické pole
$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E})$	$\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H})]$
$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \bar{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{M} = \bar{\boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{H}$
$\kappa_{kl} \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial P_k}{\partial E_l}$	$\chi_{kl} \equiv \frac{\partial M_k}{\partial H_l}$
$\mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}$
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \varepsilon_0 (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\boldsymbol{\kappa}})$	$\bar{\boldsymbol{\mu}} \equiv \mu_0 (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\boldsymbol{\chi}})$

V silných polích takové rozvoje neplatí a je třeba uvažovat obecné vztahy (2.52) a (2.53).

2.1.7 Podmínky na rozhraní

Elektrická a magnetická pole nezřídka procházejí rozhraními, na nichž mění svůj směr. Tato změna směru má svá pravidla vyplývající z Maxwellových rovnic v integrálním tvaru. Podle následujícího obrázku budeme rovnice s divergencemi integrovat v okolí rozhraní dvou prostředí I a II přes váleček s objemem V a hranicí S . Pokud chceme znát podmínky na rozhraní, musíme limitně snižovat výšku válečku h k nule. Na tvaru podstavu válce nezáleží.



Obr. 2.9: Podmínky na rozhraní dvou prostředí

Vyzkoušejme si to nejprve na Gaussově větě magnetostatiky:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{S=\partial V} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0.$$

Integrace probíhá přes plochu ohraničující válec. Pokud začneme jeho výšku snižovat, zbude jen integrace přes horní a dolní podstavu. Vnější normála bude na těchto podstavách mířit opačným směrem:

$$\mathbf{B}_{\text{II}} \cdot \mathbf{n}_{\text{II}} S_0 + \mathbf{B}_{\text{I}} \cdot \mathbf{n}_{\text{I}} S_0 = 0$$

Předpokládejme, že normála k rozhraní \mathbf{n} míří např. nahoru, potom je $\mathbf{n}_{\text{II}} = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_{\text{I}} = -\mathbf{n}$:

$$\blacktriangleright \quad B_{n\text{II}} - B_{n\text{I}} = 0, \quad (2.73)$$

tedy normálová složka magnetické indukce se na rozhraní vždy zachovává (viz obrázek nalevo). Provedme stejnou úvahu pro druhou divergentní rovnici:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV = \iiint_V \rho_Q \, dV \quad \Rightarrow \quad \oint_{S=\partial V} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \iiint_V \rho_Q \, dV.$$

Na levé straně budeme postupovat stejně, tj. budeme limitně snižovat výšku válečku, až dostaneme rozdíl normálových složek indukce elektrického pole. Na pravé straně je nyní situace poněkud odlišná. Pokud je ve válečku jen prostorový náboj, dostaneme při integraci napravo nulu (objem válce se limitně blíží k nule) a normálové složky indukce elektrického pole budou spojité – stejně, jako je tomu u magnetického pole. Jiný výsledek obdržíme, pokud je na rozhraní lokalizovaný plošný náboj:

$$(D_{n\text{II}} - D_{n\text{I}}) S_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \rho_Q V = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{S_0 h} S_0 h = \Delta Q.$$

Po převedení plochy z levé na pravou stranu vidíme, že platí

$$\blacktriangleright \quad D_{n\text{II}} - D_{n\text{I}} = \sigma. \quad (2.74)$$

V případě, že rozhraní obsahuje plošný náboj, bude se měnit normálová složka indukce elektrického pole skokem. Pokud na rozhraní náboj není, bude spojitá. Analyzujeme nyní Faradayův indukční zákon. Provedeme integraci přes obdélník dle obrázku napravo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Při limitním snižování výšky obdélníku se bude integrál napravo blížit nule (plocha, přes kterou se integruje, vymizí). Nalevo z ohraničující křivky zůstanou po limitním přechodu jen části rovnoběžné s rozhraním:

$$\mathbf{E}_{\text{II}} \cdot \mathbf{t}_{\text{II}} l_0 + \mathbf{E}_{\text{I}} \cdot \mathbf{t}_{\text{I}} l_0 = 0,$$

kde \mathbf{t} je tečný vektor k rozhraní mířící ve směru integrační křivky. Vzhledem k tomu, že platí $\mathbf{t}_{\text{II}} = \mathbf{t}$, $\mathbf{t}_{\text{I}} = -\mathbf{t}$, dostáváme vztah

$$\blacktriangleright \quad E_{t\text{II}} - E_{t\text{I}} = 0, \quad (2.75)$$

tedy tečná složka intenzity elektrického pole je na rozhraní vždy spojitá (viz pravá část obrázku). Zbývá nám poslední z Maxwellových rovnic – Ampérův zákon. Opět provedeme integraci přes obdélník v pravé části obrázku:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow$$

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Integrál nalevo při limitním přechodu půjde k rozdílu tečných složek násobených délkou křivky podél rozhraní. Oba integrály napravo budou v případě prostorových proudů

nulové (integrační plocha se limitně blíží k nule. V takovém případě budou tečné složky intenzity magnetického pole spojité tak, jak tomu bylo u intenzity elektrického pole. Pokud ale v ploše rozhraní poteče elektrický proud (plošný proud), bude situace jiná:

$$(H_{tII} - H_{tI})l_0 = \lim_{h \rightarrow 0} j_Q S = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{l_0 h} l_0 h = \Delta I.$$

Po převedení délky křivky z levé strany na pravou máme

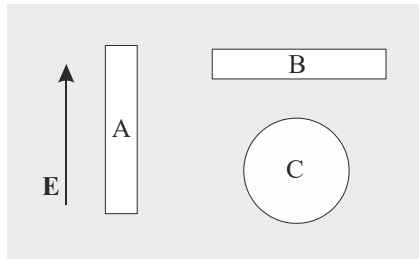
$$\blacktriangleright \quad H_{tII} - H_{tI} = i. \quad (2.76)$$

V případě, že rozhraní obsahuje tekoucí proudy, bude se měnit tečná složka intenzity magnetického pole skokem. Velikost skoku bude rovna proudu tekoucímu rozhraním vztáženému na jednotku délky. Pokud v rozhraní proudy netečou, bude tečná složka intenzity magnetického pole spojitá. Uveďme na závěr všechny podmínky na rozhraní v jednom jediném vztahu:

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} B_{nII} - B_{nI} &= 0, \\ D_{nII} - D_{nI} &= \sigma, \\ E_{tII} - E_{tI} &= 0, \\ H_{tII} - H_{tI} &= i. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Bez plošných proudů a nábojů se zachovávají normálové složky indukci \mathbf{B} , \mathbf{D} a tečné složky intenzit \mathbf{E} , \mathbf{H} . V případě plošných nábojů a proudů v rozhraní se mění skokem indukce elektrického pole a intenzita magnetického pole (ty veličiny, které v sobě zahrnují reakci látky na přiložená pole.

● Příklad 2.1: Pole v dutině



Obr. 2.10: Pole v dutině

Elektrické pole ovlivňuje dielektrikum, v němž jsou vyříznuty tři dutiny. První dutina (A) míří dominantně ve směru pole. Do dutiny prosakuje tečná složka elektrického pole, která je za všech okolností spojitá, proto bude v dutině A stejné pole jako v okolním dielektriku:

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}. \quad (2.78)$$

Dutina B je orientována dominantně kolmo na pole, tj. do dutiny prosakuje normálová složka elektrického pole. Ta je ale nespojitá a má skok. Spojité jsou naopak normálové složky elektrické indukce $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ (pokud by na povrchu dutiny byla nenulová plošná hustota náboje, bude mít skok i elektrická indukce). Polarizace v dielektriku je nenulová, v dutině nulová, proto platí:

$$\mathbf{E}_B = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \quad (2.79)$$

Nejsložitější je příklad kulové dutiny, kdy musíme v každém místě povrchu rozložit pole na normálovou a kolmou část a poté všechny příspěvky sečíst. Pokud si dáte tu práci, dostanete

$$\mathbf{E}_C = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (2.80)$$

■



2.2 Elektrostatika

Při proměnných polích jsou elektrické a magnetické děje provázané. Časově proměnná magnetická pole generují pole elektrická a naopak. V této kapitole budeme předpokládat, že pole jsou časově neproměnná a jde o nevodivé prostředí (dielektrikum), kterým neteče žádný elektrický proud. V takovém případě budou elektrické děje v Maxwellově soustavě popisovat pouze rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (2.81)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (2.82)$$

Vidíme, že elektrické děje se staly nezávislými na magnetických. Navíc budeme v této kapitole předpokládat, že látka, v níž děje probíhají (dielektrikum), nemá paměť, tj. reakce látky závisí jen na momentálně přiloženém poli. Dále budeme předpokládat homogenní a izotropní látku, tj. nejjednodušší možný materiálový vztah

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (2.83)$$

2.2.1 Poissonova rovnice a její řešení

Konzervativnost elektrického pole

Rovnice (2.82) říká, že elektrické pole ve stacionárním případě nevytváří žádné víry. Jeho rotace je nulová. Po integraci přes libovolnou plochu dostaneme ze Stokesovy věty pro ohraničující křivku vztah

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (2.84)$$

Je to jen jiné vyjádření nevírovosti pole. Nenulovou hodnotu cirkulace pole může mít jen pole ve tvaru víru. Nevírová pole nazýváme *konzervativní*. V elektrostatice je elektrické pole konzervativním polem. Pokud rovnici (2.84) vynásobíme nábojem, objeví se nalevo integrál ze síly působící na částici v elektrickém poli:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (2.85)$$

Křivkový integrál ze síly je vykonaná práce. Ta je u konzervativního pole pro uzavřenou křivku vždy nulová. Sílu konzervativního pole je možné zapsat jako záporně vzatý gradient potenciální energie. Obdobně lze elektrické pole splňující rovnici (2.82) vždy zapsat jako

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (2.86)$$

Veličinu ϕ nazýváme potenciálem elektrického pole. Znaménko minus zajišťuje, aby se částice pohybovaly do minima potenciální energie, nikoli do maxima. Snadno ověříme, že rovnice (2.82) je automaticky splněna (rotace z gradientu je vždy nulová). Funkce ϕ

bude vždy existovat, rovnice (2.86) je jednoduchá parciální diferenciální rovnice, která má vždy řešení. To znamená, že k popisu elektrostatického pole postačí jediná skalární funkce. Z ní jsme vždy pomocí vztahu (2.86) schopni dané elektrické pole vygenerovat. Skalární potenciál není určen jednoznačně. K jednomu elektrickému poli může existovat více potenciálů. Ze vztahu (2.86) je jasné, že například dva potenciály lišící se o konstantu dávají stejné elektrické pole. Volnost ve volbě potenciálu k danému poli je ale mnohem širší a budeme se jí podrobněji zabývat až v nestacionárním případě.

Poissonova rovnice

Rovnice (2.81) vyjadřuje, že zdrojem elektrického pole jsou elektrické náboje. Převeďme indukci elektrického pole na intenzitu a tu na potenciál pole:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q &\quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho_Q \quad \Rightarrow \\ \operatorname{div} \varepsilon (-\nabla \phi) = \rho_Q &\quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\nabla \phi) = -\frac{\rho_Q}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Pokud si uvědomíme, že divergence z gradientu je Laplaceův operátor, dostáváme základní rovnici elektrostatiky (tzv. *Poissonovu rovnici*)

$$\blacktriangleright \quad \Delta \phi = -\frac{\rho_Q}{\varepsilon}. \quad (2.87)$$

Uvedené odvození samozřejmě platí jen pro stacionární případ, lineární vztah mezi indukcí a intenzitou elektrického pole a homogenní izotropní prostředí, v němž je permitivita konstantní. V prvním kroku nalezneme pro zadané rozložení nábojů řešení Poissonovy rovnice pro potenciál. V druhém kroku převeďme pomocí vztahu (2.86) potenciál na elektrické pole.

Greenova funkce Laplaceova operátoru

Pro bodový náboj umístěný v počátku souřadnicové soustavy je potenciál elektrického pole

$$\blacktriangleright \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}. \quad (2.88)$$

Z této skalární funkce snadno vygenerujeme všechny tři složky elektrického pole v okolí bodového náboje. Při derivování se hodí známý vztah

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r}. \quad (2.89)$$

Snadno ho odvodíme, pokud si uvědomíme, že $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Nyní již ukážeme, že potenciál (2.88) je vhodným potenciálem pro bodový náboj:

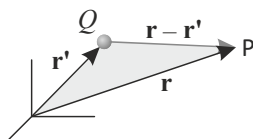
$$\begin{aligned} E_k &= -\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_k} r^{-1} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{d}{dr} (r^{-1}) \frac{\partial r}{\partial x_k} = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} (-r^{-2}) \frac{x_k}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \frac{x_k}{r}, \end{aligned}$$

což je správný vztah pro intenzitu elektrického pole, kterou lze vektorově zapsat

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r. \quad (2.90)$$

Povšimněte si, že potenciál bodového náboje je funkcí $1/r$, zatímco intenzita pole má velikost úměrnou $1/r^2$. Pokud částice nesídlí v počátku, ale v místě \mathbf{r}' (čárkou budeme vždy označovat polohy zdrojů polí, symbolem bez čárky polohu pozorovatele), bude mít v místě \mathbf{r} , kde sídlí pozorovatel, potenciál hodnotu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.91)$$



Obr. 2.11: Poloha náboje a pozorovatele

Ve jmenovateli figuruje, stejně jako předtím, vzdálenost náboje od pozorovatele (místa měření pole). Potenciál bodového náboje, jehož hustota náboje je dána distribucí $\rho_Q = Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, musí splňovat Poissonovu rovnici, tj. bude platit

$$\Delta \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon}$$

Jednoduchou úpravou osamostatníme na pravé straně Diracovu distribuci:

$$\Delta \left(-\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Řešení Poissonovy rovnice s Diracovým impulzem na pravé straně je ale Greenova funkce příslušného operátoru, v tomto případě Laplaceova operátoru v třírozměrném neomezeném prostoru:

$$\blacktriangleright \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.92)$$

Greenova funkce se nám bude hodit při konstrukci řešení Poissonovy rovnice elektrostatiky pro zcela obecné rozložení nábojů v prostoru.

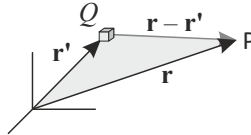
Obecné řešení Poissonovy rovnice

Obecné řešení Poissonovy rovnice $\Delta\phi = -\rho_Q/\epsilon$ je konvolucí Greenovy funkce s pravou stranou, tj.

$$\phi = G * \left(-\frac{\rho_Q}{\epsilon} \right) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(-\frac{\rho_Q(\mathbf{r}')}{\epsilon} \right) d^3\mathbf{r}', \quad \text{tj.}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho_Q(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (2.93)$$

Jde o řešení Poissonovy rovnice pro zcela obecné rozložení nábojů. Objemové integrály budeme nadále zapisovat s jediným integračním symbolem. Násobnost integrace je patrná z exponentu v diferenciálu. Vektor \mathbf{r} je místem pozorovatele či detektoru pole, vektor \mathbf{r}' , přes který integrujeme, probíhá jednotlivé náboje. Uvedený výsledek můžeme dostat i jednoduchou fyzikální úvahou. Představme si, že ze spojitě rozložených nábojů vyřízneme malý objemový element dle obrázku:



Obr. 2.12: Poloha elementu náboje a pozorovatele

Uvedený element přispěje k potenciálu v místě pozorovatele podle vztahu (2.91)

$$\Delta\phi = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\rho_Q(\mathbf{r}') \Delta V}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.94)$$

Element náboje budeme nyní považovat za infinitesimální a celkový potenciál určíme jako integraci přes všechny takové elementy:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho_Q(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'.$$

Výsledek je stejný jako při použití Greenovy funkce. Získaný vztah platí pro stacionární případ a je užitečný v elektrostatice. Pokud by se náboje pohybovaly, bude se signál šířit konečnou rychlostí a vztah bude složitější. Odvodíme si ho později.

2.2.2 Zajímavé příklady

V některých konkrétních případech lze získat řešení Poissonovy rovnice různými triky. Některé z nich si nyní ukážeme.

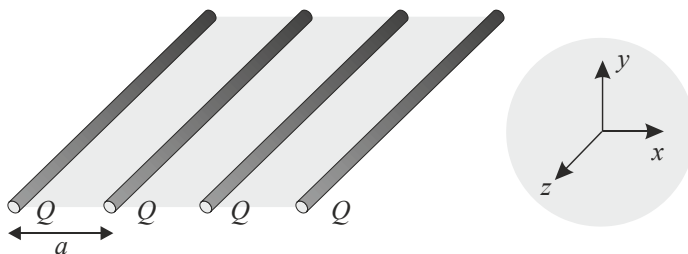
Sít nabitých vodičů

Představme si síť rovnoměrně rozložených nabitých vodičů podle obr. 2.13. Buzené elektrické pole bude součtem jednotlivých Fourierových komponent:

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y) \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) \quad (2.95)$$

Dosazením jedné Fourierovy komponenty do Laplaceovy rovnice (Poissonova rovnice ve vakuu, tj. bez pravé strany) získáme obyčejnou diferenciální rovnici pro amplitudy potenciálu $A_n(y)$:

$$\frac{d^2 A_n}{dy^2} - \left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 A_n = 0 \quad (2.96)$$



Obr. 2.13: Sít nabitých vodičů v rovině

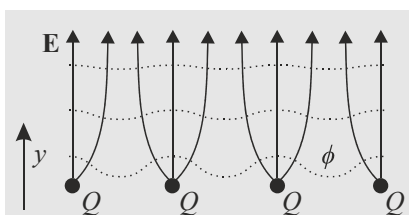
Řešení rovnice (2.96) je jednoduché:

$$A_n(y) = \begin{cases} c_0 y; & n = 0, \\ c_n \exp[-2\pi n y/a]; & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.97)$$

Všechna harmonická řešení pro $n > 1$ jsou již ve vzdálenosti několika a silně utlumená. Nejpomaleji klesá základní mód s $n = 1$. Pro $y > a$ se pole chová s dosti dobrou přesností jako homogenní pole představované členem $n = 0$. Sít z vodičů stíní stejně dobře jako kovová rovina. Ve velké vzdálenosti se uplatní jediná složka

$$\phi_0 = c_0 y = -Ey, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla \phi_0 = (0, E, 0).$$



Obr. 2.14: Potenciál a intenzita soustavy nabitých vodičů

Vzhledem k tomu, že intenzita elektrického pole je gradientem potenciálu, míří elektrické pole (a tedy i siločáry) vždy kolmo na ekvipotenciály.

Dvozměrné zdroje – komplexní proměnná

V tomto příkladě se zaměříme na dvozměrný problém. V nějaké rovině jsou rozmístěny plošné nabitě elektrody a naším úkolem je nalézt jimi generované elektrické pole. Při hledání polí lze s úspěchem využít komplexní funkci komplexní proměnné:

$$f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \quad (2.99)$$

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y).$$

Funkce U a V představují reálnou a imaginární část komplexní funkce komplexní proměnné. Derivace komplexní funkce podle $z = x + iy$ nesmí záviset na cestě, tedy derivace podle x musí dát stejný výsledek jako podle iy :

$$\frac{\partial}{\partial x}(U + iV) = \frac{\partial}{\partial iy}(U + iV). \quad (2.100)$$

Oddělením reálné a imaginární části dostáváme tzv. Cauchyho-Riemannovy (CR) podmínky (viz první díl „Vybraných kapitol“, kapitola I.3.2.5):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (2.101)$$

Dalším derivováním Cauchyho-Riemannových podmínek zjistíme, že jak reálná, tak imaginární část komplexní funkce splňuje Laplaceovu rovnici:

$$\Delta U = 0; \quad \Delta V = 0. \quad (2.102)$$

Funkce U i V tedy mohou posloužit jako potenciál elektrického pole. Využijeme-li například reálnou část, budou křivky

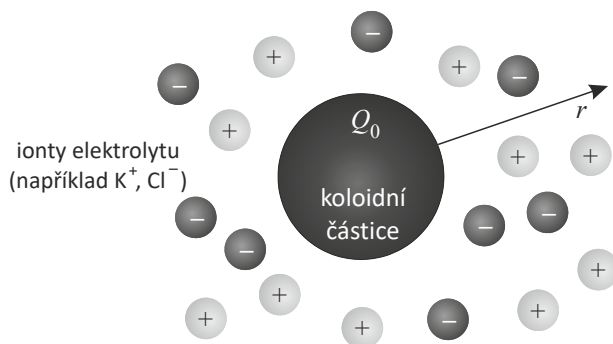
$$U(x, y) = 0 \quad (2.103)$$

definovat ekvipotenciály. V takovém případě budou křivky definované druhou z funkcí

$$V(x, y) = 0 \quad (2.104)$$

kolmé na předchozí sadu (plyne okamžitě z CR podmínek) a budou tedy představovat siločáry elektrického pole. Jediná komplexní funkce komplexní proměnné tak v dvojrozměrném případě umožní popsat jak ekvipotenciály, tak siločáry elektrického pole v okolí elektrod.

Koloidní částice v elektrolytu – Debyeova vzdálenost



Obr. 2.15: Koloidní částice v elektrolytu

Pokud budeme sledovat průběh potenciálu v okolí koloidní částice, bude ovlivněn ostatními nabitými částicemi – ionty v okolí. Není-li plazma daleko od termodynamické rovnováhy, přesunou se k vybranému zdroji částice opačné polaroty a budou ho stínit. Výsledkem je exponenciální úbytek pole našeho zdroje s charakteristickou vzdáleností λ_D , na které potenciál i pole poklesne na $1/e$ hodnoty dané Coulombovým zákonem. Tato vzdálenost se nazývá *Debyeova stínící vzdálenost* a je pojmenována podle holandského fyzika a chemika Petera Debyeho (1884–1966). Elektrický potenciál $\phi(r)$ kolí zdroje určíme z Poissonovy rovnice:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}$$

Budeme pro jednoduchost předpokládat, že kladné a záporné ionty mají stejný náboj a že je jejich koncentrace dána Boltzmannovým statistickým rozdělením:

$$\Delta\phi = -\frac{Q_+n_+ + Q_-n_-}{\epsilon_0} = -\frac{+Qn_+ - Qn_-}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[+Qn_0 \exp\left(-\frac{Q\phi(\mathbf{x})}{k_B T}\right) - Qn_0 \exp\left(+\frac{Q\phi(\mathbf{x})}{k_B T}\right) \right].$$

Není-li systém daleko od termodynamické rovnováhy, provedeme Taylorův rozvoj exponenciál do prvního řádu. Nulté členy se odečtou (roztok je neutrální) a zbytek dá:

$$\Delta\phi = \alpha\phi; \quad \alpha = \frac{2Q^2n_0}{\epsilon_0 k_B T}.$$

Rovnici budeme řešit ve sférických souřadnicích se středem v koloidní částici:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] = \alpha\phi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dr^2} = \alpha\psi; \quad \psi(r) \equiv r\phi(r) \Rightarrow$$

$$\psi(r) = C_1 e^{\sqrt{\alpha}r} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}r} \Rightarrow \phi(r) = \frac{C_1}{r} e^{\sqrt{\alpha}r} + \frac{C_2}{r} e^{-\sqrt{\alpha}r}.$$

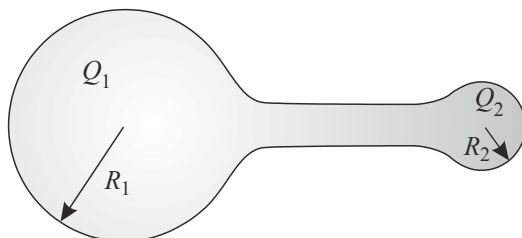
Vzhledem k tomu, že potenciál bodového zdroje nemůže divergovat v nekonečné vzdálenosti, je $C_1 = 0$. Konstantu C_2 určíme tak, aby potenciál v limitě malé vzdálenosti od zdroje přešel v klasický Coulombův potenciál zdroje s nábojem Q_0 :

$$\blacktriangleright \quad \phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}; \quad \lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2Q^2 n_0}}. \quad (2.105)$$

Ionty odstiňují koloidní částici od okolí i od ostatních částic na charakteristické vzdálenosti λ_D (Debyeově délce). Pokud přidáme do roztoku sůl, zvýší se koncentrace iontů a sníží Debyeova vzdálenost. Koloidní částice jsou lépe stíněny, a mohou se tím pádem snáze srážet a vytvářet větší celky. Proto se při přidání soli koloid může vysrážet.

Pole hrotu

Představme si kovový (vodivý) prvek s dvěma konci, které mají různá zakřivení.



Obr. 2.16: Pole hrotu

Potenciály na povrchu koncových částí budou přibližně

$$\phi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}; \quad \phi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (2.106)$$

Vzhledem k tomu, že jde o vodič, je vše vodivě spojené a na celém povrchu bude jediný potenciál (jinak by se náboje přesouvaly tak dlouho, až by se potenciály různých částí vodiče vyrovnaly):

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad (2.107)$$

Ve vodiči jsou odpuzující se náboje stejné polaroty vytlačeny na povrch. Intenzita elektrického pole u povrchu je úměrná plošné hustotě náboje:

$$E \sim \sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1 / 4\pi R_1^2}{Q_2 / 4\pi R_2^2} = \frac{Q_1 R_2^2}{Q_2 R_1^2}$$

Nyní za podíl nábojů dosadíme z (2.107) a máme

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad E \sim \frac{1}{R} \quad (2.108)$$

Intenzita elektrického pole u povrchu vodiče je nepřímo úměrná poloměru zakřivení oblasti. V blízkosti hrotů je pole proto extrémně veliké a vznikají zde různé výboje (korónový, Eliášův oheň atd.

2.2.3 Energie elektrického pole

Už víme, že intenzita elektrického pole a jeho potenciál spolu souvisí vztahem

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

Pokud do elektrického pole umístíme částici s nábojem Q , bude na ni působit síla

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} = -\nabla(Q\phi)$$

Vzhledem k tomu, že elektrostatické pole je konzervativní, tj. síla je záporně vzatým gradientem potenciální energie, musí pro potenciální energii platit

$$W_p = Q\phi.$$

Sílu působící na částici můžeme tedy zjistit tak, že elektrické pole vynásobíme nábojem částice, energii částice zjistíme tak, že vynásobíme nábojem částice potenciál:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & \mathbf{F} = Q\mathbf{E}; \\ & W_p = Q\phi. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Určeme nyní energii částice a v poli částice b :

$$U_{ab} = Q_a\phi_b = \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \quad (2.110)$$

U soustavy částic sečteme takové výrazy pro všechny možné dvojice částic a, b . Tím ale energii každé dvojice započteme dvakrát (Například jako W_{37} a W_{73}). Z výsledného součtu musíme proto použít jen polovinu, neboť všechny členy jsou dvakrát. A samozřejmě musíme vyloučit případy, kdy by částice tvořily pár samy se sebou, tedy požadovat $a \neq b$:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \quad (2.111)$$

Sumu nyní rozdělíme:

$$U = \frac{1}{2} \sum_a Q_a \sum_{b \neq a} \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}. \quad (2.112)$$

Vnitřní suma je součet potenciálů všech částic v místě \mathbf{r}_a , tedy celkový potenciál generovaný všemi částicemi v místě částice a :

$$U = \frac{1}{2} \sum_a Q_a \phi(\mathbf{r}_a). \quad (2.113)$$

Pokud bude rozložení náboje spojité, přejde výraz v intergrál

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho_Q(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.114)$$

Integrační proměnnou bychom mohli označit \mathbf{r}' , ale je to zbytečné, ve vztahu nefiguruje dva různé vektory (pozorovatel, zdroj pole), ale jen jeden jediný. Spočetli jsme celkovou energii všech nabitých částic. Tyto částice ale na sebe působí elektrickými poli, pomocí nichž také můžeme energii zapsat. Výrazy typu (2.111), (2.114) jasně energii vztahují k jednotlivým částicím. Pokud ale důsledně přepíšeme vztah do polí, může být energie deponována i mimo oblast nenulového náboje. Pole jsou totiž nenulová i ve vakuu. Tím získává pole charakter reálné entity, která je nositelem (a doslova přenašečem) energie. K přepisu do polí postačí vyjádřit hustotu náboje z Maxwellovy rovnice $\text{div } \mathbf{D} = \rho_Q$:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \phi \text{div } \mathbf{D} d^3 \mathbf{r}. \quad (2.115)$$

Nyní využijeme integraci per partes ve třech dimenzích (viz kapitola I.3.6.3 v prvním díle „Vybraných kapitol“)

$$U = \frac{1}{2} \int_V \phi (\partial_k D_k) d^3 \mathbf{r} = -\frac{1}{2} \int_V (\partial_k \phi) D_k d^3 \mathbf{r} + \oint_{S=\partial V} \phi D_k n_k dS.$$

První integrál lze upravit pomocí elektrického pole ($E_k = -\partial_k \phi$). Druhý integrál je přes hranici. Potenciál klesá se vzdáleností od zdrojů jako $1/r$, indukce elektrického pole jako $1/r^2$, integrand tedy klesá se vzdáleností od zdrojů polí jako $1/r^3$. Pokud povedeme integrační plochu dosti daleko od zdrojů, ideálně v nekonečnu, bude příspěvek posledního integrálu nulový a celková energie vyjde:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3 \mathbf{r}. \quad (2.116)$$

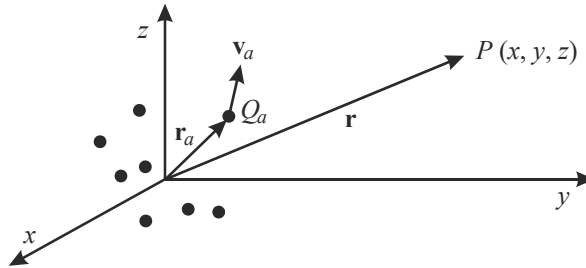
Hustota energie elektromagnetického pole (energie vztažená na objem, jednotkou v SI je J/m^3) je integrovaná proměnná, tedy polovina skalárního součinu obou elektrických vektorů:

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} / 2. \quad (2.117)$$

Stejný vztah se odvozuje v základních kurzech fyziky pro kondenzátor. Hustota energie pole v kondenzátoru je opět $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$.

2.2.4 Multipólový rozvoj

Předpokládejme, že zdroje polí jsou lokalizované, tvoří nějaký shluk částic v oblasti, do níž umístíme počátek souřadnicové soustavy:



Obr. 2.17: Lokalizované částice a vzdálený pozorovatel

Každý z nábojů má polohový vektor \mathbf{r}_a , rychlostní vektor \mathbf{v}_a , hmotnost m_a a náboj Q_a . Pozorovatel je ve velké vzdálenosti od zdroje polí a má polohu \mathbf{r} . Hustota náboje bude

$$\rho_Q(\mathbf{r}') = \sum_a Q_a \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a), \quad (2.118)$$

Potenciál elektrického pole bude mít v tomto případě jednoduché vyjádření

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_a \frac{Q_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}, \quad (2.119)$$

Pole pozorujeme ve vzdáleném místě \mathbf{r} , platí $r \gg r_a$, takže můžeme provést Taylorův rozvoj pro argument \mathbf{r} a přírůstek \mathbf{r}_a :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} - x_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} x_k^{(a)} x_l^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left(\frac{1}{r} \right) \pm \dots \quad (2.120)$$

Nyní provedeme derivace (při derivování využijeme $\partial r / \partial x_k = x_k / r$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} + x_k^{(a)} \frac{x_k}{r^3} + \frac{1}{2!} x_k^{(a)} x_l^{(a)} \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} \pm \dots \quad (2.121)$$

Odvozený rozvoj dosadíme do vztahu (2.119) pro potenciál a ze sumace vytkneme veličiny, přes které se nesčítá:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_a Q_a + \frac{x_k}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_a Q_a x_k^{(a)} + \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a x_k^{(a)} x_l^{(a)} + \dots \quad (2.122)$$

V posledním vypsaném členu rozvoje skalárního potenciálu lze výraz v sumaci upravit do obdobného tvaru, jaký má výraz před sumací:

$$\begin{aligned} \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a x_k^{(a)} x_l^{(a)} &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} \right) = \\ &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} - r_a^2 \delta_{kl} \right). \end{aligned} \quad (2.123)$$

Odečtením členu $r_a^2 \delta_{kl}$ získá tenzor v závorce nulovou stopu, fakticky se ale nic nestane, protože platí

$$\left(3x_k x_l - r^2 \delta_{kl} \right) r_a^2 \delta_{kl} = \left(3r^2 - 3r^2 \right) r_a^2 = 0. \quad (2.124)$$

Celkově tedy první členy rozvoje, které budeme potřebovat, mají tvar:

$$\begin{aligned} \phi^{(0)} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; & Q &\equiv \sum_a Q_a, \\ \blacktriangleright \phi^{(1)} &= \frac{\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}; & \mathbf{p}_E &\equiv \sum_a Q_a \mathbf{r}_a, \\ \phi^{(2)} &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} Q_{kl}; & Q_{kl} &\equiv \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} - r_a^2 \delta_{kl} \right). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Jednotlivé příspěvky se nazývají monopólový (0), dipólový (1) a kvadrupólový (2). Elektricky neutrální soustava má celkový náboj Q nulový, a tím je nulový i celý monopólový člen. Povšimněte si, že monopólový příspěvek klesá se vzdáleností jako $1/r$, dipólový jako $1/r^2$ a kvadrupólový jako $1/r^3$. Příslušné síly (derivace potenciálů) klesají jako $1/r^2$, $1/r^3$, $1/r^4$ (monopól, dipól, kvadrupól). Síla mezi dvěma interagujícími dipóly tedy klesá se třetí mocninou vzdálenosti. Pro dvě částice se stejným, ale opačným nábojem dá dipólový moment původní definicí (2.9):

$$\mathbf{p}_E \equiv \sum_a Q_a \mathbf{r}_a = Q_+ \mathbf{r}_+ + Q_- \mathbf{r}_- = Q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = Q\mathbf{d}. \quad (2.126)$$

Poznamenejme, že elektrický kvadrupólový příspěvek lze zapsat invariantně jako:

$$\blacktriangleright \phi^{(2)} = \frac{3\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} - r^2 \mathbf{I}}{24\pi\epsilon_0 r^5} : \mathbf{Q}; \quad \mathbf{Q} \equiv \sum_a Q_a \left(3\mathbf{r}_a \otimes \mathbf{r}_a - r_a^2 \mathbf{1} \right). \quad (2.127)$$

Monopól

Derivováním potenciálů (2.125) podle vztahu $E_k = -\partial_k \phi$ snadno určíme složky elektrického pole. Pro monopólový člen je výsledkem dle očekávání Coulombův zákon:

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.128)$$

Pole ubývá s druhou mocninou vzdálenosti od soustavy nábojů a siločáry mají radiální směr. Pole je nenulové jen tehdy, pokud je celkový náboj soustavy Q nenulový.

Dipól

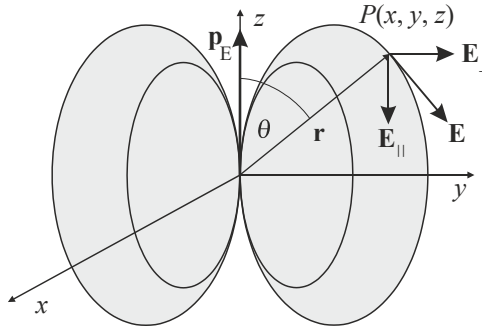
Nová definice dipólového momentu je důležitá při numerických simulacích. Pokud v simulaci sledujeme pohyby částic, známe v každém okamžiku jejich polohové vektory a můžeme tak určit nejenom celkový dipólový moment \mathbf{p}_E , ale i jeho hustotu, tj. polarizaci \mathbf{P} . To je užitečné například při výpočtu tenzoru permitivity, ale i v dalších situacích. Určíme nyní elektrické pole generované dipólovým momentem

$$E_k = -\partial_k \phi^{(1)} = -\frac{p_{El}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{x_l}{r^3} \right) = \frac{3p_{El}x_l x_k - p_{Ek}r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \quad (2.129)$$

Při výpočtu jsme využili $\partial_k r = x_k/r$. Kovariantní zápis dipólového pole je

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_E}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.130)$$

Pole ubývá se třetí mocninou vzdálenosti a má poměrně složitou směrovou závislost.



Obr. 2.18: Pole elektrického dipólu

Je-li osa dipólu v ose z , mají jednotlivé složky hodnoty

$$\mathbf{E} = \frac{p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3n_z n_x, 3n_z n_y, 3n_z^2 - 1);$$

$$E_{\perp} = \frac{p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} 3 \cos \theta \sin \theta; \quad (2.131)$$

$$E_{\parallel} = \frac{p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

Kvadrupól

Kvadrupólový moment vyjadřuje odchylku rozdělení náboje od sférické symetrie. Je symetrický a jeho stopa je nulová, tj. platí

$$Q_{kl} = Q_{lk}, \quad (2.132)$$

$$\text{Tr}(\ddot{\mathbf{Q}}) = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0. \quad (2.133)$$

V obecné soustavě má symetrická matice 6 nezávislých složek, podmínka na stopu redukuje počet nezávislých složek tenzoru kvadrupólového momentu na pět. U reálných symetrických matic jsou vlastní čísla reálná a vlastní vektory tvoří ortogonální systém. Pokud zvolíme tyto vlastní vektory za osy souřadnicové soustavy, bude mít tenzor kvadrupólového momentu jen diagonální složky. V takové souřadnicové soustavě budou díky nulovosti stopy nezávislé jen dvě složky tenzoru kvadrupólového momentu. Pro diagonální tenzor kvadrupólového momentu bude platit $Q_{kl}\delta_{kl} = 0$, neboť jde o stopu tenzoru a ve výrazech (2.125) zůstane jen první člen:

$$\phi^{(2)} = \frac{x_k x_l}{8\pi\epsilon_0 r^5} Q_{kl} = \frac{1}{2} \frac{Q_{kl} n_k n_l}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.134)$$

V kovariantním zápise budeme mít

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{(\vec{Q} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.135)$$

Pro osově symetrické rozdělení náboje (kolem osy z) budou první dvě diagonální složky stejné, tj. tenzor kvadrupólového momentu bude mít jedinou nezávislou složku (stopa musí být nulová):

$$Q_{kl} = \begin{pmatrix} -Q/2 & 0 & 0 \\ 0 & -Q/2 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix}. \quad (2.136)$$

Pozor, veličina Q v tomto výrazu neznamená náboj! Směrová závislost potenciálu bude v případě osové symetrie kolem osy z (využijeme, že součet druhých mocnin všech složek směrového vektoru je roven jedné, tj. jde o jednotkový vektor):

$$\begin{aligned} (\vec{Q} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} &= Q_{kl} n_k n_l = Q_{11} n_1^2 + Q_{22} n_2^2 + Q_{33} n_3^2 = \\ &= -\frac{Q}{2} (n_1^2 + n_2^2) + Q n_3^2 = \\ &= -\frac{Q}{2} (1 - n_3^2) + Q n_3^2 = \\ &= \frac{Q}{2} (3n_3^2 - 1) = \frac{Q}{2} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

Za předpokladu osové symetrie kolem osy z tedy pro kvadrupólovou část potenciálu můžeme v souřadnicové soustavě tvořené vlastními vektory napsat

$$\phi^{(2)} = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (2.137)$$

což je jednoduchý a snadno použitelný vztah. Úhel θ je odklon polohového vektoru pozorovatele od osy symetrie (z). Příslušné elektrické pole lze získat derivováním vztahu, má komplikovanou strukturu a využívá se například v kombinaci s vhodným magnetickým polem pro udržení částic v elektromagnetické pastí.

2.2.5 Elektrický dipól ve vnějším poli

Nyní se budeme zabývat v jistém smyslu opačnou úlohou. Dosud jsme zkoumali, jaké pole generuje soustava částic lokalizovaná v nějakém místě prostoru. Počátek souřadnic jsme umístili někde v soustavě, například v jejím těžišti. Nyní budeme zjišťovat, jak taková soustava bude reagovat na vnější elektrické pole. Pokud je soustava neutrální, nultý člen multipólového rozvoje je nulový a soustava s vnějším polem interaguje až dipólově, případně kvadrupólově. Představme si opět soustavu nábojů lokalizovanou v okolí počátku souřadnicové soustavy, polohové vektory částic jsou \mathbf{r}_a . Částice jsou ponořeny do vnějšího pole s potenciálem ϕ . Energie soustavy ve vnějším poli bude (provedeme Taylorův rozvoj do prvního řádu v okolí počátku souřadnic)

$$U = \sum_a Q_a \phi(\mathbf{r}_a) = \sum_a Q_a [\phi(0) + (\mathbf{r}_a \cdot \nabla)\phi + \dots] \quad (2.138)$$

Derivace potenciálu napíšeme jako složky elektrického pole ($E_k = -\partial_k \phi$) a ze sumy vytkneme vše, přes co se nesčítá:

$$U = \left(\sum_a Q_a \right) \phi(0) - \left(\sum_a Q_a \mathbf{r}_a \right) \cdot \mathbf{E} + \dots$$

První člen bude pro neutrální soustavu nulový, druhý dá dipólový příspěvek k energii částic ve vnějším poli:

$$\blacktriangleright \quad U^{(1)} = -\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{E}. \quad (2.139)$$

Elektrický dipól má nejnižší energii, pokud je orientován ve směru elektrického pole a nejvyšší, pokud je orientován opačně. Proto se při nízkých teplotách soustava elementárních dipólů snaží zorientovat ve směru pole. Hustota pravděpodobnosti (a koncentrace dipólů, která jí je úměrná) je dána Boltzmannovým rozdělením

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{U^{(1)}}{k_B T}\right] = n_0 \exp\left[+\frac{p_E E \cos \theta}{k_B T}\right], \quad (2.140)$$

kde θ je úhel mezi polem a dipólem a k_B Boltzmannova konstanta. Dipóly se budou řadit podél pole tím lépe, čím je pole silnější, teplota nižší a dipólový moment větší.

* * *

Zajímavý je také moment síly působící na soustavu nabitých částic:

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{F} = \sum_a \mathbf{r}_a \times Q_a \mathbf{E} = \left(\sum_a \mathbf{r}_a Q_a \right) \times \mathbf{E}.$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{M} = \mathbf{p}_E \times \mathbf{E}. \quad (2.141)$$

Nenulový moment síly působí na dipóly i v homogenním poli.



2.3 Magnetostatika

Jak už jsme viděli v elektrostatice, ve stacionárním případě, kdy pole nejsou časově proměnná, přestanou být rovnice pro elektrické a magnetické pole provázány. Pro magnetické pole zbudou z Maxwellovy soustavy dvě rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.142)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q. \quad (2.143)$$

V této kapitole budeme předpokládat, obdobně jako v elektrostatice, že látka nemá paměť, tj. reakce látky závisí jen na momentálně přiloženém poli a nikoli na jeho časových derivacích. Pole budou tak slabá, aby bylo možné předpokládat, že odezva látky je lineární (tedy postačí provést Taylorův rozvoj magnetizace jen do prvního řádu). Dále budeme předpokládat homogenní a izotropní látku, tj. při výpočtech v této kapitole se spokojíme s nejjednodušším možným materiálovým vztahem

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (2.144)$$

2.3.1 Vektorový potenciál

Magnetické pole není konzervativní, tj. sílu působící na částice nelze zapsat jako gradient nějaké funkce, která by hrála roli potenciální energie. Taková funkce v magnetickém poli neexistuje. Rovnice $\operatorname{div} \mathbf{B}$ ale umožňuje zavedení vektorového potenciálu. Snadno ukážeme, že pro libovolné pole platí $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{K}) = 0$. Pokud bychom mohli zapsat pole \mathbf{B} jako rotaci nějakého jiného pole \mathbf{A} , bude rovnice (2.142) automaticky splněna:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \quad (2.145)$$

Zásadní otázkou je, zda je možné takové vektorové pole najít. Odpověď je kladná, rovnice $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ je parciální diferenciální rovnicí pro pole \mathbf{A} , v níž pravé strany tvoří pole \mathbf{B} . Taková rovnice má, až na extravagantní zdroje, jako je magnetický monopol, vždy řešení, dokonce je jich nekonečně mnoho. Funkci \mathbf{A} nazýváme *vektorový potenciál magnetického pole*. Pokud najdeme vektorový potenciál, magnetické pole už snadno určíme z rovnice

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.146)$$

K danému poli ale není potenciál určen jednoznačně. Pokud k potenciálu přičteme gradient libovolné skalární funkce, magnetické pole se nezmění. Takovou gradientní transformaci nazýváme *kalibrační transformace* (v angličtině *gauge transformation*):

$$\blacktriangleright \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}. \quad (2.147)$$

Důkaz tohoto tvrzení je velmi jednoduchý:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{A}} = \operatorname{rot}(\mathbf{A} + \nabla f) = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Magnetické pole se tedy skutečně nezmění (rotace gradientu je nulová). Ke stejnému poli vede obrovské množství potenciálů. Tuto libovůli lze využít k výběru takového potenciálu (této proceduře říkáme kalibrace), pro který jsou příslušné rovnice co možná nejjednodušší. V elektrostatice jsme elektrické pole dokázali popsat pomocí jedné jediné funkce – skalárního potenciálu. Nic takového neplatí v magnetostatice. Namísto jednoho vektorového pole (\mathbf{B}) máme jiné vektorové pole (\mathbf{A}), jehož rovnice jsou jednodušší. Celkově tedy pro popis elektromagnetického pole postačí pouhá čtveřice funkcí (skalární a vektorový potenciál). To dobře koresponduje s tím, že žijeme ve čtyřrozměrném časoprostoru a většinu dějů popisujeme uspořádanými čtveřicemi. Později ukážeme, že čtveřice (ϕ , \mathbf{A}) popisující elektromagnetické pole tvoří tzv. čtyřvektor, který se transformuje za pomoci Lorentzovy transformace. Z transformovaných potenciálů určíme odpovídající pole v jiné souřadnicové soustavě.

● Příklad 2.2: Potenciál homogenního magnetického pole

Předpokládejme, že magnetické pole je homogenní. Souřadnicový systém zvolme tak, aby v něm pole mířilo v ose z :

$$\mathbf{B} = (0, 0, B). \quad (2.148)$$

Zkusme nyní najít vektorový potenciál přímo ze vztahu (2.146). Rovnici $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ rozepíšeme do složek:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B. \quad (2.149)$$

Nejpodstatnější je samozřejmě třetí rovnice: aby derivováním vznikla správná pravá strana, musíme vhodně zvolit složky A_x , A_y vektorového potenciálu. Vyzkoušejte si, že vhodnými potenciály jsou například

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (0, Bx, 0); \\ \mathbf{A} &= (-By, 0, 0); \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(-By, Bx, 0); \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Všechny tyto potenciály jsou stejně dobré. Po provedení rotace dostaneme magnetické pole $(0, 0, B)$. Potenciály jednoduchých polí naleznete v tabulce na konci kapitoly 2.6.1. ■

2.3.2 Poissonova rovnice a její řešení

Zavedením vektorového potenciálu automaticky splníme první z rovnic magnetostatiky (2.142). Dosadíme proto vektorový potenciál do druhé z rovnic magnetostatiky (2.143)

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q &\Rightarrow \text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}_Q \Rightarrow \text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{j}_Q \Rightarrow \\ \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} &= \mu \mathbf{j}_Q. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Jde o parciální diferenciální rovnici pro vektorový potenciál. Jako zdrojový člen vektorového potenciálu zde figuruje hustota vodivostních proudů. Nebýt prvního členu na

levé straně, šlo by stejně jako v elektrostatice o Laplaceovu-Poissonovu rovnici. První člen ale rovnici zbytečně komplikuje. Víme, že vektorových potenciálů existuje nekonečně mnoho. Liší se od sebe o gradient libovolné funkce. Nešlo by tedy mezi nimi vybrat takový potenciál, aby byl první člen rovnice (2.151) nulový? Předpokládejme, že potenciál A známe a hledáme nový, jehož divergence je nulová. Zkusme tedy provést transformaci

$$\tilde{A} = A + \nabla f \quad (2.152)$$

a požadovat, aby byla divergence nového potenciálu nulová:

$$\operatorname{div} \tilde{A} = 0. \quad (2.153)$$

To vede na rovnici

$$\operatorname{div}(A + \nabla f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f = -\operatorname{div} A.$$

Vzhledem k tomu, že na pravé straně figuruje známá funkce, máme pro f generující transformaci k novému potenciálu rovnici

$$\Delta f = F(\mathbf{r}). \quad (2.154)$$

Taková rovnice má vždy řešení, tedy funkce f , která přetransformuje starý potenciál na nový, existuje. Pro nový potenciál bude platit jednodušší rovnice (vlnky v dalším textu vynecháme):

$$\blacktriangleright \quad \Delta A = -\mu \mathbf{j}_Q; \quad (2.155)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} A = 0. \quad (2.156)$$

První rovnice je Laplaceova-Poissonova rovnice magnetostatiky pro vektorový potenciál, druhá rovnice je dodatečná podmínka (tzv. *Lorenzova kalibrační podmínka*), kterou musí vybraný potenciál splňovat. Nalezneme-li jakékoli řešení rovnice (2.155), musíme zkontrolovat, zda splňuje Lorenzovu kalibrační podmínku. Vzhledem k tomu, že známe Greenovu funkci Laplaceova operátoru (2.92) v třídímním neomezeném prostoru, můžeme rovnou napsat obecné řešení

$$A = G * g, \quad (2.157)$$

kde g je pravá strana Laplaceovy-Poissonovy rovnice. Po dosazení máme

$$A(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') d^3 r' = \int_V \left(-\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) (-\mu \mathbf{j}_Q(\mathbf{r}')) d^3 r' \quad \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad A(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (2.158)$$

Řešení je zcela analogické skalárnímu potenciálu (2.93) pro elektrické pole. Zdrojem magnetického pole ale není hustota náboje, nýbrž tok elektrického náboje. Čárkované proměnné opět označují polohu zdrojů, nečárkované polohu pozorovatele. Ve jmenovateli je vzdálenost mezi zdrojem pole a pozorovatelem. Přímým výpočtem lze ukázat, že takto zvolený potenciál splňuje Lorenzovu kalibrační podmínku $\operatorname{div} A = 0$, pokud platí $\operatorname{div} \mathbf{j}_Q = 0$, což je zákon zachování náboje ve stacionárním případě.

2.3.3 Biotův-Savartův zákon

Představme si nyní, že magnetické pole není buzené volně se pohybujícími částicemi, ale vodičem obecného tvaru (tvar vodiče popíšeme křivkou γ), kterým protéká elektrický proud. Pro tok náboje bude v takovém případě platit

$$\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = I d\mathbf{l}', \quad (2.159)$$

kde $d\mathbf{l}'$ je element křivky sledující vodič. Pro vektorový potenciál tedy budeme mít

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.160)$$

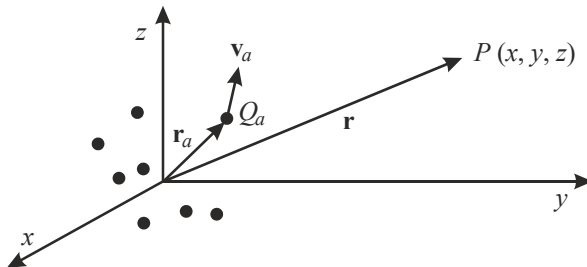
Magnetické pole vypočteme jako rotaci tohoto vektorového potenciálu:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.161)$$

Výpočet je přímočarý: $B_k = \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \dots$ Derivaci přesuneme do integrálu a jmenovatele derivujeme jako složenou funkci. Přitom využijeme nám už známý vztah $\partial r / \partial x_k = x_k / r$. Rovnice (2.161) se velmi často využívá v elektrotechnice při výpočtu magnetických polí generovaných vodiči protékanými proudy. Vztah poprvé odvodili francouzský fyzik a astronom Jean-Baptiste Biot (1774–1862) a francouzský fyzik a matematik Félix Savart (1791–1841) v roce 1820. Připomeňme, že zákon v podobě (2.161) platí jen ve stacionárním případě, tj. pro neproměnné elektrické proudy.

2.3.4 Multipólový rozvoj

Stejně jako v elektrostatičce budeme i v magnetostatičce předpokládat lokalizovanou soustavu nábojů. Počátek souřadnicového systému můžeme umístit například do těžiště soustavy. Každý z nábojů má polohový vektor \mathbf{r}_a , rychlostní vektor \mathbf{v}_a , hmotnost m_a a náboj Q_a . Pozorovatel je ve velké vzdálenosti od zdroje polí a má polohu \mathbf{r} .



Obr. 2.19: Lokalizované částice a vzdálený pozorovatel

Tok náboje bude mít tvar superpozice přes polohy jednotlivých částic

$$\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}') = \sum_a Q_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a). \quad (2.162)$$

Pro potenciál (2.158) máme (po dosazení) v tomto případě jednoduché vyjádření

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_a \frac{Q_a \mathbf{v}_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (2.163)$$

Pole pozorujeme ve vzdáleném místě \mathbf{r} , platí $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}_a$, takže můžeme provést Taylorův rozvoj pro argument \mathbf{r} a přírůstek \mathbf{r}_a (postup je zcela identický s elektrostatikou):

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} - x_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) \pm \dots \quad (2.164)$$

Nyní provedeme derivace (při derivování využijeme $\partial r / \partial x_k = x_k / r$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} + x_k^{(a)} \frac{x_k}{r^3} \pm \dots \quad (2.165)$$

Odvozený rozvoj dosadíme do vztahu pro potenciál a ze sumace vytkneme veličiny, přes které se nesčítá:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_a Q_a \mathbf{v}_a + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} x_k \sum_a Q_a \mathbf{v}_a x_k^{(a)} + \dots \quad (2.166)$$

První člen za rovnítkem je nulový (součet příspěvků všech elektrických proudů musí být ve stacionárním případě pro izolovanou soustavu nábojů nulový). V dalším členu lze vzniklou kombinaci rozložit na symetrickou a antisymetrickou část vzhledem k rychlosti a poloze nabitě částice ($\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a$)

$$\begin{aligned} & \sum_a Q_a \mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) = \\ & = \sum_a Q_a \left(\frac{1}{2} [\mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) + \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_a)] + \frac{1}{2} [\mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) - \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_a)] \right) = \\ & = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) + \frac{1}{2} \sum_a Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.167)$$

Vzhledem k předpokladu stacionarity je symetrická část nulová (u záření, jak uvidíme později, už toto platit nebude) a antisymetrická část dá dvojný vektorový součin

$$\mathbf{A} = 0 + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \right) \times \mathbf{r} + \dots \quad (2.168)$$

První nenulový člen rozvoje má tvar:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{p}_M \times \mathbf{r}; \quad \mathbf{p}_M \equiv \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \quad (2.169)$$

Velichinu \mathbf{p}_M nazýváme magnetický dipólový moment. Jde o zobecnění jednoduchého vztahu $\mathbf{p}_M = I \mathbf{S}$ pro obecnou lokalizovanou soustavu nabitých částic. Vztah je vhodný pro numerické simulace, kde ze známých poloh a rychlostí částic můžeme okamžitě spočítat magnetický dipólový moment soustavy a z něho magnetizaci, tj. reakci systému na přiložené magnetické pole. Ukažme, že pro jednu jedinou nabitou částici, která krouží

po kružnici, povede nová definice magnetického momentu na dříve používaný vztah $\mathbf{p}_M = I \mathbf{S}$. Nejprve určíme velikost magnetického momentu:

$$p_M = \left| \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \right| = \frac{1}{2} QRv = \frac{1}{2} QR \frac{2\pi R}{T} = \frac{Q}{T} \pi R^2 = IS.$$

Symbolem T jsme označili periodu oběhu nabitě částice, R je poloměr kružnice. Pokud budeme plochu uvažovat jako vektor $\mathbf{S} = S \mathbf{n}$, získáme původní vztah.

2.3.5 Magnetický dipól

Magnetické pole dipólu určíme jako rotaci potenciálu (2.169) při konstantním magnetickém momentu:

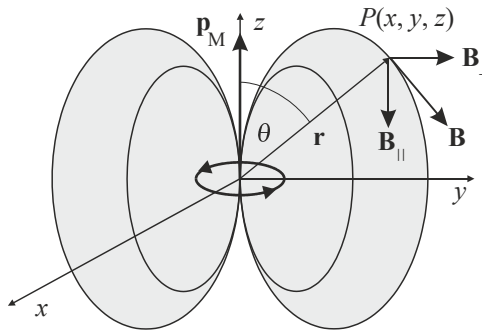
$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}^{(1)} = \text{rot } \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{p}_M \times \mathbf{r},$$

$$B_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{klm} \partial_l \varepsilon_{mop} p_o \frac{x_p}{r^3}.$$

Nyní standardním způsobem derivujeme podíl x_p/r^3 , Leviho-Civitovy symboly převedeme na Kroneckerovy delty a po přímočarém výpočtu dostaneme

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_M]; \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.170)$$

Tvar magnetických indukčních čar magnetického dipólu je shodný s tvarem siločar intenzity elektrického pole elektrického dipólu (2.130). Obě pole ubývají se třetí mocninou vzdálenosti od dipólu a většinou se popisují v souřadnicové soustavě s osou z totožnou s osou dipólu.



Obr. 2.20: Pole magnetického dipólu

Je-li osa dipólu v ose z , mají jednotlivé složky hodnoty

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3} (3n_z n_x, 3n_z n_y, 3n_z^2 - 1); \quad (2.171)$$

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3} 3 \cos \theta \sin \theta ; \quad (2.172)$$

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

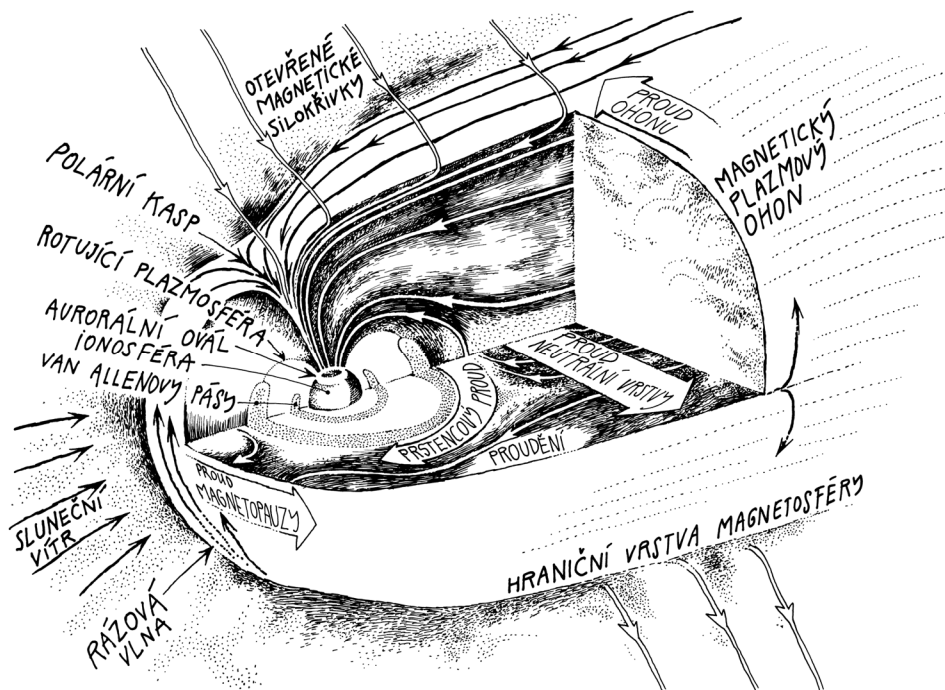
Pro magnetický dipól lze odvodit obdobné vztahy jako pro dipól elektrický. Postupy jsou obdobné. Uveďme proto bez odvození jednotlivé výsledky a shrňme je s předchozími vztahy do jediné tabulky

VELIČINA	ELEKTRICKÝ DIPÓL	MAGNETICKÝ DIPÓL
dipólový moment soustavy	$\mathbf{p}_E \equiv \sum_{k=1}^N Q_k \mathbf{r}_k$	$\mathbf{p}_M \equiv \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} Q_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k$
nejjednodušší realizace	dva opačné náboje: $\mathbf{p}_E = Q \mathbf{d}$	kroužící náboj: $\mathbf{p}_M = I \mathbf{S}$
energie ve vnějším poli	$U = -\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{E}$	$U = -\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{B}$
moment síly působící na dipól	$\mathbf{M} = \mathbf{p}_E \times \mathbf{E}$	$\mathbf{M} = \mathbf{p}_M \times \mathbf{B}$
potenciál dipólu	$\phi = \frac{\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_M \times \mathbf{r}}{r^3}$
pole dipólu $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$	$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_E}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_M]$
rozklad pole	$E_{\perp} = \frac{3p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \sin \theta,$ $E_{\parallel} = \frac{p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$	$B_{\perp} = \frac{3\mu_0 p_M}{4\pi r^3} \cos \theta \sin \theta,$ $E_{\parallel} = \frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$

Magnetický dipól v astronomii

V astronomii se magnetický dipólový moment jednotlivých objektů uvádí v poněkud nestandardních jednotkách. Vzhledem k tomu, že pole dipólu klesá se třetí mocninou vzdálenosti od zdroje, uvádějí astronomové magnetický dipólový moment jako součin vodorovné složky pole na rovníku a třetí mocniny poloměru tělesa. Taková veličina má rozměr Tm^3 a je úměrná námi zavedenému magnetickému momentu. Z osmi planet Sluneční soustavy nemají magnetický moment jen Venuše a Mars. Magnetické momenty planet jsou:

TĚLESO	MAGNETICKÝ MOMENT (Tm^3)	TĚLESO	MAGNETICKÝ MOMENT (Tm^3)
Merkur	5×10^{12}	Jupiter	160×10^{18}
Venuše	0	Saturn	$4,6 \times 10^{18}$
Země	8×10^{15}	Uran	$0,39 \times 10^{18}$
Mars	0	Neptun	$0,21 \times 10^{18}$



Obr. 2.21: Magnetosféra Země charakteristicky deformovaná slunečním větrem



2.4 Zákony zachování

Elektromagnetické pole, které zavedl anglický fyzik Michael Faraday jako prostředí pro přenos interakce, není jen matematickou pomůckou pro popis elektrických a magnetických jevů, ale reálnou entitou, která je schopna přenášet z jednoho místa na druhé energii, hybnost a moment hybnosti. Zákony zachování těchto veličin jsou zakódovány do Maxwellových rovnic a my se s nimi v této kapitole postupně seznámíme. Vypišme zde proto ještě jednou všechny Maxwellovy rovnice, abychom se na ně při odvozování mohli snadno odkazovat:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.173)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (2.174)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.175)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.176)$$

2.4.1 Zákon zachování energie

Zákony zachování můžeme formulovat lokálně, tj. tak, aby platily v každém bodě časoprostoru. Ukázali jsme si to na náboji, kde výsledkem byla rovnice kontinuity. Tento postup můžeme provést pro jakoukoli extenzivní veličinu, výsledkem je rovnice kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A = 0. \quad (2.177)$$

Velichina ρ_A je objemová hustota veličiny A , její jednotkou je $[A]/\text{m}^3$. Může jít například o hustotu hmoty (kg/m^3), hustotu energie (J/m^3), hustotu hybnosti ($\text{kg m}/\text{s}/\text{m}^3$) atd. Velichina \mathbf{j}_A je tok veličiny A , má význam množství veličiny proteklé jednotkovou plochou za jednotku času a míří ve směru toku veličiny, tedy rychlostního pole. Jednotkou toku je $[A]/(\text{m}^2\text{s})$. Například tok energie, o který půjde v této kapitole, má rozměr $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Hustotu energie elektrického pole dobře známe, je dána výrazem (2.117) – jde o polovinu skalárního součinu obou elektrických vektorů, tedy $\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}/2$. Jde například o hustotu energie v kondenzátoru. Obdobně je hustota energie v magnetickém poli dána vztahem $\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}/2$, příkladem může být hustota energie obsažená v solenoidu. Z Maxwellových rovnic (2.173) až (2.176) vypočteme časovou změnu hustoty energie a upravíme ji do tvaru zákona zachování. Pro zjednodušení výpočtů budeme uvažovat lineární vztahy mezi oběma elektrickými i magnetickými vektory ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2} \right) &= \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \\ &= \mathbf{E}\cdot(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) + \mathbf{H}\cdot(-\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \end{aligned}$$

$$= \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E} = \\ = -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}.$$

Při odvození jsme využili vektorovou identitu I.3.220 z prvního dílu „Vybranných kapitol“. Výsledný zákon zachování energie pro pole má tvar rovnice kontinuity, jejíž členy snadno identifikujeme:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathcal{P}; \quad (2.178)$$

$$\blacktriangleright \quad u \equiv \rho_U \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}, \quad \mathbf{S} \equiv \mathbf{j}_U = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \mathcal{P} \equiv \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \quad (2.179)$$

V časové derivaci je celková hustota energie pole u – skládá se z hustoty energie elektrické a magnetické. V prostorové derivaci (za divergencí) musí být tok energie. Vidíme, že je roven vektorovému součinu intenzit obou polí $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Tok energie elektromagnetického pole se nazývá *Poyntingův vektor* podle anglického fyzika Johna Henryho Poyntinga (1852–1914), obvykle ho značíme symbolem \mathbf{S} . Vidíme, že energie teče vždy kolmo na intenzitu elektrického pole a intenzitu magnetického pole. Na pravé straně není nula, což znamená, že se energie elektromagnetického pole nezachovává. Jak je to možné? Elektromagnetické pole může totiž svou energii předávat částicím. Například v mikrovlnné troubě, do které jste strčili oběd, dojde k jeho ohřevu elektromagnetickým polem. Člen $\mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}$ na pravé straně je hustotou Jouleova výkonu (W/m^3):

$$\mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E} = \rho_Q \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = Qn \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = n \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = \\ = n \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = n \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{dt} = nP = \mathcal{P}.$$

Jouleův výkon popisuje, jak pole předává energii částicím. Pro pole jde o ztrátu energie, proto je na pravé straně znaménko minus. Teprve zákon zachování energie pro celou soustavu, tj. pole spolu s částicemi, by na pravé straně měl nulu. Za časovou derivaci by byly hustota energie pole a hustota energie částic, za divergencí tok energie pole a tok energie částic.

2.4.2 Zákon zachování hybnosti

U skalárních veličin, jakými jsou například energie nebo náboj, jsou příslušnými toky vektory. U vektorových veličin tomu ale bude jinak, toky budou tenzory druhého řádu. Abychom pochopili proč, budeme se nejprve zabývat zákonem zachování hybnosti obyčejné vodivé tekutiny a teprve až poté zákonem zachování hybnosti elektromagnetického pole.

Vodivá tekutina

Pro objekt o hmotnosti m platí Newtonova pohybová rovnice

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (2.180)$$

V našem případě ale nejde o jedinou částici, ale hmotný element proudící tekutiny, na který působí síla $d\mathbf{F}$. Rychlost jedné částice \mathbf{v} nahradíme rychlostním polem $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$:

$$dm \frac{d\mathbf{u}}{dt} = d\mathbf{F}. \quad (2.181)$$

Nyní přejdeme k hustotám, tj. obě strany rovnice vydělíme objemovým elementem dV :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (2.182)$$

Symbol ρ reprezentuje hustotu hmoty proudící tekutiny, symbol \mathbf{f} hustotu působící síly. Uvědomíme-li si, že rychlostní pole je funkcí času a prostoru, tj. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, budeme mít

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (2.183)$$

První část na levé straně vyjadřuje explicitní změnu rychlostního pole, druhý člen změnu rychlostního pole způsobenou prouděním (při jarním tání přinese řeka množství rychle tekoucí vody z hor). Hustota síly na pravé straně se liší podle procesů, které popisujeme. Může jít o tlakovou sílu, viskózní procesy nebo Lorentzovu sílu působící na nabitě částice ve vodivé tekutině. V našem jednoduchém úvodním příkladě viskózní procesy vynecháme. Tlaková energie je $dW_p = F dx = pS dx = p dV$. Tlak je tedy hustotou energie. Hustota síly bude minus gradientem hustoty potenciální energie, tedy

$$\mathbf{f}_p = -\nabla p \quad (2.184)$$

Zbývá určit hustotu Lorentzovy síly. Na nabitý element tekutiny působí element síly

$$d\mathbf{F}_L = dQ \mathbf{E} + dQ \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (2.185)$$

Rovnici vydělíme objemovým elementem, tj. přejdeme k hustotám:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{f}_L = \rho_Q \mathbf{E} + \rho_Q \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}. \quad (2.186)$$

Obě hustoty sil nyní přidáme na pravou stranu pohybové rovnice (2.183), hustotu Lorentzovy síly, zatím nebudeme rozepisovat (jde o předem dané síly způsobené vnějšími poli):

$$\blacktriangleright \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f}_L. \quad (2.187)$$

Tato pohybová rovnice a rovnice kontinuity pro hmotnost

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.188)$$

je vše, co potřebujeme k odvození zákona zachování hybnosti vodivé tekutiny. Nezapomeňte, že ρ je hustota hmoty, ρ_Q je hustota náboje. Hustota mechanické hybnosti tekutiny bude

$$\mathbf{g} \equiv \rho \mathbf{u}. \quad (2.189)$$

Nalezneme časovou změnu jedné ze složek hustoty hybnosti

$$\frac{\partial}{\partial t} g_k = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u_k + \rho \frac{\partial u_k}{\partial t}.$$

Za časovou změnu hustoty dosadíme z rovnice kontinuity (2.188) a za časovou změnu rychlosti z pohybové rovnice (2.187):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = -\partial_l(\rho u_l) u_k - \rho(u_l \partial_l) u_k - \partial_k p + f_{Lk}.$$

Všechny členy s derivacemi převedeme na levou stranu a upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial(\rho u_l)}{\partial x_l} u_k + (\rho u_l) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial p}{\partial x_k} &= f_{Lk} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho u_l u_k) + \frac{\partial p}{\partial x_k} &= f_{Lk} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(p \delta_{kl} + \rho u_k u_l) &= f_{Lk}. \end{aligned}$$

Získali jsme zákon zachování hybnosti. V závorce za časovou derivací je hustota hybnosti. V závorce za prostorovými derivacemi je tok hybnosti neboli tenzor tlaku. Sama hybnost je vektorová veličina, a proto její tok tvoří tenzor druhého řádu. Symetrie tenzoru tlaku zajišťuje zachování momentu hybnosti v proudící tekutině. Tenzor tlaku se skládá ze dvou částí: skalární části, kterou tvoří normální tlak působící ve všech směrech stejně. Druhou částí je tenzorová část související s prouděním tekutiny. Napravo není nula, hybnost vodivé tekutiny se nezachovává, protože na ni působí hustota Lorentzovy síly, která jí hybnost předává. Zákon zachování hybnosti s rozepsanou Lorentzovou silou můžeme napsat ve složkovém zápisu

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(T_{kl}^P) = \rho_Q E_k + \varepsilon_{klm} j_{Ql} B_m; \quad T_{kl}^P \equiv p \delta_{kl} + \rho u_k u_l \quad (2.190)$$

nebo v invariantním tvaru

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{T}^P = \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}; \quad \vec{T}^P \equiv p \vec{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}. \quad (2.191)$$

Elektromagnetické pole

Elektromagnetické pole můžeme chápat jako soustavu fotonů s nulovou klidovou hmotností a energií

$$\mathcal{E} = pc. \quad (2.192)$$

Pro hustotu energie ρ_U a hustotu hybnosti pole γ máme

$$\rho_U = \gamma c. \quad (2.193)$$

Pro hustotu hybnosti γ jako vektor můžeme psát

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\rho_U}{c} \mathbf{e}_c = \frac{\rho_U}{c} \frac{\mathbf{c}}{c}. \quad (2.194)$$

V čitatelích je součin hustoty energie a rychlosti šíření, tj. tok energie, který je dán Poyntingovým vektorem, proto

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}. \quad (2.195)$$

V kapitole o elektromagnetických vlnách odvodíme vztah mezi rychlostí světla, permitivitou a permeabilitou ($c^2 = 1/\epsilon\mu$), pomocí něhož vztah přepíšeme:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \quad (2.196)$$

Povšimněte si, že vektorový součin intenzit polí má význam toku energie, zatímco vektorový součin indukci polí má význam hustoty hybnosti. Naším cílem je nyní sestavit zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole, tedy najít časovou derivaci vztahu (2.196). Při úpravách využijeme soustavu Maxwellových rovnic (2.173) až (2.176):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times (-\text{rot } \mathbf{E}) = \dots$$

Následují standardní úpravy pro „kátou“ složku časové změny hustoty hybnosti, ve kterých členy s prostorovými derivacemi převedeme do tvaru divergence. Lze to provést například přepisem vektorových součinů pomocí Leviho-Civitova tenzoru. Detaily nalezneme čtenář v záznamu přednášky na serveru aldebaran.cz (sekce studium, teoretická fyzika). Výsledkem elementárních úprav s využitím Maxwellových rovnic je

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}}^{\text{EM}} = -\rho_Q \mathbf{E} - \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}; \quad (2.197)$$

$$\blacktriangleright \quad \vec{\mathbf{T}}^{\text{EM}} \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \vec{\mathbf{1}} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{D} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \vec{\mathbf{1}} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}, \quad (2.198)$$

$$\blacktriangleright \quad T_{kl}^{\text{EM}} \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \delta_{kl} - E_k D_l + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{kl} - H_k B_l. \quad (2.199)$$

V zákonu zachování (2.197) vystupuje za časovou derivaci hustota hybnosti elektromagnetického pole. Za prostorovou derivaci (divergenci) je *tenzor toku hybnosti pole* $\vec{\mathbf{T}}^{\text{EM}}$, který se nazývá *Maxwellův tenzor pnutí* nebo také někdy *tenzor tlaku*. Skládá se z elektrické a magnetické části, každá z nich má dva členy – skalární (diagonální) a tenzorový. Je to obdobné jako u tenzoru tlaku částic, kde jsme měli skalární tlak $p\delta_{kl}$ a dynamický tlak $\rho u_k u_l$. Vidíme, že hybnost elektromagnetického pole se nezachovává. Je to dáno předáváním hybnosti pole částicím. Teprve celkový součet hybnosti všech částic a pole má tvar zákona zachování. Získáme ho sečtením rovnic (2.191) a (2.197):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u} + \mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{T}}^{\text{P}} + \vec{\mathbf{T}}^{\text{EM}}) = 0. \quad (2.200)$$

Odvozená rovnice je zákonem zachování hybnosti pro vodivou tekutinu respektive soustavu nabitých částic a elektromagnetické pole. První člen v časové derivaci má význam hustoty hybnosti látky $\mathbf{g} \equiv \rho \mathbf{u}$, což je ale současně tok hmoty z rovnice kontinuity. Druhý člen $\boldsymbol{\gamma} \equiv \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ je hustotou hybnosti elektromagnetického pole. V prostorových derivacích se nacházejí tenzory toku hybnosti částic, a toku hybnosti elektromagnetického pole.

Časová změna hybnosti je síla, časová změna hustoty hybnosti je hustota Lorentzovy síly, která vystupuje na pravých stranách zákonů zachování (kladně u částic a se záporným znaménkem u polí). Teprve součet obou rovnic dá na pravé straně nulu. Sepíšme ještě jednou celkový výsledek:

$$\frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}} = 0;$$

$$\vec{\pi} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\gamma} = \rho \mathbf{u} + \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad (2.201)$$

$$\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{T}}^P + \vec{\mathbf{T}}^{EM} = p \vec{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \vec{\mathbf{1}} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{D} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \vec{\mathbf{1}} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}.$$

V této celkové bilanci jsme zavedli celkovou hustotu hybnosti částic a pole $\boldsymbol{\pi}$ a celkový tenzor toku hybnosti částic a pole \mathbf{T} .

2.4.3 Tlak pole

V této části se budeme zabývat tlakem, kterým je elektromagnetické pole schopné působit na své okolí.

Statický tlak

U tekutiny hrála skalární část toku hybnosti roli běžného tlaku. Nejinak je tomu u toku hybnosti pole (Maxwellova tenzoru pnutí). Obsahuje dvě skalární části, jednu magnetickou a druhou elektrickou, které můžeme ztotožnit s magnetickým a elektrickým tlakem:

$$\blacktriangleright \quad p_M = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}, \quad (2.202)$$

$$\blacktriangleright \quad p_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}^2}{2\epsilon}. \quad (2.203)$$

Povšimněte si, že oba tlaky jsou hustotou příslušné energie pole (magnetické nebo elektrické). Obdobně je tomu i v mechanice, například mgh je energie v tíhovém poli a hustota energie ρgh je hydrostatický tlak způsobený tíží. Ve slunečních skvrnách dosahuje lokální magnetické pole hodnoty až 0,3 tesla, tomu odpovídá tlak $B^2/2\mu_0$ přibližně 400 000 Pa, což není nikterak málo. Kolem plazmových vláken protékajících elektrickým proudem se vytváří magnetické pole a v okolí vlákna vzniká gradient magnetického tlaku. Ten zpětně působí na vlákno a komprimuje ho do té doby, než je gradient tlaku magnetického pole vyrovnán gradientem tlaku látky. Vzniklá rovnovážná konfigurace je analogií kulových struktur v gravitaci (zde namísto gradientu magnetického tlaku objekt komprimuje gravitační síla). V plazmatu je většinou taková rovnovážná konfigurace nestabilní, jen pro proudy tekoucí po šroubovici můžeme dosáhnout stability útvaru, viz třetí díl „Vybraných kapitol“ [2]. Obdobně může i elektrické pole způsobovat enormní tlaky, které jsou zodpovědné za přesuny látky a mnohé další jevy.

Tlak záření

Elektromagnetické záření není ničím jiným než pravidelně se měnícím elektrickým a magnetickým polem. Ve statistické fyzice se dá odvodit, že záření působí na okolí tlakem rovným třetině průměrné hustoty energie, viz (1.166). My tento vztah odvodíme prostým středováním tenzoru hybnosti elektromagnetického pole, jehož jednotlivé členy mají význam skalárního a tenzorového tlaku. Budeme-li integrovat zákon zachování

hybnosti elektromagnetického pole ve vakuu přes libovolně vybraný objem dostaneme (s použitím Gaussovy věty)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{T}^{\text{EM}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \iiint_V \boldsymbol{\gamma} dV + \oint_{S=\partial V} \mathbf{T}^{\text{EM}} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že první člen reprezentuje časovou změnu hybnosti, tedy působící sílu, musí mít tenzor toku pole význam síly působící na jednotku plochy (vyplývá to okamžitě i s jeho ztotožněním s tlakem, který je opět silou na jednotku plochy). Označíme-li \mathbf{n} směrový vektor, bude tlak elektromagnetického záření roven:

$$p = \overline{T_{kl}^{\text{EM}}} \langle n_k n_l \rangle. \quad (2.204)$$

Pruh nad symbolem označuje středování přes všechny možné hodnoty a úhlová závorka středování přes všechny možné směry. Určíme nejprve středování přes úhly:

$$\langle n_k n_l \rangle = \frac{1}{4\pi} \int n_k n_l d\Omega = A \delta_{kl}. \quad (2.205)$$

Střední hodnota směrových vektorů přes všechny směry nesmí záviset na volbě souřadnicového systému, půjde tedy o diagonální symetrický tenzor, který bude úměrný Kroneckerovu delta. Konstantu A určíme ze stopy levé a pravé strany:

$$\langle n_k n_k \rangle = A \delta_{kk} \quad \Rightarrow \quad \langle 1 \rangle = 3A \quad \Rightarrow \quad A = 1/3.$$

Proto platí

$$\langle n_k n_l \rangle = \frac{1}{3} \delta_{kl}. \quad (2.206)$$

Pro tlak elektromagnetického záření máme

$$\begin{aligned} p &= \overline{T_{kl}^{\text{EM}}} \frac{1}{3} \delta_{kl} = \frac{1}{3} \overline{T_{kk}^{\text{EM}}} = \\ &= \frac{1}{3} \overline{\left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \delta_{kk} - E_k D_k + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \delta_{kk} - H_k B_k \right)} \Rightarrow \\ p &= \frac{1}{3} \overline{\left(\frac{3}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{3}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right)} = \\ &= \frac{1}{3} \overline{\left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right)} \Rightarrow \end{aligned}$$

►

$$p = \frac{1}{3} \bar{u}. \quad (2.207)$$

Tlak elektromagnetického záření je třetinou střední hustoty jeho energie. Tento tlak je schopen pohánět sluneční plachetnice, odfouknout ohon komety, či vytvořit bublinu kolem rodící se hvězdy v její zárodečné mlhovině.

2.4.4 Zákon zachování momentu hybnosti

Moment hybnosti je standardně definován vztahem

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} . \quad (2.208)$$

Ve skutečnosti nejde o vektor, ale o tzv. pseudovektor, antisymetrickou matici tvořenou složkami

$$M_{kl} = x_k p_l - x_l p_k .$$

Taková matice má jen tři nezávislé členy, které interpretujeme jako složky vektorového součinu:

$$\begin{aligned} b_1 &= M_{23} = x_2 p_3 - x_3 p_2 ; \\ b_2 &= M_{31} = x_3 p_1 - x_1 p_3 ; \\ b_3 &= M_{12} = x_1 p_2 - x_2 p_1 . \end{aligned} \quad (2.210)$$

Matici M_{kl} tedy můžeme ztotožnit s momentem hybnosti. Nyní zavedeme hustotu momentu hybnosti elektromagnetického pole vztahem

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{M}_{kl} = x_k \pi_l - x_l \pi_k , \quad (2.211)$$

tedy jsme jen zaměnili hybnosti p_k za jejich hustoty π_k . Jde o celkovou hustotu hybnosti pole a částic $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\gamma}$. Obdobně bude $\mathbf{T} = \mathbf{T}^P + \mathbf{T}^{\text{EM}}$ celkový tenzor toku hybnosti částic a polí. Nyní budeme zkoumat časovou změnu hustoty momentu hybnosti. Časové změny hustoty hybnosti vyjádříme ze zákona zachování hybnosti (2.200):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{kl} = x_k \frac{\partial \pi_l}{\partial t} - x_l \frac{\partial \pi_k}{\partial t} = x_k (-\partial_n T_{nl}) - x_l (-\partial_n T_{nk}) .$$

Nyní přesuneme derivace dle vztahu pro derivaci součinu $f g' = (f g)' - f' g$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{kl} &= -\partial_n (x_k T_{nl}) + T_{nl} \delta_{nk} + \partial_n (x_l T_{nk}) - T_{nk} \delta_{nl} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{kl} &= -\partial_n (x_k T_{ln} - x_l T_{nk}) + T_{kl} - T_{lk} . \end{aligned}$$

Již jsme se zmínili, že symetrie tenzoru toku hybnosti souvisí se zákonem zachování momentu hybnosti. Pro symetrický tenzor se poslední dva členy odečtou a máme zákon zachování momentu hybnosti pro elektromagnetické pole a s ním interagující částice:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{kl} + \partial_n \mathcal{N}_{kln} &= \mathbf{0} ; \\ \mathcal{M}_{kl} &\equiv x_k \pi_l - x_l \pi_k , \\ \mathcal{N}_{kln} &\equiv x_k T_{ln} - x_l T_{kn} . \end{aligned} \quad (2.212)$$

Tok momentu hybnosti \mathcal{N}_{kln} je tenzor třetího řádu. Pokud by tenzor toku hybnosti T_{kl} nebyl symetrický, neplatil by zákon zachování momentu hybnosti a tekutina či pole by se samy od sebe mohly roztáčet, což je samozřejmě v rozporu s pozorováním.

2.4.5 Pole jako reálná entita

Představme si, že máme k dispozici dvě nabitě částice, například dva elektrony, ve vzdálenosti jednoho metru. Nějakým způsobem pohneme první částici. Počkáme-li určitou dobu, projeví se naše akce i na druhé částici, která se pohne také. Nebude to ale okamžitě. První elektron vytvoří svým pohybem elektromagnetické pole, kterému předá určitou část energie, hybnosti a momentu hybnosti. Tyto tři atributy přenesou pole rychlostí světla ke druhé částici. Opět vidíme, že pole není pouhou matematickou konstrukcí ulehčující výpočty, ale fyzikální realitou. Pole je nositelem energie, hybnosti i momentu hybnosti.



Obr. 2.22: Přenos energie, hybnosti a momentu hybnosti polem



2.5 Elektromagnetické vlny

2.5.1 Základní pojmy

Označme veličinu, jejíž hodnoty se mění v čase a prostoru $\psi(t, \mathbf{x})$. Je jedno, zda jde o skalární, nebo strukturovanou, například vektorovou, veličinu. Může jít o tlak, hustotu prostředí, teplotu, rychlostní, elektrické či magnetické pole, výšku mořské hladiny a podobně. Uveďme si nejprve některé pojmy, které se používají v teorii vln.

Vlnová funkce

Veličina $\psi(t, \mathbf{x})$ popisuje vlnění v čase a v prostoru. Položíme-li $t = \text{const}$, pozorujeme časový snímek vlnění. Můžete si představit, že vyfotografujeme například vlnící se mořskou hladinu a prohlížíme si vzniklou fotografii. Položíme-li $\mathbf{x} = \text{const}$, pozorujeme časový průběh sledované veličiny v jednom určitém místě. Vlnění většinou popisujeme komplexní vlnovou funkcí, použití komplexních čísel významně zjednoduší některé výpočty. Fyzikální význam má ale zpravidla jen reálná část vlnové funkce. Tak jako každou komplexní funkci, můžeme vlnovou funkci zapsat pomocí dvou reálných funkcí, amplitudy A a fáze φ :

$$\blacktriangleright \quad \psi(t, \mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}. \quad (2.213)$$

Vlnoplocha

Plocha spojující místa s konstantní hodnotou fáze φ vlnové funkce se nazývá vlnoplocha. Na vlnoploše je vlnění ve stejné fázi (například vlnoplocha spojující místa, v nichž má tlak 75 % maximální hodnoty).

Úhlová frekvence

Úhlovou frekvencí chápeme změnu fáze vlnění s časem, budeme ji definovat vztahem

$$\blacktriangleright \quad \omega \equiv -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.214)$$

Minus v definici není podstatné, zajišťuje jen, aby se rovinná vlna pohybovala ve směru vlnového vektoru. Později bude toto znaménko užitečné i ke správnému relativistickému zápisu vztahů. Úhlová frekvence se může měnit jak s časem, tak od místa k místu. Je-li úhlová frekvence neproměnná, lze její velikost zapsat pomocí periody T jako $\omega = 2\pi/T$.

Vlnový vektor

Vlnovým vektorem nazveme změnu fáze vlnění se všemi prostorovými proměnnými,

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{k} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \varphi. \quad (2.215)$$

Vlnový vektor jakožto gradient míří kolmo na vlnoplochu, tj. ve směru šíření vln. Jeho velikost i směr se může měnit s časem i od místa k místu. Je-li vlnový vektor neproměnný, lze jeho velikost zapsat pomocí vlnové délky λ jako $k = 2\pi/\lambda$.

Disperzní relace

Vlnění je v každém místě popsáno čtyřmi čísly (ω, \mathbf{k}) , později uvidíme, že tvoří relativistický čtyřvektor. Tato čísla jsou závislá. Vztah mezi nimi lze odvodit z rovnic popisujících daný typ vlnění. Většinou má závislost obecný tvar

$$\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (2.216)$$

a nazývá se *disperzní relace*. V některých případech je možné z disperzní relace explicitně vypočítat úhlovou frekvenci v závislosti na vlnovém vektoru nebo vlnový vektor v závislosti na úhlové frekvenci:

$$\omega = \omega(\mathbf{k}), \quad (2.217)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega). \quad (2.218)$$

Tam, kde to explicitně možné není, můžeme použít větu o implicitní funkci a disperzní relaci ve tvaru $\omega(\mathbf{k})$ určit alespoň lokálně.

Rovinná (monochromatická) vlna

Jde o nejjednodušší typ vlny, která má konstantní amplitudu a fázi, jež je lineární funkcí času a prostoru:

$$\begin{aligned} A(t, \mathbf{x}) &= A; \\ \varphi(t, \mathbf{x}) &= c_0 t + c_1 x + c_2 y + c_3 z = -\omega t + k_x x + k_y y + k_z z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \end{aligned} \quad (2.219)$$

Význam koeficientů c_k plyne z definice úhlové frekvence a vlnového vektoru. Termín *monochromatická* v názvu vlny znamená, že ve vlně je zastoupena jediná frekvence neboli barva (*chromos*). Rovinná (monochromatická) vlna má tedy tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]}. \quad (2.220)$$

Na první pohled je zřejmé, že plochy konstantní fáze $\varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$ představují rovnice přesouvajících se rovin:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{x}) &= \text{const} \quad \Rightarrow \\ k_x x + k_y y + k_z z - \omega t &= \text{const} \quad \Rightarrow \\ ax + by + cz + d(t) &= 0. \end{aligned}$$

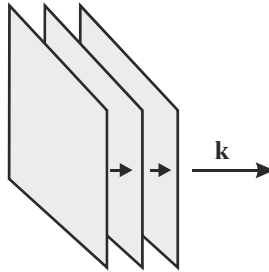
Přesun roviny budeme chápat jako kolmý k této rovině (šikmé přesuny rovin lze tak jako tak nahradit kolmým přesunem s rychlostí rovnou projekci rychlosti do kolmého směru). Směr přesunu určíme jako gradient rovnice roviny:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \quad \Rightarrow \quad \nabla \varphi = \mathbf{k}.$$

Vlnový vektor proto míří ve směru šíření vlnění.

Fázová rychlost

Fázová rychlost je rychlost přesunu roviny konstantní fáze. Zvolme souřadnicový systém tak, aby se roviny přesouvaly ve směru první osy, tj. $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$



Obr. 2.23: Rovinná vlnoplocha

Diferencováním rovnice plochy konstantní fáze získáme rychlost přesunu plochy (fázovou rychlost)

$$kx - \omega t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad k dx - \omega dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Pro obecnou volbu souřadnicového systému platí

►
$$v_f = \frac{\omega}{k}; \quad \mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k. \quad (2.221)$$

První výraz určuje jen velikost fázové rychlosti, druhý výraz ukazuje, že vektor fázové rychlosti míří ve směru vlnového vektoru. Fázová rychlost souvisí jen s přesunem místa, které má stejnou fázi vlnění, nesouvisí se skutečným makroskopickým přesunem hmoty (kola šířící se na vodní hladině mají jinou rychlost než voda samotná). Fázová rychlost může být, a v mnoha případech je, nadsvětelná. Tvar disperzní relace určuje hodnotu fázové rychlosti pro různé frekvence. Jev, kdy se vlny různých frekvencí šíří různou rychlostí se nazývá *disperze*.

Obecná vlna

S rovinnými vlnami se velmi snadno pracuje a můžeme z nich poskládat vlnu obecnějšího tvaru:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d^3 \mathbf{k}. \quad (2.222)$$

Jde vlastně o Fourierovu transformaci $\psi(t, \mathbf{x}) \leftrightarrow a(\omega, \mathbf{k})$. Amplitudy vln jsou Fourierovým obrazem vlnové funkce. Integrace se provádí jen přes složky vlnového vektoru. Úhlová frekvence je na vlnovém vektoru závislá prostřednictvím disperzní relace (2.217), a proto se přes ni neintegruje. Formálně můžeme integraci zapsat čtyřrozměrně pomocí Diracovy distribuce:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \delta[\omega - \omega(\mathbf{k})] d\omega d^3 \mathbf{k}. \quad (2.223)$$

Grupová rychlost

Zkoumejme nyní rychlost přesunu vlnového balíku – klubka vln podobných frekvencí a vlnových vektorů. Pro jednoduchost budeme uvažovat balík šířící se ve směru osy x (tak zvolíme souřadnicový systém):

$$\psi(t, x) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(\omega, k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (2.224)$$

Amplituda vln je nenulová jen v intervalu $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ a nahradíme ji konstantní amplitudou:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega t)} dk.$$

V dalším kroku vytkneme z integrálu prostřední vlnu

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]} dk.$$

Nesmíme zapomenout, že $\omega = \omega(k)$ a integrace se „skrytě“ provádí i přes ω . Další úpravy jsou zřejmé:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) \left(x - \frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} t \right) \right] dk.$$

Zlomek v argumentu exponenciály lze nahradit derivací (pro $\Delta k \rightarrow 0$)

$$\frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} \approx \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} = v_g(k_0).$$

Veličina v_g má zatím význam jen označení pro výše definovanou parciální derivaci. Vlnový balík má nyní tvar:

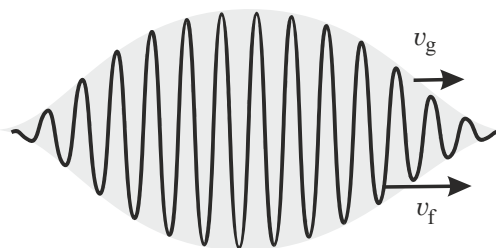
$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) (x - v_g t) \right] dk.$$

Je zřejmé, že po integraci přes vlnový vektor bude výsledek integrálu funkcí $x - v_g t$:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} F(x - v_g t) = A(x - v_g t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Vlnový balík má tedy obálku šířící se rychlostí v_g , které říkáme grupová rychlost. Vnitřní část balíku je vyplněna nosnou vlnou $\exp[i(k_0 x - \omega t)]$. Výpočet jsme pro jednoduchost provedli v jedné dimenzi. Pro obecně mířící vlnový vektor je

►
$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right). \quad (2.225)$$



Obr. 2.24: Vlnový balík

Rychlost šíření vlnového balíku jako celku se nazývá *grupová rychlost*. Je to rychlost šíření informace o tvaru balíku a rychlost přenosu energie balíku. Nutně musí být podsvětelná. S využitím Louis de Broglieho vztahů a Hamiltonových kanonických rovnic $dq_k/dt = \partial H/\partial p_k$ snadno ukážeme, že jde o mechanickou rychlost částice kvantově spojené s vlnovým balíkem:

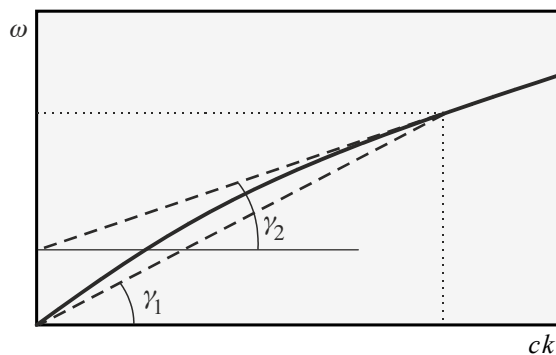
$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \hbar \omega}{\partial \hbar \mathbf{k}} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\text{mech}}.$$

Grafický význam fázové a grupové rychlosti

Grafický význam fázové a grupové rychlosti vidíme na obrázku. Fázová rychlost je dána tangentou úhlu, který svírá spojnice bodu na křivce disperzní relace s počátkem (vzhledem k vodorovné ose), grupová rychlost je dána směrnicí tečny (jde o derivaci):

$$v_f = c \operatorname{tg} \gamma_1 ; \quad (2.226)$$

$$v_g = c \operatorname{tg} \gamma_2 . \quad (2.227)$$



Obr. 2.25: Grafická interpretace fázové a grupové rychlosti

Schéma výpočtu

Máme-li ke sledovanému jevu nějaký teoretický model, nejlépe uspořádaný do přehledné soustavy rovnic, je napůl vyhráno. Uveďme nyní základní postup výpočtu:

1. Můžeme se pokusit některé proměnné ze soustavy vyloučit a snížit tak počet proměnných. Ideálem je samozřejmě získat jedinou rovnici pro jedinou neznámou. Popisuje-li model vlnění, bude výsledná rovnice nějakým druhem vlnové rovnice. Tuto proceduru můžeme kdykoli přerušit a přejít k následujícímu kroku.

- Je-li soustava nelineární, budeme ji linearizovat, tj. řešení napíšeme jako nějaké nalezené řešení, k němuž přidáme malou poruchu prvního řádu (vyšší mocniny než první zanedbáme). Maxwellova soustava rovnic je lineární a tento krok můžeme vynechat.
- Obecné řešení (vlnu) složíme z rovinných vln podle vztahu (2.222). Vzhledem k linearitě soustavy se každou rovinnou vlnou můžeme zabývat zvlášť. Úplné řešení lze kdykoli později z těchto parciálních vln složit. S rovinnými vlnami se mimořádně snadno zachází. Zkusme rovinnou vlnu derivovat podle časové a prostorové proměnné:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \psi &= \frac{\partial}{\partial t} A e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]} = -i\omega A e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]} = -i\omega \psi, \\ \frac{\partial}{\partial x_l} \psi &= \frac{\partial}{\partial x_l} A e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]} = +ik_l A e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]} = +ik_l \psi.\end{aligned}$$

Vidíme, že parciální derivace pro rovinnou vlnu přecházejí na algebraické výrazy. Jakékoli kombinace parciálních derivací lze nahradit algebraickými výrazy plynoucími z obou uvedených relací. Sestavme je do přehledné tabulky:

Výraz	Příklad
$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$	$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f$
$\frac{\partial}{\partial x_l} \rightarrow +ik_l$	$\frac{\partial f}{\partial x_l} = +ik_l f$
$\nabla \rightarrow +i\mathbf{k}$	$\nabla f = +i\mathbf{k} f$
$\text{div} \rightarrow i\mathbf{k} \cdot$	$\text{div} \mathbf{V} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$
$\text{rot} \rightarrow i\mathbf{k} \times$	$\text{rot} \mathbf{V} = i\mathbf{k} \times \mathbf{V}$
$\nabla^2 \rightarrow -k^2$	$\nabla^2 f = -k^2 f$

(2.228)

Podle těchto pravidel převedeme výchozí soustavu na algebraickou soustavu rovnic, se kterou se snáze zachází. Tento krok je ekvivalentní provedení Fourierovy transformace.

- Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení, musí být determinant soustavy nulový (předpokládáme, že výsledná soustava nemá pravou stranu a většinou tomu tak skutečně je). Z této podmínky získáme vztah mezi ω a \mathbf{k} , tedy disperzní relaci. Často je výhodné eliminací snížit počet proměnných soustavy, a tím řád počítaného determinantu. Snížování počtu proměnných můžeme provádět před použitím pravidel Fourierovy transformace (pro parciální diferenciální rovnice, viz krok 1) i po něm v algebraické soustavě.
- Je-li disperzní relace komplexní, je vhodné řešit případnou stabilitu či nestabilitu nalezeného řešení. Komplexní úhlová frekvence nebo vlnový vektor znamenají, že ve výrazu $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)]$ jsou exponenciální neoscilující členy, které mohou vést k útlumu nebo exponenciálnímu narůstání řešení (nestabilitě).

6. Z disperzní relace se pokusíme vypočítat úhlovou frekvenci a ze vztahů (2.221) a (2.225) nalezneme fázovou a grupovou rychlost vln.
7. Vrátime se k původní soustavě rovnic a zkoumáme vztahy mezi jednotlivými veličinami, vzájemné směry různých vektorů, zda je vlnění příčné či podélné atd.

2.5.2 Vlny ve vakuu

Jako jednoduchý příklad na uvedený postup řešíme elektromagnetické vlny ve vakuu, kde platí $\rho_Q = 0$, $\mathbf{j}_Q = 0$ a materiálové vztahy jsou pouze $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. V soustavě (2.46) až (2.49) ponecháme vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t. \end{aligned} \tag{2.229}$$

Ukážeme dva postupy řešení. V prvním se pokusíme eliminovat proměnné ještě před provedením Fourierovy transformace, v druhém až po jejím provedení.

Postup 1

Z Maxwellových rovnic se pokusíme vyloučit magnetickou indukci a získat rovnici pro elektrické pole. Na čtvrtou rovnici zapůsobíme operací rotace a na pravé straně za $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ dosadíme z třetí rovnice:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ &(\operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2) \mathbf{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, získáváme výslednou rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.230}$$

Jde o známou vlnovou rovnici pro elektrické pole. Obdobně bychom eliminací elektrického pole mohli z Maxwellových rovnic získat stejnou rovnici pro magnetické pole. Nyní provedeme Fourierovu transformaci podle pravidel uvedených na předchozí straně:

$$(-k^2 + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Parciální diferenciální rovnici jsme převedli na algebraickou rovnici bez pravé strany. Nenulové řešení bude existovat pouze tehdy, když

$$-k^2 + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k. \quad (2.231)$$

Z podmínky nenulovosti řešení jsme odvodili disperzní relaci. Fázová rychlost šíření (rychlost světla) je

$$\blacktriangleright \quad c \equiv v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (2.232)$$

Nalezená disperzní relace tvaru $\omega = ck$ je nejjednodušší možná (přímková), fázová i grupová rychlost je stejná a vlnění nejeví disperzi, tj. rychlost není závislá na vlnové délce resp. vlnovém vektoru.

Postup 2

Budeme předpokládat, že se nám nepodařilo ze soustavy Maxwellových rovnic eliminovat rovnici pro elektrické či magnetické pole. Provedme proto Fourierovu transformaci již v původní soustavě rovnic (2.229):

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= +\omega \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.233)$$

Eliminaci proměnných lze provést nyní. Dosadíme \mathbf{B} z poslední rovnice do předposlední:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} &= -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}. \end{aligned}$$

První výraz je podle první rovnice z (4.23) nulový a rovnice pro elektrické pole proto je

$$(k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Podmínkou nenulovosti elektrického pole je opět disperzní relace

$$k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k = ck.$$

Z původní soustavy (2.233) snadno zjistíme, že vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{k} jsou navzájem kolmé a elektromagnetické vlnění je proto příčné. Vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} nejsou v elektromagnetické vlně nezávislé, z rovnice $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ plyne po Fourierově transformaci $kE = \omega B$ a tedy

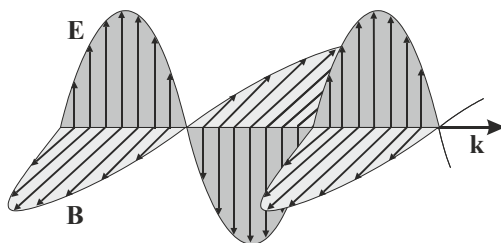
$$\blacktriangleright \quad \frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = v_f \quad (2.234)$$

Tento vztah má hlubší význam. Podíl elektrické intenzity a magnetické indukce má vždy význam typické rychlosti v daném systému. Například pro plazma jde o driftovou

rychlost částic, pro elektromagnetickou vlnu o fázovou rychlost jejího šíření. V případě vakua je fázová rychlost rovna c . V materiálovém prostředí zavádíme index lomu

$$\blacktriangleright \quad n \equiv \frac{c}{v_f} \quad (2.235)$$

a podíl obou polí je v elektromagnetické vlně roven $E/B = v_f = c/n$.



Obr. 2.26: Poměry v rovinné elektromagnetické vlně

Polarizace

Polarizací elektromagnetické vlny rozumíme rovinu kmitů elektrického pole. Tato polarizace může být *rovinná* (tmavší rovina na obrázku), při níž vektor elektrického pole kmitá stále ve stejné rovině. Rovina kmitů elektrického pole se ale může i stáčet (a s ní i rovina kmitů magnetického pole). Polarizace může být například *kruhová* (koncový bod elektrického pole opisuje kružnici) nebo *chaotická* (elektromagnetická vlna se skládá z mnoha emisních aktů různých polarizací).

Poznámka 1: Vidíme, že není důležité, v jaké fázi výpočtu provedeme Fourierovu transformaci, oba postupy vedou ke stejnému výsledku. Pokud neumíme zacházet s parciálními diferenciálními rovnicemi, je výhodné provést transformaci co nejdříve. Nepodaří-li se nám provést eliminaci proměnných ani před, ani po transformaci, bude podmínkou nenulovosti řešení nulovost determinantu celé soustavy.

Poznámka 2: Rychlost světla nám vyšla závislá pouze na permitivitě a permeabilitě vakua. Je dána vlastnostmi vakua. Rychlost je ve všech souřadnicových soustavách stejná. To je důsledkem faktu, že Maxwellovy rovnice mají odlišné transformační vlastnosti od klasické mechaniky, kde se rychlosti soustavy a zdroje sčítají. Nesoulad klasické mechaniky a elektrodynamiky vyústil v řadu experimentů, které ukázaly, že chování přírody odpovídá Maxwellově elektrodynamice. Proto bylo třeba klasickou mechaniku upravit tak, aby byla v souladu s elektrodynamikou. Tuto úpravu provedl Albert Einstein v roce 1905 – nazývá se speciální teorie relativity. Vede k dnes známé kontrakci délek a dilataci času.

Poznámka 3: Z Maxwellových rovnic plyne, že se elektromagnetické vlny mohou šířit i ve vakuu, daleko od zdrojů, z nichž vznikly.

Poznámka 4: Maxwell ze svých rovnic ukázal, že světlo je elektromagnetickým vlněním a že musí existovat i elektromagnetické vlnění kratších i delších vlnových délek, než má světlo. Taková vlnění byla později objevena, například v roce 1888 objevil Heinrich Hertz rádiové vlny.

2.5.3 Vlny v anizotropním prostředí

Vlastnosti látky mohou vnést do šíření elektromagnetických vln výraznou anizotropií. Totéž může způsobit vnější elektrické a ještě častěji magnetické pole. Věnujme se v této kapitole velmi krátce anizotropním materiálům. Pro jednoduchost předpokládejme lineární odezvu a pouze elektricky anizotropní prostředí (například obyčejnou sůl), kde platí $D_k = \varepsilon_{kl}E_l$:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (2.236)$$

Vektor \mathbf{D} už obecně nemíří ve směru vektoru \mathbf{E} , permitivita není jediné číslo, ale devítice čísel tvořících tenzor permitivity druhého řádu. Ze základních fyzikálních úvah, které jdou za hranici tohoto kurzu, plyne, že tenzor permitivity musí být symetrickou maticí tj. $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$. Symetrické matice ale mají reálná vlastní čísla a tři navzájem kolmé vlastní vektory, které mohou hrát roli přirozené báze, jinými slovy přirozené souřadnicové soustavy. Například v krystalické látce jde o osy, podél nichž se vlnění šíří podstatně jednodušeji než v ostatních směrech. Pokud budeme látku popisovat v takové souřadnicové soustavě, bude mít tenzor permitivity jen diagonální členy, tedy tři hodnoty permitivity lišící se ve třech směrech.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (2.237)$$

Různá permitivita v různých směrech znamená různé rychlosti šíření elektromagnetické vlny a různý index lomu:

$$n_k \equiv \frac{c}{v_k} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{1/\sqrt{\varepsilon_k\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_0}} \quad (2.238)$$

Pokud jsou všechny tři permitivity, a tím i indexy lomu, různé ($n_1 \neq n_2 \neq n_3$), hovoříme o dvousém krystalu. U mnohých krystalů jsou ale dva ze tří indexů lomu stejné, tj. například

$$n_1 = n_2 \neq n_3; \quad (2.239)$$

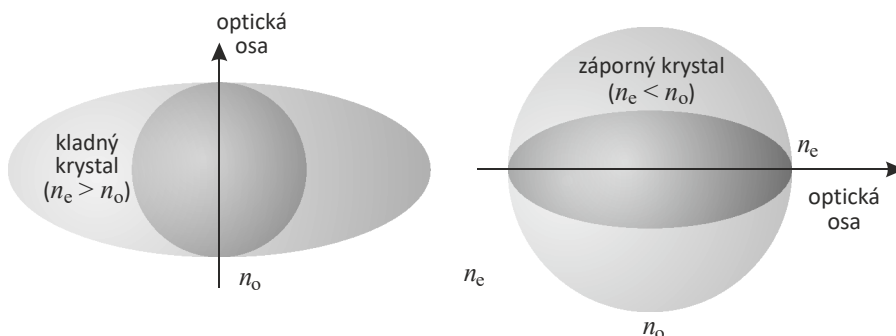
V tomto případě hovoříme o jednoosých krystalech, oba shodné indexy nazýváme řádným indexem lomu (*ordinary*) a třetí, lišící se od ostatních, nazýváme mimořádným (*extraordinary*) indexem:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad n_o &= n_1 = n_2, \\ n_e &= n_3 \end{aligned} \quad (2.240)$$

Příklady indexů lomu některých jednoosých krystalů jsou v následující tabulce:

krystal	n_o	n_e
křemen	1,544	1,553
rutil	2,616	2,903
islandský vápenec	1,658	1,486
turmalín	1,669	1,638
beryl	1,598	1,590

U elektricky anizotropních látek se setkáváme s řadou nových vlastností. V krystalech se objevují současně dvě vlnoplochy odpovídající šíření řádné a mimořádné vlny. Tomu odpovídají i dva vlnové vektory a dvojitý obraz věcí zobrazených dvojlomným krystalem. Vždy ale existuje jedna osa, v níž oba vlnové vektory splývají a vlnoplochy řádné a mimořádné vlny se dotýkají. Takové ose říkáme *optická osa*.



Obr. 2.27: Nejčastější dva typy dvojlomných krystalů

Směry jednotlivých vektorů získáme z Maxwellových rovnic, v nichž nebudeme uvažovat ani prostorové náboje, ani tekoucí proudy a ponecháme oba elektrické i oba magnetické vektory a provedeme Fourierovu transformaci:

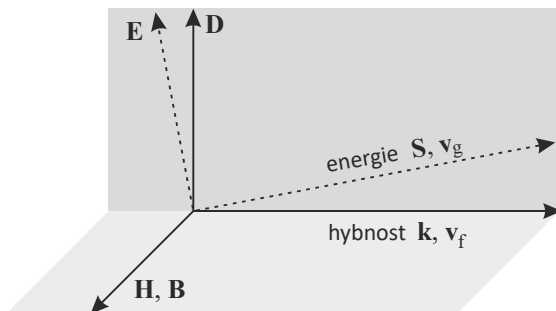
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}. \quad (2.241)$$

Vlnový vektor \mathbf{k} je kolmý na vektory \mathbf{D} a \mathbf{B} , tj. má směr hustoty hybnosti $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ a tedy fázové rychlosti vlnění. Naopak grupová rychlost má směr šíření energie, tedy směr Poyntingova vektoru (toku energie) $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Za paprsek považujeme směr šíření energie, tedy není už kolmý na vlnoplochy.

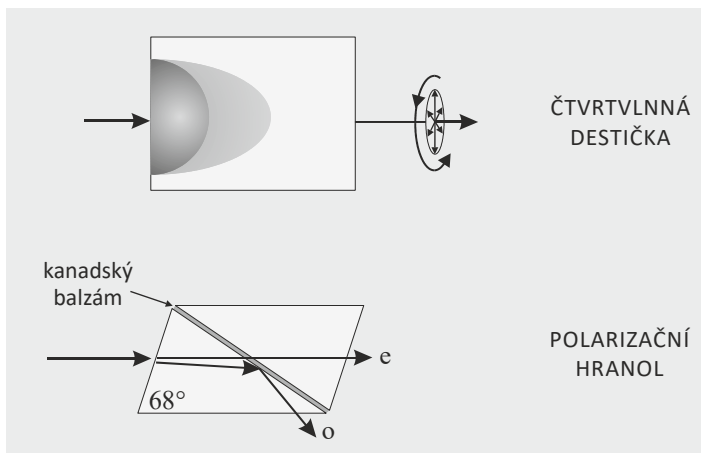
- Fázová rychlost a vlnový vektor míří ve směru hustoty hybnosti $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$;
- Grupová rychlost a paprsek míří ve směru toku energie $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$;
- Optická osa je směr s jediným vlnovým vektorem.
- Existují i krystaly, v nichž je $n_1 \neq n_2 \neq n_3$.

Pokud vstupuje paprsek do dvojlomného krystalu, rozdělí se původní vlna na dvě: řádnou a mimořádnou. Řádná vlna se láme podle indexu lomu n_o , mimořádná podle indexu lomu n_e . Obě nové vlny jsou polarizované a jejich polarizace (roviny kmitů elektrického pole) jsou navzájem kolmé.



Obr. 2.28: Směry základních vektorů v dvojlomném prostředí

Dvojlomné prostředí lze využít v řadě zajímavých zařízení. Jmenujme alespoň dvě. Prvním je **čtvrtvlnná destička**. Krystal je vybroušen tak, že jedním z povrchů vstupuje kolmý paprsek kolmo na optickou osu. Obě vzniklé vlny se šíří ve stejném směru. Různé polarizace se ale šíří různou rychlostí. Destička má takovou tloušťku, aby došlo k posunu obou polarizací o 90° . Na výstupu se obě vlny spojí. Kmity elektrického pole vln jsou navzájem kolmé a přitom posunuté o 90° . Tím vznikne kruhově polarizovaný elektromagnetický signál. Jiným zajímavým zařízením je **polarizační hranol** (tzv. nikol), v jehož nitru je řezná plocha slepená kanadským balzámem. Do anizotropního krystalu z islandského vápence vstupuje nepolarizovaný paprsek, který se rozdělí na dvě polarizace. Index lomu kanadského balzámu je takový, že u řádného paprsku dojde k úplnému odrazu a krystal opustí. Druhá vlna kanadským balzámem projde. Obě polarizace se oddělí, a hranol je proto zdrojem polarizovaného světla.



Obr. 2.29: Čtvrtvlnná destička a polarizační hranol

2.5.4 Vlny ve vodivém prostředí

Nalezněme vlnovou rovnici pro elektromagnetickou vlnu šířící se v kovu. V Maxwellových rovnicích dosadíme za proudovou hustotu $\mathbf{j}_Q = \sigma \mathbf{E}$, kde σ je diferenciální vodivost

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.242)$$

Na třetí rovnici aplikujeme operaci divergence a za $\operatorname{div} \mathbf{D}$ dosadíme z první rovnice:

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_Q \approx \rho_0 \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right]. \quad (2.243)$$

Prostorová hustota náboje ve vodiči exponenciálně vymizí a nemusíme ji proto uvažovat. Za výchozí sadu Maxwellových rovnic pro vlny ve vodiči můžeme použít

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.244)$$

Aplikací operace rotace na třetí rovnici můžeme eliminovat elektrické pole

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \sigma \mu \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} &= -\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

Obdobně můžeme získat i rovnici pro pole elektrické. Ve vodiči splňují elektromagnetické vlny tzv. telegrafní rovnici:

$$\blacktriangleright \quad \left(\nabla^2 - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0.$$

Po dosazení rovinné vlny (provedení Fourierovy transformace) získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 - i c^2 \sigma \mu \omega. \quad (2.245)$$

Je-li vodivost nulová ($\sigma = 0$), přejde disperzní relace ve známou relaci vln v nevodivém prostředí. Ve vodiči je disperzní relace komplexní, což obecně znamená útlum.

Útlum v prostoru

Hledejme nejprve prostorový útlum (řešení v k):

$$c^2 k^2 = \omega^2 + i c^2 \sigma \mu \omega \approx i c^2 \sigma \mu \omega.$$

Vzhledem k vysoké vodivosti kovů jsme první člen na pravé straně zanedbali. Tento výraz již snadno odmocníme. Nezapomeňte, že $i^{1/2} = (1+i)/2^{1/2}$. Proto

$$k = k_1 + i k_2; \quad k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega}{2}}. \quad (2.246)$$

Reálná i imaginární část vlnového vektoru je stejně veliká (to je pro kovy typické). V prostoru tedy bude mít vlna charakter

$$\Psi = \mathbf{A} \exp \left[i \sqrt{\sigma \mu \omega / 2} x - \sqrt{\sigma \mu \omega / 2} x \right] \quad (2.247)$$

Vlna je exponenciálně tlumená. Snadno určíme charakteristickou vzdálenost, na které se vlna utlumí faktorem e:

$$\blacktriangleright \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}. \quad (1.248)$$

Tuto vzdálenost (do které vlna ve vodivém prostředí pronikne) nazýváme *skinová hloubka*.

Útlum v čase

Hledejme nyní útlum v čase (řešení v ω). Disperzní relace je kvadratická rovnice pro frekvenci ω s řešením

$$\omega_{1,2} = -\frac{i}{2} c^2 \sigma \mu \pm \frac{1}{2} \sqrt{-c^4 \sigma^2 \mu^2 + 4c^2 k^2}.$$

V diskriminantu je vodivostní člen dominantní, poslední člen zanedbáme. V takovém případě zbývá jediné nenulové řešení

$$\omega \cong -i c^2 \sigma \mu. \quad (2.249)$$

Řešení ve frekvenci je ryze imaginární a má charakter útlumu

$$\Psi = \mathbf{A} e^{-c^2 \sigma \mu t} \quad (2.250)$$

s charakteristickou dobou útlumu, na níž bude vlna utlumena faktorem e

$$\blacktriangleright \quad \tau = 1 / (c^2 \sigma \mu). \quad (2.251)$$

Povšimněte si, že při dodržení znaménkové konvence (+ prostor, – čas) v zápise rovinných vln typu $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ vyšel pro elektromagnetickou vlnu pronikající do vodivého prostředí útlum v čase i v prostoru, což je správně.

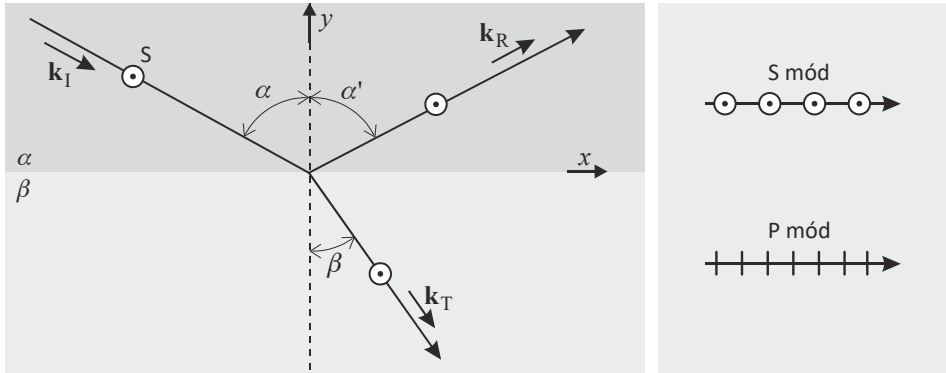
2.5.5 Světlo na rozhraní dvou prostředí

Zákon odrazu a lomu

Zákony odrazu a lomu poprvé odvodil arabský učenec Ibn Sahl (asi 940–1000) v roce 984. V západním světě znovuobjevil zákon lomu až holandský astronom a matematik Willebrord Snellius (1580–1626) v roce 1621. Jeho předchůdci popisovali lom světla pomocí experimentálně sestavených tabulek. Zákon lomu se také pokoušel nalézt francouzský filozof, fyzik a matematik René Descartes (1596–1650). Vycházel z analogie míčků, které při letu proniknou skrze tenkou překážku, ztratí energii a jejich dráha

změní směr. Bohužel došel tímto postupem k výsledku, v němž sice správně vystupují siny úhlů dopadu a lomu, ale poměr rychlostí světla v obou prostředích mu vyšel obrácený. Správnou formuli odvodil také francouzský matematik a právník Pierre de Fermat (1601–1665) z principu minimálního času.

Způsobů odvození zákona lomu a odrazu je mnoho – od Huyghensova principu přes Fermatův princip až po přímý výpočet z podmínek na rozhraní, které okamžitě plynou z Maxwellových rovnic. Odvození provedeme dle následujícího obrázku:



Obr. 2.30: Lom a odraz na rozhraní dvou prostředí

Rovina rozhraní je $y = 0$. Rovina interakce je $z = 0$ (rovina papíru či monitoru). Pokud elektrický vektor míří kolmo na rovinu interakce, hovoříme o *S polarizaci* (*Stick*, pro-píchnout). Pokud elektrický vektor kmitá v rovině interakce, hovoříme o *P polarizaci* (*Parallel*, rovnoběžná). Z těchto polarizací lze superpozicí složit libovolnou jinou polarizaci. Vlnový vektor paprsku dopadajícího na rozhraní je označen \mathbf{k}_I (*Incident*), odraženého paprsku \mathbf{k}_R (*Reflected*) a paprsku prošlého rozhraním \mathbf{k}_T (*Transmitted*). Rovina kmitů elektrického pole je naznačena červenými body, elektrické pole míří směrem k vám – jde o S polarizaci, pro kterou provedeme výpočet. Elektrické pole má v tomto módu jen tečnou složku k rozhraní, která bude spojitá. Úhly jsou měřeny od kolmice k rozhraní, úhel dopadu je označen α , úhel odrazu α' a úhel lomu β . Vlnové vektory budou mít složky

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_I &= (k_I \sin \alpha, -k_I \cos \alpha, 0); \\ \mathbf{k}_R &= (k_R \sin \alpha', k_R \cos \alpha', 0); \\ \mathbf{k}_T &= (k_T \sin \beta, -k_T \cos \beta, 0).\end{aligned}\quad (2.252)$$

Tečné složky pole jsou spojitě, tj.

$$\mathbf{E}_{0I} e^{i[\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t]} + \mathbf{E}_{0R} e^{i[\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t]} = \mathbf{E}_{0T} e^{i[\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t]}.\quad (2.253)$$

Do posledního vztahu dosadíme jednotlivé vlnové vektory a rozhraní ($y = 0$):

$$E_{0I} e^{i[k_I x \sin \alpha - \omega t]} + E_{0R} e^{i[k_R x \sin \alpha' - \omega t]} = E_{0T} e^{i[k_T x \sin \beta - \omega t]}.\quad (2.254)$$

Tato podmínka na rozhraní musí platit v libovolném čase t a v libovolné poloze x , což bude splněno jen, pokud platí

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T, \quad (2.255)$$

$$k_I \sin \alpha = k_R \sin \alpha' = k_T \sin \beta. \quad (2.256)$$

Při odrazu ani lomu se nemění frekvence elektromagnetického záření. Z druhé podmínky už snadno odvodíme

$$\frac{\omega_I}{v_I} \sin \alpha = \frac{\omega_R}{v_R} \sin \alpha' = \frac{\omega_T}{v_T} \sin \beta \Rightarrow \quad (2.257)$$

$$\frac{\sin \alpha}{v_\alpha} = \frac{\sin \alpha'}{v_\alpha} = \frac{\sin \beta}{v_\beta}.$$

Z posledního vztahu okamžitě plyne jak zákon odrazu, tak zákon lomu:

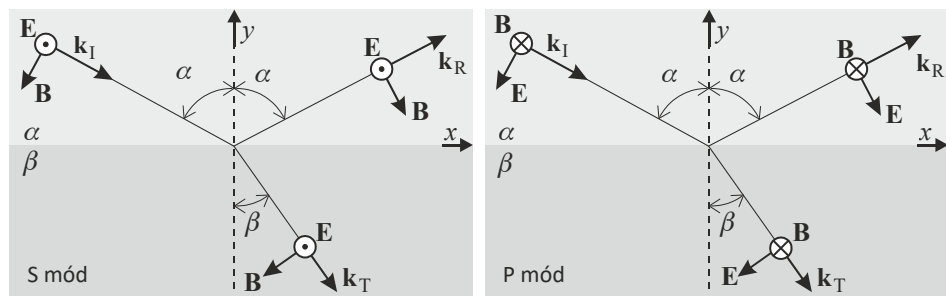
$$\blacktriangleright \quad \alpha = \alpha', \quad (2.258)$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_\alpha}{v_\beta} = \frac{n_\beta}{n_\alpha} \quad (2.259)$$

Index lomu je definován jako podíl rychlosti světla ve vakuu ku rychlosti světla v daném prostředí, tedy platí:

$$n \equiv \frac{c}{v_f} \quad (2.260)$$

Fresnelovy vztahy



Obr. 2.31. K odvození Fresnelových vztahů

Detailnější rozbor chování světla na rozhraní provedl v roce 1823 francouzský inženýr a fyzik Augustin-Jean Fresnel (1788–1827). Byl jedním z prvních, kteří prosazovali vlnovou povahu světla a odmítali Newtonovu korpuskulární teorii původu světla. Odvodíme nyní jeho slavné vztahy pro koeficienty odrazu a propustnosti obou základních polarizací. Směry vektorů (elektrické pole, magnetické pole, vlnový vektor) pro S mód a P mód jsou zakresleny na obrázku. Fresnel zkoumal vlastnosti složek obou polí, které byly rovnoběžné s rozhraním. Elektrické pole \mathbf{E} má tečnou složku spojitou. Magnetické pole má spojitou tečnou složku vektoru \mathbf{H} , pole \mathbf{B} má v tečné složce skok. Budeme ale předpokládat, že obě prostředí mají stejné permeability. To platí pro většinu prostředí

průhledných pro světlo. V takovém případě je spojitá i tečná složka magnetické indukce \mathbf{B} (v prostředí 1 jde samozřejmě vždy o součty složek dopadající a odražené vlny). Tím se situace zjednodušuje a můžeme snadno napsat podmínky spojitosti tečných složek obou polí \mathbf{E} , \mathbf{B} . Pro S mód platí levá část obrázku, spojitost tečných složek obou polí dá rovnice

$$\begin{aligned} E_I + E_R &= E_T, \\ -B_I \cos \alpha + B_R \cos \alpha &= -B_T \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.261)$$

Ze vztahu (2.234) víme, že podíl elektrického pole a magnetické indukce je roven rychlosti šíření vln $E/B = v_f = c/n$. Toho využijeme k vyjádření magnetické indukce

$$\begin{aligned} E_I + E_R &= E_T, \\ -E_I n_\alpha \cos \alpha + E_R n_\alpha \cos \alpha &= -E_T n_\beta \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.262)$$

Z rovnic snadno vypočteme amplitudy odrazivosti E_R/E_I a propustnosti E_T/E_I . Podíl indexů lomu vyjádříme ze Snellova zákona lomu (2.259). Pro polarizaci S vychází:

$$\blacktriangleright \quad r_S \equiv \frac{E_R}{E_I} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (2.263)$$

$$\blacktriangleright \quad t_S \equiv \frac{E_T}{E_I} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (2.264)$$

Zcela obdobně určíme obdobné vztahy pro polarizaci P:

$$\blacktriangleright \quad r_P \equiv \frac{E_R}{E_I} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}, \quad (2.265)$$

$$\blacktriangleright \quad t_P \equiv \frac{E_T}{E_I} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \quad (2.266)$$

Tyto vztahy pro amplitudy odrazivosti a propustnosti v sobě nesou mnoho informací o chování jednotlivých polarizací vlnění. Pokud například vlna dopadá na opticky hustší prostředí (s vyšším indexem lomu), odráží se v protifázi – obě amplitudy odrazivosti jsou záporné, protože $\alpha > \beta$ (tzv. lom ke kolmici). Obdobně se chová vlna v gumové hadici, jejíž jeden konec je upevněn. Postupující vlna se od pevného konce odráží v protifázi.

Někdy potřebujeme znát energetickou bilanci. Tok energie (Poyntingův vektor) je úměrný druhé mocnině polí. U odrazivosti se nemusíme starat o směry (dopadající a odražený paprsek mají zrcadlově symetrický směr vzhledem ke kolmici k rozhraní) a koeficient odrazivosti je druhou mocninou amplitudy odrazivosti

$$R \equiv r^2. \quad (2.267)$$

Amplituda odrazivosti je poměr amplitud polí, *odrazivost (reflektivita)* je poměr energetických toků. U *propustnosti (transmisivity)* je tomu jinak. Paprsek dopadá pod jiným úhlem, než se láme. Proto bychom museli do propustnosti zahrnout i úhlovou závislost: dopadající energie závisí na směru, pod jakým paprsek dopadne, stejně tak jako energie

prošlá do druhého prostředí závisí na úhlu lomu prošlého paprsku. Propustnost můžeme ale snadno určit ze zákona zachování energie: součet odrazivosti a propustnosti musí být roven jedné, proto

$$T = 1 - R. \quad (2.268)$$

Pro odrazivosti a propustnosti obou polarizací proto máme jednoduché vztahy

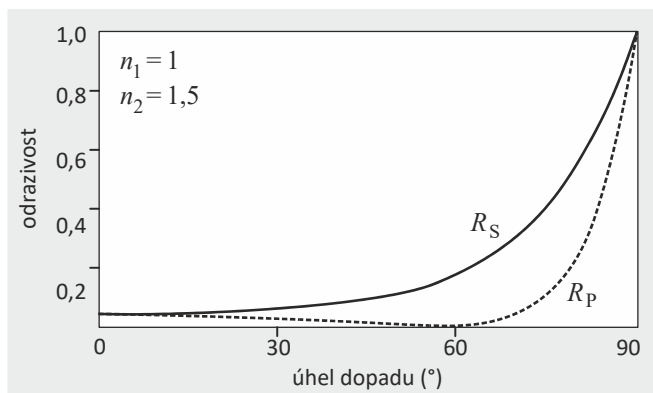
►
$$R_S = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}, \quad (2.269)$$

►
$$R_P = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}, \quad (2.270)$$

►
$$T_S = 1 - R_S, \quad (2.271)$$

►
$$T_P = 1 - R_P. \quad (2.272)$$

Na obrázku jsou vykresleny odrazivosti (reflektivity) pro obě polarizace pro rozhraní vzduchu a skla. Úhel lomu je ve vztazích (2.269) a (2.270) určen ze zákona lomu.



Obr. 2.32: Odrazivost pro rozhraní vzduchu a skla

Brewsterův zákon

Každá z polarizací se při odrazu chová poněkud jinak. Hodnotu pro nulový úhel dopadu musíme určit z výrazu typu 0/0. K tomu využijeme součtový vzorec pro siny a sinus úhlu lomu vyjádříme ze zákona lomu. Odražené světlo má vždy zastoupenou S polarizaci, ale pro určitý úhel dopadu zcela vymizí P polarizace (zelená křivka má nulovou hodnotu). Pokud mělo dopadající světlo smíšenou polarizaci, bude odražené světlo zcela polarizované. Experimentálně tento úhel poprvé určil skotský vynálezce sir David Brewster (1781–1868). Mimo jiné vynalezl kaleidoskop a vylepšil optický mikroskop. Pomocí dvouosých krystalů měřil v letech 1813 až 1814 úhel maximální polarizace a zjistil, že pokud je tangenta úhlu dopadu rovna indexu lomu, je polarizace maximální. My můžeme tento vztah snadno odvodit z Fresnelových vztahů. Ze vztahu (2.270) je jasné, že odrazivost P polarizace je nulová, pokud je součet úhlu dopadu a úhlu lomu právě 90° (tangenta ve jmenovateli diverguje):

$$\alpha + \beta = 90^\circ . \quad (2.273)$$

Ze zákona lomu potom máme

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (90^\circ - \alpha)} = \frac{n_\beta}{n_\alpha} . \quad (2.274)$$

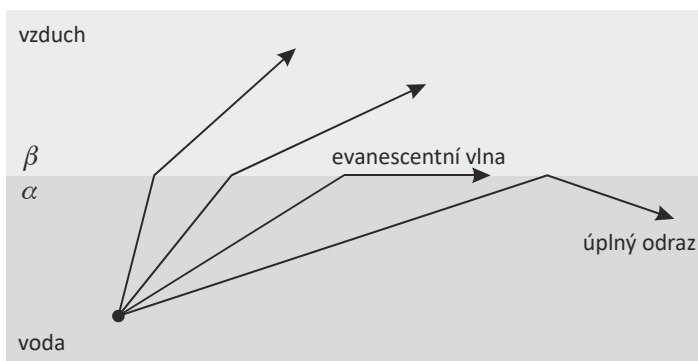
Odsud již snadno odvodíme Brewsterův zákon pro úhel dopadu, při němž zcela vymizí P polarizace dopadajícího světla

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{tg} \alpha_B = n ; \quad n \equiv \frac{n_\beta}{n_\alpha} . \quad (2.275)$$

Světlo odražené od Měsíce nebo vodní hladiny je vždy částečně polarizované. Dopadali pod Brewsterovým úhlem, obsahuje odražené světlo jen S polarizaci.

Úplný odraz (totální reflexe)

Dalším zajímavým jevem je úplný odraz. Nastává při dopadu paprsku na opticky řidší prostředí (například z vody nebo ze skla do vzduchu). Pokud budeme zvětšovat úhel dopadu, bude paprsek lomen stále více od kolmice, až se nakonec bude šířit podél rozhraní. V rozhraní vznikne tzv. *evanescentní vlna*, která je exponenciálně tlumená s rostoucí vzdáleností od rozhraní (vlnový vektor má komplexní složku). Při zkoumání evanescentních vln se ukázalo, že ze zatím neznámých důvodů mají fotony pohybující se podél rozhraní atypickou složku spinu ve směru pohybu. Při ještě větších úhlech už k lomu nedochází. Světlo či elektromagnetická vlna se jen odrazí od rozhraní a zůstane v opticky hustším prostředí. Toho se využívá například ve světelných vláknech.



Obr. 2.33: Úplný odraz na rozhraní dvou prostředí

Pro mezní úhel je úhel lomu roven 90° a ze Snellova zákona máme

$$\blacktriangleright \quad \sin \alpha_M = n ; \quad n \equiv \frac{n_\beta}{n_\alpha} . \quad (2.276)$$

Z Fresnelových vztahů je možné detailně zkoumat poměry v S a P polarizaci při úplném odrazu, ale to už je za hranicí možností tohoto úvodního kurzu.

2.5.6 Raytracing

Velmi zajímavou úlohou je sledování paprsku, který se pohybuje disperzním prostředím s proměnným indexem lomu (v přiblížení geometrické optiky). Existují vytříbené metody jak ze znalosti tenzoru permeability a tenzoru permitivity určit v daném místě směr paprsku a jeho přesun do následujícího místa. Takto pojatá úloha ale předpokládá znalost obou tenzorů. Trasování paprsku lze provést jednoduše i z pouhé znalosti disperzní relace (závislosti úhlové frekvence a vlnového vektoru) pro šíření elektromagnetické vlny. Začneme Hamiltonovými rovnicemi pro kvantum elektromagnetického záření

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.277)$$

Nyní využijeme relace pro částicově-vlnový dualizmus

$$H = \hbar\omega; \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (2.278)$$

a obě relace dosadíme do Hamiltonových rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.279)$$

Nalezené rovnice mohou být použity pro sledování paprsku. Je třeba si ale uvědomit několik základních faktů: 1) čas zde figuruje pouze jako parametr trajektorie paprsku; 2) při provádění numerické simulace dostaneme vždy v daném bodě \mathbf{x} vektor \mathbf{k} , tedy tečnu ke sledovanému paprsku. Po ní se přesuneme do dalšího místa a postup opakujeme; 3) nalezené rovnice pro *ray-tracing* vyžadují explicitní znalost disperzní relace $\omega = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, tedy z disperzní relace musíme umět vyjádřit úhlovou frekvenci, což může být někdy problém; 4) závislost na poloze \mathbf{x} se do disperzní relace dostane prostřednictvím znalosti závislosti koncentrace či vnějšího magnetického (elektrického) pole na poloze v plazmatu. Nejčastěji známe disperzní relaci v implicitním tvaru, tj. neřešenou vzhledem k proměnným ω ani \mathbf{k} :

$$\phi(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (2.280)$$

Nalezněme diferenciál této relace (frekvence ω je fixní, daná frekvencí vyslaného paprsku)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{k}} \cdot d\mathbf{k} = 0. \quad (2.281)$$

Předpokládejme, že trasa paprsku je dána parametricky, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\tau); \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}(\tau). \end{aligned} \quad (2.282)$$

Ze vztahu (2.281) okamžitě máme

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = 0. \quad (2.283)$$

Parametr τ může být libovolný. Toho využijeme a zvolíme ho tak, aby platilo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{k}}; \\ \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} &= -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.284)$$

Touto volbou jednak splníme rovnici (2.283) a jednak získáme nové rovnice pro sledování paprsku, v nichž roli hamiltoniánu zastává funkce ϕ , tedy libovolný implicitní zápis disperzní relace. Na soustavu Hamiltonových rovnic (2.284) lze použít libovolné diferenciální schéma a můžeme pohodlně sledovat průchod paprsku plazmatem.



2.6 Elektromagnetické potenciály

Už ve stacionárním případě jsme viděli, že z nezdrojových rovnic je možné definovat čtveřici potenciálů elektromagnetického pole. Obdobně budeme uvažovat i v případě časově proměnných polí, definici potenciálů jen zobecníme. Před čtením následujícího textu byste se měli seznámit s technikou kovariantních a kontravariantních indexů popsanou v kapitole I.3.3.6 prvního dílu „Vybraných kapitol“.

2.6.1 Definice potenciálů

Vyjdeme z nezdrojové části Maxwellových rovnic:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (2.285)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.286)$$

Z první rovnice stejně jako ve stacionárním případě plyne existence funkce $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$, že

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.287)$$

Pole \mathbf{A} nazýváme vektorový potenciál, jeho zavedením je Maxwellova rovnice (2.285) automaticky splněna, neboť $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$. Nyní se věnujme druhé rovnici (2.286), do níž za \mathbf{B} dosadíme z definice vektorového potenciálu (2.287):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Předpokládáme, že jde o dvakrát spojitě diferencovatelné funkce, a mohli jsme proto zaměnit pořadí druhých derivací. Má-li být rotace nějakého pole nulová, tj. $\operatorname{rot} \mathbf{K} = 0$, potom lze tuto rovnici automaticky splnit volbou $\mathbf{K} = \operatorname{grad} f$, neboť rotace z gradientu je vždy nulová. Můžeme tedy psát

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi.$$

Znaménko minus je, stejně jako ve stacionárním případě, voleno proto, aby síly mířily do minima potenciální energie. Vztah pro elektrické pole tedy bude mít tvar

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.288)$$

Jde o zobecnění stacionárního vztahu (2.86). V případě proměnných polí je elektrické pole generováno i časovými změnami potenciálu \mathbf{A} . Potenciály nejsou určeny jednoznačně, v jejich volbě je značná libovůle. Velké množství potenciálů vede na stejná elektrická a magnetická pole. Touto libovůlí se budeme zabývat v kapitole *Kalibrační vlastnosti potenciálů*. V kapitole 3.1 věnované speciální relativitě uvidíme, že potenciály tvoří relativistický čtyřvektor

$$\blacktriangleright \quad A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; \quad A_\mu \equiv \begin{pmatrix} -\phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; \quad (2.289)$$

Detaily zavedení čtyřvektorů naleznete v kapitole I.3.3.6 prvního dílu „Vybraných kapitol“ a samozřejmě také v kapitole 3.1 věnované speciální relativitě. Zde připomeňme jen, že se horní indexy transformují Lorentzovou maticí, dolní inverzní Lorentzovou maticí. Čtyřgradient $\partial/\partial x^\mu$ má složky události ve jmenovateli, proto se netransformuje Lorentzovou maticí, ale maticí k ní inverzní a výsledný index operace musí být dole, tj. $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ (viz I.3.3.6), proto platí:

$$\blacktriangleright \quad \partial_\mu \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial ct \\ \nabla \end{pmatrix}; \quad \partial^\mu \equiv \begin{pmatrix} -\partial/\partial ct \\ \nabla \end{pmatrix}. \quad (2.290)$$

Tabulka potenciálů

V následující tabulce jsou potenciály, které za pomoci vztahů (2.288), (2.287) vedou na pole uvedená v pravém sloupci.

ZDROJ	POTENCIÁL	POLE
homogenní \mathbf{E}	$\phi = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$	$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$
homogenní \mathbf{B}	$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$	$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$
bodový náboj	$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$
mg. monopól	\mathbf{A} nelze nalézt na celém \mathcal{R}^3	$\mathbf{B} = \frac{Q_M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$
elektrický dipól	$\phi = \frac{\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_E}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$
magnetický dipól	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_M \times \mathbf{r}}{r^3}$	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_M}{r^3}; \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$

2.6.2 Potenciály a tenzor elektromagnetického pole

Elektromagnetické pole je derivacemi potenciálů, oba vztahy (2.287) a (2.288) lze jednoduše zapsat za pomoci tenzoru elektromagnetického pole (viz také I.1.6.3)

$$\blacktriangleright \quad F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.291)$$

Jde o antisymetrický tenzor druhého řádu, který má jen šest nezávislých složek (těmi je trojice složek elektrického a trojice složek magnetického pole). Složky pole lze snadno odečíst z příslušných pozic tenzoru.

Kalibrační volnost potenciálů

Potenciály nejsou určeny jednoznačně, dvěma různými potenciálům může odpovídat stejné elektromagnetické pole. Pokud zavedeme nové, přetransformované potenciály za pomoci tzv. *gradientní transformace*

$$\blacktriangleright \quad \tilde{A}^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu f, \quad (2.292)$$

kde f je zcela libovolná dvakrát spojitě diferencovatelná funkce, pole se nezmění:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}. \quad (2.293)$$

Gradientní transformaci (2.292) potenciálů lze psát i odděleně jako

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} \tilde{\phi} &= \phi - \frac{\partial f}{\partial t}, \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} + \nabla f. \end{aligned} \quad (2.294)$$

Uvedená transformace nezmění hodnoty polí, funkce f může být libovolná. Této libovůle v potenciálech lze s výhodou využít při konstrukci co nejjednodušší varianty Maxwellových rovnic v potenciálech. Maxwellovy rovnice (2.285) a (2.286) jsme využili k zavedení potenciálů elektromagnetického pole.

2.6.3 Maxwellovy rovnice v potenciálech

Zbývající dvě rovnice se zdrojovými členy můžeme za pomoci tenzoru elektromagnetického pole snadno přepsat do tvaru

$$\blacktriangleright \quad F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad (2.295)$$

kde čtyřvektor J^μ prezentuje zdroje elektrických a magnetických polí, indexy za čárkou označují příslušné derivace, např. $A_{\alpha,\beta}$ znamená $\partial_\beta A_\alpha$. Tento tvar Maxwellových rovnic je zjevně relativistický. Přepíšme Maxwellovy rovnice ve tvaru (2.295) za pomoci potenciálů:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= \mu_0 J^\mu; \\ \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \mu_0 J^\mu; \\ \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu &= \mu_0 J^\mu. \end{aligned} \quad (2.296)$$

Druhý člen na levé straně je d'Alambertův vlnový operátor aplikovaný na čtyřpotenciál pole, pravá strana zjevně prezentuje zdroje polí. Jedinou „vadou na kráse“ rovnic zapsaných v potenciálech je první člen. Zde využijeme velké libovůle v potenciálech dané kalibrační transformací. Předpokládejme, že veličina $\partial_\nu A^\nu$ je rovna nějaké funkci času a prostoru $F(t, \mathbf{x})$:

$$\partial_\nu A^\nu = F(t, \mathbf{x})$$

a zvolme za pomoci gradientní transformace (2.292) jiný čtyřpotenciál, pro který budeme požadovat, aby

$$\partial_\nu \tilde{A}^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu A^\nu + \partial_\nu \partial^\nu f = 0 \quad \Rightarrow \quad F(t, \mathbf{x}) + \square f = 0.$$

Taková gradientní transformace bude vždy existovat. Funkci f , která generuje transformaci, stačí volit tak, aby splňovala rovnici

$$\square f = -F(t, \mathbf{x}). \quad (2.297)$$

V nových potenciálech je první člen v rovnici (2.296) nulový a Maxwellovy rovnice získají jednoduchý tvar

$$\square \tilde{A}^\mu = -\mu_0 J^\mu; \quad (2.298)$$

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0. \quad (2.299)$$

Jde o vlnové rovnice pro čtyřpotenciál A^μ , u kterých jsou zdrojovými členy složky čtyřvektoru J^μ . Rovnice jsou doplněny Lorenzovou kalibrační podmínkou (2.299). V dalším textu budeme samozřejmě vlnky vynechávat:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & \square A^\mu = -\mu_0 J^\mu; \\ & \partial_\mu A^\mu = 0. \end{aligned} \quad (2.300)$$

Uvedené rovnice můžeme rozepsat odděleně pro časovou a pro prostorové složky:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & \square \phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}; \\ & \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}_Q; \\ & \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \end{aligned} \quad (2.301)$$

V případě stacionárních dějů se D'Alambertův operátor změní na Laplaceův a rovnice dají Poissonovy rovnice elektrostatiky a magnetostatiky včetně Lorenzovy kalibrační podmínky.

Lagrangeova funkce elektromagnetického pole

V teoretické mechanice je ústřední veličinou Lagrangeova funkce. Pro polní problematiku jde o hustotu Lagrangeovy funkce. K Maxwellovým rovnicím se zdrojovými členy vede hustota Lagrangeovy funkce (viz kapitola I.1.6.3 v prvním dílu „Vybraných kapitol“)

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{L} = J_\mu A^\mu - \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.302)$$

První člen popisuje interakci částic s polem, druhý pole samotné. Bez prvního členu bychom dostali Maxwellovy rovnice ve vakuu.

V klasické elektrodynamice můžeme používat jak pole, tak potenciály. Obě varianty jsou ekvivalentní. V kvantové teorii, kde je pravděpodobnost dějů závislá na integrálu akce, tedy na potenciálech a jejich derivacích obsažených v Lagrangeově funkci (2.302), jsou primární potenciály. Částice interaguje s elektromagnetickým polem i v oblasti, kde je pole nulové, ale potenciály jsou nenulové. Poprvé to prokázal známý Aharonův-Bohmův experiment (viz kapitola I.2.6.4 v prvním díle „Vybraných kapitol“).

2.6.4 Potenciály ve volném prostoru

Ukázali jsme, že libovůle potenciálů lze využít k tomu, aby Lorenzova kalibrační podmínka byla splněna. Dokonce ani požadavek na její splnění neurčuje potenciály jednoznačně! Z rovnice (2.297) je zřejmé, že funkce f není určena jednoznačně a lze k ní přičíst jakékoli řešení vlnové rovnice

$$\square f_0 = 0. \quad (2.303)$$

Proto je možná ještě další gradientní transformace

$$\tilde{A}^\mu = \tilde{A}^\mu + \partial^\mu f_0,$$

kteřou lze využít například k vynulování skalárního potenciálu ve volném prostoru bez nábojů a proudů. Pro potenciál ϕ bude možná transformace

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial f_0}{\partial t}. \quad (2.304)$$

Je jasné, že nový skalární potenciál bude nulový, pokud původní potenciál půjde napsat jako

$$\phi = \frac{\partial f_0}{\partial t}. \quad (2.305)$$

Takový potenciál ale splňuje vlnovou rovnici s nulovou pravou stranou:

$$\square \tilde{\phi} = \square \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \square f_0 = \frac{\partial}{\partial t} 0 = 0, \quad (2.306)$$

což je rovnice pro původní potenciál bez zdrojového členu, tedy v prázdném prostoru. Proto taková transformace vždy existuje a ve volném prostoru můžeme jakékoli elektromagnetické pole popsat pouze vektorovým potenciálem (vlnky už nebudeme psát):

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.307)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2.308)$$

2.6.5 Retardované a advanceované potenciály

V elektrostatice a magnetostatice jsme z Poissonových rovnic pro potenciály našli řešení

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}; \quad (2.309)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.310)$$

V elektrodynamice je Laplaceův operátor nahrazen D'Alambertovým a máme rovnice

$$\begin{aligned} \square\phi &= -\frac{\rho_Q}{\varepsilon_0}; & \square\mathbf{A} &= -\mu_0\mathbf{j}_Q; \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} &= 0. \end{aligned} \quad (2.311)$$

Tyto rovnice započítávají konečnou dobu šíření informace a mají řešení

$$\blacktriangleright \quad \phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t - \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}; \quad (2.312)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t - \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.313)$$

Potenciály se počítají v retardovaném čase, tedy čase pozorovatele, od něhož je odečtena doba šíření signálu ze zdroje:

$$\blacktriangleright \quad \Delta t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / c. \quad (2.314)$$

Získané potenciály nazýváme *retardované* (zpožděné). Jejich hodnota se počítá z rozložení nábojů v kuželu minulosti pozorovatele. Toto není ale jediné řešení vlnových rovnic (2.311). Samotná vlnová rovnice se totiž nezmění při záměně $c \rightarrow -c$, proto ji podle (2.314) splňují i řešení

$$\phi_+(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t + \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.315)$$

$$\mathbf{A}_+(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t + \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.316)$$

Takové řešení je nefyzikální, přichází jakoby z budoucnosti, tedy záleží na rozložení nábojů v kuželu budoucnosti pozorovatele a nesplňuje princip kauzality (příčina musí předcházet ve všech souřadnicových soustavách důsledkem). Řešení nazýváme *advanceované* (někdy se používá slovo *avanceované*). Obě řešení můžeme (fyzikální i nefyzikální) souhrnně zapsat jedinou formulí

$$\blacktriangleright \quad \phi_{\pm}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t \pm \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.317)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}_{\pm}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t \pm \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.318)$$

Obdobně lze zapsat řešení Maxwellových rovnic pro celý čtyřpotenciál

$$\blacktriangleright \quad A_{\pm}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^{\alpha}(t \pm \Delta t, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.319)$$

Advanceovaná řešení mají význam v kvantové teorii, uplatňují se ale formálně i v klasické elektrodynamice při popisu záření. Přímým derivováním lze ukázat, že nalezené potenciály splňují Lorenzovu kalibrační podmínku. Potenciály jsme spočetli pro pozorovatele v místě \mathbf{r} . Náboje jsou lokalizovány v místech \mathbf{r}' , přes která integrujeme. Dosti daleko od zdrojů je možné provést klasický multipólový rozvoj a určit zářivá pole generovaná pohybujícími se částicemi. Pokud nás zajímá reakce částice na její vlastní pole, musíme postupovat opačně a zjistit pole generované v těsné blízkosti sledované částice.



2.7 Záření nabitých částic

Zatím jsme se zabývali multipólovým rozvojem skalárního a vektorového potenciálu ve stacionárním případě. Přineslo nám to definice dipólových momentů, elektrického kvadrupólu atd. Nyní máme potenciály součástí jediného čtyřvektoru a u elektromagnetických vln jsme samozřejmě museli opustit stacionární přístup. Je tedy na čase provést multipólový rozvoj v nestacionárním případě, který nám umožní pochopit základní mechanismy vyzařování nabitých částic.

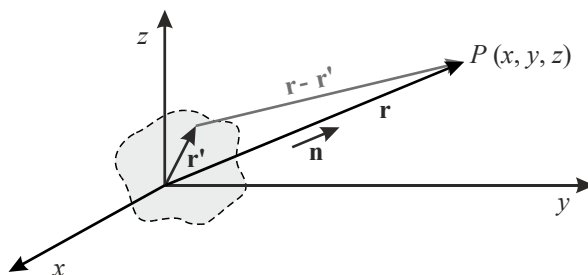
2.7.1 Zářivý multipólový rozvoj

Uvažujme nyní časově proměnné zdroje potenciálů

$$A^\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^\alpha(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'; \quad (2.320)$$

$$t' \equiv t - \Delta t = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c}. \quad (2.321)$$

Situace je v tomto případě o něco složitější. Jednak není retardovaný čas určen explicitně, ale je zadán implicitní formulí (2.321), jednak se bude muset provést Taylorův rozvoj jak ve jmenovateli, tak v čitateli, a poté vybrat zářivé členy. Ty ubývají se vzdáleností jako $1/r$, kde r je vzdálenost pozorovatele od počátku souřadnicové soustavy, který je lokalizován v oblasti zdrojů. Uvažujeme jen pole, které je schopné odnést energii do libovolné vzdálenosti od zdroje, tedy integrace Poyntingova vektoru $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, který je tokem energie, přes prostorový úhel $r^2 d\Omega$ musí dát v jakékoli vzdálenosti konečný příspěvek. Tento fakt úlohu naopak zjednodušuje, neboť z rozvoje potenciálů i polí postačí vybírat jen členy ubývající jako $1/r$.



Obr. 2.34: Lokalizovaný zdroj záření a vzdálený pozorovatel

Rozvoj jmenovatele jsme prováděli i ve stacionárním případě, viz (2.120), pro účely teorie záření postačí vzít jen první člen, ostatní ubývají rychleji než $1/r$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}. \quad (2.322)$$

V argumentu čtyřtoku bude třeba rozvinout retardovaný čas pro pozorovatele nacházejícího se ve velké vzdálenosti od zdroje

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} = t - \frac{r}{c} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{r}{c} \right) (-x'_k) + \dots = t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{x_k}{r} x'_k + \dots = t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} + \dots$$

Získaný výsledek je celkem pochopitelný. První člen je čas pozorovatele, druhý člen je retardovaný čas vzhledem k počátku (společný všem zdrojům) a poslední člen představuje jemné nuance retardace pro jednotlivé elementy zdroje pole. Zapišme ho přehledně:

$$t' \approx \tau + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}; \quad (2.323)$$

$$\tau \equiv t - r/c. \quad (2.324)$$

Symbolem τ jsme označili společný retardovaný čas vzhledem k počátku, symbolem \mathbf{n} normálový vektor ke vzdálené integrační ploše (jednotkový vektor spojnice počátku soustavy s pozorovatelem), $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Samozřejmě jsme se nezbavili implicitní závislosti, vektor \mathbf{r}' je opět vyjádřen v retardovaném čase. Uvážíme-li rozvoje (2.322) a (2.323), přejde vztah (2.320) pro čtyřpotenciál do tvaru

$$A^\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int J^\alpha(\tau + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'/c, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (2.325)$$

Nyní rozvineme čtyřtok v čase τ a přírůstku $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'$.

$$A^\alpha(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int J^\alpha(\tau, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \frac{\partial J^\alpha}{\partial \tau} \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) d^3 \mathbf{r}' + \dots \quad (2.326)$$

Skalární potenciál můžeme ve volném prostoru volit nulový a radiační pole počítat ze vztahů

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{rad}}}{\partial t}, \quad (2.327)$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = \text{rot } \mathbf{A}_{\text{rad}}. \quad (2.328)$$

Ve vztahu (2.326) se budeme tedy nadále zabývat jen prostorovou částí a navíc vytkneme derivaci podle společného retardovaného času τ před integraci:

$$\mathbf{A}(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}_Q(\tau, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial \tau} \int \mathbf{j}_Q(\tau, \mathbf{r}') \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) d^3 \mathbf{r}' + \dots \quad (2.329)$$

V dalším uvidíme, že první člen popisuje elektrické dipólové záření a druhý člen magnetické dipólové a elektrické kvadrupólové záření. Provedme nyní integraci pro soustavu nabitých částic lokalizovaných v okolí počátku, pro něž je

$$\mathbf{j}_Q(\tau, \mathbf{r}') = \sum_a Q_a \mathbf{v}_a(\tau) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a). \quad (2.330)$$

Ihned dostaneme

$$\mathbf{A}(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_a (Q_a \mathbf{v}_a) + \frac{\mu_0}{4\pi r c} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_a Q_a \mathbf{v}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a) + \dots \quad (2.331)$$

V prvním členu vytkneme před sumu časovou derivaci (vše je nyní ve společném retar-dovaném čase τ), v druhém členu provedeme symetrizaci (2.167) – nyní ale nebude časová derivace symetrické části nulová jako ve stacionárním případě:

$$\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}^{(E1)} + \mathbf{A}^{(M1)} + \mathbf{A}^{(E2)} + \dots; \quad (2.332)$$

$$\mathbf{A}^{(E1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a, \quad (2.333)$$

$$\mathbf{A}^{(M1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \times \mathbf{n}, \quad (2.334)$$

$$\mathbf{A}^{(E2)} = \frac{\mu_0}{8\pi r c} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a). \quad (2.335)$$

Všechny tři zářivé potenciály lze přepsat za pomoci veličin zavedených při stacionárním rozvoji. V prvním se vyskytuje elektrický dipólový moment, ve druhém magnetický dipólový moment, jedině třetí potenciál bude třeba ještě upravit. Z předchozího víme – viz (2.292) –, že potenciál můžeme změnit o gradient libovolné funkce

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}). \quad (2.336)$$

Volme pouze funkci vzdálenosti, pak bude transformace k novému potenciálu vypadat

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.337)$$

a potenciál $\mathbf{A}^{(E2)}$ snadno změníme do tvaru s elektrickým kvadrupólovým momentem

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(E2)} &= \frac{\mu_0}{8\pi r c} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{3} \sum_a 3Q_a \mathbf{r}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\mu_0}{24\pi r c} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \left[3\mathbf{r}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a) - r_a^2 \mathbf{n} \right]. \end{aligned} \quad (2.338)$$

Výsledné vztahy pro zářivé potenciály tedy jsou (vše je vyjádřeno ve společném retar-dovaném čase τ , časové derivace jsou také podle τ)

►
$$\mathbf{A}^{(E1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}_E, \quad (2.339)$$

►
$$\mathbf{A}^{(M1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \dot{\mathbf{p}}_M \times \mathbf{n}, \quad (2.340)$$

►
$$\mathbf{A}^{(E2)} = \frac{\mu_0}{24\pi r c} \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.341)$$

V posledním výrazu jde o zúžení tenzoru $\ddot{\mathbf{Q}}$ a vektoru \mathbf{n} .

2.7.2 Elektrické dipólové záření

Určeme nyní elektrické a magnetické pole pro potenciál ve tvaru (2.339). Nesmíme zapomenout, že společný retardační čas je také funkcí r (pevná poloha pozorovatele), a proto platí

$$\tau = t - r/c \quad \Rightarrow \quad (2.342)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = -\frac{1}{c} \frac{x_k}{r}. \quad (2.343)$$

Nyní přistoupíme k samotnému výpočtu elektrického a magnetického pole. Při derivování budeme vybírat jen zářivé členy s radiální závislostí $1/r$, vyšší mocniny zanedbáme. Takto konstruovaná radiální pole budeme značit psacími symboly:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}^{(E1)}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}^{(E1)}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}_E; \\ \mathcal{B}_k &= \left(\text{rot } \mathbf{A}^{(E1)} \right)_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\dot{p}_m}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{klm} \frac{\frac{\partial \dot{p}_m}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_l} r - \dot{p}_m \frac{\partial r}{\partial x_l}}{r^2}. \end{aligned}$$

Druhý člen se chová jako $1/r^2$, není radiální a vynecháme ho:

$$\mathcal{B}_k = \frac{\mu_0}{4\pi r} \varepsilon_{klm} \ddot{p}_m \left(-\frac{1}{c} \frac{x_l}{r} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi c r} (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}_E)_k.$$

Výsledek tedy je:

►
$$\mathcal{E}^{(E1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}_E; \quad (2.344)$$

►
$$\mathcal{B}^{(E1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi c r} (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}_E) = \frac{1}{c} (\mathbf{n} \times \mathcal{E}^{(E1)}). \quad (2.345)$$

Je patrné, že dosti daleko od zdroje má elektromagnetické pole charakter rovinné vlnoplochy. V blízkosti zdroje (dipólu) by pole bylo mnohem komplikovanější. Nalezené řešení platí jen v tzv. radiální zóně. Při výpočtu pole všech typů záření postačí v radiální zóně spočítat jen elektrické pole a magnetické pole dopočíst ze vztahu pro rovinnou vlnoplochu (je to rychlejší než pomocí rotace vektorového potenciálu)

►
$$\mathcal{B} = \frac{1}{c} (\mathbf{n} \times \mathcal{E}). \quad (2.346)$$

Pro zářivá pole nyní určíme tok energie (Poyntingův vektor). Zůstanou v něm jen členy úměrné $1/r^2$:

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E} \times (\mathbf{n} \times \mathcal{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} \left[\mathcal{E}^2 \mathbf{n} - (\mathcal{E} \cdot \mathbf{n}) \mathcal{E} \right] \quad (2.347)$$

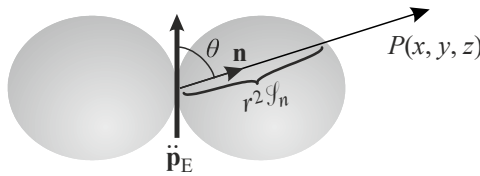
Nás bude zajímat projekce Poyntingova vektoru do směru od nábojů k nám (radiální tok energie, intenzita), tj.

$$\mathcal{J}_n = \mathcal{J} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu_0 c} \left[\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E} \cdot \mathbf{n})^2 \right] = \frac{1}{\mu_0 c} \left[\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^2 \cos^2 \theta \right] = \frac{\mathcal{E}^2}{\mu_0 c} \sin^2 \theta. \quad (2.348)$$

Nyní do radiálního toku energie dosadíme za elektrické pole z (2.344) a převedeme permeabilitu na permitivitu pomocí vztahu $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$. Dostaneme radiální tok energie

$$\mathcal{J}_n = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta; \quad \theta = \sphericalangle(\mathcal{E}, \mathbf{n}) = \sphericalangle(\ddot{\mathbf{p}}_E, \mathbf{n}), \quad [\mathcal{J}_n] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad (2.349)$$

v němž θ je úhel mezi vzdáleným elektrickým polem (druhou časovou derivací \mathbf{p}_E) a směrem k pozorovateli. Nejintenzivněji proto částice září ve směru kolmém na druhou časovou derivaci elektrického dipólového momentu (u jedné částice jde o směr kolmý na zrychlení)



Obr. 2.35: Elektrické dipólové záření

Element výkonu vyzářený do prostorového úhlu je

$$d\mathcal{P} = \mathcal{J} d\mathbf{S} = (\mathcal{J} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathcal{J}_n dS = \mathcal{J}_n r^2 d\Omega. \quad (2.350)$$

Po dosazení z (2.349) získáme Larmorovu diferenciální formuli

$$\blacktriangleright \quad d\mathcal{P} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} d\Omega. \quad (2.351)$$

Celkový vyzářený výkon získáme integrací

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} d\Omega = \\ &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int \sin^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta = \\ &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{8\pi \varepsilon_0 c^3} \int_1^{-1} (1 - \xi^2)(-d\xi) = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{8\pi \varepsilon_0 c^3} \left[\xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}; \quad [\mathcal{P}] = \text{W}. \quad (2.352)$$

Z Larmorovy formule (2.352) plyne několik zajímavých důsledků:

- 1) Pokud se částice pohybují se zrychlením, tak září, protože

$$\ddot{\mathbf{p}}_E = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a = \sum_a Q_a \ddot{\mathbf{r}}_a. \quad (2.353)$$

- 2) Pokud jde o izolovanou soustavu stejných nábojů ($Q_a = q$) lokalizovaných v jedné oblasti (kolem počátku našich souřadnic), tak nezáří, protože druhá časová derivace elektrického dipólového momentu bude úměrná součtu všech vnitřních sil, který je v izolované soustavě nulový:

$$\ddot{\mathbf{p}}_E = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a = \frac{q}{m} \sum_a m \ddot{\mathbf{r}}_a = \frac{q}{m} \sum_a \mathbf{F}_a = 0. \quad (2.354)$$

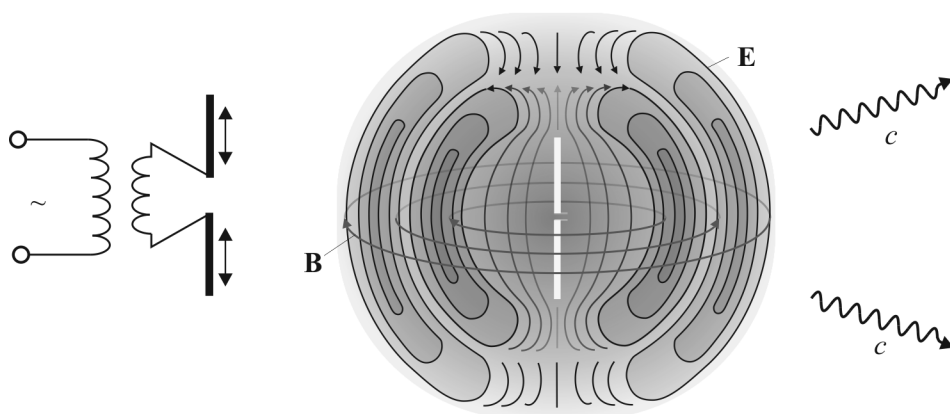
- 3) Nejjednodušší realizací elektrického dipólového záření je tzv. *Hertzův dipól*. Jde o otevřený lineární prvek protékající střídavým proudem (napájený například indukčně z nějakého střídavého obvodu). Úvaha 2) nyní neplatí, nejde o izolovanou soustavu. Elektrické náboje putují v tomto prvku sem a tam, což vede na jednoduchý vztah pro elektrický dipólový moment

$$\mathbf{p}_E = p_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_3. \quad (2.355)$$

Uvážíme-li, že střední hodnota druhé mocniny kosinu je $\frac{1}{2}$, dostaneme ze vztahu (2.352) pro střední výkon

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (2.356)$$

I nepatrné zvýšení frekvence s sebou přinese velké zvýšení vyzařovaného výkonu.



Obr. 2.36: Hertzův dipól. Nalevo: jednoduchá realizace. Napravo: blízká pole v okolí Hertzova dipólu. Zobrazeny jsou dvě vlnové délky odpovídající dvěma překlopením dipólu. Námí odvozené vztahy platí až ve velké vzdálenosti od dipólu. Zdroj: Averse/Wikipedia,

2.7.3 Thomsonův rozptyl

Prozkoumejme nyní záření volného elektronu, na který dopadá elektromagnetická vlna s nízkou energií (rozptyl elektronu na elektromagnetickém záření). Elektrická složka vlnění bude na elektron působit silou $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ a udělí mu zrychlení

$$\ddot{\mathbf{r}}_e = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}. \quad (2.357)$$

Působení magnetického pole jsme zanedbali, protože se pohybujeme v nízkoenergetické limitě, kde platí $v \ll c$. Výsledkem bude nenulový elektrický dipólový moment, jehož druhá časová derivace bude

$$\ddot{\mathbf{p}}_E = -e\ddot{\mathbf{r}}_e = \frac{e^2}{m_e} \mathbf{E}. \quad (2.358)$$

Volný elektron začne kmitat ve shodě s příchozí vlnou, získá nenulové periodické zrychlení a začne sám zářit. Jím vyzařovaný výkon určíme z Larmorovy formule (2.351), do které dosadíme za druhou časovou derivaci elektrického dipólového momentu ze vztahu (2.358):

$$d\mathcal{P}_{\text{out}} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega = \frac{e^4 E^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (2.359)$$

Pravděpodobnost rozptylu bude dána podílem odcházející a přicházející energie. Pokud budeme reprezentovat odcházející energii Larmorovým výkonem (2.359) a přicházející energii Poyntingovým vektorem dopadající vlny (využijeme, že $E/B = c$)

$$\mathcal{I}_{\text{in}} = EH = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0}, \quad (2.360)$$

bude jejich podíl

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{out}}}{\mathcal{I}_{\text{in}}} = \frac{dW/dt}{dW/(dt dS)} = dS = d\sigma \quad (2.361)$$

roven elementu plochy, kterou je elektron schopen přijímat dopadající záření, což je efektivní účinný průřez. Pro účinný průřez rozptylu elektronu na elektromagnetické vlně proto máme

$$d\sigma = \frac{d\mathcal{P}_{\text{out}}}{\mathcal{I}_{\text{in}}} = \frac{\frac{e^4 E^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega}{\frac{E^2}{c\mu_0}} = \frac{e^4 c\mu_0}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (2.362)$$

Permeabilitu převedeme na permitivitu a získáme výsledný diferenciální účinný průřez

►
$$d\sigma = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (2.363)$$

Celkový účinný průřez získáme integrací přes prostorový úhel

$$\blacktriangleright \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2}. \quad (2.364)$$

Celkový účinný průřez rozptylu elektromagnetického záření na elektronu je dán univerzální konstantou, kterou bývá z historických důvodů zvykem zapisovat pomocí tzv. klasického poloměru elektronu, za něhož považujeme takový rozměr, při němž elektrostatické pole generuje klidovou hmotnost elektronu:

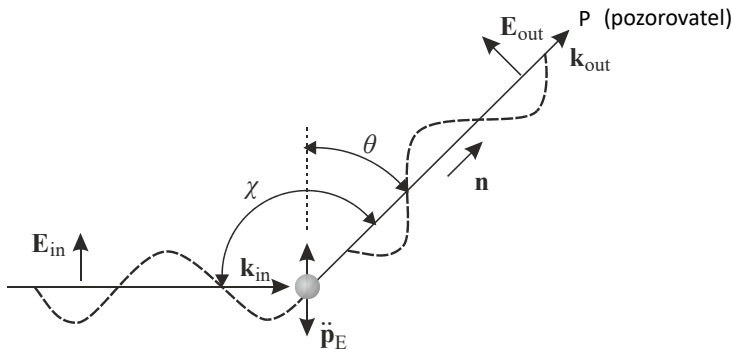
$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_e} = m_e c^2 \quad \Rightarrow \quad a_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}; \quad a_e \approx 2.8 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (2.365)$$

Účinný průřez v tomto zápisu vyjde jako malý násobek průřezu elektronu reprezentovaného klasickým poloměrem elektronu:

$$\blacktriangleright \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{8}{3} \pi a_e^2; \quad \sigma_{\text{tot}} \approx 6.7 \times 10^{-29} \text{ m}^2. \quad (2.366)$$

Poznámka 1: Provedený výpočet je nerelativistický a platí jen pro nízké energie záření. Výsledkem je stejná frekvence dopadající vlny i vlny generované elektronem. Účinný průřez navíc na frekvenci nezávisí. Pro vysoké energie bychom museli vzít v úvahu zákony zachování energie a hybnosti dané relativistickou čtyřhybností. Foton změní směr pohybu, tím se změní jeho hybnost a samozřejmě tedy i energie (tj. i frekvence), která je s hybností provázána přes velikost čtyřvektoru hybnosti. Výsledkem dopadu fotonu s vysokou energií bude rozptyl fotonu na elektronu, který povede ke změně jeho frekvence. V tomto případě hovoříme o Comptonově jevu. Thomsonův rozptyl je jeho limitou při nízkých energiích.

Poznámka 2: Dopadající vlnu rozptýlí elektron současně do různých směrů dle formule (2.363). Pokud budeme pozorovat jednu konkrétní rozptýlenou vlnu ve směru θ , rovina polarizace se nezmění. Elektrické pole bude samozřejmě kolmé na nový směr šíření. Úhel rozptylu je v obrázku označen χ .



Obr. 2.37: Thomsonův rozptyl – dopadající a rozptýlená vlna

2.7.4 Rayleighův rozptyl

Thomsonův rozptylů se týká volných elektronů. Elektronů jsou ale často vázané – buď v atomárních obalech, v molekulách nebo na malých částicích prachu. Takový elektron také reaguje na elektrické pole dopadající vlny, ale má určitou vlastní frekvenci ω_0 , na které se přirozeným způsobem může rozkmitat v hostitelském systému a přirozený útlum δ těchto kmitů, který může být způsoben například vlastním vyzařováním elektronu. Pohybová rovnice bude mít nyní namísto (2.357) o něco málo složitější tvar:

$$\ddot{\mathbf{r}}_e + 2\delta\dot{\mathbf{r}}_e + \omega_0^2\mathbf{r}_e = -\frac{e}{m_e}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.367)$$

Jde o vynucené kmity, známou úlohu z klasické mechaniky. Budící pole \mathbf{E} má frekvenci ω . Píšeme ho v exponenciální tvaru, který je snadno možné derivovat. Skutečné řešení pro $\mathbf{r}(t)$ je potom reálnou částí nalezeného řešení, které je součtem homogenního a partikulárního řešení. Homogenní řešení představuje tlumené kmity na vlastní frekvenci, tedy z dlouhodobého hlediska jde o přechodový jev, který nás nezajímá. Partikulární řešení má tvar

$$\mathbf{r}_e(t) = A\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}; \quad A = \frac{-e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)}. \quad (2.368)$$

Amplituda je obecně komplexní číslo, které lze zapsat v goniometrickém tvaru

$$A = |A|e^{i\varphi}; \quad |A| = \frac{e/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \quad (2.369)$$

Skutečné kmity elektronu budou reálnou částí nalezeného řešení, tj.

$$\mathbf{r}_e(t) = |A|\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{e\mathbf{E}_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.370)$$

Druhá derivace elektrického dipólového momentu $\mathbf{p}_e = -e\mathbf{r}_e$ bude

$$\ddot{\mathbf{p}}_e(t) = \frac{e^2\omega^2\mathbf{E}_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.371)$$

Dále už je postup zcela identický s odvozením Thomsonova účinného průřezu. Jediným rozdílem je středování druhé mocniny kosinu přes periodu, které dá

$$\langle \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle_T = 1/2. \quad (2.372)$$

Pro vyžárený výkon dostaneme

$$d\mathcal{P}_{\text{out}} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega = \frac{e^4 \omega^4 E_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 m_e^2 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2)} \sin^2 \theta d\Omega \quad (2.373)$$

U dopadajícího výkonu opět vystředujeme přes periodu:

$$\mathcal{J}_{\text{in}} = \langle EH \rangle = \langle EB/\mu_0 \rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}. \quad (2.374)$$

Hledaný diferenciální účinný průřez je podílem obou posledních veličin, viz (2.361), tj.

$$\blacktriangleright \quad d\sigma = \frac{e^4 \omega^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^4 m_e^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right)} \sin^2 \theta \, d\Omega \quad (2.375)$$

U Thomsonova rozptylu jsme středování neprováděli, protože generovaná i dopadající vlna byly ve fázi, takže se časové závislosti zkrátily. Po přeintegrování přes prostorovou závislost dostaneme celkový účinný průřez

$$\blacktriangleright \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{e^4 \omega^4}{6\pi \varepsilon_0^2 c^4 m_e^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right)}. \quad (2.376)$$

Povšimněte si, že pro volný elektron, tj. $\omega_0 = 0$, $\delta = 0$, přejdou obě formule ve vztahy (2.363) a (2.364) pro Thomsonův rozptyl. Pro nízké frekvence $\omega \ll \omega_0$ (to platí například pro elektrony vázané v atomech a molekulách a pro frekvenci světla dopadajícího ze Slunce) vyjde

$$\blacktriangleright \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{e^4}{6\pi \varepsilon_0^2 c^4 m_e^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4. \quad (2.377)$$

Jde o známou Rayleighovu formuli pro rozptyl slunečního světla na atmosféře. Účinný průřez klesá se čtvrtou mocninou vlnové délky. Modrá barva je rozptylována mnohem účinněji než červená. To je důvodem modré barvy oblohy. Rozptyl je pojmenován po anglickém fyzikovi Johnu Williamu Struttovi (1842–1919), který byl za své výzkumy povýšen do šlechtického stavu a stal se lordem Rayleighem.

2.7.5 Brzdné záření elektronů na iontech

Ocitne-li se elektron v poli těžkého Z násobně ionizovaného iontu, dojde k elastické srážce, při níž se změní směr pohybu elektronu. Na elektron při srážce působí dostředivé zrychlení (směrem k iontu), jehož výsledkem je záření elektronu. Pokud budeme srážku popisovat v souřadnicové soustavě spojené s těžkým iontem, bude velikost zrychlení elektronu

$$\ddot{j}_e = \frac{F}{m_e} = \frac{Ze^2}{4\pi \varepsilon_0 r_e^2 m_e} \quad (2.378)$$

a tomu odpovídající velikost druhé časové derivace elektrického dipólového momentu

$$\ddot{p}_E = e\ddot{j}_e = \frac{Ze^3}{4\pi \varepsilon_0 r_e^2 m_e}. \quad (2.379)$$

Z Larmorovy formule (2.352) je zřejmé, že vyzařování závisí jen na velikosti zrychlení elektronu. Je zcela lhostejné, zda jde o zrychlení tečné či dostředivé. Velikost zrychlení je u Coulombovy srážky dána pouze polohou elektronu vzhledem k iontu, u něhož se elektron rozptyluje. Intenzita vyzařování či výkon jsou tedy dány pouze vzdáleností

elektronu od jádra. Čím blíže k iontu se elektron dostane, tím více září. Snadno určíme okamžitý výkon vyzařovaný elektronem:

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\ddot{p}_E^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{Z^2 e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 [r_e(t)]^4}. \quad (2.380)$$

S uvedenou formulí je možné dále pracovat. Ze znalosti dráhy elektronu při srážce lze například dopočítat fourierovské spektrum vyzařovaného výkonu. Další možností je vzít homogenní vzorek elektronů s různými záměrnými parametry a středovat vyzářený výkon pro celý vzorek elektronů rozložených symetricky kolem iontu

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{Z^2 e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{n_e 4\pi r_e^2 dr_e}{r_e^4} = \frac{4\pi Z^2 e^6 n_e}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \frac{1}{r_{\min}}. \quad (2.381)$$

To s sebou ale nese další problémy: Prvním je dolní ořez minimální vzdálenosti, která nemůže být nulová. Druhým je kvantové chování elektronu při interakci s elektrony atomárního obalu. Pokud za dolní hranici záměrného parametru zvolíme de Broglievu vlnovou délku počítanou z nejpravděpodobnější (tepelné) rychlosti elektronu

$$r_{\min} \approx \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_e k_B T_e}}, \quad (2.382)$$

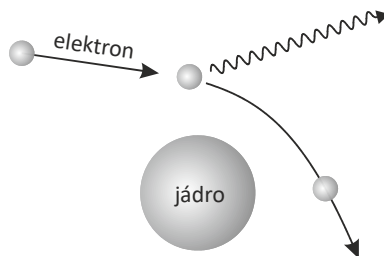
vyjde středovaný výkon souboru elektronů rozptylujících se na jednom iontu

$$\langle \mathcal{P} \rangle \approx \frac{Z^2 e^6 n_e}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e \hbar} \left(\frac{2k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (2.383)$$

Pokud bude rozptyl probíhat na iontech s koncentrací n_i , bude výkon vyzařovaný z objemové jednotky (hustota výkonu) roven

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P} = \langle \mathcal{P} \rangle n_i \approx \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e \hbar} \left(\frac{2k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2}; \quad [\mathcal{P}] = \frac{W}{m^3}. \quad (2.384)$$

Poznámka: Provedený výpočet je nekvantový. Při kvantovém výpočtu se ve výsledném vztahu objeví ještě tzv. Gauntův faktor (je pojmenovaný podle Johna Arthura Gaunta), který je slabě frekvenčně závislý a jeho hodnota je řádově rovna jedné. V prvním přiblížení ho tedy nemusíme uvažovat.



Obr. 2. 38: Brzdné záření elektronů na iontech

2.7.6 Cyklotronní záření

Nabitá částice vykonává v magnetickém poli tzv. gyrační pohyb, tj. pohybuje po šroubovici a přitom má samozřejmě nenulové dostředivé zrychlení dané Lorentzovou silou. Vzhledem k tomu, že cyklotronní záření je důležité jak pro elektrony, tak pro ionty, provedeme výpočet pro obecný náboj Q . Zrychlení nabitě částice bude mít velikost:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = \frac{F}{m} = \frac{Qv_{\perp}B}{m}. \quad (2.385)$$

Odpovídající velikost druhé časové derivace elektrického dipólového momentu bude

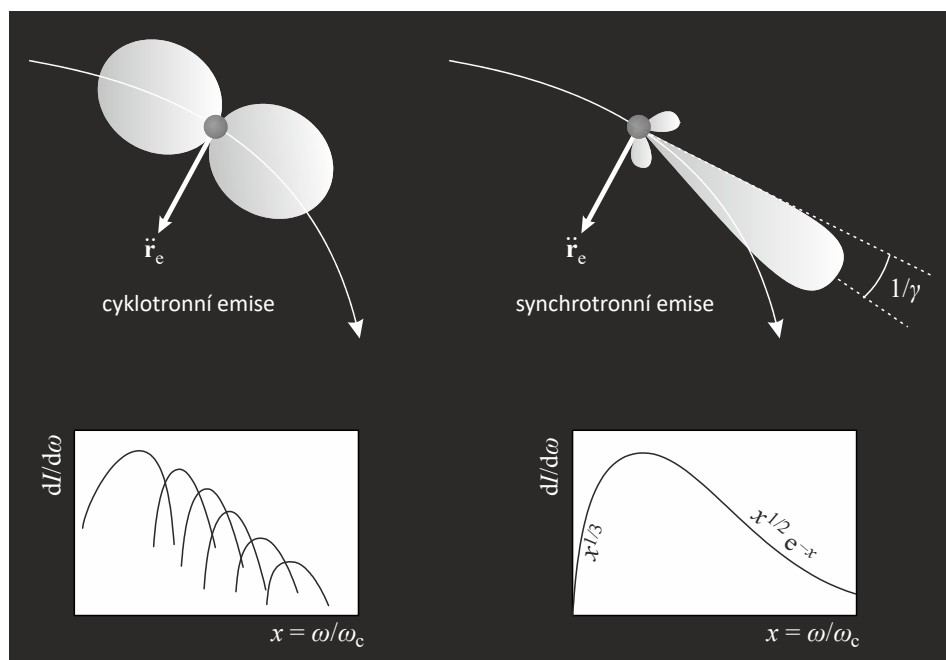
$$\ddot{\mathbf{p}}_E = Q\ddot{\mathbf{r}}_0 = \frac{Q^2 v_{\perp} B}{m}. \quad (2.386)$$

Z Larmorovy formule (2.352) snadno určíme okamžitý výkon vyzařovaný částicí

$$\mathcal{P} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{Q^4 v_{\perp}^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2}. \quad (2.387)$$

Vzhledem ke kvadratické závislosti na hmotnosti částice je cyklotronní vyzařování intenzivnější pro elektrony než pro ionty. Speciálně pro elektron lze za pomoci klasického poloměru elektronu (2.365) výkon vyzařovaný jednou částicí přepsat do tvaru

$$\mathcal{P} = \frac{8}{3} \pi a_e^2 \epsilon_0 c v_{\perp}^2 B^2. \quad (2.388)$$



Obr. 2.39: Cyklotronní a synchrotronní emise

► Příklad 2.3: Ochlazování zářením

Sestavme energetickou bilanci pro elektronovou složku plazmatu:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}n_e k_B T_e\right) = \mathcal{P} n_e. \quad (2.389)$$

Nalevo je úbytek hustoty energie elektronů, napravo hustota vyzařovaného výkonu, v němž obě kolmé složky rychlosti nahradíme nejpravděpodobnějšími (teplnými) rychlostmi

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}n_e k_B T_e\right) = \frac{8}{3}\pi a_e^2 \varepsilon_0 c \frac{2k_B T_e}{m_e} B^2 n_e. \quad (2.390)$$

Nalezená diferenciální rovnice pro teplotu vede na exponenciální úbytek teploty elektronové složky plazmatu způsobený cyklotronním zářením elektronů.

$$T_e = T_0 \exp[-\alpha t];$$

$$\alpha \equiv \frac{32}{9} \frac{\pi a_e^2 \varepsilon_0 c}{m_e} B^2. \quad (2.391)$$

Poznámka 1: Provedený výpočet cyklotronního záření je nerelativistický. Cyklotronní záření probíhá zejména na cyklotronové frekvenci a jejích vyšších harmonických. Při vysokých energiích elektronů ale tento výpočet neplatí. Cyklotronová frekvence závisí prostřednictvím hmotnosti na rychlosti částice a navíc je třeba ji transformovat do laboratorní soustavy (uplatní se relativistický Dopplerův jev). Stejně tak je třeba transformovat vyzářený výkon. Závislost cyklotronové frekvence na rychlosti částice vede pro velký soubor částic k rozšiřování piků cyklotronní emise na jednotlivých harmonických a při vysokých energiích bude spektrum spojitě. V tomto případě hovoříme o synchrotronním záření. Úhlová charakteristika záření je deformována mocninami Lorentzova faktoru gamma do charakteristického tvaru dopředného laloku. Formulí pro synchrotronní záření lze získat transformacemi vztahů pro cyklotronní záření, nicméně elegantnější je přímý výpočet z Feynmanovy formule (viz *Liénardovy Wiechertovy potenciály*, kapitola 2.7.8).

Poznámka 2: Ve Sluneční soustavě je velmi silným zdrojem cyklotronního záření planeta Jupiter. Jupiter má nejsilnější magnetické pole ze všech planet, jeho magnetosféra má ohon dlouhý 5,5 astronomické jednotky a sahá až k oběžné dráze planety Saturn. Elektrony kroužící kolem siločar magnetického pole vytvářejí intenzivní elektromagnetické vlny v úzkém pásmu radiových frekvencí, které jsou označovány zkratkou ECE (*Electron Cyclotron Emission*). U Jupiteru pochází nejvíce vln z elektronů rotujících na siločarách pole procházejících měsícem Io, jehož vulkanické projevy zanechávají kolem planety charakteristický plazmový torus složený převážně z iontů síry. Jupiter je využíván jako referenční zdroj rádiového signálu pro kalibraci přístrojů na sondách (například Planck).

2.7.7 Vyšší momenty záření

Nabitě částice samozřejmě nevyzařují jen dipólově, méně intenzivně, ale také důležité je i magnetické dipólově a elektrické kvadrupólově záření. Budeme postupovat stejně jako u elektrického dipólového záření. V dosti velké vzdálenosti od zdroje jsou vlnoplochy rovinné, proto postačí určit jen elektrické pole ze vztahu

$$\mathcal{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t \quad (2.392)$$

a magnetické pole snadno dopočteme ze vztahů

$$\mathcal{B} = \frac{1}{c}(\mathcal{E} \times \mathbf{n}); \quad (2.393)$$

$$\mathcal{E} = c(\mathcal{B} \times \mathbf{n}). \quad (2.394)$$

Ze vztahů (2.340) a (2.341) snadno určíme elektrické a magnetické pole magnetického dipólového a elektrického kvadrupólového záření:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}^{(M1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi rc} \ddot{\mathbf{p}}_M \times \mathbf{n}, \quad (2.395)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{B}^{(M1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi rc^2} \ddot{\mathbf{p}}_M; \quad (2.396)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}^{(E2)} = -\frac{\mu_0}{24\pi rc} \ddot{\ddot{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.397)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{B}^{(E2)} = -\frac{\mu_0}{24\pi rc^2} \left(\left[\ddot{\ddot{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n} \right); \quad (2.398)$$

Obdobně jako u dipólového záření určíme normálovou složku Poyntingova vektoru a integrací přes celý prostorový úhel získáme celkový vyzářený výkon soustavy částic. Ve výsledných vztazích vyjádříme permeabilitu vakua za pomoci permitivity ze vztahu $\mu_0 = 1/(c^2\epsilon_0)$:

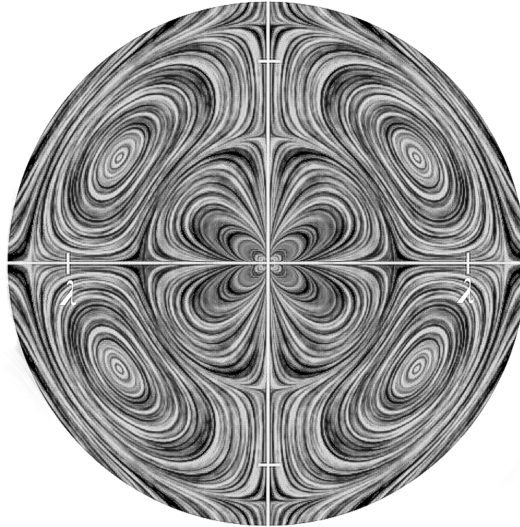
$$\mathcal{J}_n^{(M1)} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_M^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^5 r^2} \sin^2 \theta; \quad (2.399)$$

$$\mathcal{J}_n^{(E2)} = \frac{(\ddot{\ddot{Q}}_{kl}n_l)(\ddot{\ddot{Q}}_{km}n_m) - (\ddot{\ddot{Q}}_{kl}n_kn_l)(\ddot{\ddot{Q}}_{mo}n_mn_o)}{576\pi^2\epsilon_0 c^5 r^2}; \quad (2.400)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P}^{(M1)} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_M^2}{6\pi\epsilon_0 c^5}, \quad (2.401)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P}^{(E2)} = \frac{\ddot{\ddot{\mathbf{Q}}} : \ddot{\ddot{\mathbf{Q}}}}{720\pi\epsilon_0 c^5}. \quad (2.402)$$

Na následujícím obrázku je ukázka elektrického kvadrupólového záření v těsné blízkosti zdroje zobrazená metodou LIC (*Line Integral Convolution*). Počítačově generovaná šumová textura se za pomoci konvoluce s elektrickým polem deformuje ve směru siločar elektrického pole. Výpočet byl proveden na Dukeově univerzitě.



Obr. 2.40: Elektrické kvadrupólové záření. Výpočet na Dukeově univerzitě.

2.7.8 Liénardovy-Wiechertovy potenciály

Pokud se částice pohybují vysokou rychlostí a nejsou lokalizovány v okolí počátku souřadnicové soustavy, není možné provést rozvoj potenciálů pro pozorovatele ve velké vzdálenosti. Navíc se příslušným rozvojem vytratilo relativistické chování částic. V obecném případě je proto třeba postupovat jinak. Vyjděme opět z retardovaných potenciálů

$$A^\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^\alpha(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'; \quad t' \equiv t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c}. \quad (2.403)$$

Pro skalární a vektorový potenciál z této relace dostaneme vztahy

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (2.404)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (2.405)$$

Pro bodovou částici jsou zdrojové členy

$$\rho_Q = Q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0), \quad (2.406)$$

$$\mathbf{j}_Q = Q \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0). \quad (2.407)$$

U vztahů (2.404), (2.405) pro potenciály je třeba zajistit, aby byly parametry částice v retardovaném čase, proto u vyjádření pro jedinou částici přibude distribuce přes čas:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt' d^3\mathbf{r}', \quad (2.408)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Q \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt' d^3\mathbf{r}'. \quad (2.409)$$

Časová distribuce bude nenulová jen pro

$$\blacktriangleright \quad t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c}, \quad (2.410)$$

tedy skutečně v retardovaném čase, jak jsme požadovali. Nejprve provedme integraci přes prostorovou distribuci:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dt', \quad (2.411)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \int \frac{\mathbf{v}(t') \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dt'. \quad (2.412)$$

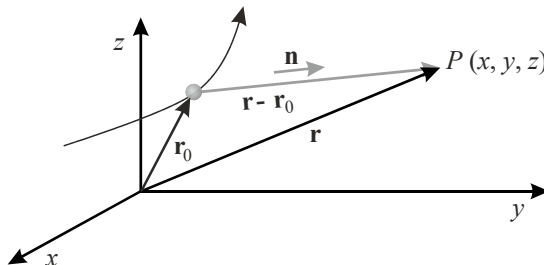
Integrace přes čas je poněkud složitější, neboť jde o distribuci funkce, pro kterou platí vztah

$$\blacktriangleright \quad \delta(F(\xi)) = \frac{\delta(\xi - \xi_0)}{F'(\xi_0)}; \quad F(\xi_0) = 0, \quad (2.413)$$

který nyní využijeme. Nalezneme nejprve derivaci funkce F :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt'} &= \frac{d}{dt'} (t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|/c) = \frac{d}{dt'} \left(t' - t + \frac{1}{c} \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))^2} \right) \Rightarrow \\ \frac{dF}{dt'} &= 1 + \frac{1}{c} \left(-\frac{d\mathbf{r}_0}{dt'} \right) \cdot 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')) \frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))^2}} = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{cR} = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.414)$$

Pro nelokalizovanou částici musíme za jednotkový vektor normály k ploše v místě pozorovatele volit směr od částice k nám, tedy $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, dále jsme označili $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$.



Obr. 2.41: Záření nelokalizované částice

Po provedení integrace přes časovou distribuci nyní snadno získáme výsledné potenciály (tzv. *Liéardovy-Wiechertovy potenciály*):

$$\blacktriangleright \quad \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}, \quad (2.415)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A} = \frac{Q\boldsymbol{\beta}}{4\pi\epsilon_0 c R} \frac{1}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}, \quad (2.416)$$

kde jsme označili

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}, \quad (2.417)$$

$$\blacktriangleright \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{v}(t')}{c}. \quad (2.418)$$

Veškeré argumenty související s částicí jsou brány v retardovaném čase, tj. $\mathbf{r}_0(t')$, $\mathbf{v}(t')$. Liéardovy-Wiechertovy potenciály jsou relativistické a nebyly v nich učiněny žádné rozvoje ani žádná zjednodušení. Přířímým výpočtem nyní určíme elektromagnetická pole. K tomu si musíme předpočítat jednotlivé potřebné derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}, \quad (2.419)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_k} \quad (2.420)$$

Určeme například $\partial t'/\partial t$:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = 1; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \left[t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c} \right] = 1; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t'}{\partial t} \left[1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{cR} \right] = 1.$$

Odsud již snadno určíme

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}; \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = 1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.421)$$

Analogicky nalezneme

$$\frac{\partial t'}{\partial x_k} = -\frac{n_k}{c(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}. \quad (2.422)$$

Výpočet elektrických polí z Liéardových-Wiechertových potenciálů je nyní přímočarý, ale poněkud zdoluhavý. Elektrické pole získáme ze vztahu $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ a magnetické pole ze vztahu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Výsledkem je Feynmanova formule

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1-\beta^2)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c R} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3}, \quad (2.423)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{c}. \quad (2.424)$$

První část pole je zobecněné coulombické pole, druhá část je obecné zářivé pole, v němž nebyly činěny žádné rozvoje, a je plně relativistické. Z takto určených formulí je možné dále spočítat Poyntingův vektor a jeho integrací vyzářený výkon. Takovým postupem lze například získat přesný vztah pro synchrotronní záření.

2.7.9 Relativistické brzděné a synchrotronní záření

Pokud nás nezajímá pole v těsném okolí částice, ale jen radiační pole ve větší vzdálenosti, můžeme ve Feynmanově formuli zanedbat první (coulombickou) část a ponechat jen druhou (radiační) část:

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c R} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \quad (2.425)$$

Určeme nyní Poyntingův vektor.

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E} \times (\mathbf{n} \times \mathcal{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathcal{E}^2 \mathbf{n} - (\mathcal{E} \cdot \mathbf{n}) \mathcal{E}]. \quad (2.426)$$

Druhý člen v hranaté závorce je evidentně nulový, protože je elektrické pole dle (2.425) kolmé na \mathbf{n} . Normálová složka toku energie proto bude

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathcal{E}^2}{\mu_0 c} \quad \Rightarrow \quad (2.427)$$

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c R} \right)^2 \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^6} \quad (2.428)$$

Celá pravá strana je funkcí retardovaného času, proto bude vyzářovaná energie do prostorového úhlu rovna

$$d\mathcal{W} = \mathcal{S}_n dt R^2 d\Omega = \mathcal{S}_n dt' \frac{\partial t}{\partial t'} R^2 d\Omega. \quad (2.429)$$

Vyzářený výkon bude

$$d\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{W}}{dt'} = \mathcal{S}_n \frac{\partial t}{\partial t'} R^2 d\Omega. \quad (2.430)$$

Nyní dosadíme za Poyntingův vektor (2.428) a za časovou derivaci (2.421) a máme finální vztah

$$\blacktriangleright \quad d\mathcal{P} = \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^5} d\Omega. \quad (2.431)$$

Uvedme nyní tři limitní případy této obecné formule pro záření relativistické částice:

Limita pomalé částice

Nejprve bychom měli zkontrolovat, zda v limitě malých rychlostí dá naše nová formule původní Larmorův vztah. Budeme tedy předpokládat, že $\beta \ll 1$, tj. $1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} \approx 1$, $\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{n}$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \left| \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right|^2 d\Omega = \\ &= \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \left| (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}} \right|^2 d\Omega = \\ &= \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \left| \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp} \right|^2 d\Omega = \\ &= \frac{Q^2 \dot{v}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} d\Omega. \end{aligned}$$

Přepíšeme-li tento vztah za pomoci elektrického dipólového momentu $\mathbf{p}_e = Q\mathbf{r}$, máme

$$\blacktriangleright \quad d\mathcal{P} = \frac{\ddot{p}_e^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} d\Omega, \quad (2.432)$$

což je Larmorova formule (2.351) pro pomalé částice. Připomeňme, že θ je úhel mezi zrychlením částice a směrem od částice k pozorovateli, tj.

$$\theta \equiv \sphericalangle(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{n}). \quad (2.433)$$

Relativistické brzdné záření

Jde o částici urychlovanou nebo brzděnou ve směru svého pohybu, tj. platí $\boldsymbol{\beta} \parallel d\boldsymbol{\beta}/dt$. Typicky jde například o relativistické brzdné záření. Obecná formule se zjednoduší na

$$d\mathcal{P}_{\parallel} = \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{\left| \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^5} d\Omega. \quad (2.434)$$

Pro částici urychlovanou ve směru jejího pohybu platí

$$\theta \equiv \sphericalangle(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{n}) = \sphericalangle(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{n}), \quad (2.435)$$

proto bude úhlová závislost vyzařovaného výkonu

$$\blacktriangleright \quad d\mathcal{P}_{\parallel} = \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\Omega. \quad (2.436)$$

Po integrování přes všechny úhlové závislosti máme celkový vyzařovaný výkon

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P}_{\parallel} = \frac{Q^2}{6\pi^2 \varepsilon_0 c} \gamma^6 \dot{v}^2. \quad (2.437)$$

Synchrotronní záření

V tomto případě jde o částici, jejíž zrychlení je kolmé na její rychlost $d\mathbf{\beta}/dt \perp \mathbf{\beta}$. K tomu dochází například při pohybu po kružnici, kdy je generováno synchrotronní záření. Výpočet je složitější než v minulém případě. Volme okamžitou souřadnicovou soustavu, v níž míří osa z ve směru pohybující se částice a osa x ve směru zrychlení částice (v případě kruhového pohybu do středu kružnice):

$$\mathbf{e}_z \equiv \frac{\mathbf{\beta}}{\beta}; \quad \mathbf{e}_x \equiv \frac{\dot{\mathbf{\beta}}}{\dot{\beta}}; \quad \mathbf{\beta} \cdot \dot{\mathbf{\beta}} = 0. \quad (2.438)$$

Nyní zavedeme standardní sférické souřadnice, tj. ϑ bude odklon od osy z a φ bude polární úhel v rovině (x, y) . V této soustavě bude platit

$$\mathbf{\beta} \cdot \mathbf{n} = \beta \cos \vartheta; \quad \dot{\mathbf{\beta}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\beta} \sin \vartheta \cos \varphi., \quad (2.439)$$

Po přepsání všech dvojných vektorových součinů na skalární součiny přejde obecná formule (2.431) v případě zrychlení kolmého na rychlost na vztah

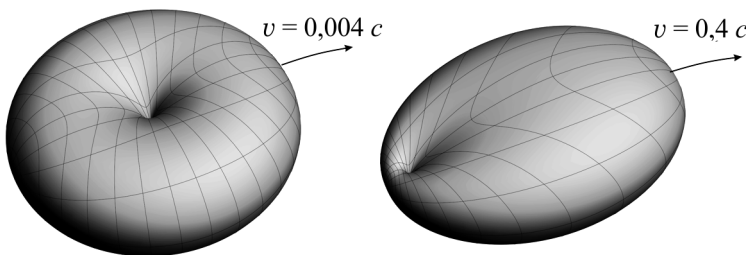
$$\blacktriangleright \quad d\mathcal{P}_{\perp} = \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{(1 - \beta \cos \vartheta)^2 + (\sin \vartheta \cos \varphi)^2 (\beta^2 - 1)}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5} \dot{\beta}^2 d\Omega. \quad (2.440)$$

Jde o obecnou formuli pro synchrotronní záření. Po integraci přes úhly máme

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P}_{\perp} = \frac{Q^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \gamma^4 \dot{v}^2. \quad (2.441)$$

Pokud bychom se neomezili jen na případ částice se zrychlením rovnoběžným či kolmým na směr rychlosti a ponechali obecný směr rychlosti i zrychlení, byl by celkový vyzařovaný výkon prostým součtem obou limitních případů (2.437) a (2.441). Integrace „mix“ členů dá nulový příspěvek.

Na následujícím obrázku je směrová charakteristika synchrotronního záření určená v programu Wolfram Mathematica podle formule (2.440) pro hodnoty $\beta = 0,004$ (nalevo), $\beta = 0,4$ (napravo). Při vysoké rychlosti záření výrazně převládá ve směru pohybu částice. Nejmenší množství záření (proláklna na obrázku) je emitováno na spojnici částice se středem kružnice, po níž se pohybuje.



Obr. 2.42: Cyklotronní a synchrotronní záření

Výkon synchrotronního záření je úměrný γ^4 . Při dané energii je energie vyzařovaná za jednotku času nepřímo úměrná čtvrté mocnině hmotnosti částice ($E = \gamma m_0 c^2$). Proto

elektrony při stejných změnách rychlosti a stejné energii září mnohonásobně intenzivněji než protony či ionty. V některých zařízeních je synchrotronní záření nechtěným parazitním jevem, v jiných je naopak využíváno k vědeckým experimentům.

Příkladem nechtěného záření je největší urychlovač světa LHC (*Large Hadron Collider*) v blízkosti švýcarské Ženevy, který má obvod 27 kilometrů a obíhající protony mají energii několik teraelektronvoltů. Urychlovač nemá kruhový tubus, jak by se na první pohled mohlo zdát. Je zde 8 rovných úseků o délce cca 528 metrů. Tyto úseky se nacházejí v blízkosti detektorů. Let obíhajících protonů na nich není doprovázen synchrotronní emisí. Jsou to jediné úseky, na nichž se protony elektromagneticky neprojeví. To je důležité při vstupu protonů do detektoru, kde dochází ke srážce a vzniku velkého množství částic. Synchrotronní fotony by zde byly jen na obtíž. Rovné úseky jsou navíc využívány k fokusaci svazku protonů za pomoci kvadrupólových magnetů. Dříve byl ve stejném tunelu urychlovač elektronů a pozitronů LEP II, v němž byl z důvodu menší hmotnosti těchto částic problém synchrotronního záření ještě významější.

Jiná zařízení jsou naopak přímo konstruována jako zdroje synchrotronního záření. Většinou jde o urychlené elektrony, které jsou akumulovány v kruhovém prstenci, kde při svém pohybu synchrotronně září. K tomuto typu patří například americký synchrotronní zdroj NSLS-II (*National Synchrotron Light Source*) v Brookhavenské národní laboratoři. Obvod prstence je 792 metrů a energie elektronů 3 GeV. V Evropě byl v roce 2019 ukončen provoz zdroje ESRF (*European Synchrotron Radiation Facility*) s obvodem 844 metrů a energií elektronů 6 GeV. Přístroj bude nahrazen nově budovaným zdrojem ESRF-EBS (*ESFR Extremely Brilliant Source*).

Dalším zdrojem synchrotronního záření jsou lineární urychlovače elektronů, v nichž jsou elektrony nejprve urychleny pomocí soustavy rezonančních dutin. Poté shluky elektronů s vysokou energií přicházejí do *undulátoru* – speciální magnetické struktury, ve které se periodicky střídá orientace magnetického pole a elektrony se začnou pohybovat po vlnkovaté dráze, na níž synchrotronně září. Při velké amplitudě oscilací elektronů se zařízení nazývá *wiggler*. Emitované paprsky vytvářejí extrémně intenzivní impulz koherentního a monochromatického záření. Hovoříme o laserech na volných elektronech FEL (*Free Electron Laser*). Extrémně velká zařízení tohoto typu se označují zkratkou XFEL. Největší na světě je Evropský XFEL zprovozněný v roce 2017. Tento laser má délku 3,4 kilometru a nachází se v Německé laboratoři DESY v Hamburku. Na druhém místě je americký LCLS (*Linac Coherent Light Source*) v Národní urychlovačové laboratoři SLAC v Kalifornii.

Výhodou všech těchto zařízení je laditelnost, zpravidla od ultrafialové po tvrdou rentgenovou oblast, například Evropský XFEL má „rozsah“ od 0,05 to 4,7 nanometrů. Zdroje synchrotronního záření se využívají pro mikroskopii (rozlišovací schopnost zhruba koresponduje s vlnovou délkou záření) nebo pro vytváření a výzkum extrémních stavů látky.



2.8 Pole v dutině

Už jsme si řekli, že elektromagnetické pole je médiem, které je schopné přenášet energii, hybnost a moment hybnosti. Energie pole je kvantována a elementárními kvanty jsou jednotlivé fotony. Celkově lze tedy elektromagnetické pole chápat jako soustavu fotonů a každý foton jako harmonický oscilátor. Při tomto popisu tedy elektromagnetické pole není ničím jiným než soustavou harmonických oscilátorů. Takovou představu nebudeme rozvádět pro obecné elektromagnetické pole, ale pro fotony zachycené v dutinovém rezonátoru. Je to dutina, v níž se pole na vnitřních stěnách odráží, a proto dlouhodobě v rezonátoru přebývá. Dutinové rezonátory se používají třeba na největším urychlovači světa LHC k urychlování nabitých částic. K dokonalosti je dovedl francouzský fyzik Serge Haroche, který dokázal vyrobit několikacentimetrovou dutinu se supravodivým povrchem, v níž se jediný foton odrážel celých 130 ms. Za tu dobu foton uletěl vzdálenost rovnou obvodu Země. Serge Haroche prováděl jako první na světě v takových dutinách nedestructivní měření počtu fotonů. Jediný foton v dutině byl schopný opakovaně detekovat i několiksetkrát. Za tyto práce obdržel Nobelovu cenu pro rok 2012. Při uzavřenému v rezonanční dutině se někdy lidově říká „pole v krabici“. Pole v dutině vytvoří stojaté vlnění s uzly na stěnách. Proto jsou v dutině možné jen některé módy elektromagnetického pole. Právě jim se budeme věnovat v této kapitole.

2.8.1 Potenciály v dutině

Pole v dutině nemá žádné zdroje – nejsou zde ani náboje, ani elektrické proudy. Maxwellovy rovnice pro potenciály spolu s Lorenzovou kalibrační podmínkou mají jednoduchý tvar:

$$\square \mathbf{A} = 0; \quad (2.442)$$

$$\square \phi = 0; \quad (2.443)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (2.444)$$

V předchozím textu jsme ukázali, že ve volném prostoru bez proudů a nábojů lze díky kalibrační volnosti dokonce zvolit skalární potenciál nulový. Rovnice pro pole v dutině pak mají tvar

$$\blacktriangleright \quad \square \mathbf{A} = 0; \quad (2.445)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (2.446)$$

Elektromagnetická pole budou dána vztahy

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad (2.447)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.448)$$

2.8.2 Vlastní kmity pole

Předpokládejme, že se elektromagnetické pole nachází v dutině ve tvaru kvádru o hranách L_1 , L_2 a L_3 . Souřadnicové osy povedeme ve směru hran. Budeme předpokládat, že se v dutině vytvoří stojaté vlnění s uzly na stěnách. Pro hledaný potenciál postačí požadovat, aby na protilehlých stěnách měl stejnou hodnotu (tzv. periodickou okrajovou podmínku). Potenciál zapíšeme jako superpozici Fourierových módů

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.449)$$

Každý z módů musí splňovat rovnici (2.445), odkud pro amplitudy \mathbf{a} plyne

$$-k^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.450)$$

Vzhledem k tomu, že pole v dutině musí splňovat disperzní relaci

$$\omega_{\mathbf{k}} = c k, \quad (2.451)$$

můžeme rovnici pro amplitudu přepsat do tvaru

$$\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.452)$$

Tato rovnice má dvě řešení $\exp[\pm i \omega_{\mathbf{k}} t]$, obecné řešení je jejich lineární kombinací. Pokud budeme požadovat, aby vlnový vektor mířil ve směru fázové rychlosti vlny a aby celková fáze vlny tvořila relativistický skalár $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t$, musíme volit řešení se znaménkem minus (plusové řešení ale později také využijeme), tj.:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{c}_{\mathbf{k}} e^{-i \omega_{\mathbf{k}} t} \quad (2.453)$$

Celkové řešení pro vektorový potenciál tedy je obyčejná rovinná vlna

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{c}_{\mathbf{k}} e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t]}, \quad (2.454)$$

což je dáno jednoduchým pravoúhlým tvarem dutiny. Nesmíme zapomenout na Lorenzovu kalibrační podmínku, která znamená omezení na směr konstantních vektorů $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.455)$$

Stěny dutiny neumožní vznik vln libovolných vlnových délek, proto nebude vlnový vektor \mathbf{k} spojité, ale bude nabývat jen některých hodnot. Potenciál musí být stejný pro $x = 0$ a $x = L_1$, obdobně také pro $y = 0$ a $y = L_2$ a totéž bude platit i v třetí ose pro $z = 0$ a $z = L_3$. Například v ose x budeme mít

$$e^{k_1 \cdot 0 + k_2 y + k_3 z} = e^{k_1 L_1 + k_2 y + k_3 z} \quad \Rightarrow \quad 1 = e^{k_1 L_1} \quad \Rightarrow \quad k_1 L_1 = n_1 2\pi. \quad (2.456)$$

Obdobně postupujeme i v dalších osách. Vlnový vektor tedy může nabývat jen hodnot

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{k} = \left(\frac{2\pi}{L_1} n_1, \frac{2\pi}{L_2} n_2, \frac{2\pi}{L_3} n_3 \right); \quad n_l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.457)$$

$$k = 2\pi \sqrt{\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2}}. \quad (2.458)$$

Pokud přejdeme k normovaným Fourierovým módům (za každou dimenzi je $1/\sqrt{L_k}$)

$$\varphi_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.459)$$

můžeme výsledné řešení pro potenciál zapsat jako

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (2.460)$$

Koeficient před řešením je normovací konstanta bázových funkcí. K námi nalezenému řešení je přičteno komplexně sdružené řešení, aby byl výsledek reálný. Také bychom mohli využít reálnou část $\text{Re } \mathbf{A} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)/2$ a vzniklou polovinu zahrnout do amplitud $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ resp. $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$. V komplexně sdruženém řešení se v časové části uplatní i druhé z řešení $\exp[+i\omega t]$. Řešení můžeme také chápat jako dvě stejné vlny pohybující se proti sobě, které v dutině vytvoří stojaté vlnění. Zbývá poslední úloha – spočítat elektrické a magnetické pole. Získaný potenciál je superpozicí rovinných elektromagnetických vln. Časová část je schována v amplitudách \mathbf{a} , \mathbf{a}^* . V případě dutiny jiného tvaru než kvádrů by časová část neměla tvar $\exp[\pm i\omega t]$. U rovinných vlnoploch vedou časové a prostorové derivace na jednoduché algebraické vztahy (2.228). Okamžitě proto dostaneme hodnotu elektrického a magnetického pole v rezonanční dutině:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right); \quad (2.461)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \times \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (2.462)$$

Připomeňme, že $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ je amplituda \mathbf{k} -té Fourierovy komponenty a čísla \mathbf{k} jsou diskrétní podle vztahu (2.457). Obě pole jsou superpozicí Fourierových módů a jsou reálná.

2.8.3 Energie a hybnost pole v dutině

Nyní se budeme věnovat výpočtu celkové energie a celkové hybnosti všech módů elektromagnetického pole uzavřeného v dutině, tj. bude třeba vyčíslit integrály z hustoty energie (2.179) a hustoty hybnosti (2.196):

$$\mathcal{E} = \int_V \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) d^3\mathbf{r} = \varepsilon_0 \int_V \left(\frac{\mathbf{E}^2}{2} + c^2 \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) d^3\mathbf{r}, \quad (2.463)$$

$$\mathcal{G} = \int_V \boldsymbol{\gamma} d^3\mathbf{r} = \int_V \mathbf{D} \times \mathbf{B} d^3\mathbf{r} = \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3\mathbf{r}. \quad (2.464)$$

Do obou vztahů dosadíme za pole z (2.461) a (2.462). Při úpravách jednotlivých členů postupně použijeme následující vztahy

$$(1) \quad \frac{1}{V} \int_V e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \quad \frac{1}{V} \int_V e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}, \quad (2.465)$$

$$(2) \quad \mathbf{a}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*, \quad \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^* = \mathbf{a}_{\mathbf{k}}, \quad (2.466)$$

$$(3) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* = 0, \quad (2.467)$$

$$(4) \quad [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (2.468)$$

První relace plyne ihned z ortonormality bázevých funkcí, na pravé straně jsou Kroneckerova delta jednotlivých diskretních indexů. Druhá relace plyne z výrazu (2.460) pro vektorový potenciál, ve kterém zaměníme sčítací index \mathbf{k} za $-\mathbf{k}$. Záměna indexu nesmí výraz změnit, po záměně se druhá část stane první a první druhou. Porovnáním s původní relací dostaneme druhou relaci. Třetí relace plynou z Lorenzovy kalibrační podmínky (2.455) a jejího komplexního sdružení. Poslední relace je známý Cramerův vzorec (viz první díl „Vybraných kapitol“, kapitola I.3.3.4 Vektorové identity). Nyní se můžeme konečně pustit do výpočtu energie pole v rezonanční dutině dané vztahem (2.463). Nejprve si dopředu spočteme výrazy $\int_V \mathbf{E}^2 d^3\mathbf{r}$, $\int_V \mathbf{B}^2 d^3\mathbf{r}$, do nichž dosadíme za pole z (2.461) a (2.462):

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{E}^2 d^3\mathbf{r} &= -\frac{1}{V} \int_V \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{a}_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}'}^* e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}) d^3\mathbf{r} \quad (1) \\ &= -\sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{-\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*) \quad (2) \\ &= -\sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) = 0. \end{aligned}$$

Obdobným postupem nyní určíme druhou mocninu magnetického pole

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B}^2 d^3\mathbf{r} &= -\frac{1}{V} \int_V \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{k}' \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{k}' \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}'}^* e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}) d^3\mathbf{r} \quad (1,2) \\ &= -\sum_{\mathbf{k}} \left[(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) - (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) - (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) + (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) \right] = \\ &= 4 \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) \quad (4) \\ &= 4 \sum_{\mathbf{k}} k^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \quad (3) \\ &= 4 \sum_{\mathbf{k}} k^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*). \end{aligned}$$

Výsledná energie elektromagnetického pole po dosazení do (2.463) tedy je

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_0 c^2 k^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*).$$

Z disperzní relace víme, že v prázdném prostoru platí $ck = \omega_{\mathbf{k}}$, což nás dovede k výslednému vztahu pro energii. Analogickým postupem určíme i vztah pro hybnost:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}}^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*), \quad (2.469)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{G} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{G}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \mathbf{k}. \quad (2.470)$$

Energii a hybnost elektromagnetického pole v rezonanční dutině můžeme vyjádřit jako součet energií a hybností nezávislých lineárních harmonických oscilátorů s „dovolenými“ čísly $\mathbf{k} = (2\pi n_1/L_1, 2\pi n_2/L_2, 2\pi n_3/L_3)$. Jde o popis kompatibilní s korpuskulárním obrazem elektromagnetického pole. Mezi hybnostními módy, které míří ve směru vlnového vektoru, a energetickými módy platí jednoduché vztahy (vektorový a pro velikost):

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \mathbf{k} = \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{c} \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (2.471)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}^2}{c^2}, \quad (2.472)$$

což je známý vztah mezi hybností a energií fotonů, který plyne ze speciální relativity pro částice s nulovou klidovou hmotností (viz kapitola 3.1).

2.8.4 Hamiltonovy rovnice

Fourierovy amplitudy \mathbf{a} , \mathbf{a}^* jsou komplexní čísla charakterizující šíření vln v rezonanční dutině ve směrech \mathbf{k} , $-\mathbf{k}$, neboť jde o koeficienty u vln $\exp[\pm i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$. Obecně jde o komplexní čísla, pomocí nichž budeme definovat nové reálné amplitudy $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ vztahy

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\varepsilon_0} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}), \quad (2.473)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} \equiv i \omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\varepsilon_0} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}). \quad (2.474)$$

Obě funkce jsou reálné vektorové funkce. První je úměrná reálné části $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$, druhá imaginární. Ukážeme, že takto přeškálované amplitudy hrají roli zobecněných souřadnic a zobecněných hybností oscilátorů popisujících elektromagnetické pole v dutině. Sečtením a odečtením definičních rovnic (koeficienty převedeme vlevo) můžeme rekonstruovat původní amplitudy:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \left(\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \right), \quad (2.475)$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \left(\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \right). \quad (2.476)$$

Nové proměnné $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ nemají zatím jiný význam, než reálných amplitud vytvořených z původních komplexních amplitud $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$. Původní amplitudy v sobě zahrnují časové faktory $\exp[\pm i \omega_{\mathbf{k}} t]$ a podle (2.453), (2.455) pro ně platí

$$\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}, \quad (2.477)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}^* = +\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*. \quad (2.478)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.479)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* = 0. \quad (2.480)$$

S pomocí těchto relací snadno zjistíme, že pro nově zavedené amplitudy platí vztahy

$$\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{P}_{\mathbf{k}}, \quad (2.481)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.482)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.483)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.484)$$

Vidíme, že amplituda $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ hraje roli zobecněné rychlosti/hybnosti k amplitudě $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$. Druhá relace plyne přímo z vlnové rovnice $\square \mathbf{A} = 0$ už pro původní amplitudy $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$. Třetí a čtvrtý vztah znamenají, že obě nové amplitudy jsou vždy kolmé na směr šíření elektromagnetického vlnění. Určeme nyní celkovou energii elektromagnetického pole v rezonanční dutině za pomoci nových amplitud $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E} = \mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}}^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2). \quad (2.485)$$

Energie vyjádřená pomocí nových amplitud má roli Hamiltonovy funkce pro elektromagnetické pole v dutině. Je kvadratická v obou proměnných, jak je tomu u harmonického oscilátoru. Ukážeme, že nové amplitudy jsou vzájemně kanonicky sdružené, tj. že splňují Hamiltonovy rovnice. Za tím účelem Hamiltonovu funkci (2.485) zderivujeme podle obou nových amplitud:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}} = \mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}};$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}} = \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = -\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} = -\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}}.$$

Ve finále tedy máme Hamiltonovy kanonické rovnice

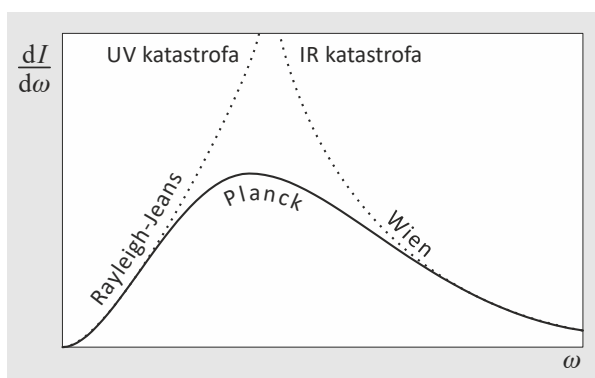
$$\blacktriangleright \quad \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}}; \quad (2.486)$$

$$\blacktriangleright \quad \dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}}. \quad (2.487)$$

Nové amplitudy splňují Hamiltonovy rovnice, jsou tedy kanonicky sdružené. Elektromagnetické pole v dutině lze popsat jako soustavu harmonických oscilátorů se zobecněnými souřadnicemi $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ a zobecněnými hybnostmi $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$.

2.8.5 Tepelné záření

Elektromagnetické pole v dutině, které je v termodynamické rovnováze se stěnami o teplotě T , má charakteristickou závislost intenzity/hustoty energie na frekvenci. Je jedno, zda hovoříme o intenzitě nebo o hustotě energie. Intenzita je tok energie, tedy jde o hustotu energie vynásobenou rychlostí šíření energie, tedy v tomto případě rychlostí světla. Obě veličiny se liší pouze faktorem c . Pro oblast malých frekvencí tuto závislost odvodili anglický fyzik John Rayleigh (1842–1919) a anglický matematik a astronom James Jeans (1877–1946), pro oblast vysokých frekvencí vztah odvodil německý fyzik Wilhelm Wien (1864–1928). V celém rozsahu frekvencí se podařilo odvodit správný vztah až německému fyzikovi Maxu Planckovi (1858–1947) v roce 1900, když zavedl pro tehdejší dobu umělý předpoklad o kvantování energie elektromagnetického záření.



Obr. 2.43: Záření absolutně černého tělesa

Počet módu v dutině

Vyjdeme z „povolných“ vlnových vektorů \mathbf{k} podle vztahu (2.457). Počet vlastních kmitů v pásmu $d\mathbf{k}$ bude

$$\begin{aligned} d\Gamma &= 2 dn_1 dn_2 dn_3 = 2 \frac{L_1 L_2 L_3}{(2\pi)^3} dk_1 dk_2 dk_3 = \\ &= 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{d\omega}{c}. \end{aligned}$$

Koeficient 2 před výrazem zohledňuje dvě nezávislé polarizace elektromagnetického záření. Diferenciály vlnového vektoru jsme vyjádřili ve sférických souřadnicích, 4π je plný prostorový úhel (je jedno, zda ho počítáme v kartézských nebo ve sférických souřadnicích). Diferenciál velikosti vlnového vektoru jsme vyjádřili z disperzní relace $\omega = ck$. Výsledný vztah pro počet stavů ve frekvenčním pásmu $d\omega$ je

►
$$d\Gamma_\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega. \quad (2.488)$$

Rayleighův a Jeansův výpočet

Intenzita vyzářování je dána tokem energie, tedy hustotou energie násobenou rychlostí šíření

$$dI_\omega = uc d\Gamma_\omega \quad (2.489)$$

Pokud budeme předpokládat, že každý mód elektromagnetického záření odpovídá tepelné energii $k_B T$, tj. $u = k_B T/V$, dostaneme Rayleighův-Jeansův zákon

►
$$dI_\omega = \frac{k_B T}{\pi^2 c^2} \omega^2 d\omega, \quad (2.490)$$

který platí dobře pro nízké frekvence a zcela selhává pro vysoké frekvence, kde je podstatné kvantování energie elektromagnetického záření.

Planckův výpočet

Předpokládejme, že je energie kvantována a mohou existovat jen stavy oscilátorů s energií

$$\varepsilon_n = n \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.491)$$

Každý oscilátor se může vyskytovat v různých energetických stavech s různým kvantovým číslem n . Označme w_n pravděpodobnost, že má náhodný oscilátor právě energii ε_n :

$$w_n = C \exp\left[-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}\right] = C \exp[-n \beta \hbar \omega]; \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}. \quad (2.492)$$

Normovací konstantu vypočteme z podmínky, že součet všech pravděpodobností je roven 1 (nějakou energii vybraný oscilátor mít musí):

$$1 = C \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-\beta \hbar \omega]^n = \frac{C}{1 - \exp[-\beta \hbar \omega]} \quad \Rightarrow$$

$$C = 1 - \exp[-\beta \hbar \omega].$$

Správně bychom měli ověřovat konvergentnost geometrické řady, ale to není nutné, protože vždy platí, že kvocient $q = \exp[-x] < 1$ pro $x > 0$. Pravděpodobnost tedy je

►
$$w_n = (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) e^{-\beta n \hbar \omega}; \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}. \quad (2.493)$$

Nyní určíme střední hodnotu energie jednoho oscilátoru:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n w_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \hbar \omega (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) e^{-\beta n \hbar \omega} = \\ &= \hbar \omega (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta n \hbar \omega}. \end{aligned}$$

Potřebnou řadu snadno sečteme jednoduchým trikem:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\alpha n} &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\alpha})^n = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{1-e^{-\alpha}} = \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}. \end{aligned}$$

Výsledek dosadíme do vztahu pro střední hodnotu energie, čitatele i jmenovatele vydělíme $\exp[-\beta\hbar\omega]$ a máme výsledek

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}. \quad (2.494)$$

K výpočtu intenzity opět použijeme vztah (2.489), ale nyní za hustotu energie dosadíme střední hodnotu energie oscilátoru vydělenou objemem:

$$dI_{\omega} = u c d\Gamma_{\omega} = \frac{\bar{\varepsilon}}{V} c d\Gamma_{\omega} = \frac{1}{V} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} c \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega.$$

Po triviální úpravě koeficientů máme slavný Planckův vyzařovací zákon.

$$dI_{\omega} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega. \quad (2.495)$$

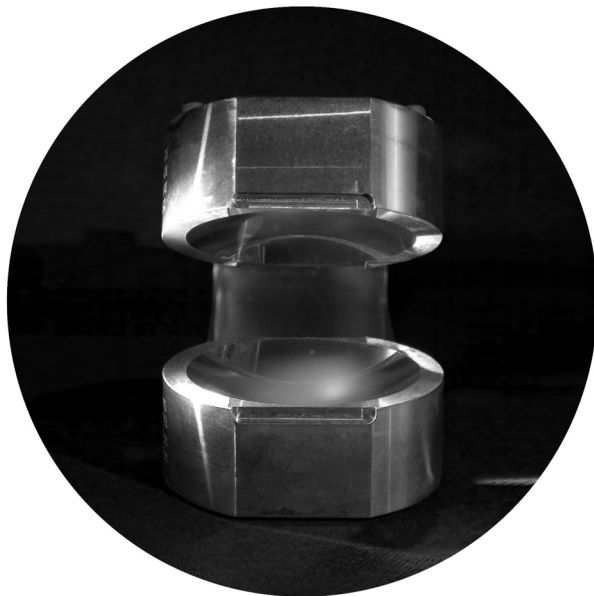
V limitě nízkých frekvencí provedeme rozvoj exponenciály ve jmenovateli do prvního řádu a získáme Rayleighův-Jeansův zákon. Planckova konstanta zmizí, pro malé frekvence není kvantování podstatné. Naopak pro vysoké frekvence je exponenciála ve jmenovateli dominantní, můžeme zanedbat jednotku a dostáváme Wienův zákon pro vysoké frekvence:

$$dI_{\omega} \approx \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 c^2} k_B T \omega^2 d\omega; & \beta\hbar\omega \ll 1, \\ \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \omega^3 e^{-\beta\hbar\omega} d\omega; & \beta\hbar\omega \gg 1. \end{cases} \quad (2.496)$$

* * *

Na následujícím obrázku je supravodivá rezonanční dutina zkonstruovaná francouzským fyzikem Sergem Harochem (*1944) a jeho týmem. Skládá se ze dvou polokulových měděných zrcadel, jejichž povrch je opracován s přesností několika nanometrů a slouží jako podklad pro tenkou vrstvičku niobu, který je supravodivý při teplotách pod 9 kelvinů. Mikrovlnná dutina má otevřenou geometrii, aby jejím středem mohly jeden za druhým prolétat Rydbergovy atomy sloužící jako měřicí zařízení, které je schopné nedestruktivně detekovat počet fotonů v dutině. Rydbergův atom je v superpozici dvou energetických stavů a chová se jako rotující dipól. V přítomnosti fotonu se změni fáze jeho rotace. Při teplotě 0,8 K je podle Planckova vyzařovacího zákona dutina prázdná po 95 % času, nicméně v 5 % času se v ní vyskytuje jeden foton. Harochova mikrovlnná dutina je natolik kvalitní, že v ní každý vzniklý foton přežívá kolem 130 milisekund. To

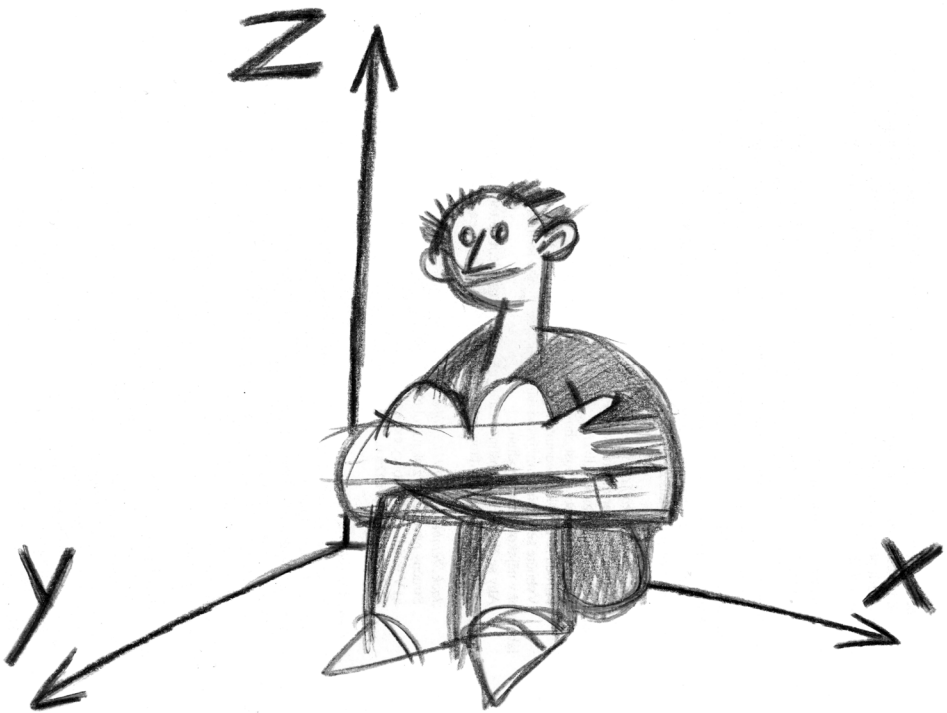
je tak dlouhý čas, že foton odrážející se mezi zrcadly urazí celkovou dráhu kolem 40 000 kilometrů, což odpovídá obvodu Země! Za tuto dobu projde dutinou až tisícovka Rydbergových atomů, které jsou opakovaně (až několiksetkrát) schopny detekovat jednotlivé fotony. Samozřejmě, že v mikrovlnné dutině nemusí být jeden jediný foton, ale třeba i několik fotonů (stačí zvýšit teplotu) nebo je snadné generovat větší množství fotonů za pomoci elektromagnetického impulzu. Za první nedestruktivní měření počtu fotonů získal Haroche Nobelovu cenu pro rok 2012.



Obr. 2.44. Harochova rezonanční dutina



3. Relativita



3.1 Speciální relativita

Před čtením relativistické části „Vybraných kapitol“ by se čtenář měl důkladně seznámit s pojmem metrika a s kontravariantními (horními) a kovariantními (dolními) složkami tenzorů. Horní indexy, například A^μ se transformují za pomoci Lorentzovy matice, dolní indexy, například A_μ , se transformují za pomoci inverzní Lorentzovy matice. Skalární součin dvou vektorů pak lze v Einsteinově sumační konvenci zapsat jako $A_\mu B^\mu$ nebo $g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$. Indexy psané řeckými písmeny probíhají hodnoty 0, 1, 2, 3. Index 0 odpovídá časové části, indexy 1, 2, 3 prostorové části složek popisovaných objektů. Detaily nalezne čtenář v matematické části prvního dílu „Vybraných kapitol“, v kapitole 3.3.6 Tenzory a metrika.

3.1.1 Lorentzova transformace

Rozpor mezi elektrodynamikou a klasickou mechanikou

Poznávání relativnosti pohybu nás zasáhlo ve třech vlnách. První spadá do období sedmáctého století, kdy Galileo Galilei a později Isaac Newton založili klasickou mechaniku, v níž jsou čas a prostor neměnným jevištěm pro pohyb těles. Druhou vlnu z roku 1905 nazýváme speciální relativita, čas a prostor jsou nadále absolutní, ale velikost časového nebo prostorového intervalu už závisí na tom, z jaké souřadnicové soustavy události sledujeme. Poslední je obecná relativita z roku 1916, kde se čas a prostor stává poprvé součástí dění, spoluvytvářejí ho všechny objekty ve vesmíru.

Galileův princip relativity zavádí inerciální soustavu, jakousi ideální souřadnicovou soustavu, v níž platí zákon setrvačnosti (setrvačnost se latinsky řekne *iners*, odsud inerciální soustava), tj. tělesa jsou v klidu nebo se pohybují rovnoměrně přímočaře, pokud na ně nepůsobí síla. Různé inerciální souřadnicové soustavy se vůči sobě mohou pohybovat jen konstantní rychlostí – pokud by vzájemná rychlost nebyla konstantní, nemohly by obě soustavy být současně inerciální. Předpokládejme, že pro polohový vektor částice platí transformace (jednu ze soustav označujeme vlnkou)

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad (3.1)$$

kde \mathbf{v} je vzájemná rychlost obou soustav a \mathbf{r} je polohový vektor částice. Derivováním podle času získáme transformaci rychlosti částice \mathbf{u} mezi oběma soustavami

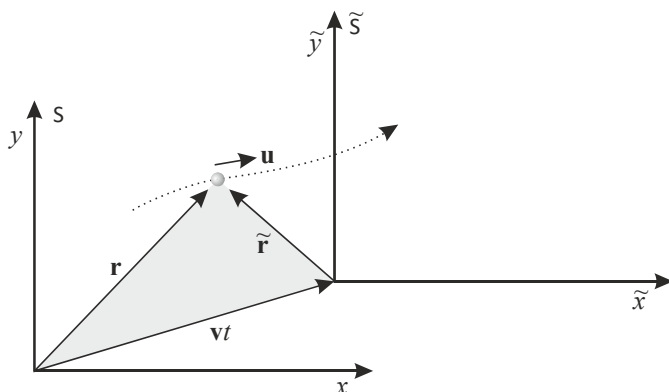
$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}. \quad (3.2)$$

Jde o klasické skládání rychlostí, na které jsme si v mechanice velmi zvykli. Dalším derivováním podle času získáme vztah mezi zrychleními (\mathbf{v} je konstantní):

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}. \quad (3.3)$$

V obou inerciálních soustavách působí stejná zrychlení a tedy stejné síly. Proto mechanické děje dopadnou ve všech inerciálních soustavách stejně a nelze nalézt nějakou

preferovanou soustavu, která by byla lepší než ostatní. To je podstatou tzv. *Galileova principu relativity*.



Obr. 3.1: Částice popisovaná ze dvou různých inerciálních soustav

V 18. a 19. století lidé postupně poznávali zákony elektřiny a magnetizmu a experimentálně nacházeli souvislosti mezi oběma jevy. V roce 1873 sepsal veškeré dosažené výsledky James Clerk Maxwell v monumentálním dvousvazkovém díle *A Treatise on Electricity and Magnetism*. V tomto spise jsou publikovány slavné Maxwellovy rovnice, z nichž plyne, že rychlosti by se měly skládat jiným způsobem, než předpokládal Galileo Galilei a že by rychlost světla měla být dokonce nezávislá na volbě souřadnicové soustavy a ve všech soustavách mít stejnou hodnotu, jak nám vyšlo v kapitole 2.5.2. Tento zjevný rozpor mezi klasickou mechanikou a Maxwellovou elektrodynamikou nelze vyřešit „na papíře“, bylo třeba experimentálně rozhodnout, která z teorií je správně. Poprvé tak učinili Albert Abraham Michelson (1852–1931) a Edward Morley (1838–1923) ve svém slavném experimentu z roku 1887, v němž interferometricky měřili rozdíl rychlosti světla na letící Zemi ve směru jejího pohybu kolem Slunce a ve směru kolmém na tento pohyb. Výsledek dal za pravdu Maxwellově elektrodynamice, rychlost světla nijak nezávisela na pohybu Země. Od té doby byla učiněna řada dalších experimentů, které prokázaly správnost Maxwellovy elektrodynamiky.

Lorentzova transformace

Úprava klasické mechaniky do podoby, ve které je v souladu s elektrodynamikou se nazývá speciální relativita a pochází z roku 1905. Jejím autorem je Albert Einstein, který rozšířil princip relativity i na elektromagnetické děje a předpokládal, že mechanické a elektromagnetické experimenty dopadnou ve všech inerciálních soustavách stejně a žádným mechanickým ani elektromagnetickým experimentem nelze najít preferovanou souřadnicovou soustavu. To samozřejmě ale znamená, že rychlost světla musí být ve všech soustavách stejná. Předpokládejme pro jednoduchost, že se dvě inerciální souřadnicové soustavy pohybují vůči sobě jen v ose x a „opravme“ Galileovu transformaci (2.7) za pomoci opravného koeficientu $\gamma(v)$, který se pro malé rychlosti blíží k jedné:

$$\tilde{x} = \gamma(x - vt), \quad (3.4)$$

Ze symetrie obou soustav plyne, že inverzní transformace musí mít stejný tvar, ale opačný směr rychlosti, tj.:

$$x = \gamma(\tilde{x} + v\tilde{t}). \quad (3.5)$$

Představme si nyní, že v okamžiku, kdy se obě soustavy právě míjejí, blikneme v počátku obou soustav baterkou. Pokud se v obou soustavách světlo šíří stejnou rychlostí c , jak vyžadují Maxwellovy rovnice, musí platit

$$x = ct; \quad \tilde{x} = c\tilde{t}, \quad (3.6)$$

proto z (3.4) a (3.5) máme

$$\begin{aligned} c\tilde{t} &= \gamma(ct - vt); \\ ct &= \gamma(c\tilde{t} + v\tilde{t}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

vynásobením obou rovnic získáme relaci

$$c^2\tilde{t} = \gamma^2(c-v)(c+v)t\tilde{t}, \quad (3.8)$$

v níž můžeme vykrátit oba časy a poté spočítat opravný koeficient gama:

$$\blacktriangleright \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (3.9)$$

Nová transformace souřadnic proto bude

$$\tilde{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (3.10)$$

Rychlost je vzdálenost dělená časovým intervalem. Pokud chceme, aby rychlost světla byla shodná v našich obou soustavách, musí se transformovat jak prostorové souřadnice, tak čas. K nalezení této transformace můžeme využít soustavu rovnic (3.4) a (3.5), v níž už známe koeficient γ . Z první rovnici dosadíme \tilde{x} do druhé rovnice a po snadném výpočtu vyjde

$$\tilde{t} = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (3.11)$$

Nalezená transformace se nazývá Lorentzova transformace a pro celou událost (časovou i prostorovou souřadnici) ji můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \\ \tilde{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \\ \tilde{y} &= y; \\ \tilde{z} &= z, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Elegantnější je maticový zápis Lorentzovy transformace

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_S, \quad (3.13)$$

kde jsme označili

$$\blacktriangleright \beta = v/c; \quad (3.14)$$

$$\blacktriangleright \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (3.15)$$

a souřadnice jsou $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ a $x_3 = z$. Koeficient β má význam bezrozměrné rychlosti, koeficient γ se nazývá Lorentzův kontrakční faktor (uvidíme, že vyjadřuje poměrnou kontrakci délek ve směru pohybu). Časová souřadnice x_0 má stejný rozměr jako prostorové souřadnice. Lorentzova transformace je pojmenována po holandském fyzikovi Hendriku Antoonovi Lorentzovi (1853–1928), který se zabýval transformačními vlastnostmi Maxwellových rovnic. Transformaci k úpravě rovnic klasické mechaniky použil Albert Einstein v roce 1905, kdy vytvořil speciální relativitu – mechaniku, která je v souladu s Maxwellovou elektrodynamikou.

Různé formulace Galileova principu relativity:

- Průběh mechanických dějů nezávisí na volbě inerciální souřadnicové soustavy.
- Ve všech inerciálních soustavách, vzájemně se pohybujících rovnoměrně přímočaře, dopadnou mechanické experimenty stejně.
- Žádným mechanickým experimentem nelze od sebe odlišit dvě inerciální souřadnicové soustavy. Neexistuje preferovaná inerciální soustava.
- Stav pohybu a klidu je relativní, neexistuje absolutní stav klidu, neexistuje jediná klidová inerciální soustava.

Různé formulace Einsteinova principu relativity:

- Průběh mechanických a elektromagnetických dějů nezávisí na volbě inerciální souřadnicové soustavy.
- Ve všech inerciálních soustavách, vzájemně se pohybujících rovnoměrně přímočaře, dopadnou mechanické a elektromagnetické experimenty stejně.
- Žádným mechanickým ani elektromagnetickým experimentem nelze od sebe odlišit dvě inerciální souřadnicové soustavy. Neexistuje preferovaná inerciální soustava.

Nové skládání rychlostí

Transformaci rychlostí získáme diferencováním vztahu (3.12):

$$\tilde{u} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{(dx - v dt) / \sqrt{\dots}}{(dt - v dx/c^2) / \sqrt{\dots}} = \frac{dx - v dt}{dt - v dx/c^2}.$$

Po „vydělení“ čitatele i jmenovatele diferencíálem dt máme

$$\blacktriangleright \quad \tilde{u} = \frac{u-v}{1-uv/c^2}. \quad (3.16)$$

V případě, že je vzájemný pohyb soustav opačný ($v \rightarrow -v$), máme

$$\blacktriangleright \quad \tilde{u} = \frac{u+v}{1+uv/c^2}. \quad (3.17)$$

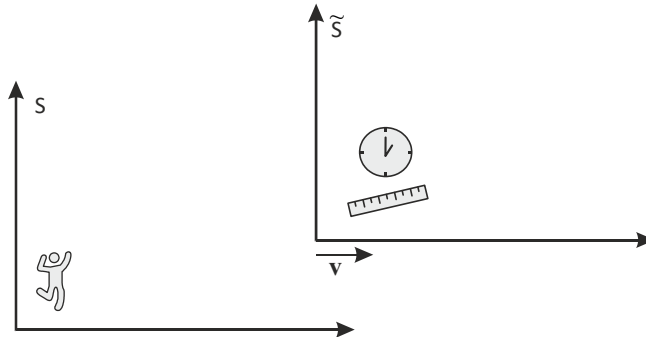
Transformace (3.16) a (3.17) představují nové skládání rychlostí. V čitateli je skládání shodné s Galileovým, ale ve jmenovateli je relativistická oprava, která se uplatní až při vysokých rychlostech. Ani Galileo, ani Newton neměli šanci tuto opravu z tehdejších experimentálních znalostí zjistit. Položíme-li ve vztahu (3.17) jednu z rychlostí, například rychlost u , rovnou rychlosti světla, máme

$$\tilde{u} = \frac{c+v}{1+cv/c^2} = \frac{c+v}{(c+v)/c} = c.$$

Vidíme, že rychlost světla se skutečně v nové transformaci s ničím neskládá a zůstane ve všech inerciálních soustavách stejná. Pro malé rychlosti v porovnání s rychlostí světla je oprava ve jmenovateli zanedbatelná a rychlosti se skládají galileovskými.

Dilatace času a kontrakce délek z Lorentzovy transformace

Požadavek konstantní rychlosti světla s sebou přináší nové jevy. Rychlost světla je vzdálenost dělená časovým intervalem. Pokud má být tento poměr ve všech souřadnicových soustavách stejný, musí být vzdálenosti a časové intervaly závislé na tom, z jaké souřadnicové soustavy se díváme. Předpokládejme, že je pozorovatel v souřadnicové soustavě S , v pohybující se soustavě jsou hodiny a tyč mířící ve směru pohybu.



Obr. 3.2: Měření času a délky tyče

Napišme nyní přímou i zpětnou (bude se lišit znaménkem rychlosti) Lorentzovu transformaci pro čas a souřadnici x :

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; & t &= \frac{\tilde{t} + v\tilde{x}/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \\ \tilde{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; & x &= \frac{\tilde{x} + v\tilde{t}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pro konečné časové intervaly a pro konečné prostorové vzdálenosti máme:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{t} &= \frac{\Delta t - v \Delta x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; & \Delta t &= \frac{\Delta\tilde{t} + v \Delta\tilde{x}/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \\ \Delta\tilde{x} &= \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; & \Delta x &= \frac{\Delta\tilde{x} + v \Delta\tilde{t}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\end{aligned}\quad (3.19)$$

Jde o lineární závislosti, a proto o přesné vztahy. Hodiny se ve vlastní soustavě nepohybují, $\Delta\tilde{x} = 0$, $\Delta\tilde{t} = \Delta t_0$, pro transformaci časového intervalu bude proto výhodné použít druhý vztah (3.19), ze kterého plyne tzv. *dilatace času*

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (3.20)$$

Časový interval je ve vlastní soustavě nejkratší možný. V jakékoli jiné soustavě se bude jevit časový interval delší. Náš život tedy u nás, v naší soustavě, trvá nejkratší dobu. Nyní přejdeme k délce tyče. Její konce musíme měřit současně v souřadnicové soustavě pozorovatele, tj. $\Delta t = 0$, $\Delta\tilde{x} = \Delta x_0$. K odvození tedy bude nejvýhodnější třetí vztah (3.19), ze kterého plyne tzv. *kontrakce délek*

$$\Delta x = \sqrt{1-v^2/c^2} \Delta x_0. \quad (3.21)$$

Délka letících tyčí se zkracuje ve směru pohybu a nejdelší možná je ve vlastní souřadnicové soustavě. Oba vztahy můžeme přepsat s pomocí Lorentzova kontrakčního faktoru:

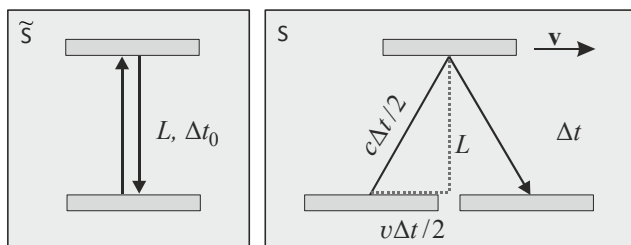
►
$$\Delta t = \gamma \Delta t_0, \quad (3.22)$$

►
$$\Delta x = \Delta x_0 / \gamma. \quad (3.23)$$

Odvození, které jsme provedli, bylo ryze formální a jak dilataci času, tak kontrakci délek jsme získali pouhým diferencováním Lorentzovy transformace. Pojdme nyní oba klíčové vztahy odvodit ještě jednou, ale na základě fyzikálního přístupu.

Dilatace času – fyzikální přístup

Změna chodu času nesmí záviset na způsobu realizace hodin. Proto si vymyslíme co možná nejjednodušší hodiny. Půjde o dvě rovnoběžná zrcadla, mezi nimiž se sem a tam odráží polapený foton. Jeho odrazy budeme považovat za tikot našich hodin. Tyto odrazy budou ale vypadat jinak v soustavě spojené s těmito jednoduchými hodinami a jinak v soustavě, vůči níž se hodiny pohybují:



Obr. 3.3: Jednoduchá realizace hodin – foton mezi dvěma zrcadly

Vzdálenost mezi zrcadly označíme L , jedno tiknutí hodin (foton se vrátí do původního místa na zrcadle) označíme v soustavě spojené s hodinami Δt_0 a v soustavě spojené s pozorovatelem Δt . Nyní napíšeme Pythagorovu větu pro trojúhelník vyznačený v pravé části obrázku 3.3:

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4} = \frac{v^2 \Delta t^2}{4} + L^2 \quad (3.24)$$

Z tohoto vztahu snadno vypočteme časový interval Δt v soustavě pozorovatele

$$\Delta t = \frac{2L/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (3.25)$$

a opět tedy máme

$$\blacktriangleright \quad \Delta t = \gamma \Delta t_0. \quad (3.26)$$

Dilataci času můžeme tedy odvodit přímo z Lorentzovy transformace nebo nepřímou z chodu fotonů v jednoduchých fotonových hodinách. Výsledek je stejný.

Kontrakce délek – fyzikální přístup

Z vesmíru přilétají k Zemi nejružnější částice s vysokými energiemi, kterým říkáme kosmické záření. Pokud částice kosmického záření atakuje zemskou atmosféru, dojde k její srážce s některým atomem či molekulou atmosféry a ve výšce přibližně 15 kilometrů nad zemí vznikne rozsáhlá sprška sekundárních částic. Mezi nimi jsou i miony (těžké elektrony), které objevil americký fyzik Carl Anderson v roce 1936. Střední doba života mionů je přibližně dvě mikrosekundy, a pokud by letěly nejvyšší možnou rychlostí, tj. rychlostí světla, urazily by za 2 mikrosekundy cca 600 metrů. Proto by na povrch Země miony neměly dopadat. Přesto jich dopadá za každou minutu přibližně 10 000 na metr čtvereční. Jak je to možné?

Z pohledu pozorovatele na Zemi mají při svém vzniku miony velmi velkou rychlost, přibližně 0,994 rychlosti světla. Pro ty miony, které se vydají směrem k pozorovateli na povrchu, dochází k dilataci času a jejich průměrná doba života se zvýší přibližně desetinásobně ($\gamma \approx 10$) a alespoň některé z nich doletí až k povrchu.

Jaké je ale vysvětlení z hlediska souřadnicové soustavy spojené s letícím mionem? Z hlediska mionu je jeho střední doba života pouhé 2 mikrosekundy. Povrch Země se ale přibližuje, dochází ke kontrakci vzdálenosti a mion nemusí uletět celých 15 kilometrů, ale méně. Z hlediska pozorovatele na Zemi vysvětluje dopad mionů na povrch Země dilatace času, z hlediska mionu kontrakce vzdálenosti. Vzhledem k tomu, že jde o stejný jev, musí se zkracovat vzdálenost k Zemi ve stejném poměru, v jakém dilatace prodlužuje život mionu, tedy

$$\blacktriangleright \quad \Delta l = \Delta l_0 / \gamma. \quad (3.27)$$

Kontrakci délek tedy opět můžeme odvodit přímo z Lorentzovy transformace nebo nepřímou úvahou o stejné povaze dilatace času a kontrakce délek.

Dnes je dilatace času a kontrakce délek ověřena mnoha experimenty, zejména na velkých urychlovačích hrají tyto jevy primární roli a bez jejich započtení by žádný urychlovač nefungoval. Ke kontrakci délek dochází jen ve směru pohybu obou soustav, v naší notaci jde o směr osy x . Letící objekty proto vidíme prostorově zdeformované.

Rapidita

Lorentzova transformace (3.13) má velmi jednoduché vlastnosti. Inverzní transformaci získáme pouhou záměnou znaménka rychlosti:

$$\blacktriangleright \quad A = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ +\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Determinant obou matic je roven jedné, například pro přímou transformaci platí:

$$\det A = \gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \cdot (1 - v^2/c^2) = 1. \quad (3.29)$$

Z matematického hlediska jde proto o rotační transformaci. Substitucí

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} u &= \gamma; \\ \operatorname{sh} u &= \gamma\beta \end{aligned} \quad (3.30)$$

můžeme Lorentzovu matici přepsat do jednoduchého tvaru

$$\blacktriangleright \quad A = \begin{pmatrix} +\operatorname{ch} u & -\operatorname{sh} u & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh} u & +\operatorname{ch} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Determinant je stále roven jedné, transformační matice je ale nyní formálně shodná s běžnou rotační maticí s obyčejnými siny a kosiny. Ty jsou v Lorentzově transformaci nahrazeny hyperbolickými funkcemi, což znamená, že úhel otočení je imaginární, tedy $\varphi = iu$. Je zřejmé, že rotace probíhá v rovině (t, x) . Veličinu u nazýváme rapiditou a její hodnotu získáme vydělením rovnic (3.30):

$$\blacktriangleright \quad u = \operatorname{ath} \left(\frac{v}{c} \right). \quad (3.32)$$

Pro infinitezimální Lorentzovu transformaci můžeme Taylorovsky rozvinout (3.31):

$$A_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} 1 & -u & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - u \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Infinitezimální Lorentzovu transformaci tak lze rozložit na dvě maticové transformace, první je tvořena jednotkovou maticí (událost se nemění) a druhá matice jen zamění časovou a první prostorovou komponentu události. Infinitezimální Lorentzova transformace je tak jednou z nejjednodušších matematických transformací vůbec. Konečnou Lorentzovu transformaci je možné složit mnohonásobným opakováním transformace (3.33) s malou hodnotou rapidity.

Obecná transformace

Lorentzova transformace se zpravidla zavádí v ose x . Věnujme se nyní zápisu obecné transformace ve všech třech osách naráz. Zavedme nejprve analogicky vztahu (3.33) infinitesimální transformace ve směru jednotlivých os:

$$\blacktriangleright \quad A_{\text{inf},x} \equiv \mathbb{I} - u_x \mathbb{N}_x; \quad A_{\text{inf},y} \equiv \mathbb{I} - u_y \mathbb{N}_y; \quad A_{\text{inf},z} \equiv \mathbb{I} - u_z \mathbb{N}_z, \quad (3.34)$$

kde \mathbb{I} je jednotková matice a \mathbb{N}_k tzv. generátory Lorentzovy transformace dané vztahy

$$\blacktriangleright \quad \mathbb{N}_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{N}_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.35)$$

$$\mathbb{N}_z \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jednotlivé rapidity u_k souvisí se vzájemnou rychlostí pohybu obou soustav v_k vztahy

$$u_k = \text{ath}(v_k/c), \quad (3.36)$$

Infinitesimální Lorentzovy transformace (3.34) jsou velmi elegantní a jednoduché. Generátory (3.35) pouze zaměňují hodnoty časové a jedné z prostorových složek. Oproti původnímu zápisu (3.12) jde o výrazný posun. Představme si nyní, že chceme zapsat transformaci s konečnou rapiditou u , například v ose x . Takovou transformaci můžeme složit jako n opakování transformace s rapiditou u/n :

$$u = n \frac{u}{n}; \quad (3.37)$$

Provedeme-li limitu $n \rightarrow \infty$, půjde o mnohonásobné opakování infinitesimální transformace (3.34):

$$A_x = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{\text{inf}}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} - \frac{u_x}{n} \mathbb{N}_x \right)^n = e^{-u_x \mathbb{N}_x} \quad (3.38)$$

Jde o podobný postup, jaký jsme prováděli v prvním díle „Vybraných kapitol“ s rotacemi v rovině v kapitole 1.3.2.3. Exponenciála v posledním výrazu je chápána jako funkce operátoru a lze ji určit například ze spektrálního rozvoje (viz kapitola 1.3.4.5). Obecná Lorentzova transformace probíhající ve všech třech osách naráz bude mít tvar

$$\blacktriangleright \quad A(\mathbf{u}) = e^{-\mathbf{u} \cdot \mathbf{N}}; \quad u_k = \text{ath}(v_k/c); \quad \mathbf{N} \equiv (\mathbb{N}_x, \mathbb{N}_y, \mathbb{N}_z). \quad (3.39)$$

Matice konečné Lorentzovy transformace nekomutují $A_x A_y \neq A_y A_x$. Infinitesimální generátory v argumentu exponenciály lze ale díky zavedení rapidity jednoduše skládat, což umožní zápis obecné Lorentzovy transformace (tzv. *Lorentz boost*) ve tvaru (3.39).

3.1.2 Minkowského metrika

Před čtením této části by měl mít čtenář osvojenou techniku zvyšování a snižování indexů, pojem metriky, kovariantních a kontravariantních indexů. Detaily jsou v prvním díle „Vybraných kapitol“ v části I. 3.3.6 Tenzory a metrika. Zde jen shrneme nejpodstatnější vztahy a myšlenky a zopakujeme nejdůležitější pasáže.

Čtyřvektory

Čtyřvektorem rozumíme čtyřrozměrný vektor, který lze rozložit v nějaké bázi $\{\mathbf{e}_\alpha\}$

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha=0}^3 A^\alpha \mathbf{e}_\alpha = A^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \quad (3.40)$$

Řecké indexy probíhají hodnoty 0 (časová osa), 1, 2, 3 (prostorové osy). Složky čtyřvektoru jsou značeny horními indexy (kontravariantními) a transformují se pomocí Lorentzovy matice. Dolní indexy (kovariantní) se transformují jako prvky báze. Transformace dolních indexů musí probíhat přes inverzní Lorentzovu matici, jediné tak zůstane kombinace (3.40) objektem nezávislým na volbě báze. Nadále platí Einsteinova sumační konvence, ale sčítání probíhá vždy přes jeden dolní a jeden horní index. Výsledek takového součtu je opět nezávislý na volbě báze. Standardní poloha indexů transformační matice je první horní a druhý dolní. Transformace čtyřvektorů tak má tvar

$$\tilde{A}^\alpha = A^\alpha{}_\beta A^\beta; \quad A^\alpha{}_\beta \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Skalární součin dvou čtyřvektorů můžeme zapsat jako

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \cdot (B^\beta \mathbf{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta. \quad (3.42)$$

K zadání skalárního součinu tedy postačí znát skalární součiny prvků báze:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta; \quad (3.43)$$

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \quad (3.44)$$

Koeficienty $g_{\alpha\beta}$ se nazývají metrika, neboť určují skalární součin, a tím velikosti čtyřvektorů a úhly mezi nimi, tedy metrické vlastnosti. Zavedme inverzní matici k metrice

$$g^{\alpha\beta} \equiv (g_{\alpha\beta})^{-1}; \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma. \quad (3.45)$$

Prvky jednotkové matice (Kroneckerův symbol) jsou označeny $\delta^\alpha{}_\gamma$. Metriku lze využít ke snižování a zvyšování indexů. Normální poloha indexů je u složek čtyřvektorů nahoře a u prvků báze dole. Můžeme ale zavést pomocné (duální) objekty vztahy

$$\mathbf{e}^\alpha \equiv g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta; \quad A_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} A^\beta. \quad (3.46)$$

Nejde o skutečné prvky báze ani o skutečné komponenty vektoru, ale o formální lineární kombinace dané metrikou. Vždy platí, že index nahore znamená transformaci pomocí stejné matice, jakou se transformují složky vektorů, a index dole znamená transformaci pomocí stejné matice, jakou se transformují prvky báze. Za pomoci metriky tak můžeme indexy libovolně snižovat nebo zvyšovat, stačí jen dodržet pravidlo, že sčítáme přes jeden horní a jeden dolní index. Detaily a příklady nalezneme čtenář v kapitole I. 3.3.6 prvního dílu „Vybraných kapitol“. Skalární součin nyní můžeme zapsat několika způsoby:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A^\alpha B_\alpha,$$

kde jsme druhý index snížili za pomoci metriky. Mohli jsme ale také snížit první index:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A_\beta B^\beta = A_\alpha B^\alpha.$$

Platí tedy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A^\alpha B_\alpha = A_\alpha B^\alpha. \quad (3.47)$$

Definici inverzní metriky (3.45) můžeme opět chápat jako snižování či zvyšování indexů:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} &= \delta^\alpha_\gamma; \\ g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} &= g^\alpha_\gamma; \end{aligned} \Rightarrow g^\alpha_\gamma = \delta^\alpha_\gamma. \quad (3.48)$$

Metrika a Kroneckerovo delta jsou tak jediným objektem. Pokud jsou oba indexy dole, jde o metrické koeficienty. Pokud jsou oba indexy nahore, jde o inverzní matici k metrickým koeficientům a pokud jsou indexy smíšené, jde o Kroneckerovo delta, tedy prvky jednotkové matice. Metrika tak není nic jiného než jednotková matice s patřičně posunutými indexy. Za pomoci tenzorového zápisu můžeme psát

$$\mathbf{1} = \delta^\alpha_\beta \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta = g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta. \quad (3.49)$$

Minkowského metrika

Už víme, že ve speciální relativitě se událost transformuje (stejně tak rozdíl blízkých událostí) podle Lorentzovy matice:

$$\tilde{x}^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta; \quad d\tilde{x}^\alpha = A^\alpha_\beta dx^\beta; \quad A^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

kde A^α_β je Lorentzova transformační matice. Ve speciální relativitě chápeme každou čtveřici veličin, jež se transformuje Lorentzovou transformací (tedy stejně jako událost nebo infinitezimální rozdíl událostí), jako složky čtyřvektoru:

$$\blacktriangleright \quad \tilde{V}^\alpha = A^\alpha_\beta V^\beta. \quad (3.51)$$

K základním čtveřicím patří samozřejmě *událost* (souřadnice času a místa, kde se děj odehrál či odehraje). Z teoremu Noetherové víme, že časoprostorovým translacím od-

povídají zákony zachování energie a hybnosti – tyto veličiny tvoří *čtyřhybnost* (energie a hybnost). Další čtveřicí je *vlnový čtyřvektor* (úhlová frekvence a vlnový vektor), jednotlivé složky souvisí s časovou a prostorovou změnou fáze vlnění. V části této knihy věnované elektromagnetickému poli jsme se seznámili s *čtyřpotenciálem elektromagnetického pole* (skalární a vektorový potenciál) a *čtyřtokem náboje* (zdrojové členy Maxwellových rovnic – hustota náboje a tok náboje). Do čtveřice také můžeme uspořádat časové a prostorové derivace a vytvořit *čtyřgradient*. V soustavě SI musíme zajistit, aby všechny čtyři složky čtyřvektorů měly stejný rozměr. To můžeme učinit nejjednodušeji vynásobením nebo vydělením časové složky univerzální konstantou c (rychlostí světla ve vakuu):

$$\begin{aligned} x^\mu &\equiv \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & P^\mu &\equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}; & k^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; \\ A^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; & J^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \rho_Q c \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix}; & \partial_\mu &\equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial ct \\ \partial/\partial \mathbf{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Poznámka 1: Řeckými indexy budeme značit zásadně jen složky čtyřvektorů (index 0 odpovídá časové části, indexy 1, 2, 3 prostorové části).

Poznámka 2: U čtyřgradientu jde o kovariantní (dolní) index, protože $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, tedy skutečné složky vektorů jsou ve jmenovateli. Pokud zapisujeme index v čitateli, musí mít opačnou polohu, neboť se transformační matice změní na inverzní!

Z podmínky konstantní rychlosti světla ve všech inerciálních soustavách postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} = c &\Rightarrow dl = c dt \Rightarrow \\ \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = c dt &\Rightarrow \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2 &\Rightarrow \\ -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 &\Rightarrow \\ -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0. & \end{aligned} \quad (3.53)$$

Poslední řádek je rovnicí šíření světla ve speciální relativitě a můžeme z něho odečíst metriku speciální relativity, tzv. Minkowského metriku. Značíme ji $\eta_{\alpha\beta}$. Je diagonální a v časové části má minus. Totéž platí i pro inverzní matici (metriku s horními indexy). Metrika se smíšenými indexy je jednotková matice, tj. její prvky jsou Kroneckerovy symboly delta:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; \quad (3.54)$$

$$\eta^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; \quad \eta_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Zjednodušeně se často Minkowského metrika píše jako $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Rovnici (3.53) můžeme za pomoci Minkowského metriky napsat jako

$$\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = 0. \quad (3.56)$$

Za pomoci metriky nyní snadno určíme kovariantní složky běžných čtyřvektorů a kontravariantní složku čtyřgradientu:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad x_{\mu} &\equiv \begin{pmatrix} -ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & P_{\mu} &\equiv \begin{pmatrix} -E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}; & k_{\mu} &\equiv \begin{pmatrix} -\omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; \\ A_{\mu} &\equiv \begin{pmatrix} -\phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; & J_{\mu} &\equiv \begin{pmatrix} -\rho_Q c \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix}; & \partial^{\mu} &\equiv \begin{pmatrix} -\partial/\partial ct \\ \partial/\partial \mathbf{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Skalární součin dvou čtyřvektorů je definován jako

$$\blacktriangleright \quad A_{\mu} B^{\mu} = A^{\mu} B_{\mu} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3. \quad (3.58)$$

Najděme některé typické skalární součiny, které vedou na známé výrazy:

$$k \cdot x = k^{\mu} x_{\mu} = k^0 x_0 + k^1 x_1 + k^2 x_2 + k^3 x_3 = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x},$$

$$ds^2 \equiv dx \cdot dx = dx_{\mu} dx^{\mu} = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

$$J \cdot A \equiv J_{\mu} A^{\mu} = -\rho_Q \phi + \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{A};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{\mu} j^{\mu} = 0;$$

$$\square f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{\mu} \partial^{\mu} f = 0.$$

Často se používá zkrácený zápis, při kterém se derivace píše za čárku. Indexy před čárkou jsou skutečnými indexy, indexy za čárkou jsou derivacemi:

$$\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \equiv \partial_{\nu} V^{\mu} \equiv V^{\mu}_{,\nu}.$$

Jde vlastně o nejúspornější zápis derivace vůbec, ze kterého je zřejmé na první pohled, jak se derivace ve speciální relativitě transformuje. Uveďme další příklady:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu} \varphi \equiv \varphi^{,\mu}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} \varphi \equiv \varphi_{,\mu};$$

$$\square f \equiv \partial_{\mu} \partial^{\mu} f \equiv f_{,\mu}{}^{,\mu}.$$

Interval, kauzalita

Vztah (3.56) je diferenciální rovnicí pro šíření světla, jeho levá strana má ale i samostatný smysl. Označme ji

$$\blacktriangleright \quad ds^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.59)$$

Této kombinaci se ve speciální relativitě říká interval. Ze své podstaty je interval skalárem, tedy invariantem, který nezávisí na volbě souřadnicové soustavy. Pokud interval rozepíšeme, máme

$$\blacktriangleright \quad ds^2 \equiv -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.60)$$

Při pohledu z různých souřadnicových soustav se mění časové intervaly dt (dilatace času) i prostorové vzdálenosti dx_k (kontrakce délek), ale jejich kombinace (3.60) je ve všech souřadnicových soustavách stejná. Ukažme si to v následujícím příkladu:

● Příklad 3.1: Neměnnost intervalu

Vyjádříme interval ve vlnkované souřadnicové soustavě a postupně převedme jednotlivé diferenciály pomocí Lorentzovy transformace (3.12) či (3.13)

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= -c^2 d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 = \\ &= -c^2 [\gamma dt - \gamma\beta dx/c]^2 + [\gamma dx - \gamma\beta c dt]^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= -c^2 \gamma^2 dt^2 + 2c\gamma^2 \beta dt dx - \gamma^2 \beta^2 dx^2 + \gamma^2 dx^2 - 2\gamma^2 \beta c dt dx + \gamma^2 \beta^2 c^2 dt^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= -c^2 [\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2] dt^2 + [\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2] dx^2 + dy^2 + dz^2. \end{aligned}$$

Koeficienty v hranatých závorkách jsou ale rovny jedné:

$$\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = (1 - \beta^2)^{-1} (1 - \beta^2) = 1,$$

a proto platí

$$\blacktriangleright \quad d\tilde{s}^2 = ds^2. \quad \blacktriangleright$$

Ve speciální relativitě se tedy vše mění, jediný interval je jistotou, která dá ve všech souřadnicových soustavách stejné číslo. Interval ale můžeme použít i v rámci jedné jediné souřadnicové soustavy, a to pro vypočtení „časoprostorové odlehlosti“ dvou událostí, jak si ukážeme v zápětí.

Události jsou reprezentovány body v časoprostorovém diagramu. Na následujícím obrázku je například událost A se souřadnicemi (t_A, x_A, y_A, z_A) . Může jít například o zrnko písku položené na stůl. Posloupnost událostí souvisící s jedním objektem se nazývá světočára objektu. Pokud bude naše zrnko písku nehybně ležet na stole, přísluší mu světočára b . Čas plyne, ale prostorové souřadnice se nemění. Interval mezi počáteční událostí A a koncovou B bude

$$\Delta s^2 = -c^2 (t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = -c^2 (t_B - t_A)^2 < 0.$$

Spočteme-li interval mezi oběma událostmi, bude prostorová část nulová (zrnko se nepohybuje) a časová nenulová (čas plyne). Výsledek bude proto záporný. Pokud za-

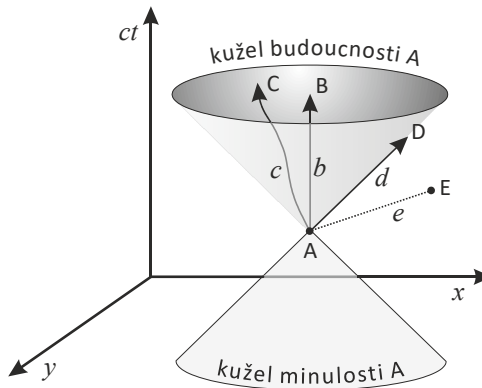
fouká vítr, zrnko se bude pohybovat a jeho osud bude například popsán světočárou c . Interval mezi počátečním a koncovým stavem bude

$$\Delta s^2 = -c^2(t_C - t_A)^2 + (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2$$

Výsledek je opět záporný, protože je světočára „přimknuta“ více k časové ose a časová část dává záporný vklad. Pokud je interval mezi dvěma událostmi záporný, může první událost ovlivnit druhou, neboť se objekt může do místa druhé události přemístit podsvětelnou rychlostí. O takové dvojici událostí říkáme, že je kauzálně (příčinně) spojená. Události B nebo C mohou být důsledkem události A. Obě se nacházejí v tzv. kuželu budoucnosti události A.

Představme si nyní, že událost A nesouvisí se zrnkem písku, ale s letícím fotonem. Po určité době foton doletí do jiného místa a na našem diagramu tomu bude odpovídat událost D. Jeho světočára d je na diagramu skloněná pod úhlem 45° , což odpovídá nejvyšší možné rychlosti. Do intervalu přispěje stejnou měrou jak záporná časová část, tak kladná prostorová část a interval mezi událostmi A a D bude nulový, což odpovídá rovnici šíření světla (3.56). Počáteční a koncová událost pro světlo leží na kuželové ploše dané vztahem $\Delta s^2 = 0$.

Na obrázku je ještě událost E, která leží mimo kužel budoucnosti události A. Pokud bychom se do ní chtěli přemístit z polohy odpovídající A, museli bychom letět nadsvětelnou rychlostí. Takové dvě události nejsou kauzálně spojené a jedna nemůže být příčinou druhé. Interval mezi nimi je kladný. Událost E se nenachází v kuželu budoucnosti události A. Obdobnými úvahami dospějeme k závěru, že událost A mohly ovlivnit pouze události ležící v jejím kuželu minulosti.



Obr. 3.4: Kužel budoucnosti a kužel minulosti

Příčinná souvislost

Dvě události mohou být kauzálně spojené, pokud platí $\Delta s^2 < 0$. Události nejsou v příčinné souvislosti, pokud je $\Delta s^2 > 0$.

Interval je invariantem Lorentzovy transformace, tedy ať ho spočítáme v kterékoli souřadnicové soustavě, dostaneme vždy stejný výsledek. Tento fakt zajišťuje, že příčina a důsledek jsou události, jejichž pořadí nelze zaměnit volbou jiné souřadnicové soustavy. Žádným způsobem nemůžeme ovlivnit události, které se už staly.

Vlastní čas

Pokud spojíme dvě události s letící částicí, můžeme interval vyjádřit jak v laboratorní soustavě, tak v soustavě spojené s částicí ($dx = 0$, $t = \tau$):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 d\tau^2, \quad (3.61)$$

kde τ je tzv. vlastní čas, tj. čas plynoucí u částice samotné. Zřejmě platí

$$\blacktriangleright \quad ds^2 = -c^2 d\tau^2, \quad (3.62)$$

tedy vlastní čas je také invariantem Lorentzovy transformace. Jaký je vztah mezi vlastním časem τ a souřadnicovým časem t ? Abychom to zjistili, vyjádříme interval ve vlastní soustavě částice a v obecné souřadnicové soustavě. Odsud dostaneme vztah mezi oběma časy:

$$\begin{aligned} -c^2 d\tau^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \Rightarrow \\ c^2 d\tau^2 &= dt^2 \left(c^2 - (dx/dt)^2 - (dy/dt)^2 - (dz/dt)^2 \right) \quad \Rightarrow \\ d\tau &= \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} dt. \end{aligned}$$

Mezi oběma časy platí tedy vztah

$$\blacktriangleright \quad dt = \gamma d\tau; \quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma. \quad (3.63)$$

Nejde o nic jiného než o vztah pro dilataci času. Ve vlastní soustavě plyne čas nejrychleji, časový úsek mezi dvěma vlastními událostmi bude nejkratší možný. Vlastní čas se využívá jako vhodný parametr při parametrizaci světočáry částice. Nelze ho ale použít pro světlo, U fotonů vlastní čas neplyne ($ds^2 = 0$) a pro parametrizaci je třeba využít jiný parametr, například prolétlou vzdálenost (vlastní délku trajektorie).

Transformace fyzikálních veličin

Viděli jsme, že za pomoci Lorentzovy matice můžeme transformovat čas a prostorové souřadnice událostí z jedné inerciální souřadnicové soustavy do jiné. Stejným způsobem lze ale transformovat jakýkoli čtyřvektor,

$$\blacktriangleright \quad \tilde{A}^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu; \quad \text{resp. } \tilde{A} = \Lambda \cdot A, \quad (3.64)$$

což umožňuje snadné přepočty veličin mezi souřadnicovými soustavami. V případě, že jde o dvojindexovou veličinu, například tenzor elektromagnetického pole, provádí se transformace každého indexu zvlášť:

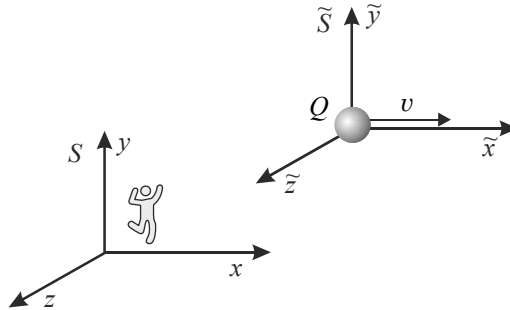
$$\blacktriangleright \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}; \quad \text{resp. } \tilde{F} = \Lambda \cdot F \cdot \Lambda^T. \quad (3.65)$$

Napravo je příslušná transformace v maticovém zápise (bez složek). Sloupcový čtyřvektor vynásobíme zleva Lorentzovou maticí. Dvojindexový tenzor vynásobíme zleva Lorentzovou maticí a zprava transponovanou Lorentzovou maticí. Výsledkem bude čtyřvektor či tento tenzor v nové souřadnicové soustavě. Takto lze velmi snadno trans-

formovat například tenzor elektromagnetického pole. Uvedeme tři příklady: 1) výpočet pole letícího náboje, 2) výpočet relativistického Dopplerova jevu a 3) transformaci elektromagnetických polí mezi dvěma soustavami.

Heavisideovo pole

Představme si, že kolem nás prolétá konstantní rychlostí nabitá částice. Jaké pole bude, jakožto pozorovatelé vnímat?



Obr. 3.5: Letící náboj

Využijte transformaci čtyřpotenciálu pole $(\phi/c, \mathbf{A})$. V soustavě spojené s nábojem je vektorový potenciál nulový (není zde přítomno magnetické pole) a skalární potenciál je dán Coulombovým zákonem:

$$\tilde{\phi} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}}. \quad (3.66)$$

Provedeme inverzní Lorentzovu transformaci do soustavy S pozorovatele

$$\begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q/(4\pi\epsilon_0 c\tilde{r}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

Po vynásobení matic dostáváme pro potenciály v soustavě pozorovatele

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}}; \\ A_x &= \frac{\gamma\beta Q}{4\pi\epsilon_0 c\tilde{r}}; \\ A_y &= 0; \\ A_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Ve výsledku jsme označili

$$\tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.69)$$

Je zřejmé, že magnetické pole je již nenulové a elektrické pole je také modifikováno. Nový tvar polí je

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\gamma Q (x-vt)}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \\ E_y &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{\gamma Q y}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \\ E_z &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\gamma Q z}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Magnetické pole určíme jako rotaci vektorového potenciálu:

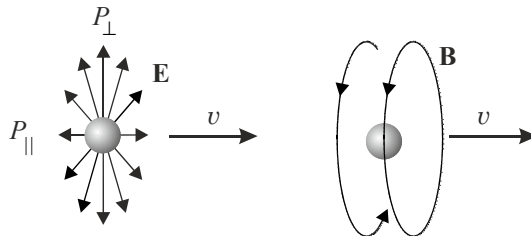
$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\gamma\beta Q z}{4\pi\epsilon_0 c [\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = +\frac{\gamma\beta Q y}{4\pi\epsilon_0 c [\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Důležitá je kolmá a rovnoběžná složka elektrického pole, určíme ji v místech daných na obrázku polohou pozorovatele P_{\parallel} a P_{\perp}

$$E_{\perp} = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \Big|_{x=vt} = \gamma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2)}, \quad (3.72)$$

$$E_{\parallel} = E_x \Big|_{\substack{y=0 \\ z=0}} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x-vt)^2}. \quad (3.73)$$

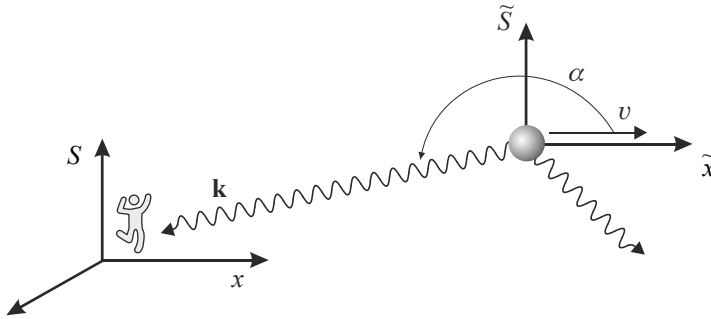
Vidíme, že elektrické pole je napříč pohybu nataženo faktorem γ a ve směru pohybu je stlačeno faktorem $1/\gamma^2$. Pole se pohybuje spolu s nábojem. Magnetické pole tvoří kružnice kolem osy pohybu náboje a slábne se vzdáleností od náboje. Pro nekonečnou řadu nábojů bychom získali pole kolem vodiče. Pole je pojmenováno podle anglického fyzika a matematika Olivera Heavisidea (1850–1925).



Obr. 3.6: Pole letícího náboje

Dopplerův jev

Odvoďme nyní relativistický Dopplerův jev pomocí transformace vlnového čtyřvektoru $(\omega/c, \mathbf{k})$. Pozorovatel je v soustavě S , zdroj periodického signálu je v soustavě označené vlnkou. Vlnění se šíří do všech směrů, nás zajímá jen vlnový vektor \mathbf{k} , který míří právě k pozorovateli. Úhel mezi směrem pohybu zdroje vlnění a směrem k pozorovateli je označen α (musíme rozlišovat α^0 v soustavě zdroje a α v soustavě pozorovatele).



Obr. 3.7: Relativistický Dopplerův jev

V soustavě \tilde{S} spojené se zdrojem záření je řešení velmi jednoduché:

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ k \cos \alpha_0 \\ k \sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ \omega_0/c \cdot \cos \alpha_0 \\ \omega_0/c \cdot \sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{S}}. \quad (3.74)$$

Nyní provedeme Lorentzovu transformaci do soustavy pozorovatele S (jde o inverzní Lorentzovu transformaci):

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ \omega_0/c \cdot \cos \alpha \\ \omega_0/c \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ \omega_0/c \cdot \cos \alpha_0 \\ \omega_0/c \cdot \sin \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{S}}. \quad (3.75)$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímá frekvence v místě pozorovatele, postačí nalézt jen nultý řádek maticového násobení:

$$\blacktriangleright \quad \omega = \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha_0 \right) \omega_0. \quad (3.76)$$

Tento vztah je známý jako relativistický Dopplerův jev. V limitě nízkých rychlostí (zanedbáme členy kvadratické a vyšší v/c) je $\gamma \rightarrow 1$ a $\omega = (1 + v/c \cos \alpha_0) \omega_0$. Při vzdalování zdroje je $\alpha_0 = 180^\circ$ a $\omega = (1 - v/c) \omega_0$, při přibližování zdroje vlnění je $\alpha_0 = 0^\circ$ a $\omega = (1 + v/c) \omega_0$. Jde o známé nerelativistické Dopplerovy vztahy. Při vyšších rychlostech jsou tyto vztahy modifikovány koeficientem γ . Jestliže zdroj záření pozorovatele míjí ($\alpha_0 = \pm 90^\circ$) je $\omega = \gamma \omega_0$. Ke změně frekvence tedy dochází i v případě, že se zdroj nevzdaluje ani nepřibližuje. Tento jev se nazývá transverzální Dopplerův jev a jde o čistě

relativistický jev, který nemá v nerelativistické fyzice obdoby. Je způsoben změnou chodu času v pohybuující se soustavě (dilataci času). Prostorové relace maticové transformace dají vztahy

$$\omega \cos \alpha = \gamma \omega_0 (\beta + \cos \alpha_0), \quad (3.77)$$

$$\omega \sin \alpha = \omega_0 \sin \alpha_0. \quad (3.78)$$

Pokud obě rovnice vydělíme, získáme vztah mezi oběma úhly, který je nezávislý na frekvencích a závisí jen na vzájemné rychlosti soustav:

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha_0}{\gamma \beta + \gamma \cos \alpha_0} \quad (3.79)$$

Ze vztahu je zřejmé, že vlnoplocha změnila směr a že tato změna závisí jen na vzájemné rychlosti soustav v . Relativistický Dopplerův jev jsme našim postupem odvodili jen pro světlo ($\omega = ck$) a nikoli pro obecné vlnění látky.

Obecná transformace elektromagnetického pole

Velmi důležitou úlohou je přepočít elektromagnetických polí mezi dvěma různými, navzájem se pohybuujícími, inerciálními soustavami. Jsou dva způsoby, jak transformaci provést. První z nich je transformace čtyřpotenciálu dle vztahu (3.64). Výhodou je rychlý převod, nevýhodou je výpočet potenciálů z polí a následně polí z nových potenciálů. Z toho důvodu je přímočařejší transformace tenzoru elektromagnetického pole (2.291) pomocí vztahu (3.65). Obě metody vedou k transformačním vztahům

$$\blacktriangleright \quad \tilde{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E} \right) \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad (3.80)$$

$$\blacktriangleright \quad \tilde{\mathbf{B}} = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{B} \right) \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (3.81)$$

Pole se mění i při pomalém pohybu souřadnicových soustav a podle volby souřadnicové soustavy se mění podíl elektrické a magnetické složky pole. V nerelativistickém případě (vzájemná rychlost pohybu souřadnicových soustav je podstatně menší než rychlost světla) má transformace polí jednodušší tvar

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.82)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}. \quad (3.83)$$

Typickým využitím je například zformulování Ohmova zákona v pohybuující se vodivé tekutině, například v plazmatu, kde platí Ohmův zákon ve tvaru

$$\mathbf{j}_Q = \sigma \tilde{\mathbf{E}}. \quad (3.84)$$

Elektrické pole ve vodivé tekutině je třeba vyjádřit za pomoci polí měřených v laboratorní soustavě:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{j}_Q = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3.85)$$

Tento vztah se hojně využívá například v nerelativistické magnetohydrodynamice, v níž je plazma popisováno jako vodivá tekutina (viz poslední díl „Vybraných kapitol“).

3.1.3 Relativistická dynamika

Pohybová rovnice

Pokud chceme zavést správně čtyřrychlost, nemůžeme derivovat událost podle souřadnicového času. Takto definovaná čtyřrychlost by se netransformovala za pomoci Lorentzovy matice. Čtyřrychlost je nutné zavést za pomoci vlastního času, tedy

$$\blacktriangleright \quad U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.86)$$

Vlastní čas zde vystupuje jako parametr pohybu částice, tj. $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Vlastní čas nelze jako parametr použít pro světlo, neboť se nelze „odstěhovat“ do soustavy spojené se světlem (v této soustavě by se světlo nepohybovalo, což není možné). Dráhu fotonu je nutné parametrizovat jinak, například vlastní délkou λ prolétlé dráhy. Snadno nalezneme vztah čtyřrychlosti k běžně definované rychlosti částice:

$$\blacktriangleright \quad U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \gamma = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Pro pomalé pohyby je časová složka čtyřrychlosti dominantní. Čtyřhybnost zavedeme za pomoci čtyřrychlosti tak, že ji vynásobíme klidovou hmotností částice, tj.

$$\blacktriangleright \quad P^\mu \equiv m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Transformační vlastnosti budou opět zachovány, čtyřhybnost je čtyřvektorem. Pokud zavedeme „pohybovou“ hmotnost vztahem

$$\blacktriangleright \quad m \equiv \gamma m_0, \quad (3.89)$$

budeme pro čtyřhybnost mít jednoduchý vztah

$$\blacktriangleright \quad P^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ m \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (3.90)$$

Musíme mít ale na paměti, že označení m není skutečná hmotnost, ale jen zkratka pro součin γm_0 . Sám Einstein pohybovou hmotnost nezaváděl. Porovnáme-li vyjádření čtyřhybnosti (3.52) s vyjádřením (3.90), máme okamžitě známé vztahy

$$\blacktriangleright \quad E = mc^2; \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}; \quad m \equiv \gamma m_0. \quad (3.91)$$

Vztah pro energii je známým Einsteinovým vztahem, který vyjadřuje ekvivalenci mezi hmotností a energií. K jeho významu se ještě vrátíme. Druhý vztah kopíruje klasickou definici hybnosti. V obou vztazích je třeba mít na paměti, že nejde o skutečnou hmotnost, ale symbolem m je označen součin Lorentzova kontrakčního faktoru a klidové hmotnosti částice či objektu.

Čtyřzrychlením budeme rozumět čtyřvektor, který získáme derivováním čtyřrychlosti podle vlastního času, tj.

$$\blacktriangleright \quad a^\mu \equiv \frac{dU^\mu}{d\tau}. \quad (3.92)$$

Nehleďte logiku v používání malých a velkých písmen, žádná zde není. Jediným kritériem je, aby bylo co nejméně konfliktů se značením v jiných částech učebnice. Pohybovou rovnicí ve speciální relativitě píšeme v jednom z tvarů, které kopírují klasickou mechaniku:

$$\blacktriangleright \quad \frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu, \quad (3.93)$$

$$m_0 \frac{dU^\mu}{d\tau} = F^\mu. \quad (3.94)$$

Na levé straně musí vystupovat vlastní čas a klidová hmotnost, jedině tak zůstane levá strana čtyřvektorem transformujícím se pomocí Lorentzovy matice. Díky tomu je i čtyřsíla na pravé straně opět čtyřvektorem. Správně volený vztah pro čtyřsílu dá pohyb objektu ve shodě s pozorováním. To je jediné kritérium volby čtyřsíly. V kapitole I.1.6.3 prvního dílu „Vybraných kapitol“ jsme ukázali, že pro pohyb nabitě částice v elektrickém a magnetickém poli je Lorentzova síla působící na objekt dána vztahem (1.267)

$$\blacktriangleright \quad F^\mu = QF^{\mu\nu}U_\nu. \quad (3.95)$$

Vždy je třeba si uvědomit, že čtyřrozměrný zápis nám neposkytuje jen informaci o časové změně hybnosti (prostorová část) ale i o časové změně energie objektu (časová část).

Všechny čtyřvektory, které jsme dosud zavedli, mají také svou velikost, obdobně, jako je tomu u běžných třírozměrných vektorů, kde je velikost definována jako odmocnina ze skalárního součinu vektoru se sebou samým. Vzhledem k tomu, že u čtyřvektorů může vyjít skalární součin vektoru se sebou samým

$$V \cdot V = V_\mu V^\mu = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = -(V^0)^2 + (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 \quad (3.96)$$

záporný (dominuje časová část), mohly by být problémy při odmocňování. Proto chápeme jako velikost čtyřvektoru přímo výsledek skalárního součinu (3.96). Ve skutečnosti tedy jde o kvadrát velikosti vektoru v běžném slova smyslu. Tato velikost může být záporná (čtyřvektor dominantně míří ve směru časové osy, je *časupodobný*), kladná (čtyřvektor dominantně míří ve směru prostorových os, je *prostorupodobný*), nebo *nulová* (čtyřvektor míří ve směru světelného kužele). Nalezneme nyní velikost čtyřrychlosti

$$\blacktriangleright \quad U_\mu U^\mu = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{-c^2 d\tau^2}{d\tau^2} = -c^2. \quad (3.97)$$

Čtyřrychlost je tedy časupodobným vektorem. Obdobně nalezneme velikost čtyřhybnosti pohybujícího se či stojícího objektu:

$$\blacktriangleright \quad P_\mu P^\mu = m_0^2 U_\mu U^\mu = -m_0^2 c^2. \quad (3.98)$$

Klidová hmotnost fotonů musí být nulová, jinak by se nemohly pohybovat rychlostí světla. Proto je velikost jejich čtyřhybnosti nulová. Čtyřhybnost světla je nulový čtyřvektor mířící ve směru světelného kužele (povrchu kužele budoucnosti).

Ukažme nyní, že čtyřrychlost je v Minkowského metrice vždy kolmá na čtyřzrychlení. K tomu postačí derivovat dle vlastního času velikost čtyřrychlosti:

$$U_\mu U^\mu = -c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(U_\mu U^\mu) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$a_\mu U^\mu + a^\mu U_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a^\mu U_\mu = 0 \quad \Rightarrow$$

►
$$a^\mu U_\mu = 0. \quad (3.99)$$

Čtyřvektory definované v této kapitole budeme používat i v obecné relativitě, tedy i v případě, kdy je skalární součin dán obecnou metrikou $g_{\alpha\beta}$.

Energie ve speciální relativitě

Jak jsme už viděli, čtyřhybnost lze vyjádřit dvojím způsobem. První vychází z teoremu Emmy Noetherové. Časoprostorové translace definují zákony zachování veličin, kterým říkáme energie a hybnost a které tvoří čtyřvektor, jemuž říkáme čtyřhybnost. Druhé vyjádření vychází z vynásobení čtyřrychlosti klidovou hmotností, viz (3.88). Porovnáme-li oba vztahy, máme

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Prostorové části dávají vztah pro relativistickou hybnost, časová část dává již nalezené vyjádření pro energii

►
$$E = mc^2; \quad m \equiv \gamma m_0. \quad (3.101)$$

Tento vztah má zajímavé důsledky. Především říká, že energie a hmota jsou jen dva projevy téže entity. Změna energie s sebou vždy přináší změnu hmotnosti objektu:

►
$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (3.102)$$

Tento vztah je základem veškeré jaderné energetiky. Nejlépe jsou vázána jádra podobná železu, to má nejnižší vazebnou energii na jeden nukleon. Energii lze proto získávat buď štěpením hmotnějších jader na menší (jaderné elektrárny), nebo slučováním jader lehčích než železo na těžší (fúze). Druhá reakce probíhá přirozeným způsobem například ve Slunci, kde se protony slučují na jádra hélia. Při jaderných reakcích vzniká energie, což podle vztahu (3.102) znamená, že součet hmotností částic po reakci je nižší než jejich součet před reakcí. Často se hovoří o tzv. hmotnostním schodku. Část hmoty se přeměnila na energii. Pokud ohřejeme litr vody například o 20 °C, dodali jsme mu energii a hmotnost litru vody vzroste o $\Delta E/c^2$. Taková změna hmotnosti není ale běžnými přístroji měřitelná.

Vztah (3.101) pro energii má ještě jeden zajímavý důsledek. Dejme do poměru „pohybovou“ a klidovou energii objektu:

$$\frac{mc^2}{m_0 c^2} = \frac{\gamma m_0 c^2}{m_0 c^2} = \gamma. \quad (3.103)$$

Lorentzův kontrakční faktor je roven poměru skutečné energie částice ku klidové energii. Hraje tak roli energie částice vztahované k její klidové energii. Pokud je například $\gamma = 10$, má částice energii rovnou desetinásobku klidové energie.

Speciální relativita nám poskytuje ještě jeden velmi důležitý vztah pro energii. Plyne okamžitě z velikosti čtyřhybnosti:

$$P_{\mu}P^{\mu} = -m_0c^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{E^2}{c^2} + \mathbf{p}^2 = -m_0c^2 \quad \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4. \quad (3.104)$$

Uvedenému vztahu někdy říkáme Pythagorova věta o energii. Energie se skládá ze dvou částí: klidové (dané klidovou hmotností) a pohybové (dané hybností). V kvantové teorii je tento vztah klíčový při konstrukci relativistické rovnice pro elementární částici. Výsledkem je Kleinova-Gordonova rovnice pro částici se spinem 0 a Diracova rovnice pro částici se spinem $\frac{1}{2}$ (elektron). Pro částice s nulovou klidovou hmotností (například foton) dostaneme mezi energií a hybností jednoduchý vztah:

$$\blacktriangleright \quad E = pc. \quad (3.105)$$

Energie fotonů je dána jejich hybností, nikoli jejich hmotností. Fotonům nicméně přísluší „pohybová“ hmotnost daná pouhým přepočtem z energie:

$$\blacktriangleright \quad m_{\gamma} = \frac{E}{c^2} = \frac{\hbar\omega}{c^2}. \quad (3.106)$$

3.1.4 Relativistické paradoxy

Prodlužující se časové intervaly a zkracující se vzdálenosti jsou dodnes zdrojem nedůvěry části populace ke speciální relativitě. Tito lidé uznávají jen jevy, které vidí v každodenním životě. Dilatace času a kontrakce délek jsou spojené s natolik vysokými rychlostmi, že se s nimi běžně nesetkáváme. To ale neznamená, že neexistují. Bez jejich započtení by nefungoval žádný urychlovač, laser nebo GPS navigace. Speciální relativita s sebou přináší i zdánlivě podivné situace, kterým říkáme paradoxy. Většinou jde o údiv nad tím, že jedním výpočtem získáme výsledek, který je odlišný od výsledku získaného jiným výpočtem. Řešením je většinou pouhý fakt, že každý z výpočtů platí pro jinou inerciální souřadnicovou soustavu a člověk, jakožto pozorovatel, nemůže být v obou soustavách naráz, aby došlo ke skutečné nesrovnalosti. Jiný druh paradoxů souvisí s předpoklady, které jsou v rozporu se speciální relativitou. Buď děje zjevně neprobíhají v inerciální souřadnicové soustavě, nebo využíváme například model ideálně tuhých tyčí, které ve skutečnosti neexistují. Cílem této učebnice rozhodně není řešení jednotlivých paradoxů. To by vydalo na celou, poněkud monotematickou knihu. Proto se na ukázkou omezíme jen na několik z nich.

Paradox vlaku a nádraží

Představme si vlak stojící ve stanici, který je přesně stejně dlouhý jako nádražní budova. Druhý den jede po kolejích stejný vlak, ale tentokrát na tomto nádraží nestaví. Pozorovatel v nádražní budově uvidí díky kontrakci délek, že projíždějící vlak je kratší než budova. Pozorovateli ve vlaku se ale bude zdát, že se nádražní budova pohybuje kolem něho, a protože dochází ke kontrakci délek, bude nádražní budova kratší než vlak.

Jak je tohle možné? Vlak přece nemůže být současně kratší, delší i stejně dlouhý jako nádražní budova! Řešení paradoxu je velmi jednoduché. První chyba v úvaze se týká pocitu, že jsme to stále my, kteří měříme délku vlaku ve všech situacích. To ale není pravda. Pokud vlak jede, pozorovatel nemůže být současně ve vlaku a současně na nádraží, takže jde o dva různé pozorovatele, kteří naměří dva různé výsledky. Pojem délky je relativní a měření z různých soustav dopadnou různě. Důvodem je požadavek současného měření polohy přední i zadní části vlaku. Pozorovatel na nádraží bude zaznamenávat a vyhodnocovat přilet světla (jinak by vlak neviděl) z přední a zadní části vlaku. Světlo se samozřejmě šířilo konečnou rychlostí, takže je do měření třeba zahrnout dobu šíření signálu. Pečlivým rozбором zjistíme, že události, které jsou současné z hlediska nádraží (změření polohy počátku a konce vlaku) nejsou současné z hlediska pozorovatele ve vlaku. Měření na nádraží probíhá pro pozorovatele ve vlaku v různých okamžicích a mezitím se vlak posune, proto vyjde délka vlaku jiná. Výsledek: paradox se nekoná. Porovnáváme neporovnatelné: měření prováděná různými pozorovateli a navíc měření, která jsou z hlediska jedné souřadnicové soustavy současná a z hlediska druhé nikoli.

Existuje mnoho variant právě popsaného paradoxu, které jsou poněkud sofistikovaněji formulované, nicméně jejich řešení je obdobné.

Paradox tyče a kanálu

Představme si, že nad pouličním kanálem (bez mříže, tu ukradli nepřizpůsobiví občané) letí vysokou rychlostí vodorovně dokonale tuhá tyč, jejíž vlastní délka je stejná jako rozměr kanálu. Z hlediska tyče se otvor kanálu ve směru letu zkrátí a tyč do kanálu nepropadne. Z hlediska kanálu se zkrátí rozměr tyče, a ta do kanálu spadne. Paradox je tentokrát o něco vážnější. Propadnutí tyče do kanálu je objektivní skutečností, která by neměla záviset na volbě souřadnicové soustavy. Jaké je tedy řešení tentokrát?

Řešení je třeba rozdělit do několika částí. Aby se tyč pohybovala směrem dolů a mohla vůbec propadnout, je zapotřebí vyvinout nějakou, byť malou sílu, která způsobí pohyb tyče směrem dolů. Můžeme použít přirozenou gravitaci, ale to povede k okamžité námitce, že k řešení gravitačních problémů musíme použít obecnou relativitu. Tomu se snadno vyhneme tak, že ťukneme současně do obou konců tyče tak, aby se pohybovala dolů. Jak je tato úloha ošidná, už víme z předchozího paradoxu. Co je současné z jedné soustavy, to není současné z hlediska druhé soustavy, takže ťuknout současně do obou konců tyče v obou soustavách nelze. A pokud není ťuknutí do obou konců současně, tyč se nakloní a její pád do kanálu přestane být paradoxní. Pojďme na to tedy jinak a ťukněme do tyče jen jednou, a to přesně uprostřed. I to je nereálné. Střed tyče musíme měřit vzhledem k jejím koncům, ze kterých k pozorovateli signál poletí určitou dobu. Výsledek? Střed měřený v jedné soustavě není středem v druhé soustavě. Ťuknutí do tyče bude z hlediska jedné soustavy asymetrické a tyč se opět nakloní.



Obr. 3.8: Paradox tyče a kanálu

Největší problém je s předpokladem dokonale tuhé tyče. Pokud bychom do jednoho jejího konce ťukli kladívkem, musel by se druhý konec ihned posunout, což znamená nekonečnou rychlost šíření informace z jednoho konce tyče na druhý. A nekonečná

rychlost šíření interakce není slučitelná se speciální relativitou, tedy dokonale tuhá tyč neexistuje. Každá tyč je ve skutečnosti „měkká“, ťukneme-li do kterékoli její části kladívkem, nepohne se v důsledku úderu celá tyč, ale nejprve jen místo, do kterého jsme ťukli, a vznikne elastická vlna, kterou se informace začne šířit do dalších částí tyče. Výsledkem je, že při dostatečně velké rychlosti tyč do kanálu vždy spadne, buď se nakloní, nebo se vlivem působících sil zdeformuje natolik, že do kanálu propadne.

Paradox dvojčat

K těm nejznámějším a nejčastěji diskutovaným paradoxům patří paradox dvojčat. Představme si, že se na Zemi narodila dvojčata. Jedno z nich prožije celý svůj život na Zemi. Druhý z bratrů se stane kosmonautem a v raketě odletí na dlouhou pouť. Poletí v raketě, která je vybavena špičkovou technologií a dosáhne téměř rychlosti světla. Cestovatel doletí k cíli, provede výzkum na vzdálené planetě a poté odletí zpět k Zemi. Po přistání se setká se svým bratrem. Kdo z nich bude starší? Z hlediska pozorovatele na Zemi letěl bratr v raketě vysokou rychlostí a docházelo k dilataci času a při setkání bude mladší cestovatel v raketě. Ten bude ale uvažovat stejně: bratr na Zemi se od něho z počátku vzdaloval vysokou rychlostí a v druhé části cesty se k němu naopak přibližoval. Tudíž docházelo k dilataci času pro bratra na Zemi a při setkání bude mladší ten, který neopustil rodnou hroudu. Jaké je řešení nyní? Situace obou bratrů je symetrická jen zdánlivě. Ten z bratrů, který žije na Zemi, bude mít na poličce nad postelí připravený kufr s věcmi. Co kdyby se někdy vydal také do vesmíru? Jeho kufr zůstane po celou dobu experimentu na poličce. Bratr na raketě bude mít nad postelí podobný kufr. Poprvé mu spadne na hlavu při startu, kdy bude v raketě citelné extrémní zrychlení, podruhé při brzdění u cílové planety, potřetí při startu z ní a počtvrté při přistání na Zemi. Otlučená hlava cestovatele nepochybně dojde k závěru, že soustava, v níž se nachází, má do inerciální soustavy velmi daleko. Problém tedy není možné řešit z hlediska speciální relativity. V rámci speciální relativity by se dvojčata už nikdy znovu nesetkala. Dvě inerciální soustavy se mohou ve speciální relativitě setkat jen jednou. Paradox dvojčat se týká neinerciální soustavy, v níž skutečně dochází ke změně chodu času a všech biologických procesů (je to dáno přítomností zrychlení). Cestující dvojče ve skutečnosti zestárne méně než to na Zemi.



3.2 Základy obecné relativity

3.2.1 Princip ekvivalence

Hmotnost tělesa se na první pohled zdá být bezproblémovou záležitostí, ale tak jednoduché to není. Hmotnost můžeme definovat dvojím způsobem a to, zda si obě hmotnosti jsou rovny, je zcela principiální záležitostí. Donedávna jsme využívali problematický etalon hmotnosti uložený v Mezinárodním úřadu měr a vah v Sèvres v blízkosti Paříže. Při každém čištění se počet atomů v etalonu zmenšil, a definice kilogramu se proto neustále měnila. Od 20. května 2019 je proto kilogram definován zafixováním hodnoty Planckovy konstanty, která rozměrově kilogram obsahuje. Tento krok kopíruje definici metru z roku 1983, kdy byl metr definován fixací rychlosti světla.

Setrvačná a gravitační hmotnost

Hmotnost tělesa můžeme definovat buď podle jeho setrvačných účinků, nebo z gravitačního působení na ostatní tělesa.

Setrvačná hmotnost

Podle Newtonova pohybového zákona je zrychlení tělesa přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné jeho hmotnosti. Tuto hmotnost nazýváme setrvačná hmotnost a lze ji definovat například takto: *Setrvačná hmotnost je schopnost tělesa zachovávat svůj pohybový stav (klid nebo rovnoměrný přímočarý pohyb).*

Míč má malou setrvačnou hmotnost. Snadno ho zachytíme (změníme jeho pohyb na klid) a stejně snadno ho hodíme (změníme jeho klid na pohyb). Naopak vlak má z pohledu člověka velkou setrvačnou hmotnost – holýma rukama vlak ani nezastavíme, ani nerozpohybujeme. Setrvačnou hmotnost můžeme měřit například přímo z Newtonova zákona za pomoci zrychlení, které daná síla udělí určitému tělesu.

Gravitační hmotnost

Podle gravitačního zákona se všechna tělesa navzájem přitahují, a to přímo úměrně jejich hmotnostem a nepřímo úměrně druhé mocnině jejich vzdálenosti. Tuto hmotnost nazýváme gravitační hmotnost a lze ji definovat například takto: *Gravitační hmotnost je schopnost těles se vzájemně přitahovat.*

Slunce má větší gravitační hmotnost než malý kámen. Gravitační hmotnost můžeme měřit vážením, kdy porovnáваме přitahování předmětů naší Zemí oproti přitahování referenčního závaží.

* * *

Pokud za etalon obou hmotností zvolíme jeden a tentýž objekt, bude roven jeden kilogram setrvačné hmotnosti jednomu kilogramu gravitační hmotnosti. Bude tomu tak ale i pro větší množství látky? Bude setrvačná hmotnost libovolného objektu rovna hmotnosti gravitační? Jsou setrvačné a gravitační účinky shodné?

Princip ekvivalence

Představme si jednoduché pohyby v tíhovém poli, které jsou popsány rovnicí

$$m_s \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}, \quad (3.107)$$

kde \mathbf{F} je tíhová síla daná předpisem $\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}$, polohový vektor sledovaného objektu je označen \mathbf{x} . V tomto vztahu vyjadřuje hmotnost schopnost tělesa být přitahováno Zemí, proto jde o gravitační hmotnost. Celková pohybová rovnice má proto tvar

$$m_s \ddot{\mathbf{x}} = m_g \mathbf{g}. \quad (3.108)$$

Pokud jsou si hmotnosti rovny (postačila by i jejich úměrnost), lze je zkrátit a výsledný pohyb nebude záviset na hmotnosti tělesa. Skleněná kulička se bude pohybovat po stejné dráze jako letící cihla; malý šroubek dopadne při pádu z věže na zem za stejnou dobu jako betonový panel. Takové tvrzení samozřejmě neplatí pro píčko, kde má rozhodující vliv odpor vzduchu, který jsme v rovnici (3.108) zanedbali. První logická úvaha, vedoucí k tomu, že pohyb těles nezávisí na jejich hmotnosti, pochází od Galilea Galileiho. Představme si například padající cihlu. Pokud z ní odломíme například třetinu a obě části spojíme tenkým drátem (jeho hmotnost je zanedbatelná), budou obě části padat shodně jako původní cihla. Pokud drátek přestřihneme, na pohybu se nic nezmění a obě části budou opět padat stejně. Z této úvahy plyne, že by neměl volný pád záviset na hmotnosti tělesa. Nejde jen o tíhové pole, ale například i pohyb v okolí Slunce, jehož gravitační hmotnost označíme M_g . Pohybová rovnice těles v okolí Slunce bude

$$m_s \ddot{\mathbf{x}} = -G \frac{m_g M_g}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (3.109)$$

Pokud je setrvačná a gravitační hmotnost testovacího tělesa shodná, zkrátí se, a pohyb těles kolem Slunce nebude opět záviset na jejich hmotnosti. Planeta i šroubek uvolněný z raketoplánu se kolem Slunce budou pohybovat po stejné trajektorii, pokud byly jejich počáteční polohy a rychlosti shodné. To nás vede k formulaci principu ekvivalence.

Slabý princip ekvivalence

Setrvačné a gravitační hmotnosti těles si jsou úměrné. Při volbě společného etalonu pro obě hmotnosti jde o rovnost. Setrvačné a gravitační účinky jsou při pohybu shodné. Zrychlený pohyb neodlišíme od lokálního účinku gravitace. Představte si prudce se rozjíždějící automobil, který vás vmáčkne do sedadla stejně jako by to udělalo gravitační působení nějakého tělesa.

Silný princip ekvivalence

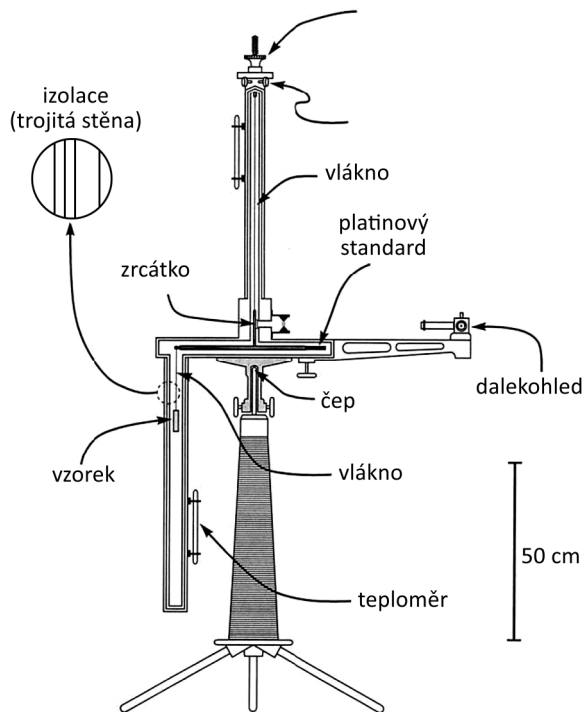
Elektromagnetické pole je nositelem energie, hybnosti i momentu hybnosti a dokáže zprostředkovat přenos těchto veličin. Energii elektromagnetického pole odpovídá dle vztahu $E = mc^2$ i určitá hmotnost. Předpoklad, že i tato hmotnost má jak setrvačné, tak gravitační účinky (tj. i elektromagnetické pole je schopné gravitačního přitahování) je obsahem *silného principu ekvivalence*.

Velmi silný princip ekvivalence

Velmi silný princip ekvivalence předpokládá, že i samo gravitační pole je nositelem energie, a tím i hmotnosti, jež má setrvačné i gravitační účinky, které od sebe nelze odlišit.

Experimenty

Princip ekvivalence je zcela zásadním tvrzením, ať už v kterékoli své podobě. O jeho experimentální ověření se proto pokoušela řada fyziků. První přesnější experiment provedl maďarský fyzik Loránd Eötvös. Od roku 1885 experiment zpřesňoval, v roce 1909 dosáhli Loránd Eötvös, Jenő Fekete a Dezső Pekár ověření ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti s relativní přesností 5×10^{-9} . Podstatou experimentu byla dvě tělesa z různých materiálů umístěná na koncích vodorovné tyčky, která byla zavěšena na vlákně (jde o tzv. torzní váhy). Na tělesa působí jednak gravitační síla, která je dána gravitační hmotností těles, a jednak odstředivá síla rotace Země, která je dána setrvačnou hmotností zavěšených těles. Pokud by si obě hmotnosti nebyly úměrné, došlo by ke vzniku torzní síly, která by stočila tyčku mezi tělesy. Nic takového se ale nestalo i přes mnohá opakování experimentu s různými tělesy a na různých místech. Eötvösův experiment byl později mnohokrát opakován a zpřesňován dalšími autory. V roce 1964 Robert Dicke, Robert Krotkov a Peter Roll upravili experiment tak, že měřili i rozdíl zrychlení způsobený Sluncem. Pro kombinaci těles zlato/hliník dosáhli relativní přesnosti ověření principu ekvivalence 10^{-11} . V roce 1996 ověřil ekvivalenci mezi setrvačnou a gravitační hmotností z odrazu laserového paprsku od Měsíce (soustava Země-Měsíc v poli Slunce) Jean Dicke s relativní přesností 4×10^{-13} . V roce 2012 provedla skupina vědců z Washingtonské univerzity vedená Ericem Adelbergem experimenty s torzními vahami (berylíum/hliník, berylíum/titan), které ověřily princip ekvivalence s relativní přesností 3×10^{-14} .



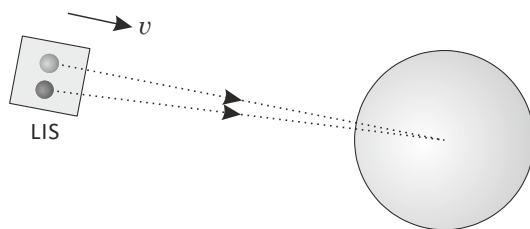
Obr. 3.9: Náčrtek původních Eötvösových vah. Torzní pohyb byl sledován pomocí zrcátka a dalekohledu. Originál je uložen v muzeu Geofyzikální observatoře v Tiháni. Kresba Fischbach a Talmadge.

Gravitační experiment STEP (*Satellite Test of the Equivalence Principle*) připravovaný na Stanfordově univerzitě měl ověřit princip ekvivalence na oběžné dráze s relativní přesností 10^{-18} . Pro nedostatek financí byl zrušen. V roce 2016 startovala francouzská družice *Microscope*, která specializovanými akcelerometry ověřovala princip ekvivalence. V roce 2022 byly zveřejněny výsledky, relativní přesnost ověření principu ekvivalence dosáhla $1,5 \times 10^{-15}$. Od roku 2013 se v Evropském středisku jaderného výzkumu CERN v experimentu AEGIS zjišťuje, zda gravitace působí stejně na hmotu i antihmotu. Podle výsledků experimentu platí princip ekvivalence jak pro hmotu, tak pro antihmotu.

Lokálně inerciální soustava

Padající výtah

Přestavte si, že jedete výtahem a ten se utrhne. Představa to sice není nijak hezká, ale pokud jste fyzik tělem i duší, můžete si alespoň po krátkou dobu užívat inerciální soustavu, ve které platí speciální relativita. Pokud jste kuřák a údivem vám vypadne nedopalek cigarety z úst, můžete pozorovat zajímavý jev. Z principu ekvivalence plyne, že vy, cigareta i výtah budou v tíhovém poli padat stejným způsobem. Cigareta tak zůstane jakoby zavěšena před vašimi očima. Vyndejte z kapsy klíče a položte je před sebe. Zůstanou tam stát. A pokud klíče hodíte, začnou se pohybovat po přímce konstantní rychlostí. V padajícím výtahu proto platí zákon setrvačnosti. Pokud na těleso nepůsobí síla, je buď v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Z principu ekvivalence plyne, že v padajícím výtahu pocítujeme stav beztlíže a že gravitační efekty vymizí. Gravitační pole je možné eliminovat vhodně zrychleným pohybem. Platí to i naopak. Pokud není přítomno gravitační pole a pojedeme ve zrychlující se kabině (kosmické lodi), zažijeme obdobný pocit, jako by na nás působila tíže. Setrvačné a gravitační jevy jsou si velmi blízké. S velikostí výtahu to ale nesmíme přehnat. Pokud by jeho velikost byla srovnatelná se Zemí, budeme vnímat nehomogenitu tíhového pole a objevíme odchylky od zákona setrvačnosti. Náš výtah tedy musí být dostatečně malý. Experimenty také nesmíme provozovat příliš dlouho, po delší době bychom pozorovali malé přiblížování těles padajících s námi, protože vše padá do centra Země a ve skutečnosti nejde o rovnoběžné trajektorie. Zákony speciální relativity platí ve volně gravitující kleci malých rozměrů, ve které provádíme experimenty po krátkou dobu. Taková klec je ideální inerciální souřadnicovou soustavou. Nazýváme ji lokálně inerciální soustavou (LIS).



Obr. 3.10: Volně gravitující klec a lokálně inerciální soustava

Speciální a obecná relativita

Princip ekvivalence má i další závažný důsledek. Představme si pohyb těles v okolí našeho Slunce. Jejich trajektorie nezávisí na hmotnosti těles, ale jsou dány pouze počáteční polohou a rychlostí. Jsou tedy určeny jen centrálním tělesem (Sluncem) a nikoli obíhajícími tělesy. Odsud už je jen malý krůček k představě, že Slunce nějak pokřivilo

prostor a čas kolem sebe a ostatní tělesa v tomto pokriveném světě pohybují po nejrovnějších možných drahách. Takové pojetí gravitace přinesl Albert Einstein v roce 1915. Hovoříme o geometrické teorii gravitace neboli o obecné relativitě. Tato teorie dává do souvislosti existenci času a prostoru s přítomností těles. Každé těleso, nejenom Slunce, poněkud zakříví čas a prostor kolem sebe a tím přispěje svým malým vkladem k existenci těchto entit. Už nejde o vnější parametry pohybu, bez těles by čas a prostor neexistovaly. Základní úlohou obecné relativity je popsát, jak tělesa zakřívují čas a prostor a jak se v tomto světě pohybují.

Často může být užitečné řešit danou úlohu z hlediska LIS, kde platí speciální relativita a nalezené řešení transformovat do obecné souřadnicové soustavy. Není to sice přímočaré, ale většinou velmi názorné. Korektní řešení musí ovšem z rozložení hmoty a energie určit metrický tenzor a ze znalosti metrického tenzoru zjistit pohyb těles. Uvidíme, že obecná relativita byla historicky první teorií, která má v jediné sadě rovnic obsažen jak pohybový, tak polní zákon.

3.2.3 Kovariantní derivace

Při derivování čtyřvektoru se v časoprostoru také událost od události mění bázové vektory, proto musíme psát:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^\beta} = \partial_\beta (A^\alpha \mathbf{e}_\alpha) = A^\alpha{}_{,\beta} \mathbf{e}_\alpha + A^\alpha \mathbf{e}_{\alpha,\beta} \quad (3.110)$$

Derivace bázového vektoru $\mathbf{e}_{\alpha,\beta}$ musí být opět vektorem, tedy ji lze zapsat jako lineární kombinací bázových vektorů:

$$\mathbf{e}_{\alpha,\beta} = \Gamma^\delta{}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\delta \quad (3.111)$$

Koeficienty lineární kombinace se nazývají *koeficienty afinní konexe*. Výraz pro derivaci čtyřvektoru lze snadno upravit na tvar

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^\beta} = (A^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} A^\xi) \mathbf{e}_\alpha. \quad (3.112)$$

Výraz v závorce se nazývá kovariantní derivací, první část je běžná parciální derivace, druhá je způsobena změnou bázových vektorů od místa k místu, tedy zakřivením časoprostoru. Tuto derivaci značíme středníkem:

$$\blacktriangleright \quad A^\alpha{}_{;\beta} \equiv A^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} A^\xi. \quad (3.113)$$

Pro skalární funkci splývá tato derivace s běžnou derivací (skalár nepotřebuje k vyjádření bázové vektory, není, co by se měnilo):

$$\blacktriangleright \quad \phi_{;\beta} = \phi_{,\beta}. \quad (3.114)$$

Vlastnosti koeficientů afinní konexe

Afinní konexe není tenzorovou veličinou, její indexy se netransformují podle tenzorových pravidel. V praxi to znamená, že tyto indexy nemůžeme zvyšovat a snižovat. Indexy $A_{;\mu}$ vytvořené kovariantním derivováním naopak mají tenzorový charakter a lze je

zvyšovat a snižovat. Pro obyčejnou parciální derivaci $A_{,\mu}$ toto neplatí, chybí zde část derivace daná zakřivením časoprostoru. Prototypem čtyřvektoru lokalizovaném v bodě časoprostoru je infinitezimální posunutí souřadnic

$$d\xi = dx^\alpha e_\alpha. \quad (3.115)$$

Bázové vektory a jejich derivace lze proto formálně zapsat jako

$$e_\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} = \xi_{,\alpha}; \quad e_{\alpha,\beta} = \xi_{,\alpha\beta}. \quad (3.116)$$

Pokud jde o časoprostor bez diskontinuit a torzních zkroucení, jsou druhé derivace záporné, tj. platí $e_{\alpha,\beta} = e_{\beta,\alpha}$ a dolní indexy koeficientů afinní konexe musí být proto symetrické:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}. \quad (3.117)$$

V takovém případě tyto koeficienty nazýváme Christoffelovy symboly.

Kovariantní derivace tenzoru druhého řádu

Složky tenzorů druhého řádu se transformují jako součiny dvou vektorů, proto spočteme kovariantní derivaci jakéhosi prototypu tenzoru druhého řádu $T^{\alpha\beta} \equiv A^\alpha B^\beta$:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}_{;\gamma} &= (A^\alpha B^\beta)_{;\gamma} = A^\alpha_{;\gamma} B^\beta + A^\alpha B^\beta_{;\gamma} = \\ &= (A^\alpha_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\xi\gamma} A^\xi) B^\beta + A^\alpha (B^\beta_{,\gamma} + \Gamma^\beta_{\xi\gamma} B^\xi) = \\ &= (A^\alpha B^\beta)_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\xi\gamma} A^\xi B^\beta + \Gamma^\beta_{\xi\gamma} A^\alpha B^\xi \end{aligned}$$

Odsud je zřejmé, že je u tenzoru druhého řádu nutné derivovat každou složku zvlášť:

$$\blacktriangleright \quad T^{\alpha\beta}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\xi\gamma} T^{\xi\beta} + \Gamma^\beta_{\xi\gamma} T^{\alpha\xi}. \quad (3.118)$$

Toto pravidlo snadno zobecníme pro tenzor n -tého řádu:

$$\begin{aligned} T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_N}_{;\gamma} &= \\ &= T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_N}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha_1}_{\xi\gamma} T^{\xi\alpha_2\dots\alpha_N} + \Gamma^{\alpha_2}_{\xi\gamma} T^{\alpha_1\xi\dots\alpha_N} + \dots + \Gamma^{\alpha_N}_{\xi\gamma} T^{\alpha_1\alpha_2\dots\xi}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Kovariantní derivace kovariantní složky

Vzhledem k tomu, že u Christoffelových symbolů nemůžeme snižovat a zvyšovat indexy, musíme derivaci kovariantních složek zjistit jinak. Velikost čtyřvektoru nezávisí na volbě souřadnic a její kovariantní derivace musí proto být nulová, tj.:

$$\begin{aligned} (A^\alpha A_\alpha)_{;\beta} = 0 &\quad \Rightarrow \quad A^\alpha_{;\beta} A_\alpha + A^\alpha A_{\alpha;\beta} = 0 \quad \Rightarrow \\ (A^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\xi\beta} A^\xi) A_\alpha + A^\alpha A_{\alpha;\beta} &= 0 \quad \Rightarrow \\ A^\alpha_{,\beta} A_\alpha + \Gamma^\alpha_{\xi\beta} A^\xi A_\alpha + A^\alpha A_{\alpha;\beta} &= 0 \end{aligned}$$

V prvním výrazu převedeme derivaci k druhému součiniteli (pomocí derivace součinu), ve druhém výrazu zaměníme sčítací indexy:

$$\begin{aligned} -A^\alpha A_{\alpha,\beta} + \Gamma^\xi_{\alpha\beta} A^\alpha A_\xi + A^\alpha A_{\alpha;\beta} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \left[-A_{\alpha,\beta} + \Gamma^\xi_{\alpha\beta} A_\xi + A_{\alpha;\beta} \right] A^\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že uvedená rovnost musí platit pro každé A_α , musí být hranatá závorka nulová, a snadno již určíme derivaci kovariantní složky vektoru:

$$\blacktriangleright \quad A_{\alpha;\beta} = A_{\alpha,\beta} - \Gamma^\xi_{\alpha\beta} A_\xi. \quad (3.120)$$

Před Christoffelovým symbolem je znaménko minus. Pro tenzor druhého řádu opět derivujeme jednotlivé indexy:

$$\blacktriangleright \quad T_{\alpha\beta;\gamma} = T_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^\xi_{\alpha\gamma} T_{\xi\beta} - \Gamma^\xi_{\beta\gamma} T_{\alpha\xi}. \quad (3.121)$$

Kovariantní derivace metrik

V této části ukážeme, že metrika s jakkoli umístěnými složkami se vzhledem ke kovariantní derivaci chová jako konstanta, kovariantní derivace metrik je vždy nulová. Postačí si uvědomit, že metrika s kontravariantními indexy je inverzní maticí k metrice s kovariantními indexy:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma.$$

Napravo je Kroneckerův symbol, tj. prvky jednotkové matice, která je ve všech bázích stejná a její derivace je nulová:

$$\left(g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \right)_{;\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad g^{\alpha\beta}_{;\delta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma;\delta} = 0.$$

Všechny indexy mají tenzorový charakter a lze na ně uplatnit veškerá pravidla pro zvyšování a snižování indexů a pravidla pro záměnu indexů:

$$g^\alpha_{\gamma;\delta} + g^\alpha_{\gamma;\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2g^\alpha_{\gamma;\delta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad g_{\alpha\beta;\gamma} = 0. \quad (3.122)$$

Vztah mezi Christoffelovými symboly a metrikou

Metrika kompletně určuje vlastnosti zakřiveného časoprostoru. Christoffelovy symboly je proto možné za pomoci metrik vyjádřit. Rozepíšeme-li kovariantní derivaci ve vztahu (3.122) podle vztahu (3.121), okamžitě máme:

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = \Gamma^\xi_{\alpha\gamma} g_{\xi\beta} + \Gamma^\xi_{\beta\gamma} g_{\alpha\xi}. \quad (3.123)$$

Nyní je již jen algebraickým dosazením dokázat, že Christoffelovy symboly je možné ze známé metrik určit za pomoci jednoduchého vztahu:

$$\blacktriangleright \quad \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (g_{\xi\alpha,\beta} + g_{\xi\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\xi}). \quad (3.124)$$

Ve fyzice používáme často zkrácený zápis

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \quad (3.125)$$

Vlastnosti kovariantní derivace

Kovariantní derivace v sobě zahrnuje jak změnu samotných složek vektoru, tak změnu bázových vektorů. Křivost se projeví v kovariantní derivaci členem s Christoffelovými symboly. Ty jsou určitelné z metriky. Pro součin a součet derivací platí stejná pravidla jako u obyčejné parciální derivace. Indexy vzniklé kovariantním derivováním mají charakter tenzorových indexů a lze je zvyšovat a snižovat. U Christoffelových symbolů lze indexy doplnit jednoznačným způsobem. Při derivaci horních (kontravariantních) indexů je před Christoffelovým symbolem znaménko plus, při derivaci dolních (kovariantních) indexů minus. Kovariantní derivace složek tenzorů vyššího řádu se provádějí pro každou složku zvlášť. Kovariantní derivace skalární funkce je shodná s parciální derivací. Kovariantní derivace metriky je nulová. Shrňme nyní tato pravidla do jednoduché tabulky:

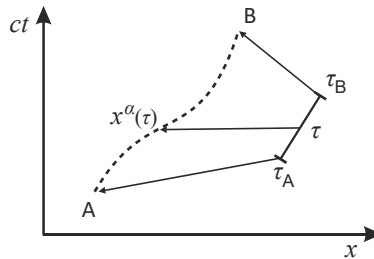
$$\begin{aligned} (A^\alpha + B^\alpha)_{;\beta} &= A^\alpha_{;\beta} + B^\alpha_{;\beta}, \\ (A^\alpha B^\beta)_{;\gamma} &= A^\alpha_{;\gamma} B^\beta + A^\alpha B^\beta_{;\gamma}, \\ A^\alpha_{;\beta} &\equiv A^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\xi\beta} A^\xi, \\ A_{\alpha;\beta} &= A_{\alpha,\beta} - \Gamma^\xi_{\alpha\beta} A_\xi, \\ T^{\alpha\beta}_{;\gamma} &= T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\xi\gamma} T^{\xi\beta} + \Gamma^\beta_{\xi\gamma} T^{\alpha\xi}, \\ \blacktriangleright \quad T_{\alpha\beta;\gamma} &= T_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^\xi_{\alpha\gamma} T_{\xi\beta} - \Gamma^\xi_{\beta\gamma} T_{\alpha\xi}, \\ T^\alpha_{\beta;\gamma} &= T^\alpha_{\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\xi\gamma} T^\xi_{\beta} - \Gamma^\xi_{\beta\gamma} T_{\alpha\xi} \\ \phi_{;\beta} &= \phi_{,\beta}, \\ g_{\alpha\beta;\gamma} &= 0, \\ \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} &= \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}, \\ \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (g_{\xi\alpha,\beta} + g_{\xi\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\xi}). \end{aligned} \quad (3.126)$$

3.2.4 Rovnice geodetiky

Částice se pohybuje po nejrovnější možné dráze v křivém v časoprostoru, tzv. *geodetice*. Rovnice geodetiky nahrazuje v obecné relativitě pohybové rovnice částice.

Úplná derivace vektorového pole

Představme si, že je v časoprostoru přítomno nějaké vektorové pole $A^\mu(x^\alpha)$, které se mění s časem i s prostorem. K dispozici máme také nějakou křivku nataženou mezi událostmi A a B, například světočáru částice. Tato křivka je parametrizována parametrem τ – v případě světočáry částice může jít o vlastní čas částice.



Obr. 3.11: Parametrizace časoprostorové křivky mezi událostmi A a B za pomoci parametru τ .

Hledejme změnu našeho vektorového pole podél křivky:

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = A^\mu{}_{;\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (3.127)$$

Je zjevné, že jde o správnou změnu v rovném časoprostoru. V křivém časoprostoru musí být složky vektorového pole derivovány kovariantně, tj. tak, aby byly vzaty v úvahu i změny básových vektorů a aby derivace složek pole tvořily tenzor druhého řádu. Proto zavedeme tzv. úplnou derivaci předpisem

$$\blacktriangleright \quad \frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv A^\mu{}_{;\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (3.128)$$

Nyní tvoří veličina $A^\mu{}_{;\nu}$ složky tenzoru druhého řádu a v derivaci je obsažen i křivostní člen. Jaký je vztah mezi běžnou a úplnou derivací? Abychom to zjistili, rozepíšeme kovariantní derivaci dle vztahu (3.113):

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \left[A^\mu{}_{;\nu} + \Gamma^\mu{}_{\xi\nu} A^\xi \right] \frac{dx^\nu}{d\tau} = A^\mu{}_{;\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\xi\nu} A^\xi \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (3.129)$$

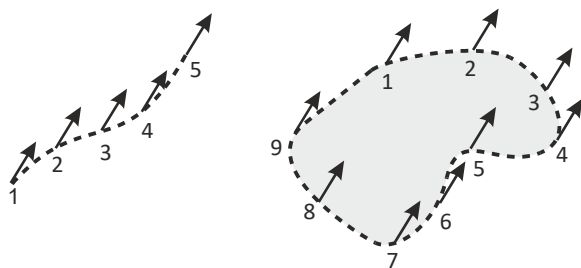
První člen je běžnou derivací (3.127), proto máme

$$\blacktriangleright \quad \frac{DA^\mu}{D\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\xi\nu} A^\xi \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (3.130)$$

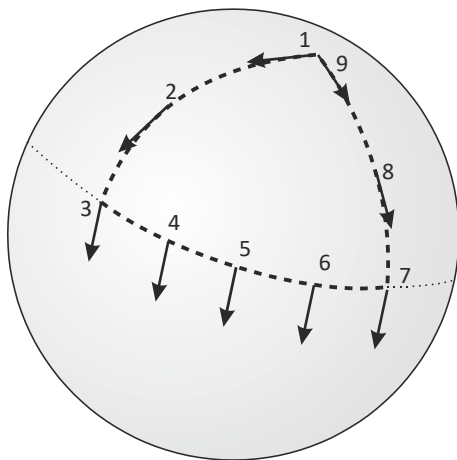
Interpretace je zřejmá: první člen je „obyčejnou“ derivací, druhý člen způsobilo zakřivení časoprostoru.

Paralelní přenos vektoru podél křivky

V rovném časoprostoru nazýváme *paralelním přenosem* postupné přesouvání vektoru podél křivky. Pokud přesuneme vektor podél uzavřené křivky, vrátí se po oběhu křivky do výchozího bodu v nezměněné podobě. V křivém prostoru to bude složitější. Představme si například paralelní přenos vektoru po povrchu koule, kde máme vytyčeny póly a rovník. Naše křivka půjde nejprve od pólu podél poledníku k rovníku. Poté bude pokračovat podél rovníku a nakonec se po jiném poledníku vrátí zpět k pólu. Půjde tedy o uzavřenou křivku. Na pólu začneme s vektorem, který bude tečný k naší křivce a bude mířit směrem k rovníku. Po každém rovnoběžném posunutí podél poledníku budeme muset náš vektor sklopit (provést projekci) do tečné roviny v daném bodě, protože se musí transformovat jako infinitezimální vektor. Takto vektor dopravíme až na rovník a poté s ním budeme „cestovat“ podél rovníku. Nakonec ho podél jiného poledníku dopravíme zpět k pólu (opět ho budeme muset sklápět do tečné roviny). Výsledek je mimořádně zajímavý. Vektor, který jsme přepravovali podél naší křivky, změnil v průběhu své cesty směr!



Obr. 3.12: Paralelní přenos vektoru v rovině podél otevřené a uzavřené křivky. Křivka leží v rovině, přesouvané vektory také.



Obr. 3.13: Paralelní přenos vektoru po uzavřené křivce na povrchu koule.

V rovném časoprostoru popíšeme paralelní přenos jednoduchou rovnicí (vektor se při přenosu podél křivky nemění):

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = 0. \quad (3.131)$$

V pokriveném časoprostoru bude rovnice stejně jednoduchá, jen musíme vzít v úvahu měnící se křivost a psát

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = 0. \quad (3.132)$$

Rozepišme tuto rovnici za pomoci kovariantní derivace a Christoffelových symbolů, viz (3.129):

$$\blacktriangleright \quad \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\xi\nu} A^\xi \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (3.133)$$

Toto je hledaná rovnice paralelního přenosu vektorového pole A^μ podél křivky $x^\nu(\tau)$. Pokud bude časoprosotor rovný a Christoffelovy symboly nulové, splyne tato rovnice s rovnicí (3.131) pro rovný časoprosotor.

Rovnice geodetiky

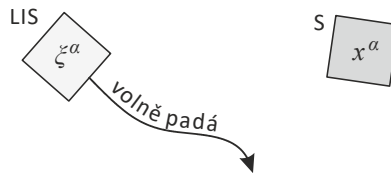
Pokud budeme sledovat nějaký zajímavý děj, může být vždy vodítkem to, jak děj probíhá v lokálně inerciální soustavě (LIS), tedy v soustavě, která po krátkou dobu v malé oblasti prostoru volně padá v gravitačních polích ostatních těles. V takové soustavě platí zákony speciální relativity, volný hmotný bod se pohybuje rovnoměrně přímočaře a metrický tenzor je dán Minkowského metrikou. Označíme-li souřadnice v LIS ξ^α , bude interval roven

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta; \quad \eta_{\alpha\beta} \equiv \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (3.134)$$

V obecné souřadnicové soustavě S, ze které můžeme děj také pozorovat, bude platit

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.135)$$

metrické koeficienty popisují pokrivení časoprostoru, souřadnice události v S jsou x^α .



Obr. 3.14: Světočára v LIS

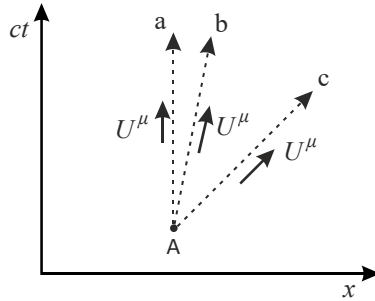
Zkonstruujme nejprve světočáru částice v LIS, kde platí zákony speciální relativity. Na následujícím obrázku jsou světočáry stojící částice (a), letící částice (b) a fotonu letícího rychlostí světla (c). Ve směru všech světočar vždy míří příslušná čtyřrychlost

$$U^\mu \equiv \frac{d\xi^\mu}{d\tau} = \frac{d\xi^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (3.136)$$

Zkuste si zakreslit ve dvou dimenzích (čas a jedna prostorová souřadnice) čtyřvektory stojící částice, částice pohybující se rychlostí v a fotonu, jejich 2D čtyřrychlosti postupně budou

$$\begin{pmatrix} \gamma c \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma c \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

Povšimněte si, že pro rychlosti malé ve srovnání s rychlostí světla je časová složka čtyřrychlosti podstatně větší než prostorové složky (ve 2D bude prostorová složka jediná).



Obr. 3.15: Směr čtyřrychlosti a světočára

Z obrázku je zřejmé, že ve speciální relativitě (v LIS) můžeme světočáry zkonstruovat postupným přenášením čtyřrychlosti. Postačí znát počáteční událost (A) a vždy posunout čtyřrychlost o malý úsek podél světočáry. Bude tedy platit

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = 0. \quad (3.138)$$

Jak je to možné? V LIS se volné hmotné body pohybují přímočaře (nepůsobí na ně síla), tedy platí jednoduchý vztah

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (3.139)$$

Vzhledem k tomu, že $U^\mu = d\xi^\mu/d\tau$, máme okamžitě $dU^\mu/d\tau = 0$, tj. rovnice (3.138) popisuje pohyb volného tělesa v LIS. V Souřadnicové soustavě S, kde je obecná metrika $g_{\mu\nu}$, bude mít rovnice paralelního přenosu čtyřrychlosti tvar:

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} = 0. \quad (3.140)$$

Rozepíšme tuto rovnici dle definice úplné derivace (3.130):

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\xi\nu} U^\xi \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (3.141)$$

S využitím definice čtyřrychlosti máme

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\xi\nu} \frac{dx^\xi}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (3.142)$$

Po vhodném přeznačení indexů získáme hledanou rovnici geodetiky ve tvaru:

$$\blacktriangleright \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (3.143)$$

Pokud jde o světlo, nemůže být parametrem světočáry vlastní čas, ale například vlastní délka křivky, tj.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (3.144)$$

Rovnici geodetiky také můžeme psát bez parametrizace (jako diferenciální formu):

$$\blacktriangleright \quad d^2 x^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0. \quad (3.145)$$

Poznámka

Rovnici geodetiky lze také odvodit z variačního principu. Z teoretické mechaniky víme, že Ldt musí být skalárem, tedy v relativitě nějakou funkcí ds^2 . Má-li být výraz úměrný času, musí jít o odmocninu, tj.

$$Ldt \approx \sqrt{-ds^2} \approx d\tau.$$

Interval je pro kauzálně spojené události záporný, proto je v odmocnině minus. Rovnici geodetiky lze potom odvodit z Hamiltonova variačního principu

$$\blacktriangleright \quad \delta \int_A^B \sqrt{-ds^2} = 0 \quad (3.146)$$

Toto odvození naleznete ve specializované literatuře věnované obecné relativitě.

3.2.5 Newtonovská limita

Jak souvisí rovnice geodetiky, která je základním pilířem obecné relativity, s Newtonovými pohybovými rovnicemi? Ukážeme, že v limitě slabých polí (malého zakřivení) a pomalých rychlostí přejde rovnice geodetiky na standardní pohybové rovnice v gravitačním poli. Newtonova pohybová rovnice má v gravitačním poli tvar

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla W_p, \quad (3.147)$$

kde W_p je potenciální energie, která závisí lineárně na hmotnosti testovacího těliska m . Můžeme také zavést potenciál gravitačního pole

$$\phi \equiv W_p / m, \quad (3.148)$$

který je nezávislý na hmotnosti tělesa. Pohybová rovnice přejde na jednodušší tvar

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla \phi, \quad (3.149)$$

který reflektuje fakt, že pohyb těles v gravitačním poli nezávisí na jejich hmotnosti (to plyne z principu ekvivalence). V relativitě je výhodné zavést bezrozměrný potenciál ϕ^* :

$$\begin{aligned}
 W_p; & \quad [W_p] = J, \\
 \phi \equiv W_p/m; & \quad [\phi] = J/\text{kg} = (\text{m/s})^2, \\
 \phi^* \equiv \phi/c^2; & \quad [\phi^*] = 1.
 \end{aligned} \tag{3.150}$$

Napišme nyní rovnici geodetiky za následujících předpokladů:

- 1) metrika je nezávislá na čase a je diagonální;
- 2) těleso se pohybuje malou rychlostí v porovnání s rychlostí světla;
- 3) gravitační pole je slabé, tj. zakřivení časoprostoru je malé.

Ad 1. Tento předpoklad není podstatný, ale zjednoduší výpočty. Vhodnou volbou souřadnicové sítě můžeme zařídit, aby metrika byla diagonální. Pokud souřadnicovou soustavu spojíme s tělesem, které generuje pole, bude metrika stacionární, tj.

$$g_{\alpha\beta,0} = 0. \tag{3.151}$$

Ad 2. Malá rychlost tělesa vzhledem k rychlosti světla znamená, že nemusíme rozlišovat mezi souřadnicovým a vlastním časem a že časová složka čtyřrychlosti je výrazně větší než prostorové složky, tj.:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1, \tag{3.152}$$

$$\left| \frac{dx^k}{d\tau} \right| \ll \frac{dx^0}{d\tau}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.153}$$

Ad 3. Slabé gravitační pole znamená, že se metrika bude jen málo odchylovat od Minkowského metriky, tj.:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{3.154}$$

kde $h_{\alpha\beta}$ jsou malé odchylky od Minkowského metriky. Malé v tom smyslu, že ve všech výrazech budeme zanedbávat jejich kvadráty. Metrika bude tedy mít finální tvar

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1+h_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+h_{33} \end{pmatrix}, \tag{3.155}$$

Inverzní matice bude

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (-1+h_{00})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+h_{11})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+h_{22})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+h_{33})^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.156}$$

Vzhledem k tomu, že poruchy h jsou malé, provedeme Taylorův rozvoj do prvního řádu, tj. využijeme $(1+x)^n \approx 1+nx$. Finální tvar kontravariantních složek metriky bude

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1-h_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.157)$$

Zkuste si matice $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ mezi sebou vynásobit. Pokud zanedbáte kvadráty poruch h , dostanete jednotkovou matici.

* * *

Vraťme se nyní k rovnici geodetiky. Vzhledem k předpokladu (3.153) zůstanou ve druhém členu jen časové členy, tj.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0. \quad (3.158)$$

Vyjádříme-li derivace časových složek události z (3.152), dostaneme

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + c^2 \Gamma^\mu_{00} = 0. \quad (3.159)$$

K rozepsání rovnice geodetiky zbývá určit příslušné Christoffelovy symboly ze vztahu (3.124):

$$\Gamma^\gamma_{00} = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (g_{\xi 0,0} + g_{\xi 0,0} - g_{00,\xi}).$$

Podle předpokladu (3.151) jsou časové derivace nulové a zůstane jen

$$\Gamma^\gamma_{00} = -\frac{1}{2} g^{\gamma\xi} g_{00,\xi}.$$

Budou nás tedy zajímat čtyři složky Christoffelových symbolů. Při výpočtu využijeme nulovost nediagonálních členů a časových derivací:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= -\frac{1}{2} g^{0\xi} g_{00,\xi} = -\frac{1}{2} g^{00} g_{00,0} - \frac{1}{2} g^{01} g_{00,1} - \dots = 0, \\ \Gamma^1_{00} &= -\frac{1}{2} g^{1\xi} g_{00,\xi} = -\frac{1}{2} g^{11} g_{00,1} = -\frac{1}{2} (1-h_{11})(-1+h_{00})_{,x} \approx -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_{00}}{2} \right), \\ \Gamma^2_{00} &= \dots - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_{00}}{2} \right), \\ \Gamma^3_{00} &= \dots - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h_{00}}{2} \right). \end{aligned}$$

V rovnici geodetiky (3.158) můžeme zaměnit vlastní čas za souřadnicový čas, v našem přiblížení newtonovské limity se neliší. Časová složka je splněna triviálně a prostorové složky dají:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \nabla \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right). \quad (3.160)$$

Získali jsme tvar formálně shodný s Newtonovými pohybovými rovnicemi (3.149). Povšimněte si, že poruchy h jsou bezrozměrné, kvadrát rychlosti světla dává pravé straně rovnic (3.160) správný rozměr. Rovnice geodetiky splyne s Newtonovými rovnicemi, pokud platí

$$\blacktriangleright \quad h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} = -2\phi^*. \quad (3.161)$$

Dobře je patrné, že metrika souvisí s potenciálem pole. Derivace metriky, například Christoffelovy symboly, souvisí s intenzitou pole (ta je prostorovou derivací potenciálu. Interval má v newtonovské limitě tvar

$$ds^2 \approx g_{00}d(ct)^2 + g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 = -(1+2\phi^*)dt^2 + \dots \quad (3.162)$$

O prostorové části metriky zatím nic nevíme, ale časová část je zjevně deformována přítomností tělesa, které zakřivuje časoprostor (v řeči newtonovské fyziky přítomností gravitačního potenciálu). Pro kulově symetrický zdroj pole máme

$$\phi = -\frac{GM}{r} \quad (3.163)$$

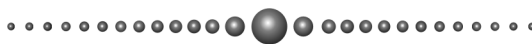
a metrika je

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \dots \quad (3.164)$$

Ve velkých vzdálenostech od tělesa ($r \rightarrow \infty$) přejde metrika v Minkowského metriku. Největší zakřivení bude na povrchu tělesa a odchylku od Minkowského metriky můžeme podle (3.162) vyjádřit za pomoci bezrozměrného potenciálu ϕ^* na povrchu tělesa:

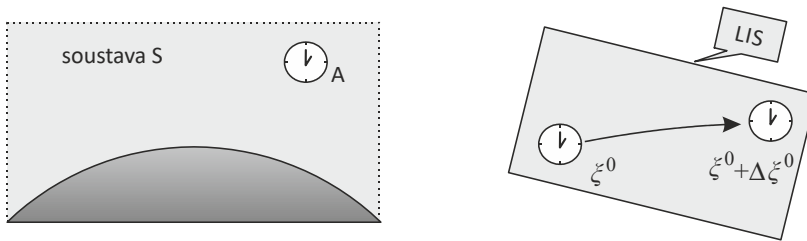
$$\phi^*(R) = -\frac{GM}{c^2 R}. \quad (3.165)$$

Pro proton vychází $\phi^* \sim 10^{-39}$, pro Zemi 10^{-9} , Slunce 10^{-6} , bílého trpaslíka 10^{-4} , neutronovou hvězdu 10^{-1} a černou díru 1. Je zjevné, že pro neutronovou hvězdu a černou díru nelze newtonovskou limitu použít a aproximace $g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ není správná.



3.3 Dilatace času a červený gravitační posuv

Představme si souřadnicový systém pevně spojený se zdrojem gravitačního pole (například se Zemí). V tomto systému budeme sledovat chod nepohybujících se hodin (jsou umístěny v místě A, například na policičce). Metrika v našem souřadnicovém systému nebude záviset na čase a souřadnice lze zvolit tak, aby metrika byla diagonální (není to nutné, ale zjednoduší to naše výpočty).



Obr. 3.16: Dilatace času – jedny hodiny

Pro interval mezi dvojným tiknutím hodin lze v naší souřadnicové soustavě S, kde se hodiny nepohybují ($\Delta x^k = 0$), psát

$$\Delta s^2 = g_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta = g_{00} c^2 \Delta t^2 + g_{kl} \Delta x^k \Delta x^l = g_{00} c^2 \Delta t^2. \quad (3.166)$$

Tytéž hodiny můžeme pozorovat v LIS. Vůči LIS se hodiny pohybují, takže platí

$$\Delta s^2 = \eta_{\alpha\beta} \Delta \xi^\alpha \Delta \xi^\beta = -(\Delta \xi^0)^2 + (\Delta \xi^1)^2 + (\Delta \xi^2)^2 + (\Delta \xi^3)^2. \quad (3.167)$$

Musíme rozlišovat tři časy: 1) souřadnicový čas t , který plyne v S spojené s hodinami a Zemí nebo jiným zdrojem pole – takový čas jsme nějak zvolili; 2) čas ξ^0 plynoucí v LIS, tj. čas v Minkowského metrice; 3) vlastní (přirozený) čas, pro který platí:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta \tau^2. \quad (3.168)$$

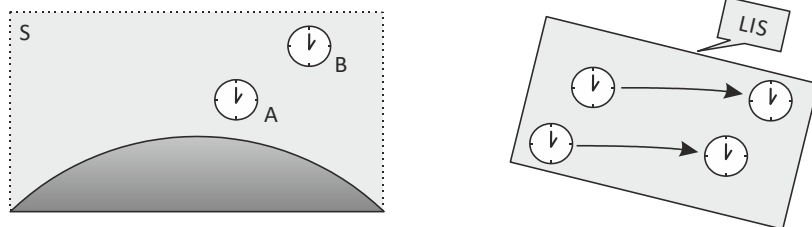
Ze vztahů (3.166) a (3.168) máme

$$\begin{aligned} -c^2 \Delta \tau^2 &= g_{00} c^2 \Delta t^2 \quad \Rightarrow \\ \Delta \tau &= \sqrt{-g_{00}(A)} \Delta t. \end{aligned} \quad (3.169)$$

Vlastní čas je jediným „přirozeným“ časem u hodin, převrácená hodnota doby mezi dvěma tiknutími hodin je vlastní frekvencí hodin, tj.

$$\frac{1}{\nu_0} = \sqrt{-g_{00}(A)} \Delta t. \quad (3.170)$$

Dvoje hodiny



Obr. 3.17: Dilatace času – dvoje hodiny

Mějme nyní v soustavě S dvoje nepohyblivé hodiny, jejichž chod budeme porovnávat. Z hodin v místě A vyšleme elektromagnetický signál do místa B. První foton bude tožný s tiknutím hodin v A, druhý s koncem kmitu (následujícím tiknutím)



Obr. 3.18: Dvoje nepohyblivé hodiny

Let fotonu bude dán jednoduchou rovnicí

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0. \quad (3.171)$$

Jde o kvadratickou rovnici pro dt . Pokud dt vyjádříme, nebude výsledek záviset na čase, neboť metrické koeficienty nejsou v naší souřadnicové soustavě S funkcemi času. Proto poleť foton z místa A do místa B stejně dlouho dnes, zítra i pozítří. Musí tedy platit

$$\Delta t_A = \Delta t_B. \quad (3.172)$$

Pro námi sledované tiknutí hodin A, které sledujeme v místě B, bude podle (3.170)

$$\frac{1}{v_B} = \sqrt{-g_{00}(B)} \Delta t_B. \quad (3.173)$$

Pokud vyšleme obdobný signál z hodin A do místa B, budeme pozorovat v místě A

$$\frac{1}{v_A} = \sqrt{-g_{00}(A)} \Delta t_A. \quad (3.174)$$

Vzhledem k tomu, že $\Delta t_A = \Delta t_B$, máme po vydělení posledních dvou vztahů

$$\blacktriangleright \quad \frac{v_B}{v_A} = \frac{\sqrt{-g_{00}(A)}}{\sqrt{-g_{00}(B)}}. \quad (3.175)$$

Vztah (3.175) je zcela obecným vztahem pro změnu chodu času způsobenou přítomností gravitačního pole (zakřivením časoprostoru). Vztah lze také interpretovat jako posun frekvence fotonu pohybujícího se z místa A do místa B (tzv. červený gravitační posuv). V limitě slabých polí (malého zakřivení časoprostoru) můžeme podle (3.162) psát

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\sqrt{1+2\phi^*(A)}}{\sqrt{1+2\phi^*(B)}} = (1+2\phi^*(A))^{1/2} (1+2\phi^*(B))^{-1/2} \approx$$

$$\approx 1 - (\phi^*(B) - \phi^*(A)) = 1 - \Delta\phi^*$$

Pro posuv frekvence fotonu, který se pohybuje mezi místy s různým gravitačním potenciálem, proto platí v newtonovské limitě slabých polí jednoduchý vztah

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = 1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (3.176)$$

Výraz vynásobíme ν_A a členy přeskupíme. Pro relativní změnu frekvence dostaneme

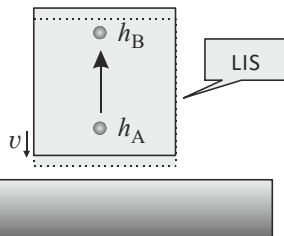
$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (3.177)$$

Relativní změna frekvence tedy souvisí se změnou potenciálu gravitačního pole.

3.3.1 Různé pohledy na dilataci

„Vysvětlení“ z hlediska LIS

Představme si foton, který se pohybuje v tíhovém poli z místa A do vyššího místa B. Místa nejsou příliš vzdálená, takže je lze „obalit“ jediným výtahem, který začne padat v okamžiku vyslání fotonu z místa A. Výtah představuje lokální inerciální soustavu, ve které se foton pohybuje po přímce konstantní rychlostí c .



Obr. 3.19: Vysvětlení z hlediska LIS

V okamžiku, kdy foton doletí do B, se výtah už pohybuje rychlostí

$$v = g \Delta t = g \Delta h / c. \quad (3.178)$$

Pozorovatel ve výšce h_B bude pozorovat foton, který přiletá z pohybujícího se výtahu, tedy uvidí díky Dopplerově jevu frekvenci

$$v_B = \left(1 - \frac{v}{c}\right) v_A = \left(1 - \frac{g\Delta h}{c^2}\right) v_A. \quad (3.179)$$

Uvážíme-li, že gravitační potenciál tíhového pole je $\phi = gh$, máme

$$\frac{v_B}{v_A} = 1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}, \quad (3.180)$$

což je stejný vztah, jako jsme odvodili z metriky v newtonovské limitě.

„Vysvětlení“ z hlediska zákona zachování energie

V tíhovém poli můžeme napsat, že potenciální energie + energie fotonu je konstantní, tj.

$$m_A gh_A + \hbar\omega_A = m_B gh_B + \hbar\omega_B. \quad (3.181)$$

Pohybovou hmotnost fotonu určíme z jeho energie ($m = E/c^2 = \hbar\omega/c^2$):

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\omega_A}{c^2} gh_A + \hbar\omega_A &= \frac{\hbar\omega_B}{c^2} gh_B + \hbar\omega_B \Rightarrow \\ v_A \left(1 + \frac{gh_A}{c^2}\right) &= v_B \left(1 + \frac{gh_B}{c^2}\right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.182)$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \left(1 + \frac{gh_A}{c^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{gh_B}{c^2}\right)^{-1} \cong 1 - \frac{g(h_B - h_A)}{c^2} = 1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}.$$

Opět jsme získali známý vztah plynoucí z newtonovské limity.

■ **Příklad 3.2:** Určeme změnu vlnové délky pro foton s $\lambda_0 = 500$ nm, který vylétl z povrchu hvězdy a doletěl do velké vzdálenosti od ní (do nekonečna):

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx -\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta\phi}{c^2}.$$

V tomto příkladu nemůžeme použít tíhové pole. Vzhledem k tomu, že se foton dostane do velké vzdálenosti, musíme použít Newtonův gravitační potenciál:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \Delta\phi/c^2) = \lambda_0 \left[1 - G \frac{M}{c^2} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right)\right] = \lambda_0 \left(1 + \frac{GM}{Rc^2}\right). \quad (3.183)$$

	M	R	$\Delta\lambda/\lambda = GM/Rc^2$	λ (nm)
Slunce	$1 M_S$	700 000 km	2×10^{-6}	500,001
bílý trpaslík	$1 M_S$	10 000 km	$1,5 \times 10^{-4}$	500,075
neutronová hvězda	$1 M_S$	20 km	0,074	537

3.3.2 Poundův-Rebkův experiment

První měření červeného gravitačního posuvu provedli v roce 1960 Robert Pound a Glen Rebka na Harvardské univerzitě. K měření využili věž, která je dodnes součástí Jeffersonovy laboratoře. V originálním článku Pound a Rebka uvádějí, že vzdálenost mezi vysílačem a přijímačem (detektorem) byla 74 stop, což odpovídá výšce 22,6 metru. Na tak malém výškovém rozdílu by podle obecné relativity měla být relativní změna frekvence

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\phi}{c^2} = -\frac{g(h_2 - h_1)}{c^2} \approx 2,5 \times 10^{-15} \quad (3.184)$$



Obr. 3.20: Poundův-Rebkův experiment

Změřit tak nepatrnou změnu frekvence vyžadovalo mimořádnou experimentální zručnost spojenou se značnou zkušeností. Vzhledem k tomu, že měřený rozdíl frekvencí byl

$$\Delta\nu \approx 2,5 \times 10^{-15} \nu_0, \quad (3.185)$$

bylo nutné nalézt zdroj s co možná nejvyšší frekvencí. Nakonec byl použit radioaktivní kobalt ^{57}Co přimíšený do železa ^{57}Fe . Železo ^{57}Fe emitovalo gama fotony s přesně definovanou energií 14,4 keV (frekvence $3,5 \times 10^{18}$ Hz). Jako detektor byl použit absorbér tvořený opět vrstvou ^{57}Fe , který rezonančně pohlcovoval fotony s toutéž frekvencí. To, zda byly fotony v detektoru pohlceny, a nebo prošly, se zjišťovalo pomocí scintilačního krystalu NaI(Tl) a fotonásobiče. Krystal měl průměr 7,5 cm a tloušťku 6 mm. Zdroj a detektor tak byly naladěny na stejnou frekvenci, tj. detektor byl schopen absorbovat fotony jen s frekvencí přesně rovnou vysílané frekvenci. U normálních atomů by zpětný ráz při absorpci fotonu v detektoru ovlivnil přijímanou frekvenci, ale v krystalech díky Mössbauerovu jevu přebírá zpětný ráz celý krystal, a tak se frekvence absorbovaných fotonů nezměnila. K jediné změně frekvence došlo gravitačním posuvem (červeným, pokud byl zdroj dole a detektor nahoře a modrým při obrácené konfiguraci). Výsledkem gravitačního posuvu je, že by detektor neměl fotony s pozměněnou frekvencí absorbovat.

A zde přichází na scénu Dopplerův jev. Zdroj fotonů byl totiž připevněn k membráně reproduktoru, která s ním pohybovala ve svislém směru sem a tam s frekvencí v rozmezí 10÷50 Hz. Dopplerovým jevem se periodicky měnila frekvence vysílaných fotonů. Vzniklý posuv v určité fázi kompenzoval gravitační posuv a detektor absorboval fotony s nezměněnou frekvencí (resp. změněnou nadvkrát – na jednu stranu gravitačním posuvem a zpět Dopplerovým posuvem). Celá metoda je vlastně upravenou Mössbauerovou spektroskopií, která umožňuje přesné určení změny frekvence. Aby nedocházelo k nežádoucímu rozptylu fotonů v atmosféře, procházely fotony mezi zdrojem a detektorem trubicí z mylaru (o průměru 40 cm) vyplněnou héliem. Na fotografii je Robert Pound u dolního konce trubice. Výsledek experimentu byl pozitivní, Pound a Rebka potvrdili červený a modrý gravitační posuv s relativní přesností 0,1, tj. 10 %. Při pozdějších modifikacích experimentu se podařilo dosáhnout přesnosti ověření obecné relativity 0,01. Šlo o jeden z „velkých“ testů obecné relativity, který detekoval změnu chodu času způsobenou přítomností Země.

3.3.3 Hafeleho-Keatingův experiment

Další zajímavý experiment, který zjišťoval změnu chodu času způsobenou gravitací Země, připravili Joseph Hafele a Richard Keating v roce 1971. K měření času využili cesiové hodiny. Kontrolní hodiny byly umístěny na observatoři USNO (*United States Naval Observatory*). S dalšími hodinami obletěli Zemi ve východním směru a s posledními v západním směru. K obletu využívali běžné dopravní linky a hodiny překládali z letadla do letadla.



Obr. 3.21: Hafele a Keating vezou na výlet cesiové hodiny

Čas na hodinách, které se pohybovaly v desetakilometrové výšce, potom porovnali s časem na kontrolních hodinách. Výsledná hodnota byla dána jak jevy speciální relativity (dilatací času), tak jevy obecné relativity. Letadlo je pohybující se systém, takže bude platit

$$\Delta s^2 = g_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta = g_{00} c^2 \Delta t^2 + g_{kl} \Delta x^k \Delta x^l = (g_{00} c^2 + g_{kl} v^k v^l) \Delta t^2 \quad (3.186)$$

Interval nalevo vyjádříme pomocí vlastního času a složku g_{00} za pomoci newtonovské limity:

$$-c^2 \Delta \tau^2 = \left(-(1 + 2\phi^*)c^2 + v^2 \right) \Delta t^2 \quad (3.187)$$

a tedy

$$\frac{1}{v} = \Delta \tau = \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t \quad (3.188)$$

Změna chodu času je tedy způsobena jak zakřivením času gravitací (člen s ϕ), tak speciálně-relativistickou dilatací času způsobenou pohybem letadla (člen s v). Porovnáme-li chod hodin v letadle a na povrchu Země (jeho rychlost pohybu je v_Z), máme

$$\frac{\Delta \tau_L}{\Delta \tau_Z} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\phi_L}{c^2} - \frac{v_L^2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\phi_Z}{c^2} - \frac{v_Z^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{\phi_L - \phi_Z}{c^2} - \frac{v_L^2 - v_Z^2}{2c^2}. \quad (3.189)$$

Po dosažení gravitačního potenciálu Země získáme jednoduchý vztah

$$\frac{\Delta \tau_L}{\Delta \tau_Z} = 1 - \frac{GM_Z}{(R_Z + h)c^2} + \frac{GM_Z}{R_Z c^2} - \frac{v_L^2 - v_Z^2}{2c^2}. \quad (3.190)$$

neboli

$$\Delta \tau_L - \Delta \tau_Z = \left(-\frac{GM_Z}{(R_Z + h)c^2} + \frac{GM_Z}{R_Z c^2} - \frac{v_L^2 - v_Z^2}{2c^2} \right) \Delta \tau_Z. \quad (3.191)$$

Letadla létala v průměrné výšce 8 900 m a oblet Země trval přibližně tři dni. Po výpočtu z aktuální letové dráhy a konkrétních rychlostí letadel vyšel rozdíl času mezi hodinami v letadle a na Zemi pro východní směr letu -40 ± 23 ns a pro západní směr letu 275 ± 21 ns. Naměřené hodnoty byly -59 ± 10 ns pro východní směr a $+273 \pm 10$ ns pro západní směr. Experiment potvrdil předpovědi obecné relativity s relativní přesností přibližně 10 % (10^{-1}). V roce 1976 byl experiment zopakován Univerzitou v Marylandu a potvrdil obecnou relativitu s přesností 1 % (10^{-2}).

Poznámka: V předchozích výpočtech jsme předpokládali, že je souřadnicový systém pevně spojený se zdrojem pole. V případě rotující Země tomu tak není, ale efekty způsobené zemskou rotací jsou vyššího řádu, než využíváme v newtonovské limitě.

● Příklad 3.3: Systém měření polohy GPS

Zjistíme, o jakou maximální vzdálenost se rozejde poloha automobilu určovaná pomocí polohovacího systému GPS od skutečnosti za 24 hodin, pokud nebude prováděna oprava na rozdílný chod času na družici a v automobilu. Předpokládejte, že automobil jede po rovníku. GPS družice je ve výšce $h = 20\,200$ km. Poloměr Země je $R_Z = 6\,371$ km, hmotnost Země $M_Z = 5,97 \times 10^{24}$ kg, $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm²kg⁻².

Řešení: Vlastní rychlost automobilu je vzhledem k otáčení Země zanedbatelná. Nejprve určíme oběžnou rychlost povrchu Země na rovníku:

$$v_Z = R_Z \omega = R_Z \frac{2\pi}{T} \approx 463 \text{ m/s}. \quad (3.192)$$

Je jasné, že vlastní rychlost automobilu je zanedbatelná. Nyní určíme rychlost oběhu družice z rovnosti setrvačné odstředivé síly a gravitační síly:

$$\frac{mv_D^2}{R+h} = G \frac{mM_Z}{(R+h)^2} \quad \Rightarrow \quad v_D = \sqrt{\frac{GM_Z}{R+h}} \approx 3871 \text{ m/s}. \quad (3.193)$$

Nyní použijeme vztah (3.191), do kterého namísto rychlosti letadla v_L dosadíme rychlost družice v_D . Za jeden den, tj. za $\Delta\tau_Z = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$ vyjde rozdíl obou časů

$$\Delta\tau_D - \Delta\tau_Z = 38 \text{ } \mu\text{s}. \quad (3.194)$$

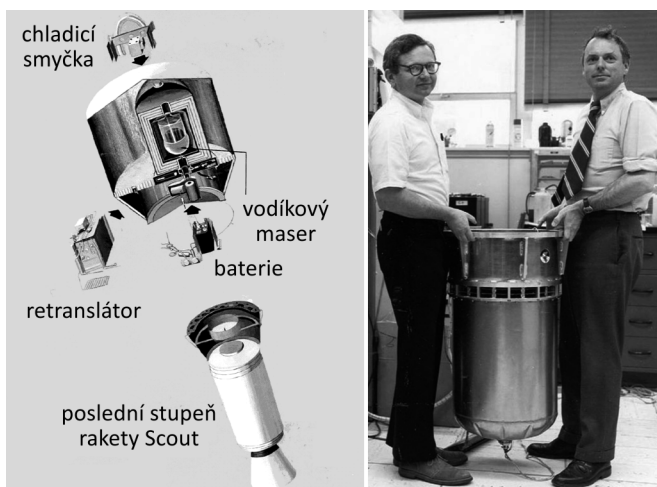
Vynásobíme-li tento údaj rychlostí světla, zjistíme, že chyba v určení polohy je

$$\Delta l = (\Delta\tau_D - \Delta\tau_Z)c \doteq 11 \text{ km}. \quad (3.195)$$

Z výpočtu je patrné, že bez započtení obecně relativistických jevů by bylo provozování polohovacího systému GPS zcela nemožné. ■

3.3.4 Gravity Probe A

Prvním velmi přesným experimentem na měření gravitačního posuvu byl balistický let sondy Gravity Probe A v roce 1976. Na přípravě experimentu se podíleli odborníci ze SAO (*Smithsonian Astrophysical Observatory*) a NASA. Vědecký tým řídili Martin Levine a Robert Vessot. Sonda měla hmotnost 100 kilogramů a byla vynesena z Wallopo-vých ostrovů (Virginie) nosnou raketou Scout do výšky 10 000 km. Sonda záměrně nedosáhla únikové rychlosti, a tak po dosažení maximální výše padala zpět směrem k zemi a dopadla do Atlantického oceánu. Na palubě byl vodíkový maser, který sloužil jako zdroj radiového signálu s přesnou frekvencí (jako přesné hodiny). Za pomoci retranslátoru byl signál z průběhu letu přijímán na povrchu Země. Po odečtení Dopplerova jevu zůstal jen modrý gravitační posuv způsobený cestou signálu ze sondy na Zem. Poprvé se podařilo ověřit předpověď obecné relativity s relativní přesností 0,01 % (10^{-4}).

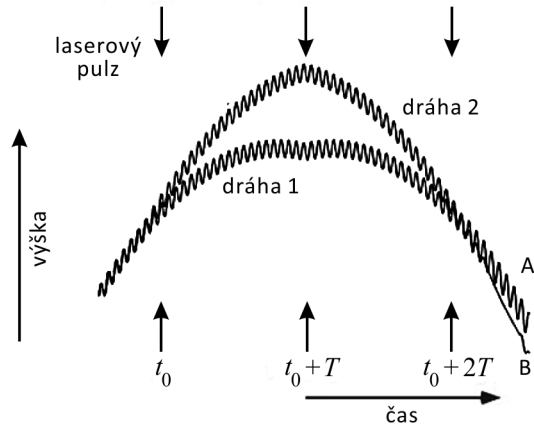
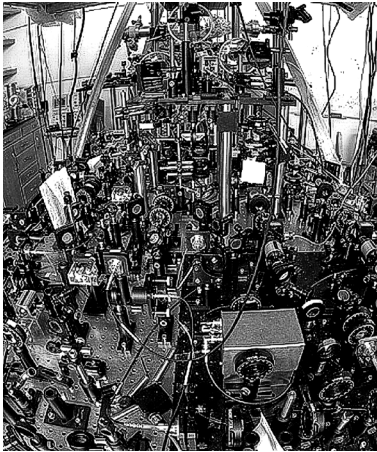


Obr. 3.22: Gravity Probe A. Nalevo je schéma sondy, napravo nesou Martin Levine a Robert Vessot vodíkový maser.

Sondu Gravity Probe A připravovali odborníci ze Stanfordské univerzity. Z jejich dílny také pocházela sonda Gravity Probe B, která měla za úkol změřit strhávání časoprostoru rotující Zemí a sonda STEP (*Satellite Test of Equivalence Principle*) pro ověření principu ekvivalence. Gravity Probe B startovala v roce 2004, ale měření byla do značné míry znehodnocena elektromagnetickým polem slunečního větru. Projekt sondy STEP byl zastaven.

3.3.5 Berkeleyský experiment

Nejnovější způsob měření červeného gravitačního posuvu je zcela revoluční. Měří gravitační posuv pomocí kvantového jevu na výškovém rozdílu pouhých 0,1 mm! Ústřední postavou nové metody je Steven Chu, nositel Nobelovy ceny za laserové ochlazování. Chu byl dlouhá léta ředitelem proslulé vědecké laboratoře LBNL (*Lawrence Berkeley National Laboratory*). Napadlo ho, že k měření červeného posuvu by se namísto elektromagnetických vln mohly využít de Broglieovy vlny. Je přece jedno, zda čas měříme pomocí elektromagnetických kmitů nebo pomocí de Broglieových vln. Tyto vlny mají podstatně vyšší frekvenci, například pro cesiový atom ochlazený Chuovou metodou má de Broglieova vlna frekvenci 3×10^{25} Hz.



Obr. 3.23: Optická lavice, na které se uskutečnil Berkeleyský experiment a jeho schéma

Této myšlenky se ujali Achim Peters (Humboldtova univerzita) a Holger Müller (UCB) a v únoru 2010 nově interpretovali experimenty Peterse z roku 1997. Tehdy Peters ochladil cesiové atomy Chuovou metodou na pouhých několik miliontin kelvinu a poté jim za pomoci laseru předal svislý impulz a sledoval jejich následný volný pád. Experimenty z roku 1997 měly ověřit princip ekvivalence. Stejný experiment může ale také sloužit k měření červeného gravitačního posuvu. Laserový impulz působící na shluk ochlazených cesiových atomů totiž připraví atomy ve směsici dvou stavů. Jeden stav reprezentuje nevychýlené atomy a druhý stav atomy vychýlené pulzem o cca 0,1 mm svisle. Pro cesiové atomy ve vychýleném stavu plyne čas jinak než pro nevychýlené. Za přibližně 0,3 s volného pádu vychýlených atomů se bude čas uplynulý v obou stavech lišit o $\times 10^{-20}$ s. Jde o neuvěřitelně krátký okamžik, ale vzhledem k vysoké frekvenci de Broglieových vln měřitelný za pomoci interference vln z obou stavů. Postačí, aby lase-

rový pulz atakoval cesiové atomy třikrát. Poprvé udělí s 50 % pravděpodobností atomům svislý impuls a atomy se ocitnou v superpozici nevychýleného a vychýleného stavu. Atom se pohybuje v superpozici nízké dráhy (tu by měl nevychýlený atom) vyšší dráhy (tu by měl vychýlený atom). Druhý laserový impuls způsobí, že atomy na vyšší dráze se začnou přibližovat k těm na nižší dráze. V okamžiku, kdy se setkají, dojde k interferenci de Broglieových vln obou stavů. Za pomoci třetího laserového pulzu lze změřit změnu fáze mezi oběma stavy. V podstatě jde o atomový interferometr mezi dvěma stavy.

Výsledky experimentů jsou fascinující – červený gravitační posuv se podařilo změřit s relativní přesností 7×10^{-9} , což je o čtyři řády přesnější než měření sondou Gravity Probe A.



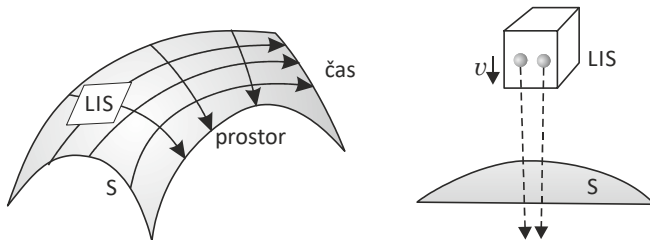
3.4 Einsteinův gravitační zákon

3.4.1 Riemannův tenzor křivosti

Pokud nějakým způsobem nalezneme metriku a je tvořena různými složitými funkcemi, nemůžeme na první pohled zjistit, zda je „divokost“ metriky způsobena křivostí zvoleného souřadnicového systému, nebo skutečným zakřivením časoprostoru. V této kapitole zkonstruujeme veličinu, podle které lze jednoznačně poznat, jak to s křivostí časoprostoru je.

Jak otestovat zakřivení?

Zakřivení časoprostoru je v obecné relativitě vyjádřením gravitačního působení mezi tělesy. Víme ale již, že vždy můžeme zvolit lokální inerciální systém LIS (malou klec volně padající po krátkou dobu), kde projevy gravitačního působení vymizí. Na dvou-rozměrném papíru se nám nepodaří nakreslit čtyřrozměrný pokrivený svět. Pro jednoduchost ho proto nahradíme pokrivenou plochou, na které jedna souřadnice znamená čas a druhá prostor. Lokálně inerciální systém potom představuje tečnou rovinu vedenou v daném bodě k ploše.



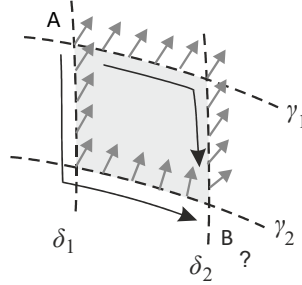
Obr. 3.24: Vztah LIS a obecných souřadnic

Je dobře patrné, že tečná rovina LIS (časoprostorová nadplocha) přiléhá ke skutečné pokrivené ploše S (pokrivenému časoprostoru) jen v blízkosti zvoleného bodu. Proto musí být LIS lokální, malý v prostoru a pozorovaný po krátkou dobu („malý“ v čase), aby uvedená aproximace platila. V kleci volně padající k Zemi po dosti dlouhé době už poznáme, že nejde o skutečný inerciální systém, neboť se tělesa k sobě poněkud přibližují. V řeči matematiky jsme se na tečné rovině už vzdálili příliš daleko od bodu, ve kterém se dotýká křivé plochy. Pokud by plocha S byla rovná, bude s ní tečná rovina LIS totožná, a půjde vybudovat globální inerciální systém GIS, tj. časoprostor bude plochý a popsateľný Minkowského metrikou.

V newtonovské fyzice je přibližování kuliček v LIS dáno až nehomogenitami gravitačního pole, tj. prvními derivacemi pole a druhými derivacemi potenciálů. V řeči metricky koresponduje gravitační potenciál s metrikou, intenzita pole s prvními derivacemi metriky (Christoffelovými symboly) a nehomogenity pole až s druhými derivacemi metriky. Samotné pokrivení časoprostoru proto musí být popsateľné pomocí veličiny,

kteřá obsahuje druhé derivace metriky (jinak bychom konali experimenty na úrovni LIS, tj. tečné nadplochy).

Představme si dvourozměrnou souřadnicovou síť na křivé ploše. Pokud budeme paralelně přenášet vektor z bodu A do bodu B nejprve ve směru jedné osy, poté ve směru druhé osy, můžeme výsledek porovnat s pokusem provedeným v opačném pořadí:



Obr. 3.25: Test křivosti časoprostoru

Pokud se bude vektor přenesený po obou cestách shodovat, je naděje, že plocha je rovná, pokud ne, je jistojistě křivá. Přesun vektoru je dán kovariantní derivací, ta určuje jeho změnu, měli bychom proto sledovat rozdíl

$$A^{\beta}{}_{;\gamma\delta} - A^{\beta}{}_{;\delta\gamma} \quad (3.196)$$

Pokud vyjde pro všechny možné hodnoty γ a δ nulový výsledek, bude časoprostor rovný; pokud bude jediná hodnota nenulová, bude časoprostor skutečně křivý, a tedy není možné zavést globální inerciální systém. Klíčem k otázce z nadpisu kapitoly je tedy vyčíslení rozdílu (3.196). Vzhledem k tomu, že jde o tenzorovou veličinu, můžeme všechny indexy snížit a počítat rozdíl

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = ? \quad (3.197)$$

Postupujme přímočaře, budeme vypisovat jen první část výrazu, druhá má opačné znaménko a zaměněné indexy δ a γ , což formálně запиšeme symbolem $\gamma \leftrightarrow \delta$:

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = [A_{\beta;\gamma}]_{;\delta} - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (3.198)$$

Na pravé straně provedeme kovariantní derivaci podle δ tenzoru $A_{\beta;\gamma}$ se dvěma indexy:

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = [A_{\beta;\gamma}]_{;\delta} - \Gamma_{\beta\delta}^{\xi} A_{\xi;\gamma} - \Gamma_{\gamma\delta}^{\xi} A_{\beta;\xi} - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (3.199)$$

Třetí člen na pravé straně je symetrický v indexech γ a δ , ve složené závorce proto bude stejný člen s opačným znaménkem, který se s ním vyruší:

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = [A_{\beta;\gamma}]_{;\delta} - \Gamma_{\beta\delta}^{\xi} A_{\xi;\gamma} - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (3.200)$$

Nyní rozepíšeme obě zbývající kovariantní derivace:

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = [A_{\beta;\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\xi} A_{\xi}]_{;\delta} - \Gamma_{\beta\delta}^{\xi} [A_{\xi;\gamma} - \Gamma_{\xi\gamma}^{\eta} A_{\eta}] - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (3.201)$$

Nyní provedeme parciální derivace prvního členu a roznásobíme druhý člen:

$$\begin{aligned} & A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = \\ & = A_{\beta;\gamma\delta} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\xi} A_{\xi} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\xi} A_{\xi} - \Gamma_{\beta\delta}^{\xi} A_{\xi,\gamma} + \Gamma_{\beta\delta}^{\xi} \Gamma_{\xi\gamma}^{\eta} A_{\eta} - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \end{aligned} \quad (3.202)$$

První člen na pravé straně je symetrický v indexech γ a δ a ve složené závorce opět bude člen s opačným znaménkem. Totéž platí o součtu třetího a čtvrtého členu na pravé straně. Zbude

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = -\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\xi} A_{\xi} + \Gamma_{\beta\delta}^{\xi} \Gamma_{\xi\gamma}^{\eta} A_{\eta} - \{\gamma \leftrightarrow \delta\} \quad (3.203)$$

Máme tedy výsledek

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\xi} A_{\xi} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\xi} A_{\xi} + \Gamma_{\beta\delta}^{\xi} \Gamma_{\xi\gamma}^{\eta} A_{\eta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\xi} \Gamma_{\xi\delta}^{\eta} A_{\eta} \quad (3.204)$$

Abychom mohli vytknout vektor A , změníme v prvních dvou členech sčítací index na η :

$$A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = \left[\Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\eta} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\eta} + \Gamma_{\beta\delta}^{\xi} \Gamma_{\xi\gamma}^{\eta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\xi} \Gamma_{\xi\delta}^{\eta} \right] A_{\eta} \quad (3.205)$$

Nalezený výraz zapíšeme takto:

$$\blacktriangleright \quad A_{\beta;\gamma\delta} - A_{\beta;\delta\gamma} = R^{\eta}_{\beta\gamma\delta} A_{\eta}; \quad (3.206)$$

$$\blacktriangleright \quad R^{\eta}_{\beta\gamma\delta} \equiv \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\eta} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\eta} + \Gamma_{\beta\delta}^{\xi} \Gamma_{\xi\gamma}^{\eta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\xi} \Gamma_{\xi\delta}^{\eta}, \quad (3.207)$$

kde $R^{\eta}_{\beta\gamma\delta}$ je Riemannův tenzor křivosti. Je klíčovou veličinou pro zjištění, zda je časoprostor plochý nebo křivý.

Plochost časoprostoru

Ve fyzice se většinou pro Riemannův tenzor křivosti používá zkrácený zápis

$$R^{\eta}_{\beta\gamma\delta} \equiv R^{\eta}_{\beta\gamma\delta}. \quad (3.208)$$

Je to obdobné, jako u Christoffelových symbolů. Jak je patrné z definice (3.207), Riemannův tenzor obsahuje druhé derivace metrického tenzoru, neboť samotné Christoffelovy symboly obsahují první derivace. Z definice ovšem není zřejmé, že by mělo jít o tenzor, neboť Christoffelovy symboly nemají tenzorová transformační pravidla. Tenzorový charakter $R^{\eta}_{\beta\gamma\delta}$ je nicméně dobře vidět ze vztahu (3.206). Proto můžeme jednotlivé složky libovolně zvyšovat a snižovat a můžeme zavést Riemannův tenzor s kovariantními složkami

$$\blacktriangleright \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv g_{\alpha\eta} R^{\eta}_{\beta\gamma\delta}. \quad (3.209)$$

Také snadno napíšeme komutátor druhých kovariantních derivací (3.206) pro kontravariantní složku vektoru:

$$\blacktriangleright \quad A^{\beta}_{;\gamma\delta} - A^{\beta}_{;\delta\gamma} = R^{\beta}_{\eta\gamma\delta} A^{\eta}; \quad (3.210)$$

Velmi užitečné jsou také zúženiny Riemannova tenzoru:

$$\blacktriangleright \quad R_{\alpha\beta} \equiv R^{\xi}_{\alpha\xi\beta}, \quad (3.211)$$

$$\blacktriangleright \quad R \equiv R^{\xi}_{\xi}. \quad (3.212)$$

První z nich se nazývá *Ricciho tenzor* a druhý *skalární křivost*. Pokud je R nebo $R_{\alpha\beta}$ nenulové, není časoprostor plochý. Pokud jsou nulové, prostor může být plochý, ale nemusí. Ke kompletnímu posouzení křivosti časoprostoru musíme vzít v úvahu všechny složky Riemannova tenzoru křivosti. Následující tvrzení jsou ekvivalentní a jsou jen různým vyjádřením plochosti časoprostoru.

Ekvivalentní podmínky plochosti časoprostoru

- Všechny složky Riemannova tenzoru jsou nulové.
- Časoprostor je plochý.
- Existuje globální inerciální souřadnicový systém.
- V časoprostoru lze zavést Minkowského metriku.
- Paralelním přenosem po libovolné křivce se vektor nezmění.

Vlastnosti Riemannova tenzoru

Riemannův tenzor je veličina se čtyřmi indexy, z nichž každý má čtyři hodnoty (jednu časovou a tři prostorové). Celkem jde má Riemannův tenzor 256 složek. Mezi těmito složkami platí různé symetrie, takže ve výsledku je nezávislých složek pouze 20. Riemannův tenzor je antisymetrický v první i druhé dvojici indexů a symetrický vůči záměně první dvojice za druhou dvojici a součet cyklických záměn posledních tří indexů je nulový (všechny vlastnosti lze ukázat přímo z definice):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}, \quad (3.213)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \quad (3.214)$$

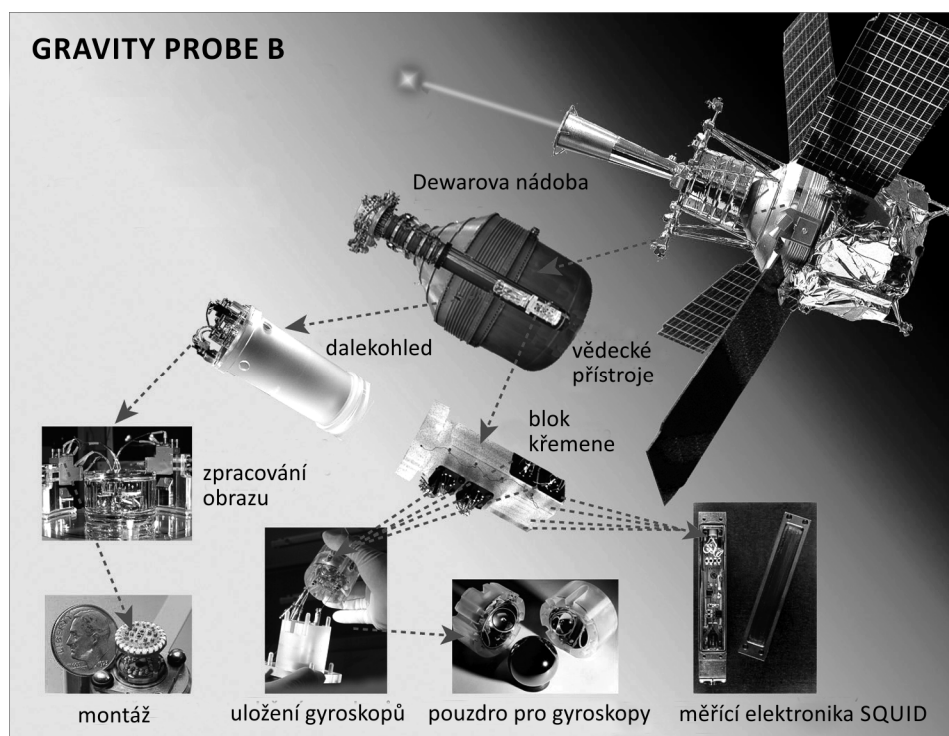
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = +R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad (3.215)$$

$$R_{\xi\alpha\beta\gamma} + R_{\xi\beta\gamma\alpha} + R_{\xi\gamma\alpha\beta} = 0. \quad (3.216)$$

Pokud se na první dva indexy budeme dívat jako na antisymetrickou matici 4×4 , jsou nezávislými členy jen prvky nad diagonálou. Na diagonále musí být u antisymetrické matice nuly, pod diagonálou dopočteme prvky z hodnot nad diagonálou. Celkový počet nezávislých prvků spojených s první dvojicí indexů je proto 6. Obdobná úvaha platí pro druhou dvojici indexů. Nahradíme-li první dvojici jedním indexem se šesti hodnotami a druhý index také, můžeme se na Riemannův tenzor dívat jako na matici 6×6 , která má 36 nezávislých hodnot. Podle (3.215) je ovšem tato matice symetrická, tj. prvky pod diagonálou můžeme spočítat z prvků nad diagonálou. Nezávislých prvků je proto jen $6+5+4+3+2+1 = 21$. Uvážíme-li, že mezi nimi platí ještě vztah (3.216), má Riemannův tenzor maximálně 20 nezávislých hodnot. Lze ukázat, že jich je právě 20.

Gravity Probe B

Již jsme se zmínili o balistické družici Gravity Probe A, která testovala změnu chodu času za pomoci časového standardu, který představoval vodíkový maser. Na Stanfordské univerzitě ale vyvinuli i další sondu, Gravity Probe B, která měla za pomoci setrvačníku testovat a) zakřivení časoprostoru kolem Země; b) strhávání časoprostoru rotující Zemí. Osa rotujícího setrvačníku představuje paralelně přenášený vektor. Setrvačníky byly v sondě drženy v pouzdře magnetickým polem a vše bylo zařízeno tak, že se pohybovaly po geodetice (včetně celé družice). Pokud Země skutečně zakřivuje časoprostor, je Riemannův tenzor nenulový a směr osy rotace setrvačníku by se měl změnit o $6,6''$ za rok. Ještě menší je efekt strhávání časoprostoru rotující Zemí, ten činí pouhých $0,042''$ za rok a změna úhlu je na polární dráze kolmá ke změně způsobené zakřivením časoprostoru.



Obr. 3.26: Gravity probe B

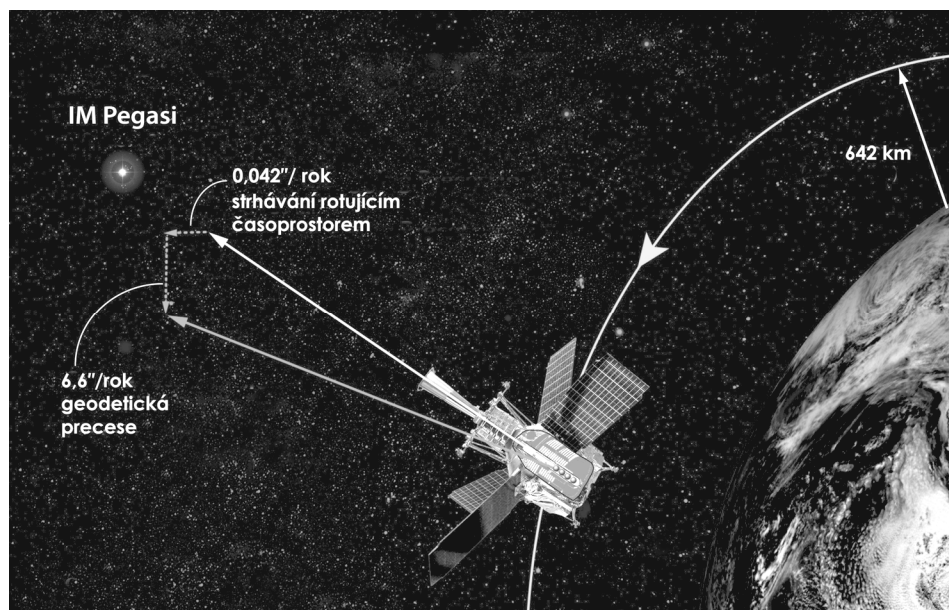
Družice měla hmotnost 3 400 kg a byla navedena na polární oběžnou dráhu dne 20. dubna 2004 z Vandenbergovy letecké základny v jižní Kalifornii. Zemi obíhala ve výšce 640 km. Základem družice byla Dewarova nádoba s $2,5 \text{ m}^3$ hélia, které po dobu jednoho roku chladilo pracovní prostor na teplotu 1,8 K. V ose Dewarovy nádoby bylo v oloveném plášti zabudováno pouzdro s měřicí aparaturou, která se skládala ze dvou pevně spojených částí: 53 cm dlouhého bloku taveného křemene se čtyřmi gyroskopy a naváděcího dalekohledu. Na vnější části Dewarovy nádoby byly namontovány panely slunečních baterií a protisluneční clona dalekohledu.

Srdcem družice byly čtyři gyroskopy skládající se z pouzdra a rotoru. Každý gyroskop byl umístěn v samostatném válcovém otvoru v bloku taveného křemene. Rotory gyroskopů připomínaly pingpongové míčky. Měly průměr 3,8 cm a jejich výrobě byla věnována mimořádná pozornost. Byly z taveného brazilského křemene a povrch měly vyleštěn s přesností pouhých čtyřiceti atomárních vrstev ($0,01 \mu\text{m}$). Na rotorech byla nanášena tenká vrstvička niobu, který byl za pracovní teploty supravodivý.

Otáčení supravodivého materiálu (niobu na povrchu rotorů) vytvořilo nenulový magnetický moment (Londonův jev), který byl měřen vodivou smyčkou zabudovanou v pouzdře gyroskopu. Smyčka byla spojená s měřicí elektronikou SQUID, která umožnila přesně zjistit osu rotace gyroskopu.

Blok taveného křemene, ve kterém jsou zabudovány gyroskopy, byl pevně spojený s malým naváděcím dalekohledem o průměru aperturní clony 14 cm a délce 36 cm. Dalekohled po celou dobu pozorování sledoval vybranou naváděcí hvězdu (IM Pegasi). K této hvězdě mířily i rotační osy všech gyroskopů, dva rotovaly v jednom směru a zbývající v opačném.

Družice byla výsledkem čtyř desetiletí pečlivých příprav. Testování obecné relativity pomocí rotujících gyroskopů navrhl v roce 1959 Leonard Schiff ze Stanfordské univerzity. Ta se také stala hlavním aktérem vyslání družice na oběžnou dráhu. Ve výpočetním centru v kampusu univerzity se zpracovávala všechna data vysílaná družicí. Při přípravě družice byly použity nejnovější známé technologie, družice byla sestavena v prostředí s čistotou třídy 10 podle amerických předpisů. Dokonale opracované součástky by mohly poškodit již mikrometrová zrnka prachu. Družice změřila změnu osy setrvačnicků způsobenou zakřivením časoprostoru, nepodařilo se jí ale díky opakovanému přerušení měření slunečními vzplanutí změřit změnu způsobenou strháváním časoprostoru rotující Zemí. Finanční podpora projektu byla ze strany NASA zastavena dne 21. května 2008.



Obr. 3.27 Gravity Probe B, měření odklonů

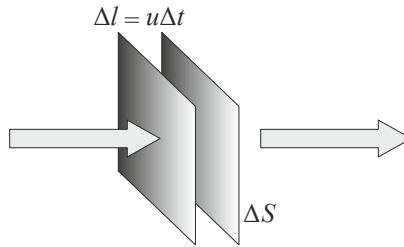
3.4.2 Rovnice kontinuity v klasické fyzice

Einsteinův gravitační zákon řeší otázku, jakým způsobem látka zakřivuje časoprostor a jak se látka v tomto křivém časoprostoru pohybuje. V minulé kapitole jsme se naučili popsat pokrivený časoprostor. Nyní se budeme věnovat popisu rozložení hmoty a energie v časoprostoru. Již dříve jsme se setkali s rovnicí kontinuity, která vyjadřuje v diferenciální podobě zákon zachování nějaké veličiny. Vztahy budeme potřebovat zobecnit na celý časoprostor. Zopakujme si proto v rychlosti odvození zákona zachování energie a hybnosti v proudící ideální tekutině, na kterou nepůsobí žádné vnější síly.

Uvažujme proudění aditivní veličiny A (roste s množstvím látky, například hmotnost, energie, hybnost, náboj). Proudění aditivní veličiny popisujeme čtyřmi veličinami (hustotou a tokem), symbolem $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ jsme označili rychlost proudění.

$$\rho_A \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta V}; \quad \mathbf{j}_A \equiv \rho_A \mathbf{u}. \quad (3.217)$$

Později v této kapitole uvidíme, že tyto čtyři veličiny tvoří relativistický čtyřvektor a transformují se za pomoci Lorentzovy matice – ρ_A nazýváme hustotou; \mathbf{j}_A nazýváme tokem veličiny A . Jaký je význam toku? Jako každý vektor má velikost a směr. Směr je zřejmý, jde o směr rychlosti, tedy o směr proudění veličiny A . Abychom zjistili velikost toku, postavme kolmo na tok myšlenou plochu ΔS , za čas Δt se tekoucí látka posune o Δl :



Obr. 3.28: Význam toku aditivní veličiny

Velikost toku nyní určíme přímo z jeho definice, tj.

$$j_A = \rho_A u = \frac{\Delta A}{\Delta V} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta A}{\Delta S \Delta l} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta A}{\Delta S \Delta t}. \quad (3.218)$$

Velikost toku tedy je množství A proteklé jednotkovou plochou za jednotku času. Například tok náboje má jednotku $\text{Cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Jestliže se veličina A při proudění neztrácí, ani nepřibývá, musí časový úbytek veličiny z libovolného objemu být roven toku veličiny přes plochu ohraničující tento objem:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho_A dV = \int_{\partial V} \mathbf{j}_A \cdot d\mathbf{S}$$

Hranice objemu V je označena ∂V . Rozměr integrálu vyplývá z kontextu, není značen počtem integračních symbolů, jak tomu bývá v úvodních kurzech fyziky. Skalární součin napravo jen respektuje skutečnost, že kolmo k ploše teče veškerá látka, při toku podél plochy ji neprotéká žádná. Pomocí Gaussovy věty integrálního počtu převedeme plošný integrál na objemový a oba integrály spojíme:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A \right) dV = 0 .$$

Časovou derivaci jsme přemístili do integrálu, tam je ale $\rho_A = \rho_A(t, \mathbf{x})$ a máme při derivování možnost výběru, proto musíme použít parciální derivaci. Uvedený vztah musí při proudění platit v libovolném objemu, a to je možné jen, je-li argument integrálu roven nule (až na množiny menší dimenze, než je má probíhající integrace):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A = 0 \quad (3.219)$$

Odvozený vztah se nazývá rovnice kontinuity a na pravé straně je nula, pokud se veličina A při proudění zachovává. Nezachovává-li se, není na pravé straně nula. Rovnice kontinuity je tedy vyjádřením zákona zachování aditivní veličiny A .

Zákon zachování hmoty a energie v klasické fyzice

Pro hustotu (klidové) hmotnosti napíšeme rovnici kontinuity ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (\rho u_k) = 0 . \quad (3.220)$$

Stejná rovnice platí i pro hustotu energie ($E = mc^2$, tj. $\rho_E = \rho_m c^2$) a vztahy se liší jen konstantou c^2 . Zavedeme-li čtyřvektor

$$J^\mu \equiv \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (3.221)$$

můžeme zákon zachování hmoty-energie zapsat v přehledném tvaru

$$\partial_\mu J^\mu = 0; \quad J^\mu_{,\mu} = 0, \quad (3.222)$$

ze kterého je patrné, že J^μ tvoří čtyřvektor popisující proudění hmoty a energie.

Zákon zachování hybnosti v klasické fyzice

Pro objekt o hmotnosti m platí Newtonova pohybová rovnice

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} . \quad (3.223)$$

Pro proudící prostředí zavedeme hustotu síly

$$\mathbf{f} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} . \quad (3.224)$$

V hustotách se rychlost \mathbf{v} jedné částice změní na rychlost proudění $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} . \quad (3.225)$$

Po rozepsání derivace pro pole $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ získáme rovnici

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (3.226)$$

Zbývá určit hustotu síly. U konzervativních polí míří síla k minimu potenciální energie:

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p \quad (3.227)$$

nebo v hustotách

$$\mathbf{f} = -\nabla w_p. \quad (3.228)$$

Tlaková energie je

$$W_p = \int F_p dl = \int p S dl = \int p dV, \quad (3.229)$$

hustota tlakové energie proto je $w_p = p$ a hustota síly způsobená tlakem vychází

$$\mathbf{f} = -\nabla p. \quad (3.230)$$

Pohybová rovnice (3.226) s hustotou síly způsobenou tlakem má proto tvar

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p. \quad (3.231)$$

Nalezněme nyní časový vývoj hustoty hybnosti (tj. budeme hledat zákon zachování hybnosti)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u_k + \rho \frac{\partial u_k}{\partial t}.$$

Za časovou změnu hustoty dosadíme z rovnice kontinuity (3.220) a za časovou změnu hybnosti z pohybové rovnice (3.231):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = -\partial_l(\rho u_l) u_k - \rho(u_l \partial_l) u_k - \partial_k p.$$

Všechny členy převedeme na levou stranu a upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial(\rho u_l)}{\partial x_l} u_k + (\rho u_l) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial p}{\partial x_k} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho u_l u_k) + \frac{\partial p}{\partial x_k} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho u_k u_l + p \delta_{kl}) &= 0. \end{aligned}$$

Získali jsme zákon zachování hybnosti. V závorce v prostorových derivacích je tok hybnosti neboli tenzor tlaku. Sama hybnost je vektorová veličina a proto její tok tvoří tenzor druhého řádu. Symetrie tenzoru tlaku vzhledem k záměně indexů zajišťuje zachování momentu hybnosti v proudící tekutině. Tenzor tlaku se skládá ze dvou částí – tenzorové části související s prouděním tekutiny a skalární části, kterou tvoří normální

tlak působící ve všech směrech stejně. Zákon zachování hybnosti můžeme napsat ve složkovém zápisu

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(T_{kl}) = 0; \quad T_{kl} \equiv \rho u_k u_l + p \delta_{kl}. \quad (3.232)$$

nebo v invariantním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{T} = 0. \quad (3.233)$$

Opět jsme získali tvar rovnice kontinuity. V časové části je hustota hybnosti, v prostorové části tok hybnosti. Ten je nyní tenzorem druhého řádu a výsledkem operace divergence je vektorová veličina, jak jsme již viděli v kapitole Elektromagnetické pole.

3.4.3 Tenzor energie a hybnosti

Energie a hybnost tvoří čtyřvektor, a proto zákon zachování energie (3.220) a zákon zachování hybnosti (3.232) patří neoddělitelně k sobě. Rozepíšeme je po složkách:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho u_x) + \partial_y(\rho u_y) + \partial_z(\rho u_z) &= 0, \\ \partial_t(\rho u_x) + \partial_x(\rho u_x^2 + p) + \partial_y(\rho u_x u_y) + \partial_z(\rho u_x u_z) &= 0, \\ \partial_t(\rho u_y) + \partial_x(\rho u_y u_x) + \partial_y(\rho u_y^2 + p) + \partial_z(\rho u_y u_z) &= 0, \\ \partial_t(\rho u_z) + \partial_x(\rho u_z u_x) + \partial_y(\rho u_z u_y) + \partial_z(\rho u_z^2 + p) &= 0. \end{aligned} \quad (3.234)$$

První řádek je zákon zachování energie, další řádky jsou složky zákona zachování hybnosti. Napišme tyto zákony zachování maticově:

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} \rho & \rho u_x & \rho u_y & \rho u_z \\ \rho u_x & \rho u_x u_x + p & \rho u_x u_y & \rho u_x u_z \\ \rho u_y & \rho u_y u_x & \rho u_y u_y + p & \rho u_y u_z \\ \rho u_z & \rho u_z u_x & \rho u_z u_y & \rho u_z u_z + p \end{array} \right) = 0 \quad (3.235)$$

Zápis znamená 4 rovnice, vždy násobíme řádkovou matici nalevo sloupci čtvercové matice napravo. Pověšiměte si, že pravá matice 4×4 je symetrická. Říkáme jí *tenzor energie a hybnosti*. Jeho relativistickou variantu budeme označovat symbolem $T^{\alpha\beta}$. Veličiny v prvním sloupci mají význam hustoty hmoty-energie ρ a hustoty jednotlivých složek hybnosti $\rho \mathbf{u}$. V prvním řádku má tatáž veličina $\rho \mathbf{u}$ význam toku hmoty. Upravme nyní maticový zápis tak, aby všechny prvky měly stejný rozměr (do obou matic dodáme vhodně rychlost světla c):

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial ct} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} \rho c^2 & \rho c u_x & \rho c u_y & \rho c u_z \\ \rho c u_x & \rho u_x u_x + p & \rho u_x u_y & \rho u_x u_z \\ \rho c u_y & \rho u_y u_x & \rho u_y u_y + p & \rho u_y u_z \\ \rho c u_z & \rho u_z u_x & \rho u_z u_y & \rho u_z u_z + p \end{array} \right) = 0. \quad (3.236)$$

Složka T^{00} byla původně ρ (hustota hmoty) a nyní je ρc^2 (hustota energie). V lokálně inerciální soustavě padající v daném okamžiku s látkou bude mít matice na pravé straně tvar $T^{\alpha\beta} = \text{diag}(\rho c^2, p, p, p)$. Stopa matice (součet diagonálních členů) je $T^\alpha_\alpha = -\rho c^2 + 3p$. Ke změně znaménka v časové oblasti došlo vlivem snížení indexu. Stopa je důležitým invariantem matice a budeme požadovat, aby se tato stopa nezměnila ani u relativistického tvaru. Dodání c do členů nemá žádný vliv na výsledné rovnice (zákon zachování hmoty-energie a hybnosti). Prostorová část tenzoru má tvar

$$T_{kl} = \rho u_k u_l + p \delta_{kl}. \quad (3.237)$$

Ve speciální relativitě není třeba rozlišovat v prostorové části dolní a horní indexy. Jako přímé zobecnění k obecné metrice obecné relativity se zdá být výraz

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta + p g^{\alpha\beta}. \quad (3.238)$$

Proveďme nyní newtonovskou limitu, abychom zkontrolovali, zda zpětně dostaneme matici ve výrazu (3.236). Spočtěme si v newtonovské limitě čtyřrychlost a metriku:

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{u} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (3.239)$$

$$g^{\alpha\beta} \rightarrow \eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (3.240)$$

Pro prostorové složky dostaneme

$$T^{kl} = \rho U^k U^l + p g^{kl} \rightarrow \rho u_k u_l + p \delta_{kl}. \quad (3.241)$$

Opět jsme využili, že v Newtonově limitě není v prostorové části rozdíl mezi kontravariantními a kovariantními složkami. Časoprostorové složky budou

$$T^{0l} = \rho U^0 U^l + p g^{0l} \rightarrow \rho c u_l. \quad (3.242)$$

Oba výrazy přejdou v newtonovské limitě ve správné členy tenzoru ve výrazu (3.236). Problém ale bude se složkou T^{00} :

$$T^{00} = \rho U^0 U^0 + p g^{00} \rightarrow \rho c^2 - p. \quad (3.243)$$

Takový člen nekorresponduje s nerelativistickým výrazem, navíc by narušil správnou hodnotu stopy tenzoru energie a hybnosti, která je invariantem. Korektním zobecněním pro relativitu je výraz

$$\blacktriangleright \quad T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U^\beta + p g^{\alpha\beta}, \quad (3.244)$$

kde ρ je klidová hustota klidové hmotnosti. V limitě nízkých rychlostí je člen $p/c^2 \ll \rho$, tedy neovlivní newtonovskou limitu. V předpisu (3.244) přispívá ke klidové hustotě energie aditivně i tlakový člen, za něhož je zodpovědný chaotický pohyb částic. Člen T^{00} a stopa tenzoru při předpisu (3.244) dají v LIS ($\gamma = 1$), spojeném v daném čase a místě s látkou, správnou hodnotu:

$$T^{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^0 U^0 + p g^{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \gamma^2 c^2 - p = \rho c^2, \quad (3.245)$$

$$\text{Tr}(T) \equiv T^\alpha{}_\alpha = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U_\alpha + p g^\alpha{}_\alpha = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (-c^2) + 4p = 3p - \rho c^2. \quad (3.246)$$

Rozložení hmoty a energie v prostoru je tedy popsáno tenzorem hmoty a energie (3.244). Zákon zachování energie a hybnosti lze zapsat v úsporném maticovém tvaru

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.247)$$

Příslušný kovariantní zápis v obecné relativitě je

$$\blacktriangleright \quad T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \quad (3.248)$$

Pro $\alpha = 0$ dostaneme zákon zachování energie a pro $\alpha = 1, 2, 3$ zákony zachování jednotlivých složek hybnosti. Z rovnice (3.248) ovšem plyne

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\xi\beta} T^{\xi\beta} + \Gamma^\beta{}_{\xi\beta} T^{\alpha\xi} = 0. \quad (3.249)$$

První výraz je rovnice kontinuity, další členy jsou způsobeny křivostí a zákon zachování porušují. Zákon zachování energie a hybnosti látky proto v obecné relativitě neplatí. Látka předává energii a hybnost gravitačnímu poli, tj. zakřivení časoprostoru. Teprve pro soustavu pole + částice (zakřivení + částice) by zákon zachování energie a hybnosti byl platný.

3.4.4 Einsteinův gravitační zákon

Nový gravitační zákon by měl mít tvar

$$G(\text{zakřivení časoprostoru}) = F(\text{rozložení hmoty a energie}), \quad (3.250)$$

neboť předpokládáme, že rozložení hmoty a energie způsobuje zakřivení časoprostoru a naopak zakřivení časoprostoru způsobuje změnu rozložení hmoty a energie. Rozložení hmoty a energie je popsáno tenzorem hmoty a energie, proto musíme na levé straně využít maximálně dvojjedindexové veličiny charakterizující zakřivení časoprostoru:

$$G(R^{\alpha\beta}, R, g^{\alpha\beta}) = F(T^{\alpha\beta}). \quad (3.251)$$

Budeme předpokládat, že hledaný zákon má co možná nejjednodušší tvar, tj. v úvahu přichází

$$c_1 R^{\alpha\beta} + c_2 R g^{\alpha\beta} + c_3 g^{\alpha\beta} = c_4 T^{\alpha\beta}. \quad (3.252)$$

V novém gravitačním zákonu jsou 4 neurčené konstanty. Jedné z nich se můžeme zbavit dělením celé rovnice konstantou c_1 :

$$R^{\alpha\beta} + d_1 R g^{\alpha\beta} + d_2 g^{\alpha\beta} = d_3 T^{\alpha\beta}. \quad (3.253)$$

Konstantu d_1 určíme z podmínky (3.248), tj. $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$. Rovnici (3.253) proto kovariantně derivujeme podle β :

$$R^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + d_1 (R g^{\alpha\beta}){}_{;\beta} + d_2 g^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = d_3 T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}.$$

Pravá strana je nulová, na levé straně je nulový poslední člen (kovariantní derivace metriky je vždy nulová, viz (3.126)). Z rovnice tedy zbude

$$R^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + d_1 (Rg^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0$$

Z této podmínky lze určit konstantu d_1 . Po výpočtu vyjde $d_1 = -1/2$ a tedy máme

$$R^{\alpha\beta} - 1/2 Rg^{\alpha\beta} + d_2 g^{\alpha\beta} = d_3 T^{\alpha\beta} \quad (3.254)$$

Newtonovská limita

Nový gravitační zákon musí vést v limitě slabých polí a nízkých rychlostí na klasickou rovnici pro gravitační potenciál. Pro potenciální energii dvou nábojů interagujících elektrostatičticky a dvou hmotností interagujících gravitačně máme formule:

$$W_{\text{ES}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad W_{\text{G}} = -G \frac{mM}{r}. \quad (3.255)$$

Opačné znaménko koresponduje s faktem, že dva kladné náboje se odpuzují, zatímco dvě kladné hmoty se přitahují. Po vydělení vlastnostmi testovacího tělíska (q v elektrostatičce a m v gravitaci) získáme tzv. potenciály:

$$\phi_{\text{ES}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad \phi_{\text{G}} = -G \frac{M}{r}. \quad (3.256)$$

Definiční rovnice jsou shodné až na konstanty

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G. \quad (3.257)$$

Obdobné musí být i rovnice pro potenciály (v elektrostatičce jde o notoricky známou Poissonovu rovnici)

$$\Delta\phi_{\text{ES}} = -\frac{\rho Q}{\epsilon_0}; \quad \Delta\phi_{\text{G}} = +4\pi G \rho_{\text{M}}. \quad (3.258)$$

V Newtonově limitě, kdy

$$g_{00} = -\left(1 + 2\phi/c^2\right), \quad (3.259)$$

bychom tedy očekávali, že rovnice (3.254) přejde v rovnici pro gravitační potenciál

$$\Delta\phi = +4\pi G \rho. \quad (3.260)$$

K tomu stačí rozepsat složku s indexy „⁰⁰“ rovnice (3.254). Na levé straně skutečně dostaneme druhé derivace potenciálu a na pravé straně člen úměrný hustotě. Z požadavku, aby Einsteinův gravitační zákon (3.254) limitně přešel v Newtonův zákon (3.260), plyne $d_2 = 0$, $d_3 = 8\pi G/c^4$. Výsledná formule má tedy tvar

$$\blacktriangleright \quad R^{\alpha\beta} - 1/2 Rg^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \quad (3.261)$$

Někdy se píše ve tvaru

$$\blacktriangleright \quad G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}; \quad G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta}, \quad (3.262)$$

kde $G^{\alpha\beta}$ je tzv. Einsteinův tenzor.



Obr. 3.29: Einsteinův gravitační zákon je zvěčněn i na hřbitově lokomotiv v Bolívii. Opačné znaménko na pravé straně je dáno odlišnou konvencí $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Význam nového zákona

Nový gravitační zákon představuje 10 diferenciálních rovnic pro metriku. Počet rovnic je dán tím, že obě strany jsou symetrickými tenzory, tj. $G^{\alpha\beta} = G^{\beta\alpha}$ a $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$. Rovnice jsou nelineární. Albert Einstein ho představil při přednášce před Pruskou akademií věd na podzim roku 1915. Jde historicky o první teorii, která obsahuje jak polní, tak pohybové rovnice. Že jde o polní rovnice, je patrné na první pohled. Ze znalosti rozložení hmoty a energie můžeme určit metriku časoprostoru. Gravitační zákon v sobě obsahuje ale i rovnici geodetiky (Tak tomu není například v klasické elektrodynamice, kde jsou polními rovnicemi Maxwellovy rovnice, a pohyby částic počítáme z Lorentzovy pohybové rovnice).

Derivujeme gravitační zákon (3.261) kovariantně podle β (přes tento index sčítáme, kovariantní derivace v sobě zahrnuje zakřivení časoprostoru). Levá strana bude nulová (tak jsme volili konstantu u druhého členu) a pravá strana dá zákony zachování energie a hybnosti

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (3.263)$$

neboli

$$\left[(\rho + p/c^2) U^\alpha U^\beta + p g^{\alpha\beta} \right]_{;\beta} = 0 \quad (3.264)$$

Uvažujme nyní hmotný nekoherentní prach, jehož tlak je nulový:

$$\left[\rho U^\beta U^\alpha \right]_{;\beta} = 0 \quad (3.265)$$

Derivujme tento výraz jako součin

$$\left(\rho U^\beta \right)_{;\beta} U^\alpha + \rho U^\beta U^\alpha_{;\beta} = 0$$

První výraz je nulový, neboť $(\rho U^\beta)_{;\beta} = 0$ (rovnice kontinuity pro hmotu). Zbývá

$$\begin{aligned} U^\alpha_{;\beta} U^\beta = 0 &\Rightarrow \left[U^\alpha_{;\beta} + \Gamma^\alpha_{\xi\beta} U^\xi \right] U^\beta = 0 \Rightarrow \\ U^\alpha_{;\beta} U^\beta + \Gamma^\alpha_{\xi\beta} U^\xi U^\beta = 0 &\Rightarrow U^\alpha_{;\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\xi\beta} U^\xi U^\beta = 0 \Rightarrow \\ \frac{dU^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\xi\beta} U^\xi U^\beta = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\xi\beta} \frac{dx^\xi}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že v Einsteinově gravitačním zákoně je obsažena rovnice geodetiky. Einsteinův gravitační zákon by v principu mohl mít na levé straně i člen úměrný metrice, tj.

$$\blacktriangleright \quad R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \quad (3.266)$$

Takový člen neovlivní zákony zachování (kovariantní derivace metriky je nulová), ale ovlivní v newtonovské limitě rovnici pro gravitační potenciál. Ta získá po vynechání aditivních konstant tvar

$$\Delta\phi + 2\Lambda\phi = 4\pi G\rho \quad (3.267)$$

Pro malé Λ se změna řešení projeví až na velkých vzdálenostech. Proto se přidanému členu říká kosmologický člen a konstantě Λ kosmologická konstanta. Albert Einstein věřil, stejně jako ostatní v té době, ve stacionární vesmír. Jeho rovnice bez kosmologického členu ale vedly k samovolnému kolapsu vesmíru, který byl homogenně vyplněn nekoherentním prachem. Proto Einstein do rovnic v roce 1917 přidal kosmologický člen, který kompenzoval kolaps a pro určitou hodnotu parametru Λ působil odpudivě, tedy proti gravitačnímu přitahování. Rovnice bez kosmologického členu umožňují jen kolabující nebo expandující řešení (v závislosti na počátečních podmínkách). V roce 1922 ukázal ruský matematik a meteorolog Alexandr Fridman (1888–1925), že kosmologický člen vizi stacionárního vesmíru nezachrání, neboť je rovnováha mezi přitažlivou gravitací a odpudivým kosmologickým členem nestabilní. Libovolná porucha nakonec způsobí buď kolaps, nebo expanzi vesmíru. Einstein uznal správnost Fridmanových úvah až v roce 1923. Když v roce 1929 Edwin Hubble objevil expanzi vesmíru, Einstein kosmologický člen z rovnic vyškrtнул a prohlásil, že šlo o největší omyl jeho života. Pro různé hodnoty Λ kosmologický člen buď expanzi brzdí (kompenzuje), nebo naopak zesiluje. Detailní analýzu rovnic s kosmologickým členem provedl holandský astronom Willem de Sitter (1872–1934). V roce 1998 Adam Riess a Saul Perlmutter objevili zrychlenou expanzi vesmíru, která nemůže být způsobena přitažlivou gravitační interakcí. Snad jsou za ni zodpovědné kvantové procesy probíhající ve vakuu. Zrychlená expanze znamenala znovuzavedení kosmologického členu do Einsteinova gravitačního zákona. Rozměr kosmologické konstanty je m^{-2} :

$$[A] = \frac{1}{\text{m}^2}. \quad (3.268)$$

Podle současných měření expanze vesmíru, zejména z projektu SPC (*Supernova Cosmology Project*), vychází hodnota kosmologické konstanty přibližně

$$\Lambda \approx 2,25 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}. \quad (3.269)$$

Pokud ale nepracujeme s kosmologickými vzdálenostmi, nemá smysl kosmologický člen do rovnic zavádět.



3.5 Gravitační vlny

Gravitační vlny jsou periodické záhyby časoprostoru šířící se rychlostí světla. Mají dvě nezávislé polarizace skloněné pod úhlem 45° . Jejich zdroji jsou buď periodické děje vznikající rotací objektů s kvadrupólovou nesymetrií, nebo katastrofické děje (splnutí černých děr nebo neutronových hvězd, nesymetrický kolaps hvězdy atd.).

3.5.1 Vlnová rovnice

Předpokládejme, že gravitační vlna je malou odchylkou od Minkowského metriky, tj.

$$\blacktriangleright \quad g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}. \quad (3.270)$$

Poruchy $h_{\alpha\beta}$ budeme považovat za veličiny prvního řádu, tj. jejich kvadráty budeme zanedbávat. Nejprve nalezneme z formule (3.124) Christoffelovy symboly

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\xi} (g_{\xi\beta,\gamma} + g_{\xi\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\xi}), \\ \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\xi} + h^{\alpha\xi}) (h_{\xi\beta,\gamma} + h_{\xi\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\xi}), \\ \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\xi} (h_{\xi\beta,\gamma} + h_{\xi\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\xi}), \\ \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} (h^\alpha{}_{\beta,\gamma} + h^\alpha{}_{\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma}{}^\alpha). \end{aligned} \quad (3.271)$$

Povšimněte si, že snižování a zvyšování indexů u veličin úměrných h postačí provádět jen přes Minkowského metriku, protože kvadráty h zanedbáváme. Nyní sestavíme Riemannův tenzor křivosti (3.207):

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\xi{}_{\beta\delta} \Gamma^\alpha{}_{\xi\gamma} - \Gamma^\xi{}_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha{}_{\xi\delta}, \\ R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (h^\alpha{}_{\beta,\delta\gamma} + h^\alpha{}_{\delta,\beta\gamma} - h_{\beta\delta}{}^\alpha{}_\gamma) - \frac{1}{2} (h^\alpha{}_{\beta,\gamma\delta} + h^\alpha{}_{\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\gamma}{}^\alpha{}_\delta), \\ R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (h^\alpha{}_{\delta,\beta\gamma} - h_{\beta\delta}{}^\alpha{}_\gamma) - \frac{1}{2} (h^\alpha{}_{\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\gamma}{}^\alpha{}_\delta). \end{aligned} \quad (3.272)$$

Kvadratické členy v Γ se neuplatní, neboť jsou úměrné kvadrátům $h_{\alpha\beta}$. Nyní sestavíme Ricciho tenzor:

$$\begin{aligned} R_{\beta\delta} &= R^\xi{}_{\beta\xi\delta} = \frac{1}{2} (h^\xi{}_{\delta,\beta\xi} - h_{\beta\delta}{}^\xi{}_\xi) - \frac{1}{2} (h^\xi{}_{\xi,\beta\delta} - h_{\beta\xi}{}^\xi{}_\delta), \\ R_{\beta\delta} &= \frac{1}{2} h^\xi{}_{\delta,\beta\xi} - \frac{1}{2} \square h_{\beta\delta} - \frac{1}{2} s_{,\beta\delta} + \frac{1}{2} h_{\beta\xi}{}^\xi{}_\delta, \end{aligned}$$

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^{\xi\beta, \alpha}_{, \xi} - \frac{1}{2} \square h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} s,^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h^{\alpha}_{, \xi} \xi^{\beta}, \quad (3.273)$$

kde jsme stopu tenzoru poruch metriky označili

$$s \equiv \text{Tr} \bar{\mathbf{h}} = h^{\xi}_{, \xi}. \quad (3.274)$$

Jako poslední zbývá skalární křivost R :

$$R = R^{\eta}_{\eta} = \frac{1}{2} h^{\eta\xi}_{, \xi\eta} - \frac{1}{2} \square s - \frac{1}{2} \square s + \frac{1}{2} h^{\xi}_{, \eta} \eta_{, \xi} = h^{\eta\xi}_{, \eta\xi} - \square s. \quad (3.275)$$

Sestavme nyní Einsteinův gravitační zákon (3.266)

$$\frac{1}{2} h^{\xi\beta, \alpha}_{, \xi} - \frac{1}{2} \square h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} s,^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h^{\alpha}_{, \xi} \xi^{\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h^{\xi\eta}_{, \xi\eta} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \square s = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \quad (3.276)$$

Kalibrační volnost

Při výpočtu rovnic pro elektromagnetické potenciály se využívá jejich nejednoznačnost, ta umožní požadovat splnění Lorenzovy kalibrační podmínky $A^{\alpha}_{, \alpha} = 0$. S touto podmínkou získají rovnice pro elektromagnetické potenciály jednoduchý tvar – splynou s obyčejnou vlnovou rovnicí $\square A^{\alpha} = -\mu_0 J^{\alpha}$. Ani nyní ale nejsou elektromagnetické potenciály ještě určeny jednoznačně a lze na ně klást další podmínky, například nulovost skalárního potenciálu. Obdobně tomu je s rovnicí (3.276). Kalibrační volnost zde znamená mj. možnost volby souřadnicového systému. Namísto x^{α} můžeme volit jiné souřadnice $x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x)$ a požadovat, aby $h^{\alpha\beta}_{, \beta} = 0$. Taková kalibrace vynuluje v rovnici (3.276) první, čtvrtý a pátý člen. Obdobně jako v elektromagnetickém případě můžeme ještě na poruchy metriky klást další podmínky. Lze požadovat, aby stopa tenzoru poruch byla nulová (v rovnici zmizí třetí a šestý člen). Obdobně jako můžeme v elektřině a magnetizmu kalibraci vynulovat skalární potenciál, můžeme i zde požadovat nulovost $h^{0\alpha}$. Výsledkem je vlnová rovnice doplněná o dodatečné podmínky:

$$\begin{aligned} \square h_{\alpha\beta} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}; \\ h^{\alpha\beta}_{, \beta} &= 0, \quad s = h^{\alpha}_{, \alpha} = 0, \quad h^{0\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (3.277)$$

3.5.2 Vlastnosti gravitačních vln

Každé řešení vlnové rovnice ve vakuu můžeme napsat jako superpozici rovinných vln typu

$$\psi = A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = A e^{ik_{\mu} x^{\mu}}. \quad (3.278)$$

Skutečným řešením vlnové rovnice je pak samozřejmě reálná část výsledné poruchy. Rovinné vlny mají jednoduché vlastnosti vzhledem k derivování:

$$\partial^{\gamma} \psi = \partial^{\gamma} A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = \partial^{\gamma} A e^{ik_{\mu} x^{\mu}} = ik^{\gamma} A e^{ik_{\mu} x^{\mu}} = ik^{\gamma} \psi.$$

Derivování tedy můžeme provádět symbolicky:

$$\blacktriangleright \quad \partial^\gamma \psi = i k^\gamma \psi \quad \Rightarrow \quad \partial^\gamma \rightarrow i k^\gamma \quad (3.279)$$

Složení skutečné vlny za pomoci rovinných vlnoploch nazýváme Fourierovou transformací. U lineárních rovnic platí princip superpozice a můžeme se zabývat jen jednotlivými parciálními vlnami, pro které platí jednoduchý vztah (3.279). Představme si nyní, že gravitační vlna už nějakým mechanismem vznikla a šíří se prázdňným prostorem. Pak splňuje vlnovou rovnici

$$\square h_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.280)$$

a její řešení lze složit z rovinných vln

$$\blacktriangleright \quad h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} e^{i k_\alpha x^\alpha} . \quad (3.281)$$

Po dosazení rovinné vlny (3.281) do vlnové rovnice (3.280) dostaneme podmínku, za které je rovinná vlna řešením vlnové rovnice:

$$\blacktriangleright \quad k_\mu k^\mu = 0 . \quad (3.282)$$

Tato podmínka říká, že vlnový čtyřvektor je nulovým čtyřvektorem, tj. v časoprostoru míří ve směru světelného kužele. Podmínka (3.282) je současně disperzní relací (vztahem mezi úhlovou frekvencí a vlnovým vektorem). Po rozepsání do složek máme

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 = 0 \quad (3.283)$$

neboli

$$\blacktriangleright \quad \omega = ck , \quad (3.284)$$

což je stejná disperzní relace, jakou mají elektromagnetické vlny ve vakuu. Gravitační vlna se, stejně jako elektromagnetická vlna, šíří rychlostí světla. Základní kalibrační podmínka vede na vztah

$$\blacktriangleright \quad h_{\alpha\beta} k^\beta = 0 , \quad (3.285)$$

ze kterého je zřejmé, že gravitační vlny jsou *příčným vlněním* (poruchy jsou kolmé na vlnový čtyřvektor). Volme nyní souřadnicovou soustavu tak, aby vlnový vektor (prostorová část vlnového čtyřvektoru) mířil v první prostorové ose, tj.

$$k^\alpha = \begin{pmatrix} \omega/c \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (3.286)$$

Velikost časové složky vlnového čtyřvektoru lze snadno dopočítat z relace (3.282) nebo z faktu, že jde o nulový čtyřvektor. Pokud použijeme kalibrační podmínku ve tvaru (3.285), další kalibrační podmínky, nulovost stopy a symetrie poruch, musí pro amplitudy rovinných vln platit

$$A_{\alpha\beta} k^\beta = 0, \quad A_{0\beta} = 0, \quad (3.287)$$

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0, \quad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} .$$

Výsledkem je, že amplituda má jediné dva volné parametry, které zajistí splnění první rovnice (3.287) včetně dalších podmínek:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & B & -A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.288)$$

Gravitační vlnu tak můžeme rozdělit na dvě nezávislé polarizace

$$h = h_+ + h_\times = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} e^{ik_\alpha x^\alpha} + B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} e^{ik_\alpha x^\alpha}. \quad (3.289)$$

Do metrického tenzoru přispěje reálná část, tedy budeme mít

$$g_+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}; \quad h \equiv A \cos(kx - \omega t). \quad (3.290)$$

$$g_\times = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & h & 1 \end{pmatrix}; \quad h \equiv B \cos(kx - \omega t). \quad (3.291)$$

Odpovídající intervaly jsou

$$ds_+^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + (1+h) dy^2 + (1-h) dz^2, \quad (3.292)$$

$$ds_\times^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2h dy dz. \quad (3.293)$$

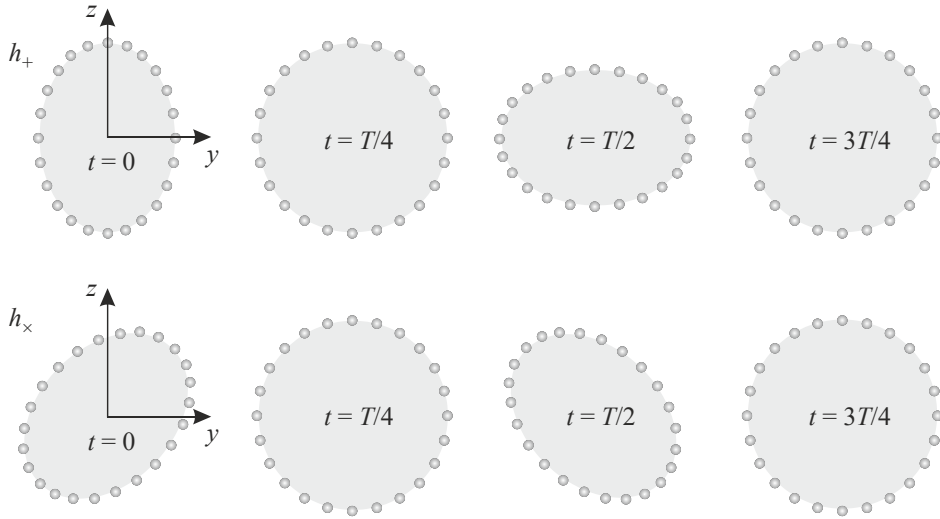
Vlna se šíří ve směru osy x , deformace probíhají v rovině (yz) , jde tedy o vlnění příčné. Určeme nyní relativní deformaci ve směru osy y v prvním případě:

$$y = \sqrt{1+h} y_0 \quad \Rightarrow \quad y \approx (1+h/2) y_0 \quad \Rightarrow$$



$$\frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{h}{2}. \quad (3.294)$$

Porucha h je tedy řádově rovna relativní deformaci tělesa, přes které gravitační vlna prochází. Pokud by měla gravitační vlna v cestě kroužek z hmotných bodů, probíhala by jeho deformace podle následujícího obrázku, kde je také dobře patrné, že jsou obě polarizace stočeny pod úhlem 45° .



Obr. 3.30: Průchod gravitační vlny kroužkem z hmotných bodů

Zdrojem elektromagnetické vlny může být dipólové rozložení nábojů. Elektrický dipólový moment je dán vztahem

$$\mathbf{p}_E = \sum_a q_a \mathbf{r}_a \quad (3.295)$$

Intenzita dipólového záření je potom

$$I \sim \ddot{\mathbf{p}}_E^2 \quad (3.296)$$

U gravitačních vln (gravitačního záření) by musela být provedena pečlivá obecně-relativistická analýza. Nicméně i ze zjednodušené úvahy je patrné, že zdrojem gravitačních vln nemůže být rotující těleso s dipólovou symetrií rozložení hmoty kolem osy rotace. Zavedme gravitační dipólový moment

$$\mathbf{p}_G = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \quad (3.297)$$

Derivace takové veličiny je ale úměrná těžišťové rychlosti, která je konstantní, takže

$$I \sim \ddot{\mathbf{p}}_G^2 = 0 \quad (3.298)$$

Zdrojem gravitačních vln proto může být až kvadrupólová nesymetrie v rozložení látky. Shrňme na závěr důležité vlastnosti gravitačních vln:

- Gravitační vlny se šíří rychlostí světla.
- Gravitační vlny jsou příčným vlněním.
- Gravitační vlny mají dvě nezávislé polarizace stočené o 45°.
- Zdrojem gravitačních vln je kvadrupólová nesymetrie látky.

Srovnání s elektřinou a magnetizmem

	elektřina a magnetismus	obecná relativita
veličina	A^α	$h^{\alpha\beta}$
vlnová rovnice v prostředí	$\square A^\alpha = -\mu_0 J^\alpha$	$\square h^{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}$
základní kalibrace	$\partial_\alpha A^\alpha = 0$	$\partial_\alpha h^{\alpha\beta} = 0$
další kalibrace	$A^0 = 0$	$h^{0\alpha} = 0; \quad s = 0$
vlnová rovnice ve vakuu	$\square A^\alpha = 0$	$\square h^{\alpha\beta} = 0$
vakuové řešení	$A^\alpha = A_{(0)}^\alpha e^{ik_\mu x^\mu}$	$h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} e^{ik_\mu x^\mu}$
podmínka řešitelnosti	$k_\mu k^\mu = 0$	$k_\mu k^\mu = 0$
FT kalibrační podmínky	$k_\alpha A^\alpha = 0$	$k_\alpha h^{\alpha\beta} = 0$
dipólový moment	$\mathbf{p}_E = \sum_a q_a \mathbf{r}_a$	$\mathbf{p}_G = \sum_a m_a \mathbf{r}_a$
intenzita dipólového záření	$I \propto \ddot{\mathbf{p}}_E^2$	$I \propto \ddot{\mathbf{p}}_G^2 = 0$

3.5.3 Nepřímá pozorování gravitačních vln

Podvojná neutronové hvězdy

V roce 1974 byla objevena tehdy největším radioteleskopem světa v Arecibu podvojná neutronová hvězda PSR 1913+16, u které je jedna složka pulzarem s periodou pulzací 0,059 s. Rozměry obou složek i celého systému jsou tak malé, že systém je téměř ideální relativistickou laboratoří, kterou pro nás příroda připravila. Jde o dvě neutronové hvězdy v těsné blízkosti, takže zakřivení prostoru a času, na které složky reagují, je značné. Navíc v prostoru mezi složkami není žádný rozházený materiál, který by komplikoval interpretaci měřených veličin. Snadno si můžeme udělat představu o unikátnosti soustavy: Hmotnosti složek jsou o něco vyšší, než je hmotnost našeho Slunce (1,44 M_\odot a 1,39 M_\odot). Velikost těchto dvou neutronových hvězd nepřesáhne několik desítek kilometrů. Vzdálenost obou složek je při největším přiblížení pouhých 700 000 km, tj. přibližně stejná jako poloměr našeho Slunce! Oběžná perioda podvojného pulsaru činí 7 h 45 min.

V roce 1993 obdrželi za výzkum tohoto unikátního systému Nobelovu cenu za fyziku Russel Hulse a Joseph Taylor. Systém vykazoval celou řadu jevů předpovídaných obecnou relativitou. Například stáčení pericentra soustavy činí 4° za rok (stejný jev způsobuje stáčení dráhy Merkuru o pouhých 43" za století). Z dalších naměřených jevů

upozorníme alespoň na relativistický Dopplerův jev, červený gravitační posuv, dilataci času způsobenou vzájemným oběhem a stáčení světelných paprsků.

Nejznámějším se ale stal objev zkracování periody odpovídající ztrátě energie způsobené vyzařováním gravitačních vln. Za každý oběh se obě složky k sobě přiblíží přibližně o 3 milimetry, a oběžná perioda se proto zkracuje o 76 μs /rok. Russel Hulse a Joseph Taylor tak poprvé v historii nepřímo detekovali gravitační vlny. Šlo jen o měření důsledku vyzařování gravitačních vln, nikoli o jejich přímou detekci.

Později byly nalezeny podvojně neutronové hvězdy s ještě lepšími vlastnostmi. Například podvojný pulzar PSR 1534+12 nebo podvojný pulzar PSR J0737-3039A (objevený Lovellovým radioteleskopem v Jodrell Bank v roce 2003, stáčení pericentra zde činí 17°za rok) jsou vynikajícími relativistickými laboratořemi k ověřování jevů obecné relativity a samozřejmě i k nepřímé detekci gravitačních vln.



Obr. 3.31: Gravitační vlny generované dvojicí navzájem se obíhajícími hvězd. Souřadnicová síť je pouze dvojrozměrným průmětem čtyřrozměrného časoprostorového kontinua.

3.5.4 Detekce gravitačních vln

Přímá detekce gravitačních vln je mnohem složitější, než je tomu u elektromagnetických vln. Na elektromagnetické vlně se opačně nabitě částice zhoupnou v opačném směru a jejich pohyb snadno rozlišíme. Na gravitační vlně se dvě blízké částice zhoupnou stejným směrem a je třeba hledat až jevy vyšších řádů, tedy vzájemný pohyb dvou objektů vůči sobě. Existuje více možností přímé detekce: rezonanční detektory, interferometrické detektory nebo sledování fázového zpoždění referenčního signálu. V budoucnosti se určitě objeví i kvantové detektory založené na změnách vlnové funkce

mikroskopického objektu. Takové detektory ale budou fungovat jen pro velmi krátké vlnové délky a nebudou vhodné pro vesmírné zdroje gravitačních vln.

Rezonanční detektory

První známé pokusy detekce gravitačních vln pochází od Josepha Webera. O detekci se pokoušel pomocí dvou velkých hliníkových válců. Jeden z nich byl umístěn na Univerzitě v Marylandu v blízkosti Washingtonu, D.C. a druhý v Argonne National Laboratory v blízkosti Chicaga. Vzdálenost válců byla asi 1 000 km. To proto, aby případná detekce gravitační vlny byla potvrzena z nezávislého místa a nešlo jen o lokální poruchu. Válce se chovaly jako přirozené oscilátory naladěné na frekvenci 1660 Hz (očekávaná frekvence gravitačních vln z podvojných zdrojů je v kilohertzích). Byly vyrobeny z hliníku, měly hmotnost 1,4 tuny, průměr 66 cm a délku 153 cm. Každý válec byl zavěšen ve vakuu na kovovém vlákně a mechanicky zcela oddělen od okolí. Přibližně ve středu byl umístěn piezoelektrický snímač (je patrný na fotografii) propojený s elektronickými obvody citlivými na základní frekvenci oscilací válce. Při průchodu gravitační vlny by se válec měl rozkmitat na své vlastní frekvenci.



Obr. 3.32: Joseph Weber u jednoho z rezonančních válců (nalevo). Rezonanční válce připravované pro experimenty (napravo).

Válce byly zprovozněny v roce 1966 a v roce 1972 byla naměřena jediná koincidence, která se již nikdy nezopakovala. Dnes se soudí, že relativní citlivost $h \equiv \Delta/l \sim 10^{-15}$ tohoto zařízení nebyla dostatečná pro detekci gravitačních vln z běžných zdrojů, kde se očekává $h \sim 10^{-23}$. Weberovy válce měly další nevýhodu – měřily na jediné frekvenci, a proto nemohly nikdy pořídit ani spektrum gravitační vlny, ani časový vývoj frekvence. Joseph Weber věřil, že gravitační vlny našel a publikoval o tom článek, který podlehl značné kritice ostatních vědců, zejména pro chyby při statistickém vyhodnocování.

Není bez zajímavosti, že Joseph Weber nabízel na konci čtyřicátých let dvacátého století (mnohem dříve, než začal hledat gravitační vlny) Georgi Gamowovi pomoc při hledání reliktního záření z konce velikého třesku. Gamow ji ale z neznámých důvodů odmítl, přestože se Weber v té době zabýval detekcí mikrovln a rádiových vln.

Následovníkem Weberova detektoru byl detektor Allegro provozovaný Louisanskou státní univerzitou v Baton Rouge od počátku 90. let 20. století do roku 2008. Hliníkový válec měl délku 3 m, hmotnost 2 300 kg a základní rezonanční frekvenci 904 Hz.

Interferometrické detektory

Většina dnešních systémů pro přímou detekci gravitačních vln je postavena na laserové interferometrii. Laserový svazek je polopropustným zrcadlem rozdělen do dvou kolmých ramen, na jejichž koncích jsou dokonale vybroušená odrazná zrcadla sloužící jako testovací tělesa, jejichž pohyb se sleduje. Odražené paprsky se rameny vrací přes rezonanční dutinu zpět, interferují a elektronicky jsou zaznamenávány změny interferenčního obrazce. Citlivost těchto zařízení závisí na velikosti ramen. V jednom směru dochází ke zkracování a v druhém k prodlužování, proto je citlivost značná.

Největším systémem tohoto druhu na světě je LIGO (*Laser Interferometry Gravitational-Wave Observatory*). Projekt vznikl ve spolupráci univerzit Caltech a MIT. Byla postavena dvojice čtyřkilometrových detektorů vzdálená 3 000 km. První z nich se nachází v Hanfordu ve státě Washington a za jeho stavbu je zodpovědná universita Caltech. Druhý detektor je v Livingstonu ve státě Louisiana a stavba proběhla pod patronátem university MIT. V Hanfordu je ještě jeden dvoukilometrový detektor určený pro různé testy. Dva interferometry se staví proto, aby mohla být případná detekce gravitačních vln potvrzena koincencí ze dvou nezávislých zdrojů.



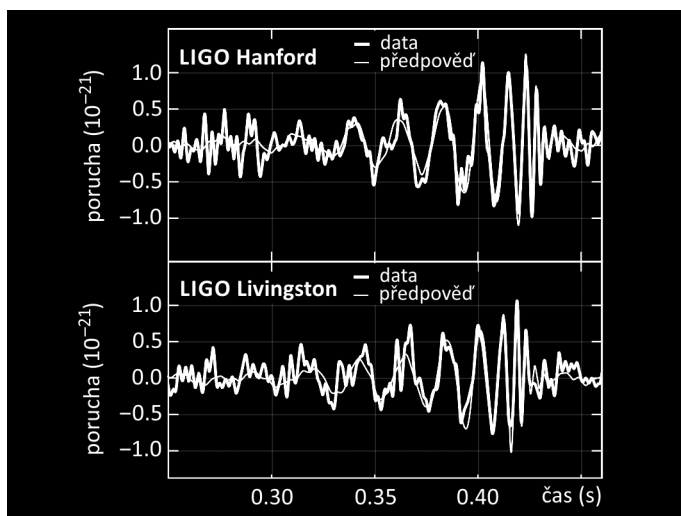
Obr. 3.33: LIGO – letecký pohled na centrální část detektoru LIGO (Hanford, 2008)

Interferometr byl zprovozněn v roce 2002, v letech 2010 až 2015 prošel rozsáhlou rekonstrukcí. Současné parametry přístroje jsou: délka každého ramene je 4 km, průměr 60 cm a pracovní tlak 10^{-9} torrů. Objem vakuového systému je $9\,000\text{ m}^3$. (jde o největší vakuový systém na světě). Zdrojem paprsku o vlnové délce $1,06\ \mu\text{m}$ je Nd:Yag laser, který může v budoucnu dosáhnout výkonu až 200 W. Přesnost zaměření polohy koncových testovacích zrcadel zavěšených na křemenných vláknech je 10^{-18} m, hmotnost zrcadel je 40 kg. Frekvenční rozsah, ve kterém je zařízení citlivé činí 10 Hz až 10 kHz,

což odpovídá většině očekávaných zdrojů gravitačních vln. Relativní přesnost měření změny délky je $h \sim 10^{-22}$, v oblasti stovek hertzů lepší než 10^{-23} . To je o osm řádů vyšší přesnost než u válců Josepha Webera.

Ihned po zprovoznění rekonstruovaného detektoru byl zachycen dne 14. září 2015 gravitační impuls se sloučením dvou černých děr. Každá z nich měla před splynutím hmotnost přibližně 30 Sluncí (29 M_{\odot} a 36 M_{\odot}). Nejistota určení hmotností je $\pm 4 M_{\odot}$. Hmotnost nově vzniklé černé díry není pouhým součtem hmotností původních černých děr. Je nižší, protože se na gravitační vlny přeměnila látka o hmotnosti rovné přibližně trojnásobku hmotnosti Slunce. Signál přišel ze vzdálenosti 1,3 miliardy světelných roků. Směrová charakteristika není příliš přesná, existuje jen odhad oblasti, ve které k této mimořádné události došlo. Jde o jižní oblohu v oblasti Magellanových oblaků (ta jsou ale samozřejmě mnohem blíže). Celý impuls trval necelé tři desetiny sekundy. Signál z Hanfordu i Livingstonu měl obdobný průběh, zpoždění mezi oběma pozorovacími stanicemi činilo 7 ms. Při přibližování obou složek narůstala frekvence z desítek hertzů na cca 300 hertzů v okamžiku splynutí děr. Dobře patrná byla také shoda signálu s teoretickou předpovědí získanou z numerických simulací.

Poprvé byly detekovány gravitační vlny přímo, poprvé bylo pozorováno splynutí dvou černých děr a poprvé byly pozorovány černé díry středních hmotností. Gravitační vlny jsou po elektromagnetickém oboru a neutrinech třetím oknem pro pozorování dějů ve vesmíru. Do roku 2024 bylo interferometricky detekováno přes sto záblesků.



Obr. 3.34: LIGO – signál zachycený dne 14. září 2015. V okamžiku splynutí černých děr je amplituda a frekvence signálu nejvyšší, po splynutí signál utichá. Nejvyšší relativní deformace byla 10^{-21} , a to v okamžiku splynutí obou černých děr.

V Evropě existuje obdobný detektor Virgo. Je umístěn u italské vesničky Cascina, 10 km od Pisy proslulé svou šikmou věží. Virgo má ramena dlouhá 3 km. V letech 2010 až 2017 prošel detektor Virgo obdobnou rekonstrukcí jako LIGO a jeho parametry jsou srovnatelné s LIGO. Detektor Virgo se poprvé zapojil do společné pozorovací kampaně s detektory LIGO v srpnu 2017. První společné pozorování trvalo 25 dní. Trojice obřích interferometrů zachytila hned dva signály. První z nich už astronomy nepřekvapil – opět

šlo o sloučení dvou velmi vzdálených černých děr. Druhý záblesk ze 17. srpna 2017 pocházel ze sloučení dvou neutronových hvězd, což je děj, který generuje také intenzivní elektromagnetický signál nejrůznějšího původu – od gama záblesku z rozpadu velmi těžkých jader vznikajících v rázových vlnách až po rádiový signál související s interakcí výtrysků látky s okolním mezihvězdným prostředím. Jev tzv. *kilonovy* (tisíckrát jasnějšího úkazu, než je nova), byl poprvé pozorován jak v gravitačním, tak v elektromagnetickém okně, a to mnoha přístroji naráz. Dnes se detekce gravitačních záblesků stává rutinní astronomickou metodou pozorování vesmíru.



Obr. 3.35: Jedno z ramen evropského detektoru VIRGO.

3.5.5 Budoucí detektory

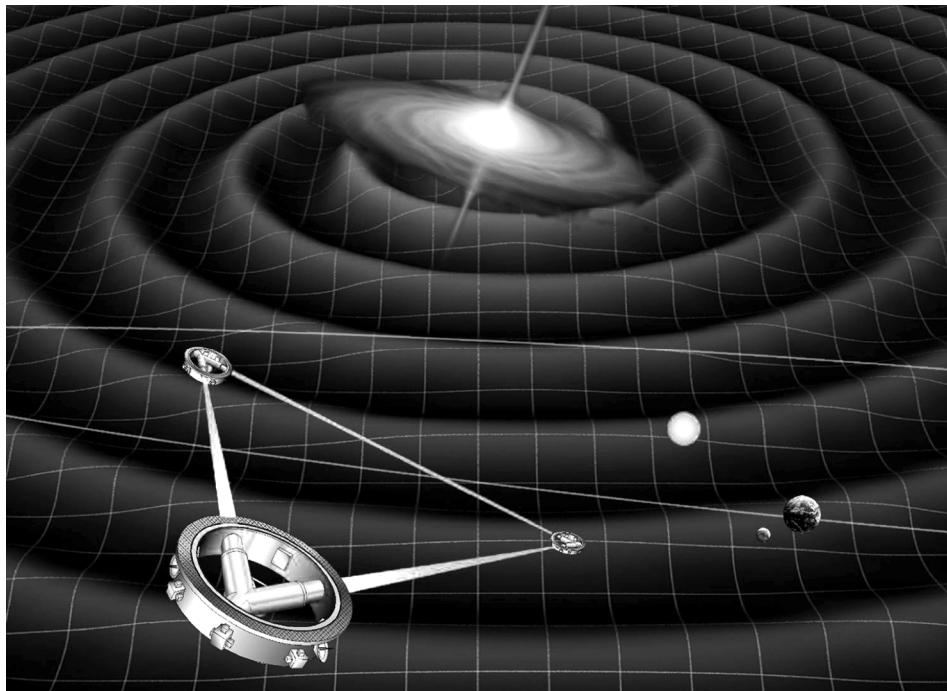
Interferometrické detektory slaví jeden úspěch za druhým a mají před sebou skvělou budoucnost. Americké LIGO a evropské Virgo doplňuje japonský tříkilometrový podzemní detektor KAGRA (*KAmioka GRavitational wave detector*) nacházející se v oblasti, kde je neutrinový detektor Super-Kamiokande. Jde o plně kryogenní systém (chlazený je celý tubus včetně koncových zrcadel). Detektor byl spuštěn v roce 2020, ke společnému pozorování s ostatními detektory se připojil v roce 2023. V Indii se usilovně staví další detektor LIGO, neboť chybí pozorování z oblasti Asie.

V Evropě se uvažuje o stavbě podzemního desetikilometrového detektoru Einstein se třemi rameny (ve tvaru trojúhelníku), který by měl být postaven někde v blízkosti trojmezí Německa, Holandska a Belgie. Definitivní místo ještě nebylo vybráno. Stavba by měla být započata někdy kolem roku 2028, se zprovozněním se počítá po roce 2035. Umístění detektorů do podzemí redukuje seismický šum a chlazení redukuje šum tepelný. Detektory tohoto typu mají maximální citlivost ve stovkách hertzů a mohou detekovat gravitační vlny z různých binárních systémů. Pro detekci reliktních gravitačních vln, které by měly vznikat v průběhu inflační fáze nebo obecně při samotném vzniku

vesmíru, bude nutné zkonstruovat detektory pro mnohem delší vlnové délky, tedy s výrazně delšími rameny. Takové detektory je možné stavět jen ve vesmíru. Další možností je využít sledování změn fází pulzarů pomocí radioteleskopických sítí.

LISA

O stavbě obřího interferometru ve vesmíru se uvažuje už od konce 20. století. Projekt tří sond, které na sebe budou svítit laserovým paprskem na vzdálenost milionů kilometrů a zjišťovat aktuální polohu odrazné krychle – srdce sondy pohupující se na gravitačních vlnách – dostal název LISA, což je zkratka z anglického „*Laser Interferometer Space Antenna*“. Původní termín vypuštění byl rok 2016, ale společný projekt americké NASA a evropské vesmírné agentury ESA se potýkal s mnoha problémy, jak finančního, tak technického rázu. Američané z něho v roce 2011 z finančních důvodů odstoupili, projekt měnil jména, délku ramen i termín vypuštění a už se zdálo, že je odsouzen k zániku. Víru v úspěch mu vlila do žil evropská sonda LISA Pathfinder, která startovala v prosinci 2015. LISA Pathfinder byl jakýsi předskokan mise, který ověřil, že základní koncepce je správná, že dokážeme nejen dostatečně jemně manévrovat se sondou tohoto typu, ale i detekovat polohu odrazné krychle. Po ohlášení objevu gravitačních vln získaly události rychlý spád a v roce 2017 byl projekt obřího interferometru LISA schválen. Termín vypuštění je rok 2037.



Obr. 3.36. Velkolepý plán vesmírného interferometru LISA

Jaká je tedy současná představa obřího interferometru LISA? Tři identické sondy poletí ve formaci trojúhelníku na samostatné dráze kolem Slunce, a to 20° za Zemí. Budou na sebe svítit infračervenými lasery na vzdálenost 2,5 milionů kilometrů. Laserové světlo

se bude odrážet od vznášejících se krychlí ze slitiny zlata a platiny o hraně 46 milimetrů a hmotnosti 2 kilogramy. V každé sondě budou dvě takové krychle volně letící prostorem a pohupující se na gravitačních vlnách. Kolem testovací krychle bude klec s elektronikou, která bude sledovat její polohu vůči kleci. V ideálním případě by se krychle pohupovala na dráze spolu se sondou i klecí a stále plula v jejím středu. Jenže na sondu působí z venku mnoho negravitačních sil, například tlak slunečního záření, tlak slunečního větru, síly od nesymetrického tepelného vyzařování sondy i další. Jakmile se krychle přiblíží k měřicí kleci, musí sonda začít manévrovat tak, aby se krychle stále vznášela přesně uprostřed klece. Od jejich stěn budou krychli dělit pouze dva milimetry. Manévrování bude zajištěno mikrotryskami vypouštějícími malé množství plynu. Nejmenější navigaci zařídí koloidální mikrotrysky, z nichž budou unikat nabitě kapičky ovládané elektrickým polem. Zpětný ráz nepatrně pohne sondou v kýženém směru.

K dalšímu vybavení patří optická lavice. Sondy budou mít pro sledování paprsku ze zbývajících sond dva dalekohledy o průměru 30 centimetrů. Z výkonu 2 wattů dodávaného laserem dopadne na krychličku sousední sondy pouhých 700 pikowattů, tj. 35 miliardtin procenta. Detektor LISA bude schopen zachytit gravitační vlny vzniklé pádem hvězdy do obří černé díry, gravitační vlny emitované dvojicemi bílých trpaslíků, šum pozadí dvojhvězd v naší Galaxii a samozřejmě gravitační vlny emitované vzájemným oběhem dvojic obřích černých děr. LISA se dostane na hranici parametrů pro detekci reliktních gravitačních vln, při troše štěstí by se to mohlo podařit, ale buďme raději skeptičtí, případná detekce nás pak může jen příjemně překvapit.

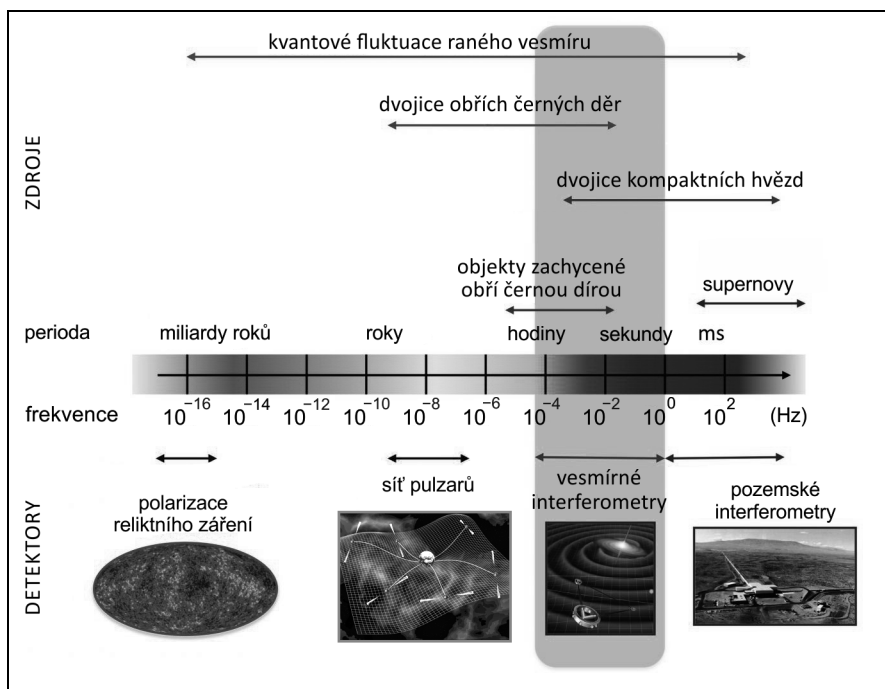
Pokud bude LISA fungovat jak má, bude na oběžnou dráhu kolem Slunce v následujících letech vypuštěno dokonce 12 identických sond svítících na sebe lasery. Název projektu je BBO (*Big Bang Observer, Pozorovatel Velkého třesku*). Vzdálenosti sond budou tentokrát menší, „pouhých“ 50 000 kilometrů, požadovaná citlivost bude zajištěna větším množstvím sond. Šum detekovaného signálu by měl být pouhé procento šumu detektoru LISA. Detektor BBO bude složen ze čtyř trojúhelníkových formací. Jedna poletí kolem Slunce v rovině ekliptiky (oběžné dráhy Země kolem Slunce), druhá bude na ekliptiku kolmá a zbylé dvě trojúhelníkové formace budou složeny do šestiúhelníku. Budou tak schopny snímat stochastické signály očekávané u reliktních gravitačních vln. Ty budou hlavním cílem detektoru BBO, který by měl mít dostatečné rozlišení, citlivost i rozsah vlnových délek pro jejich zachycení. Budoucnost interferometrických detektorů je tedy naplánována na desetiletí dopředu a máme se na co těšit.

Radioteleskopické detektory

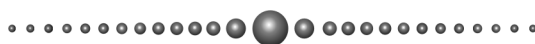
Pokud chceme pozorovat extrémně dlouhé vlnové délky, potřebujeme zařízení s mimořádně velkými rozměry. Naše civilizace ale zatím nedisponuje takovými prostředky, aby postavila detektor velký jako Sluneční soustava nebo dokonce jako celá Galaxie. Přesto se ale jedna možnost naskýtá. V naší Galaxii existuje řada pulzarů – neutronových hvězd, jejichž osa rotace není totožná s osou magnetického pole a díky tomu vydávají majákovým efektem velmi pravidelné pulzy. Představují téměř ideální hodiny rozmístěné napříč celou Galaxií. Signál pulzarů spadá většinou do rádiového oboru, a tak je možné je pozorovat radioteleskopy. Obří radioteleskopické sítě mají vynikající prostorové i časové rozlišení a jsou schopné detekovat i malá fázová posunutí signálu pulzarů přicházejícího z různých koutů Galaxie. Taková fázová posunutí vyvolává i průchod signálu přes gravitační vlnu. Sledovány jsou dvojice pulzarů – dva směry nahrazují interferometrická ramena pozemských detektorů. Pomocí statistické analýzy lze zrekonstruovat informace o gravitačních vlnách, kterými signál procházel.

Tato metoda detekce gravitačních vln se nazývá PTA (*Pulsar Timing Array, Pole pro měření časového signálu pulzarů*). První testy proběhly na australské síti radioteleskopů Parkes už v roce 2005. Australské radioteleskopy stály u zrodu radioastronomie a zajišťovaly v době programu Apollo spojení s posádkami letícími k Měsíci a zpět. Pozadu není ani evropská radioastronomie, metoda PTA se testuje na síti radioteleskopů, jimž vévodí stometrový Effelsberg na západě Německa, dalšími členy sítě jsou Lovellův radioteleskop v Jodrell Bank (jižně od anglického Manchesteru) s průměrem antény 76 metrů a radioteleskopy v nizozemském Westerborku a francouzském Nançay. Američané ověřují metodu PTA v Severoamerické nanohertzové observatoři, do které patří např. pohyblivý radioteleskop v Green Banku s rozměrem mísy 100×110 metrů. Součástí byl i slavný radioteleskop Arecibo, který byl v roce 2020 nevratně poškozen pádem ohniskové kabiny. V blízké budoucnosti se do hledání gravitačních vln touto metodou zapojí i v Austrálii a jižní Africe právě budované radioteleskopické pole SKA (*Square Kilometer Array*), které bude mít celkovou sběrnou plochu jeden kilometr čtvereční. SKA má jako jediný přístroj současnosti parametry dostačující pro detekci reliktních gravitačních vln a doufejme, že tato radioteleskopická síť bude úspěšná.

V červnu 2023 bylo oznámeno statistické pozorování gravitačního šumu detektory PTA v Americe, Evropě i v Austrálii. Jde o výsledek po čtvrt století sbírání dat. V budoucnosti se snad podaří oddělit signály od jednotlivých zdrojů. Podrobněji viz [63].



Obr. 3.37: Různé detektory a zdroje gravitačních vln v závislosti na jejich frekvenci. Jednou z dalších nepřímých metod hledání gravitačních vln je detekce změn polarizace reliktního záření způsobených procházející reliktní gravitační vlnou (zcela vlevo).



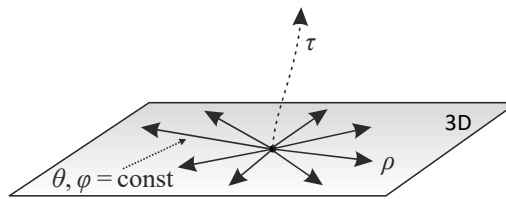
3.6 Sférický zdroj gravitace

Prvním uceleným řešením nového Einsteinova gravitačního zákona bylo pokřivení časoprostoru kolem dokonale symetrického sférického tělesa. Řešení našel německý matematik a fyzik Karl Schwarzschild (1873–1916) hned v roce 1916, tj. v roce publikování obecné relativity (ústně ji Einstein představil již v roce 2015). Řešení platí pro vnějšího pozorovatele, který se nachází ve fixní vzdálenosti od objektu, kde je rozložení hmoty nulové, tj. prostor je prázdný (tenzor energie a hybnosti je nulový) a na pravé straně Einsteinova gravitačního zákona je nula.

3.6.1 Schwarzschildovo řešení

Metrika v okolí sféricky symetrického tělesa

Na obrázku je světočára centra parametrizovaná vlastním časem τ centra. Pro $\tau = \text{const}$ je znázorněna řezná nadplocha, která je třírozměrným světem kolem centra. Skutečná radiální souřadnice je označena ρ a roste ve směru zakreslených souřadnicových čar, na kterých jsou konstantní úhlové proměnné θ a φ .



Obr. 3.38: Zavedení souřadnic

Předpokládejme diagonální metriku ve tvaru

$$ds^2 = -c^2 \alpha(\tau, \rho) d\tau^2 + \beta(\tau, \rho) d\rho^2 + \gamma(\tau, \rho) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (3.299)$$

Radiální souřadnice ρ budeme definovat tak, aby při konstantním τ , θ a φ platilo

$$ds^2 = d\rho^2. \quad (3.300)$$

Proto musí být $\beta = 1$ a nejobecnější tvar intervalu ve sférické geometrii bude obsahovat dvě neznámé funkce α a γ

$$ds^2 = -c^2 \alpha(\tau, \rho) d\tau^2 + d\rho^2 + \gamma(\tau, \rho) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (3.301)$$

V hranaté závorce jsou standardní úhlové souřadnice převzaté ze sférických souřadnic. Pomocí radiální souřadnice je možné měřit radiální vzdálenosti, ale nebude platit, že plocha koule je $4\pi\rho^2$. Zaveďme místo souřadnic $(\tau, \rho, \theta, \varphi)$ jinou souřadnicovou síť

(t, r, θ, φ) , kde t je běžný souřadnicový čas a r je sférická souřadnice, která zajistí, aby pro plochu koule platil nadále vztah

$$S = 4\pi r^2 \neq 4\pi \rho^2. \quad (3.302)$$

Tedy ρ je skutečná radiální vzdálenost a r je vzdálenost dopočtená ze vztahu pro plochu koule, tj. vzdálenost figurující u úhlového elementu, který bude mít v nových souřadnicích tvar:

$$ds^2 = -c^2 A(t, r) dt^2 + B(t, r) dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (3.303)$$

V těchto souřadnicích jsou v intervalu dvě neznámé funkce A a B , které bude třeba určit z Einsteinova gravitačního zákona. Znaménka jsou volena tak, aby odpovídala Minkowského metrice, do které musí metrika kolem tělesa přejít ve velké vzdálenosti (tzv. zákon setrvačnosti diferenciální formy). Hledaná metrika má tedy tvar

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 A(t, r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(t, r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.304)$$

Další postup je zdlouhavý, ale relativně přímočarý. Nejprve určíme inverzní matici

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^{-2} A^{-1}(t, r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^{-1}(t, r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (3.305)$$

Dále určíme ze vztahu (3.124) Christoffelovy symboly, ze vztahu (3.207) Riemannův tenzor křivosti, zúžením najdeme Ricciho tenzor a skalární křivost a nakonec sestavíme rovnice Einsteinova gravitačního zákona

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.306)$$

Na pravé straně je nula, protože se nacházíme vně centrálního tělesa. Na první pohled by mělo jít o 16 diferenciálních rovnic pro metriku, ale vzhledem k symetrii výrazů jde jen o 10 rovnic. Z nich některé jsou typu $0 = 0$, jen 4 rovnice jsou netriviální a jen dvě nezávislé. Z rozboru těchto rovnic plyne, že funkce A a B jsou jen funkcemi souřadnice r , nikoli souřadnice t . Každé řešení v okolí sféricky symetrického tělesa je tedy nezávislé na čase. To mimo jiné znamená, že sféricky symetrické těleso nemůže generovat gravitační vlny. V případě jediné závislé proměnné vede gravitační zákon na obyčejné diferenciální rovnice, jejichž řešení má jednoduchý tvar

$$A(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}; \quad B(r) = \frac{1}{A(r)}, \quad (3.307)$$

kde c_1 a c_2 jsou integrační konstanty, které určíme z newtonovské limity – dosti daleko od tělesa musí platit

$$g_{00} = -c^2 \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right). \quad (3.308)$$

Odsud plyne

$$c_1 = 1; \quad c_2 = -\frac{2GM}{c^2}. \quad (3.309)$$

Výsledek tedy je

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.310)$$

Tuto metriku odvodil Karl Schwarzschild v roce 1916. Přehledně ji lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 (1 - r_g/r) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)} + r^2 d\Omega^2; \\ \blacktriangleright \quad r_g &\equiv \frac{2GM}{c^2}; \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (3.311)$$

Metrika platí vně sféricky symetrického tělesa pro nepohyblivého pozorovatele v konstantní vzdálenosti od tělesa. Schwarzschild ji odvodil v průběhu první světové války na východní frontě. Schwarzschild v Rusku těžce onemocněl a zemřel těsně po návratu do Německa. Po Schwarzschildovi je pojmenován kráter na Měsíci.

Některé vlastnosti Schwarzschildovy metriky

Pokud provedeme limitu $r \rightarrow \infty$, přejde Schwarzschildova metrika v Minkowského metriku. To je v pořádku, neboť dosti daleko od centrálního tělesa je časoprostor plochý.

Radiální vzdálenost

Z metriky je patrné, že mezi naší souřadnicí r (je určována z plochy koule ze vztahu $S = 4\pi r^2$) a radiální vzdáleností ρ platí jednoduchý vztah.

$$d\rho = \frac{dr}{(1 - r_g/r)^{1/2}}. \quad (3.312)$$

Vzdálenost určená přímým měřením není stejná jako poloměr určený z plochy odpovídající koule. Za to může pokrivení prostoru kolem centrálního tělesa.

Divergence metriky

Pokud provedeme limitu $r \rightarrow r_g$, metrický koeficient u radiální souřadnice diverguje. Pro běžná tělesa nemůže taková situace nastat. Veličina r_g , kterou nazýváme Schwarzschildův poloměr, má pro naše Slunce hodnotu 3 km a pro naši Zemi pouze 9 mm. Abychom mohli divergenci pozorovat, musela by být veškerá hmotnost Slunce stlačená do koule o poloměru 3 km a v případě Země do oblasti o poloměru 9 mm. Takový objekt nazýváme černá díra, a jak uvidíme později, z oblasti pod Schwarzschildovým poloměrem z takového tělesa nemůže nic uniknout, dokonce ani světlo. Černé díry jsou závě-

rečným stádiem vývoje velmi hmotných hvězd (například pětinasobku nebo desetinásobku hmotnosti Slunce). Velmi hmotné černé díry (s hmotností milionů až miliard Sluncí) také nacházíme v centrech většiny galaxií. Divergence metriky není skutečnou fyzikální divergencí, je způsobena volbou souřadnicové soustavy. Při volbě jiných souřadnic (pokrytí prostoru jinými souřadnicovými plochami) divergence vymizí. Lze to ukázat na příkladu tzv. *izotropních souřadnic*, kdy přejdeme od čtveřice (t, r, θ, φ) k souřadnicím (t, R, θ, φ) za pomoci transformace

$$r = R \left(1 + \frac{r_g}{4R} \right)^2; \quad (3.313)$$

$$dr = \left(1 + \frac{r_g}{4R} \right) \left(1 - \frac{r_g}{4R} \right) dR. \quad (3.314)$$

Přesvědčte se, že vztah pro diferenciál získáme derivováním prvního výrazu. Z definice souřadnice R je také patrné, že

$$r = r_g \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{r_g}{4}. \quad (3.315)$$

Po dosazení za r a dr do Schwarzschildovy metriky dostaneme

$$\blacktriangleright \quad ds^2 = -c^2 \frac{(1 - r_g/4R)^2}{(1 + r_g/4R)^2} dt^2 + (1 + r_g/4R)^4 \left[dR^2 + R^2 d\Omega^2 \right]. \quad (3.316)$$

Na první pohled je patrné, že v těchto souřadnicích žádná divergence pro $R = r_g/4$ nenastává. Proto hovoříme o tzv. odstranitelné divergenci. Pokud by pozorovatel padal do černé díry, na Schwarzschildově poloměru by nic zajímavého neviděl (možná by byl potrápen slapovými silami). Po průchodu přes Schwarzschildův poloměr by ale již neexistovala cesta zpět. Z pohledu vnějšího pozorovatele jde o jakýsi horizont, za který není možné vidět. Izotropní souřadnice zavedl německý matematik Hermann Weyl (1885–1955) v roce 1917. Existují i transformace k jiným souřadnicím, které mají také zajímavé vlastnosti. Metrika se například vůbec nezmění při transformaci

$$R \rightarrow \tilde{R} \equiv r_g^2/16R. \quad (3.317)$$

Záměna souřadnic

Pokud by těleso bylo lokalizováno dokonce v oblasti menší než Schwarzschildův poloměr, bude metrický koeficient u radiální souřadnice záporný a u časové kladný. Čas a prostor si jakoby vyměnily místo. To je dáno tím, že čas musí být veličinou plynoucí jedním jediným směrem (monotónní funkcí). Jedinou takovou funkcí je ale radiální vzdálenost, která se bude pod Schwarzschildovým poloměrem stále zmenšovat a roli času tak „převezme“ radiální souřadnice. Vnější pozorovatel ale nemá žádné informace o dění pod Schwarzschildovým poloměrem a pozorovatel pod tímto poloměrem nemá žádnou možnost vyslat signál k vnějšímu pozorovateli. Jde o dva světy oddělené horizontem (oblastí ve vzdálenosti Schwarzschildova poloměru). Řešení už nebude statické, ale bude obsahovat časovou souřadnici r .

Laplaceovo řešení

Historicky první úvahy o možné existenci objektů, ze kterých nemůže uniknout ani světlo, pravděpodobně pochází od anglického filosofa Johna Michella (1724–1793) již z roku 1783. Tehdy hovořil o temných hvězdách (*dark star*). Francouzský matematik a fyzik Pierre Simon Laplace v roce 1798 odvodil na základě představ Newtonovy mechaniky rozměry tohoto hypotetického tělesa ze vztahu pro únikovou rychlost

$$v = \sqrt{2GM/r}, \quad (3.318)$$

do kterého dosadil namísto únikové rychlosti rychlost šíření světla c a spočetl poloměr, který by těleso muselo mít:

$$r = 2GM/c^2 = r_g, \quad (3.319)$$

což je právě vztah získaný Karlem Schwarzschildem z obecné relativity.

Řešení za pomoci LIS

Schwarzschildovu metriku lze také odvodit (ne zcela korektně) z úvah o lokálně inerciálním systému, který padá do centrálního tělesa. Uvažujme souřadnicový systém S pozorovatele, který je nepohyblivý vzhledem k centrálnímu tělesu – takový systém je zjevně neinerciální. Představme si další systém LIS, tentokrát inerciální, který padá z nekonečna k centrálnímu tělesu. Jeho okamžitá rychlost vzhledem k centrálnímu tělesu je ve vzdálenosti r rovna

$$v = \sqrt{2GM/r}, \quad (3.320)$$

V padajícím LIS platí zákony speciální relativity a interval je roven ($\theta, \varphi = \text{const}$)

$$ds^2 = -c^2 dt_{\text{LIS}}^2 + dr_{\text{LIS}}^2. \quad (3.321)$$

Při pohledu z LIS na předměty a hodiny v soustavě S budeme pozorovat kontrakci délek a dilataci času, naopak při pohledu z naší soustavy S se nám budou jevit zkrácené tyče v LIS a dilatované časové intervaly naměřené hodinami v LIS:

$$dr = \sqrt{1 - v^2/c^2} dr_{\text{LIS}}; \quad (3.322)$$

$$dt = \frac{dt_{\text{LIS}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.323)$$

Za rychlost dosadíme z (3.320), určíme dr_{LIS} a dt_{LIS} a dosadíme do intervalu (3.321):

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + dr^2 / \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), \quad (3.324)$$

což je Schwarzschildova metrika pro konstantní úhlové souřadnice.

Pohyb světla v radiálním směru

Představme si, že ve vzdálenosti r_0 od centrálního tělesa vyšleme v čase t_0 v radiálním směru fotony (jeden ven a druhý směrem k centrálnímu tělesu):



Obr. 3.39: Pohyb světla v radiálním směru

Rovnice pohybu fotonu $ds^2 = 0$ dá při radiálním pohybu ($\varphi = \theta = \text{const}$) v případě Schwarzschildovy metriky vztah

$$\begin{aligned}
 -c^2(1-r_g/r) dt^2 + \frac{dr^2}{(1-r_g/r)} &= 0 \Rightarrow \\
 \frac{dr^2}{(1-r_g/r)^2} &= c^2 dt^2 \Rightarrow \\
 \frac{dr}{(1-r_g/r)} &= \pm c dt \Rightarrow \\
 \int_{r_0}^r \frac{dr}{(1-r_g/r)} &= \pm \int_{t_0}^t c dt,
 \end{aligned} \tag{3.325}$$

odkud integrací (čitatele i jmenovatele vynásobíme r a rozložíme na parciální zlomky, tj. odečteme a přičteme r_g) získáme

$$r - r_0 + r_g \ln \frac{r - r_g}{r_0 - r_g} = \pm c(t - t_0) \tag{3.326}$$

neboli

$$r = r_0 \pm c(t - t_0) - r_g \ln \frac{r - r_g}{r_0 - r_g}. \tag{3.327}$$

Znaménka představují fotony letící ven (+) nebo do (-) černé díry. Logaritmický člen je důsledkem zakřivení časoprostoru. Daleko od černé díry ($r, r_0 \rightarrow \infty$) je logaritmus na pravé straně nulový a jde o řešení speciální relativity. Určeme nyní dobu letu fotonu z r_0 do r :

$$\Delta t \equiv t - t_0 = \pm \frac{1}{c} \left(r - r_0 + r_g \ln \frac{r - r_g}{r_0 - r_g} \right). \tag{3.328}$$

Horní znaménko platí pro foton letící ven, dolní znaménko pro foton letící do černé díry. Spočítáme nyní dobu letu fotonu na Schwarzschildův poloměr ($r \rightarrow r_g$). Znaménko je záporné, logaritmus konverguje k $-\infty$ a časový interval je nekonečný. Pro vnějšího pozorovatele bude trvat pád fotonů (a samozřejmě i jiných těles) do černé díry nekonečně dlouho. Dilatace času je zde dovedena do extrému. Jakékoli těleso padající do černé díry do ní ve své ustavě dopadne v konečném čase. Pro vnějšího pozorovatele ale bude časový interval potřebný k pádu nekonečný.

Řešme nyní opačnou situaci. Pro foton vystupující z horizontu černé díry je $r_0 \rightarrow r_g$, platí kladné znaménko, logaritmus konverguje k $+\infty$ a časový interval je opět neko-

nečný, a to dokonce pro každé koncové r . Fotonu by únik z horizontu i do nepatrné vzdálenosti od něho trval nekonečně dlouho. Jinými slovy, žádný foton z horizontu nebo oblasti pod ním nemůže uniknout. Pokud počáteční nebo koncový stav neleží na horizontu (na Schwarzschildově poloměru), je doba putování fotonu konečná.

3.6.2 Diagramy vnoření

Čtyřrozměrný pokrivený svět si lze jen obtížně představit. Proto existuje matematická technika, která umožňuje zobrazit tento svět na dvojrozměrnou pokrivenou plochu. Hovoříme o tzv. diagramu vnoření (*embedding diagram*). V prvním kroku položíme dvě ze čtyř souřadnic konstantě. V intervalu tak zbudou už jen diferenciály a funkce dvou souřadnic. Zbylý interval chápeme jako kvadrát vzdálenosti na dvojrozměrné ploše vnořené do eukleidovského 3D světa. Celou proceduru si ukážeme na Schwarzschildově geometrii, kde nás nebude zajímat časová osa (položíme $t = t_0$) a úhel θ (položíme $\theta = \pi/2$, tj. budeme sledovat rovníkovou oblast):

$$ds^2 = \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)} + r^2 d\varphi^2. \quad (3.329)$$

V principu bychom mohli ponechat i časovou osu a jednu z prostorových (například u gravitačních vln, kde je vlnění v čase podstatné). Napišme nyní obecnou rovnici dvourozměrné plochy v kartézském prostoru:

$$z = f(x, y). \quad (3.330)$$

V našem případě sféricky symetrického tělesa nás budou zajímat jen rotační plochy $z = f(r)$. Pokud využijeme standardní polární/válcové souřadnice, bude v kartézské soustavě na naší pokrivené ploše platit

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 + f'^2 dr^2, \\ ds^2 &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + f'^2 dr^2, \\ ds^2 &= (1 + f'^2) dr^2 + r^2 d\varphi^2. \end{aligned} \quad (3.331)$$

Čárka znamená derivaci podle proměnné r . Vztahy (3.330) a (3.331) nijak nesouvisí s pokriveným světem obecné relativity, jsou jen vyjádřením elementu délky rotační plochy $z = f(r)$ v 3D eukleidovském prostoru. Nyní budeme předpokládat, že je (3.329) koresponduje s nějakou plochou v kartézském prostoru (x, y, z) . Porovnáním s (3.329) s máme podmínku

$$1 + f'^2 = \frac{1}{1 - r_g/r}. \quad (3.332)$$

Snadno určíme, že

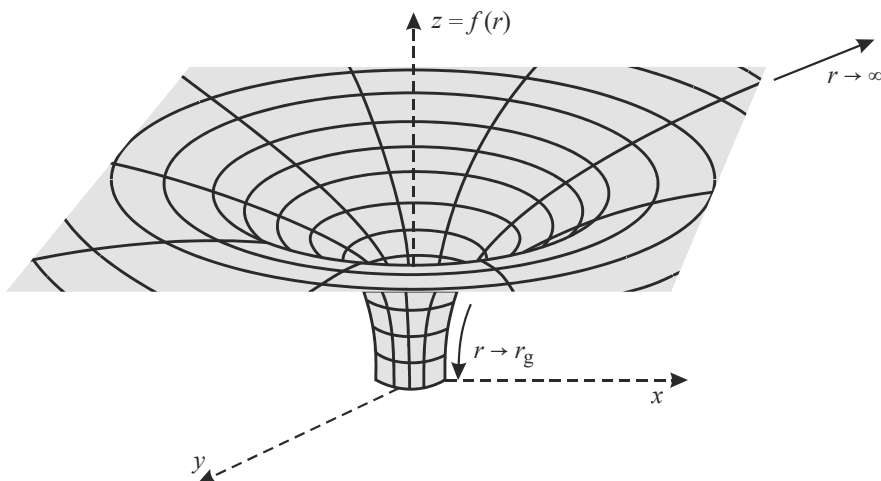
$$f' = \sqrt{\frac{r_g}{r - r_g}}. \quad (3.333)$$

A integraci máme

$$f(r) = \int \sqrt{\frac{r_g}{r-r_g}} dr, \quad (3.334)$$

$$f(r) = \sqrt{4r_g(r-r_g)}. \quad (3.335)$$

Jde o rovnici rotační plochy v 3D, která svým zakřivením odpovídá prostoru kolem černé díry. Povšimněte si, že pro $r \rightarrow \infty$ plocha správně přechází v rovny časoprostor a pro $r \rightarrow r_g$ plocha končí, dále není protažitelná (neexistuje pro $r < r_g$). Na druhou stranu pro $r = r_g$ není na ploše žádná singularita, jak bychom mohli očekávat z tvaru Schwarzschildovy metriky. Ze zavedení izotropních souřadnic už víme, že je tato singularita odstranitelná.



Obr. 3.40: Diagram vnoření pro Schwarzschildovu geometrii

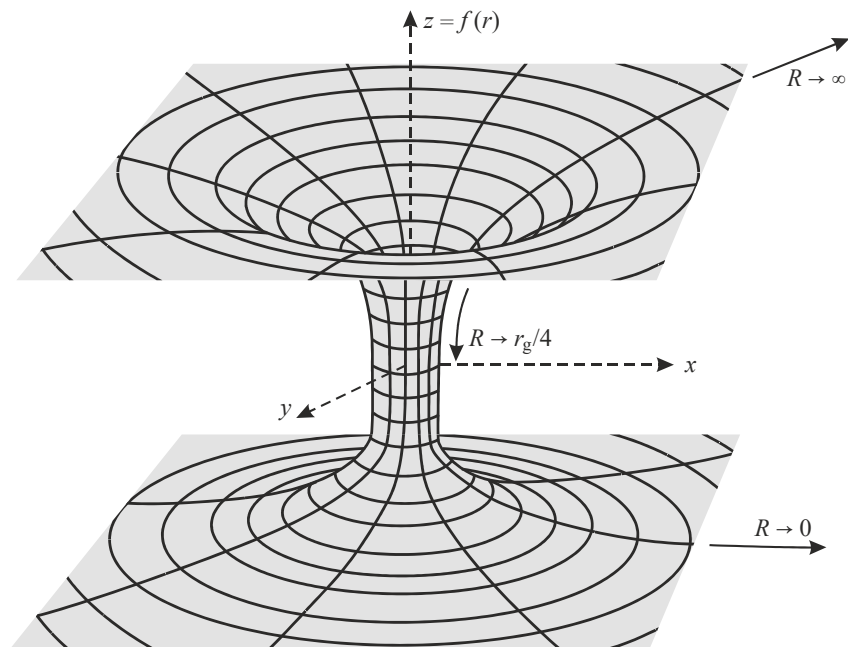
Einsteinův-Rosenův most

Pokud do vztahu (3.335) dosadíme izotropní souřadnice (3.313), bude stejná plocha popsána jako

$$f(r) = \sqrt{4r_g R^2 \left(1 - \frac{r_g}{4R}\right)^2}. \quad (3.336)$$

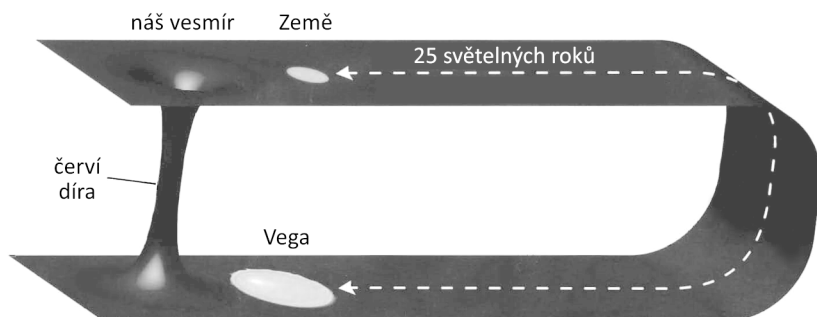
Připomeňme, že $R = r_g/4$ odpovídá v původních souřadnicích horizontu, tj. $r = r_g$. Tato plocha již nemá omezení jen pro $R > r_g/4$, ale je možné ji zakreslit i pro parametr $R \in (0, \infty)$. Pro hodnoty $R \rightarrow \infty$ a $R \rightarrow 0$ plocha limitně přechází v rovny časoprostor:

Takové řešení připomíná most mezi dvěma plochými časoprostory. Podrobně ho studovali v roce 1935 německý fyzik Albert Einstein (1879–1955) a americko-izraelský fyzik Nathan Rosen (1909–1995), proto se mu říká *Einsteinův-Rosenův most* (později se řešení začalo označovat jako *červí díra*). V principu by bylo možné, aby se těleso, které spadlo do černé díry, vynořilo v jiné oblasti časoprostoru, kterou nazýváme bílá díra. Tato časoprostorová zkratka by umožnila cestování mezi dvěma vzdálenými oblastmi vesmíru bez nutnosti překročit rychlost světla.



Obr. 3.41: Einsteinův-Rosenův most – diagram vnoření

Uvedený diagram vnoření je ovšem řešením ve fixním čase. Jeho dynamickou analýzu (viz Obr. 3.43) provedli američtí fyzici Robert Fuller (*1936) a John Archibald Wheeler (1911–2008) v roce 1962. Ukázalo se, že jde o řešení nestabilní, které se zaškrtní rychleji, než jím prolétne nejrychlejší částice, tj. foton.

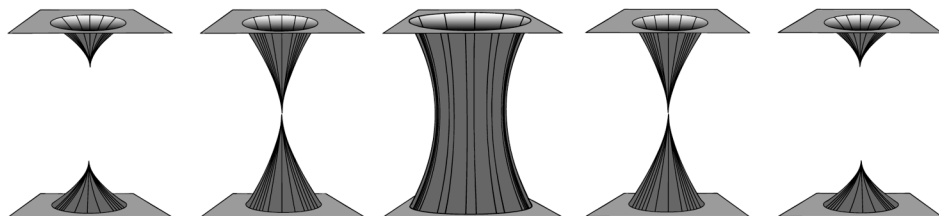


Obr. 3.42: Einsteinův-Rosenův most jako časoprostorová zkratka

Červí díry se staly natolik populárními, že bylo jen velmi obtížné se jich vzdát. Možná, že by kvantové procesy mohly umožnit protunelování částice z jedné oblasti do druhé. Z hlediska obecné relativity je ovšem červí díra postavená na Schwarzschildově metrice neprůchozí. Byla činěna řada pokusů s jinými metrikami, které sice vedou na průchozí červí díry, ale za nefyzikálních podmínek. Jedním z příkladů je jednoduchá metrika

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\rho^2 + (a^2 + \rho^2) \left[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (3.337)$$

kde t je souřadnicový čas, ρ je skutečná radiální vzdálenost, θ a φ jsou sférické úhlové souřadnice a a je nějaká konstanta. Na první pohled je vidět, že metrika přechází pro $\rho \rightarrow \pm\infty$ v metriku plochého časoprostoru. Z rozboru dynamiky je zjevné, že se jedná o průchozí červí díru. Pokud spočteme Christoffelovy symboly, Riemannův tenzor křivosti a sestavíme Einsteinův gravitační zákon, zjistíme, že tato metrika vyžaduje nenulový tenzor energie a hybnosti se zápornou hustotou energie.



Obr. 3.43: Dynamika Einsteinova-Rosenova mostu

V roce 2012 vyvinula skupina kolem amerického teoretika Kipa Thorna jinou techniku zobrazování zakřiveného časoprostoru, než jsou diagramy vnoření. Využívají k tomu soustavu dvou linií, tzv. vírových čar (*vortex lines*) a tahových čar (*tendex lines*). Vírové čáry znázorňují kroucení časoprostoru a tahové čáry jeho natahování a stlačování. Tyto „čáry“ podle autorů názorně vystihují chování časoprostoru.

3.6.3 Černé díry

Velmi zajímavou předpovědí obecné relativity byla existence černých děr. Dnes známe takových objektů obrovské množství. Mohou vznikat v závěrečných fázích velmi hmotných hvězd, kdy hroucení hvězdy nezastaví ani tlak degenerovaného elektronového plynu (pak by výsledkem byl bílý trpaslík), ani degenerovaného neutronového plynu (pak by vznikla neutronová hvězda). Černé díry tohoto druhu mají typicky hmotnost v rozsahu $5 \div 10 M_{\odot}$, kde M_{\odot} je hmotnost Slunce 2×10^{30} kg. Ve středech galaxií existují obří černé díry (veledíry) s hmotnostmi v rozsahu $10^6 \div 10^9 M_{\odot}$. Hmotnost černé díry ve středu naší Galaxie je $4 \times 10^6 M_{\odot}$, největší známou potvrzenou hmotnost ($7,5 \times 10^9 M_{\odot}$) má černá díra v centru galaxie M87 ze souhvězdí Panny. Původ černých děr ve středech galaxií není přesně znám.

Představa černé díry jako mrtvého neaktivního objektu není správná. Nad poslední stabilní orbitou mohou černou díru obíhat objekty stejným způsobem jako jakékoli jiné těleso o dané hmotnosti. Kolem černé díry ve středu naší Galaxie například obíhá celá hvězdkupa. V těsné blízkosti obíhá plyn a prach, který padá po spirále do černé díry. Vnitřním třením se obíhající materiál rozžhává a je v plazmatickém skupenství. Vytváří se tak tzv. *akreční disk*, který pronikavě září ve všech oborech spektra včetně rentgenového. Vně akrečního disku je plynoprachý torus. V akrečním disku bývá silné magnetické pole, které vytváří ve směru rotační osy černé díry (rotující černá díra je popsána Kerrovou metrikou) magnetické trubice, v nichž skončí část částic padajících do černé díry. Zachyceny jsou samozřejmě ještě nad Schwarzschildovým poloměrem a vyvrženy

trubicemi od černé díry v podobě dvou výtrysků relativistických částic. Výtrysky intenzivně září, interagují s okolím a na jejich koncích se vytvářejí typické rádiové laloky.

První hvězdnou černou díru identifikoval anglický astronom Paul Murdin v roce 1971 v souhvězdí Labutě v blízkosti hvězdy γ Cyg. Zde byl již od roku 1964 znám intenzivní rentgenový zdroj. Nakonec se ukázalo, že původcem je černá díra o hmotnosti $8 M_{\odot}$, která se nachází ve vzdálenosti 6 000 ly. První galaktické černé díry byly nalezeny Hubblovým vesmírným dalekohledem v roce 1992. Jednou z nich je černá díra ve středu galaxie NGC 4261. Její hmotnost je přibližně $400 \times 10^6 M_{\odot}$, samotný akreční disk má hmotnost $10^5 M_{\odot}$, délka výtrysků je 88 000 ly, průměr 60 au, vzdálenost od nás 100×10^6 ly. První fotografii těsného okolí černé díry (v centru galaxie M87) pořídila radioteleskopická síť EHT (*Event Horizon Telescope*) v roce 2019.

Černá díra si při vzniku ponechává jen informaci o hmotnosti, momentu hybnosti a náboji: $M, b, Q = \text{const}$. Všechny ostatní atributy hmoty (dipólové, kvadrupólové momenty, různá kvantová čísla) jsou při průchodu horizontem zapomenuty. Tento teorém poprvé zformulovali Brandon Carter, Werner Israel, David C. Robinson a Steven Hawking. Často se nazývá „no hair“ teorém (v českém překladu bychom mohli říci „černá díra nemá žádné vlasy“), tj. neponechává si ze svého původního života téměř žádné vlastnosti. Podle hodnot těchto tří atributů dělíme černé díry na:

1. *Schwarzschildovy černé díry*: Mají nenulovou hmotnost, nulový moment hybnosti a elektrický náboj. Každý zkolabovaný nerotující objekt se stane Schwarzschildovou černou dírou.
2. *Kerrový černé díry*: Mají nenulovou hmotnost a moment hybnosti. Jde o výsledek kolapsu rotujících objektů, typickým jevem je existence ergosféry – oblasti mezi statickou mezí (světlo ani částice se za ní nemohou pohybovat proti směru rotace) a Schwarzschildovým poloměrem. Metriku těchto objektů poprvé spočítal novozélandský matematik Roy Kerr.
3. *Reissnerovy-Nordströmovy černé díry*: Nejobecnější možná teoretická forma černé díry s nenulovým nábojem, metriku v okolí tohoto objektu spočetli německý fyzik Hans Reissner a finský fyzik Gunnar Nordström.

Ve vesmíru se převážně vyskytují Kerrový černé díry, tj. rotující černé díry. Není znám případ černé díry s nenulovým nábojem. Schwarzschildovo řešení limitně přechází do plochého časoprostoru. V roce 1933 řešení zobecnil britský matematik a kosmolog tureckého původu George McVittie. Jeho metrika přechází ve velké vzdálenosti do metriky expandujícího vesmíru. V roce 1993, ukázal irský matematik a teoretický fyzik Brien Nolan, že v McVittiově řešení není centrální singularita nutná. V roce 2019 se ukázalo, že forma látky uvnitř, která zabrání tvorbě singularity, by mohla být tvořena kvantovými fluktuacemi vakua. Všechna taková řešení mají ale nutně časově proměnnou hmotnost, neboť vakuové fluktuace se s expanzí nezředňují, ale jejich energie či hmotnost se zvětšujícím se objemem roste. Zákon zachování energie v expandujícím vesmíru neplatí, je narušena symetrie vůči posunutí v čase. Nárůstu hmotnosti černých děr vlivem expanze se říká *kosmologická vazba* černých děr.

Skupina devatenácti vědců pod vedením Duncana Farraha ukázala v roce 2023, že by nárůst hmotnosti černých děr způsobený obyčejnou (zpomalující se) expanzí vesmíru měl dokonce vést ke zrychlené expanzi, viz [64]. Tým využil celkem pět souborů galaxií z celooblohových přehlídek a pokusil se nárůst hmotnosti černých děr prokázat. Zdá se, že výsledky nejsou s tímto tvrzením v rozporu. Za jakou část zrychlené expanze by mohly být černé díry odpovědné, pokud vůbec za nějakou, není ale jasné.

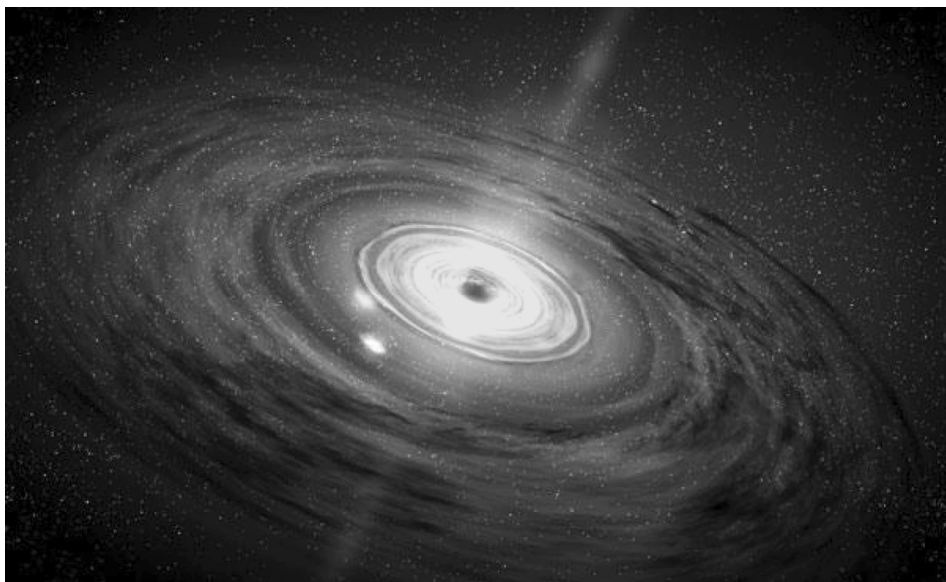
Hvězdné černé díry mají extrémní průměrnou hustotu. Toto ale nemusí platit o obřích černých děrách v centrech galaxií. Průměrnou hustotu černé díry můžeme odhadnout tak, že za rozměr dosadíme Schwarzschildův poloměr:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi r_g^3/3} = \frac{3M}{4\pi(2GM/c^2)^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \frac{1}{M^2}. \quad (3.338)$$

Jde o průměrnou hustotu pro vnějšího pozorovatele. Vnější pozorovatel se nikdy neocitne pod horizontem černé díry, aby tuto hustotu vnímal. Hustota velmi hmotných černých děr může být nízká. Jejich extrémní vlastnosti jsou dány jejich celkovou hmotností a malými rozměry horizontu, nikoli hustotou.

Podle výpočtů Stephena Hawkinga by látka v černé díře nemusela být uvězněna na věky. Kvantové procesy mohou způsobit tunelování částice z černé díry do okolního prostoru. Tento jev lze z jiného úhlu pohledu popsat jako kreaci párů částice a antičástice vně horizontu černé díry, kdy posléze jeden z členů páru skončí v černé díře a druhý se vynoří nad horizontem. Oba pohledy (tunelování, páry) jsou ekvivalentní. Pro hvězdné i obří černé díry je takový proces velmi pomalý a vypaření černé díry by trvalo mnohonásobně déle, než je dnešní stáří vesmíru. Odhadované časy jsou v následující tabulce.

těleso	hmotnost	horizont	hustota	doba vypaření
kámen	1 kg	10^{-27} m	10^{76} g cm ⁻³	10^{-21} s
Země	6×10^{24} kg	9 mm	10^{27} g cm ⁻³	10^{46} let
Slunce	2×10^{30} kg	3 km	10^{16} g cm ⁻³	10^{62} let
jádro galaxie	$10^8 M_\odot$	2 au	1.82 g cm ⁻³	10^{86} let
galaxie	$10^{11} M_\odot$	30 ly	10^{-6} g cm ⁻³	10^{95} let



Obr. 3.44: Typická černá díra s plynoprachým torem (tmavá část), akrečním diskem (světlá část) a dvěma výtrysky (ve viditelném světle nejsou výrazné). Zdroj: NASA.

3.6.4 Pohyby ve Schwarzschildově geometrii

Lagrangeova funkce

Pohyb částic bychom měli počítat z rovnice geodetiky. Tu lze upravit do tvaru Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.339)$$

Tečka znamená derivaci podle vlastního času τ , kterým je parametrizována světočára $x^\mu(\tau)$ částice. Pokud jde o fotony, lze jako parametr světočáry namísto vlastního času využít vlastní délku trajektorie λ . Potom mají Lagrangeovy rovnice tvar

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (3.340)$$

a tečka je derivace podle parametru λ . Lagrangeova funkce, která vede na správné pohybové rovnice, je jakýmsi zobecněním kinetické energie

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\lambda^2}. \quad (3.341)$$

Pokud jde o hmotnou částici, využijeme jako parametr vlastní čas, pokud jde o světlo, bude parametrem vlastní délka trajektorie. Potenciální energie se v Lagrangeově funkci nevyskytuje, protože gravitační působení je převedeno na zakřivení časoprostoru, tedy do metrických koeficientů $g_{\mu\nu}$. Hmotnost částice se v Lagrangeově funkci také nevyskytuje – pohyb v gravitaci na její hmotnosti nezáleží (pokud není tak veliká, aby sama výrazně zakřivovala časoprostor kolem sebe). Číselný koeficient $\frac{1}{2}$ vynecháme, tj. pro výpočet pohybu částic budeme používat Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{ds^2}{d\lambda^2}. \quad (3.342)$$

Někdy se využívá i jiná Lagrangeova funkce

$$\tilde{L} = \sqrt{\frac{-ds^2}{d\lambda^2}}. \quad (3.343)$$

Pokud je parametrizace volena tak, aby $ds^2/d\lambda^2$ bylo konstantní (to splňuje například vlastní čas, protože platí $ds^2/d\tau^2 = -c^2 d\tau^2/d\tau^2 = -c^2$), jsou obě funkce skalárem (konstantou) a vedou na stejné pohybové rovnice. Ukažme, že za tohoto předpokladu vede kvadrát Lagrangeovy funkce na stejné rovnice, jako funkce samotná:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{d\lambda} \left(2L \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - 2L \frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0.$$

V našich výpočtech budeme využívat jednodušší podobu Lagrangeovy funkce (3.342).

Efektivní potenciál a pohyby částic

Výpočet pohybu částice budeme provádět v rovině $\theta = \pi/2$. Interval a Lagrangeova funkce budou mít tvary

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\varphi^2, \quad (3.344)$$

$$L = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (3.345)$$

Pohybové rovnice světočáry $x^\mu(\tau)$ částice ve Schwarzschildově geometrii budou

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial L}{\partial t} &= 0; \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0; \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0; \end{aligned} \quad (3.346)$$

Cílem je určit funkce $t(\tau)$, $\varphi(\tau)$ a $r(\tau)$. První dvě rovnice povedou na zákony zachování. To je patrné už z tvaru Lagrangeovy funkce, kde jsou t a φ cyklické proměnné, tj. v L se nevyskytují. První dvě Lagrangeovy rovnice dají

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \text{const}; \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \dot{t} = k; \quad (3.347)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}; \quad \Rightarrow \quad r^2 \dot{\varphi} = \ell. \quad (3.348)$$

První rovnice je zobecněným zákonem zachování energie, druhá rovnice je zákonem zachování momentu hybnosti. Veličiny k , ℓ jsou konstanty, ℓ má význam momentu hybnosti vztaheného na jednotku hmotnosti. Lagrangeova rovnice pro radiální směr je diferenciální rovnicí druhého řádu, hybnost v radiálním směru se nezachovává. Tuto Lagrangeovu rovnici lze ale nahradit rovnicí $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, ze které máme pro vývoj radiální složky okamžitě

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = -c^2 \quad \Rightarrow \quad (3.349)$$

$$-c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2 = -c^2. \quad (3.350)$$

Po dosazení za \dot{t} z (3.347) a za $\dot{\phi}$ z (3.348) dostaneme:

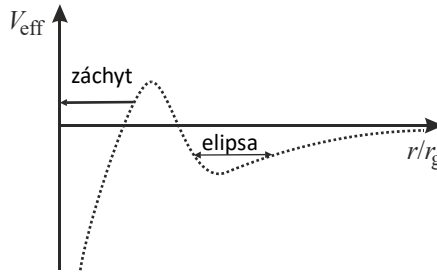
$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = c^2(k^2 - 1); \quad (3.351)$$

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{\ell^2 r_g}{r^3} - c^2 \frac{r_g}{r}. \quad (3.352)$$

Vztah (3.351) je obdobou klasického zákona zachování energie. V efektivním potenciálu jsou zastoupeny (na rozdíl od klasické fyziky) členy $1/r$, $1/r^2$ a $1/r^3$. Snadno dopočteme poslední rovnici pro parametrický vývoj radiální souřadnice $r(\tau)$:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{c^2(k^2 - 1) - V_{\text{eff}}(r)}. \quad (3.353)$$

Je zjevné, že se pohyb může konat jen tam, kde $c^2(k^2 - 1) \geq V_{\text{eff}}$. Tvar grafu efektivního potenciálu závisí na hodnotě momentu hybnosti ℓ . Pro střední hodnoty momentu hybnosti ℓ má efektivní potenciál dva extrémy. První z nich je maximum a znamená nestabilní orbitu.



Obr. 3.45: Efektivní potenciál pro střední hodnotu momentu hybnosti

Kolem černé díry zpravidla rotuje žhavý plazmatický materiál, který vytváří tzv. akreční disk. Poslední stabilní orbita se nachází na vnitřní straně tohoto akrečního disku. Druhý extrém je stabilní kruhová orbita v blízkosti černé díry. Z průběhu potenciálu je patrné, že zde existují i eliptické orbity. Pro malé hodnoty momentu hybnosti tomu tak ale není. Najděme nyní extrémy z podmínky

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\ell^2}{r^2} - \frac{\ell^2 r_g}{r^3} - c^2 \frac{r_g}{r} \right] = 0 \Rightarrow \quad (3.354)$$

$$c^2 r_g r^2 - 2\ell^2 r + 3\ell^2 r_g = 0$$

Odsud snadno nalezneme oba extrémy:

$$r_{1,2} = \frac{\ell^2 \pm \sqrt{\ell^4 - 3c^2 \ell^2 r_g^2}}{c^2 r_g}. \quad (3.355)$$

Menší z obou kořenů je nestabilní maximum. Větší z obou kořenů je stabilní kruhová orbita, která existuje za podmínky

$$\ell^2 \geq 3c^2 r_g^2. \quad (3.356)$$

Pro mezní hodnotu momentu hybnosti má poslední stabilní kruhová orbita poloměr

$$r_2 = \frac{\ell^2}{c^2 r_g} = \frac{3c^2 r_g^2}{c^2 r_g} = 3r_g. \quad (3.357)$$

Poslední stabilní kruhová orbita pohybu částic tedy existuje na $r = 3r_g$.

Pohyb světla

Pohyb světla na pozadí Schwarzschildovy geometrie budeme parametrizovat vlastní délkou trajektorie. Lagrangeova funkce bude mít opět tvar (3.345), nicméně tečka nyní znamená derivaci podle vlastní délky λ . Rovnice pro t a φ opět povedou na zákony zachování (3.347) a (3.348), ze kterých můžeme počítat parametrický vývoj těchto proměnných:

$$\blacktriangleright \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{k}{1 - r_g/r}; \quad (3.358)$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\ell}{r^2}. \quad (3.359)$$

Namísto poslední Lagrangeovy rovnice pro vývoj radiální souřadnice můžeme využít jednodušší rovnici pro pohyb světla

$$ds^2 = 0, \quad (3.360)$$

která po parametrizaci vlastní délkou λ vede na

$$-c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (3.361)$$

Po dosazení za \dot{t} z (3.358) a za $\dot{\varphi}$ z (3.359) dostaneme:

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = c^2 k^2; \quad (3.362)$$

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{\ell^2 (1 - r_g/r)}{r^2}. \quad (3.363)$$

Efektivní potenciál má o něco jednodušší podobu než u hmotné částice. Pro vývoj polohy máme z (3.362) rovnici:

$$\blacktriangleright \quad \frac{dr}{d\lambda} = \pm \sqrt{c^2 k^2 - V_{\text{eff}}(r)}. \quad (3.364)$$

Z rovnic (3.358), (3.359) a (3.364) je možné vhodnou numerickou metodou dopočítat světočáru pohybu světla ve Schwarzschildově metrice. Vztah (3.362) je opět obdobou zákona zachování energie. Z rovnice (3.364) je zřejmé, že se pohyb může konat jen tam, kde $c^2 k^2 \geq V_{\text{eff}}$.

Kruhová orbita fotonů

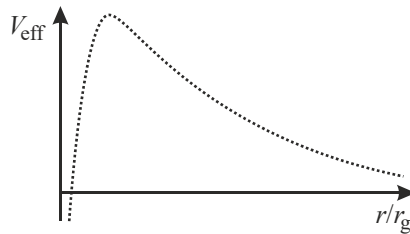
Kruhovou orbitu nalezneme z podmínky

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0, \quad (3.365)$$

ze které plyne

$$r = \frac{3}{2} r_g. \quad (3.366)$$

Zjevně jde o nestabilní trajektorii, neboť efektivní potenciál má v tomto místě maximum.

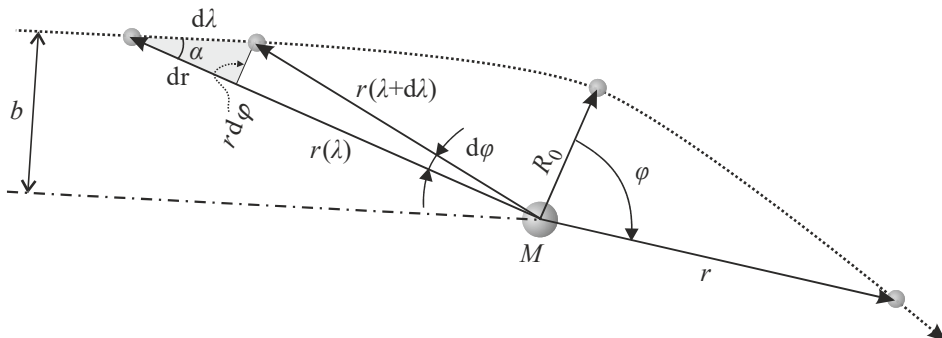


Obr. 3.46: Efektivní potenciál pro fotony

Ve Schwarzschildově geometrii se fotony ve vzdálenosti $1,5 r_g$ od centra budou pohybovat po nestabilních kruhových orbitách. Při jakékoli poruše začnou buď po spirále padat do černé díry, nebo se naopak vzdalovat. Řešme nyní skutečný pohyb fotonů v okolí hmotného tělesa, například našeho Slunce.

Ohyb světla

Pohyb fotonu v okolí hmotného středu M popíšeme polárními souřadnicemi $r(\lambda)$ a $\varphi(\lambda)$. Souřadnice r je vzdálenost fotonu od hmotného středu a souřadnice φ je úhel odečítaný od pericentra. Nejbližší vzdálenost fotonu od hmotného středu označíme R_0 a záměrný parametr b .



Obr. 3.47: Ohyb světla v okolí hmotného objektu

Z obrázku je patrné, že pro úhel α platí (z vyznačeného šedého trojúhelníku)

$$\cos \alpha = \frac{dr}{d\lambda}, \quad (3.367)$$

$$\sin \alpha = \frac{r d\varphi}{d\lambda}. \quad (3.368)$$

Pokud nás bude zajímat jen prostorová trajektorie fotonu, vystačíme s pohybovými rovnicemi

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\ell}{r^2} \quad (3.369)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm \sqrt{c^2 k^2 - V_{\text{eff}}(r)}. \quad (3.370)$$

Význam integračních konstant k a ℓ dopočteme přímo z pohybových rovnic. Vzhledem k tomu, že jde o konstanty, můžeme si pro jejich výpočet vybrat kterýkoli bod trajektorie. Konstanty určíme v situaci, kdy je foton daleko a k ohybu ještě nedošlo ($t \rightarrow -\infty$, $r \rightarrow \infty$):

$$c^2 k^2 = \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \cos^2 \alpha + V_{\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 + 0 = 1. \quad (3.371)$$

$$\ell = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = r \frac{r d\varphi}{d\lambda} = r \sin \alpha = b. \quad (3.372)$$

Konstanta ℓ má tedy dva významy: jednak jde o moment hybnosti vztažený na jednotku hmotnosti, a jednak o záměrný parametr b . Výsledné pohybové rovnice fotonu jsou

►
$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{b}{r^2}, \quad (3.373)$$

►
$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm \sqrt{1 - V_{\text{eff}}(r)}. \quad (3.374)$$

Rovnice můžeme samozřejmě řešit numericky, my ale najdeme analytické řešení alespoň v limitě slabých polí (malého ohybu paprsku). Ještě předtím ale nalezneme důležitý vztah mezi konstantami b , M a vzdáleností v pericentru R_0 . V pericentru je vzdálenost od centra nejmenší, tj. platí $dr/d\lambda = 0$ a z rovnice (3.374) máme okamžitě

$$V_{\text{eff}}(R_0) = 1, \quad (3.375)$$

po dosazení za efektivní potenciál (3.363) máme výsledný vztah

►
$$b^2 (1 - r_g/R_0) = R_0^2, \quad (3.376)$$

kde b je záměrný parametr, R_0 vzdálenost v pericentru a ve Schwarzschildově poloměru r_g je obsažena hmotnost tělesa, kolem kterého dochází k ohybu světla. Pokud nás bude zajímat jen celkový úhel ohybu, nemusíme řešit obě rovnice (3.373) a (3.374). Z jejich podílu plyne

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{b/r^2}{\sqrt{1-V_{\text{eff}}(r)}}. \quad (3.377)$$

Po separaci proměnných a následně integraci máme

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{\infty} - \varphi_{-\infty} = 2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{b/r^2}{\sqrt{1-V_{\text{eff}}(r)}} dr. \quad (3.378)$$

Pohyb paprsku je symetrický vzhledem k pericentru, proto prováníme integraci jen z pericentra do nekonečna a výslednou hodnotu zdvojnásobíme. Do vztahu nyní dosadíme efektivní potenciál a dostaneme

$$\Delta\varphi = 2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{1/r^2}{\sqrt{b^{-2} - \frac{1}{r^2} + \frac{r_g}{r^3}}} dr. \quad (3.379)$$

Ve vztahu jsou obsaženy konstanty R_0 a b , ty jsou ovšem navzájem převeditelné, proto je vhodné použít jen jednu z nich. Z (3.376) vyjádříme b^{-2} :

$$\Delta\varphi = 2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{1/r^2}{\sqrt{R_0^{-2} - r_g R_0^{-3} - \frac{1}{r^2} + \frac{r_g}{r^3}}} dr. \quad (3.380)$$

V integraci zavedeme substituci

$$u \equiv 1/r, \quad (3.381)$$

po níž integrál přejde do finálního vztahu

►
$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{1/R_0} \frac{du}{\sqrt{R_0^{-2} - r_g R_0^{-3} - u^2 + r_g u^3}}. \quad (3.382)$$

Integraci je možné samozřejmě provést numericky. Nicméně pro malé hmotnosti středového tělesa nalezneme i analytické řešení. Rozdíl úhlů závisí na hmotnosti tělesa, integrace má tvar

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{1/R_0} F(u, r_g) du. \quad (3.383)$$

Závislost na hmotnosti je obsažena ve Schwarzschildově poloměru r_g . Pro malé hmotnosti provedeme Taylorův rozvoj

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{1/R_0} F(u, 0) du + 2 \int_0^{1/R_0} F'(u, 0) r_g du + \dots, \quad (3.384)$$

kde čárka označuje parciální derivaci podle proměnné r_g . První příspěvek odpovídá situaci, kdy je hmotnost tělesa nulová, paprsek by se tedy měl pohybovat po přímce. Druhý příspěvek je lineární v hmotnosti tělesa. Poderivaci a dosazení $r_g = 0$ máme

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{1/R_0} \frac{du}{\sqrt{R_0^{-2} - u^2}} + r_g \int_0^{1/R_0} \frac{R_0^{-3} - u^3}{[R_0^{-2} - u^2]^{3/2}} du + \dots \quad (3.385)$$

Výrazy snadno upravíme:

$$\Delta\varphi = 2R_0 \int_0^{1/R_0} \frac{du}{\sqrt{1 - (R_0u)^2}} + r_g \int_0^{1/R_0} \frac{1 - (R_0u)^3}{[1 - (R_0u)^2]^{3/2}} du + \dots \quad (3.386)$$

V prvním integrálu provedeme substituci $\xi = R_0u$ a ve druhém $\sin \xi = R_0u$:

$$\Delta\varphi = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{r_g}{R_0} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{\cos^2 \xi} - \frac{\sin^3 \xi}{\cos^2 \xi} \right] d\xi + \dots \quad (3.387)$$

První integrál vede na $\arcsin \xi$, první člen druhého integrálu na $\operatorname{tg} \xi$, u posledního členu lze nalézt primitivní funkci další substitucí $t = \cos \xi$:

$$\Delta\varphi = [\arcsin \xi]_0^1 + \frac{r_g}{R_0} \left[\operatorname{tg} \xi - \frac{1}{\cos \xi} - \cos \xi \right]_0^{\pi/2} + \dots \quad (3.388)$$

Abychom se vyhnuli divergujícím výrazům, sloučíme první dva členy v druhé integraci:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{r_g}{R_0} \left[\frac{\sin \xi - 1}{\cos \xi} - \cos \xi \right]_0^{\pi/2} + \dots \quad (3.389)$$

Výsledek je

$$\Delta\varphi = \pi + 2r_g/R_0 + \dots \quad (3.390)$$

První příspěvek odpovídá rovnému paprsku (nulová hmotnost tělesa, žádný ohyb). Druhý člen je způsoben ohybem paprsku, který prošel ve vzdálenosti R_0 od pericentra. Velikost úhlu ohybu paprsku kolem hmotného tělesa v limitě slabých polí tedy je

$$\blacktriangleright \quad \chi = \frac{2r_g}{R_0} = \frac{4GM}{c^2 R_0}. \quad (3.391)$$

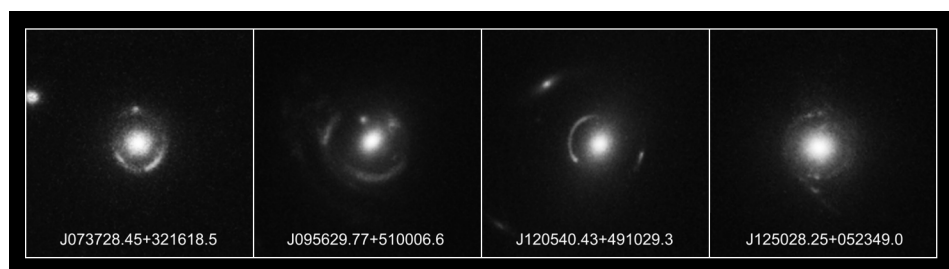
Vztah (3.391) je důležitým důsledkem obecné relativity. Pokud spočítáme ohyb paprsku pomocí volně padajících lokálně inerciálních soustav či úvah založených na newtonovské fyzice, dostaneme poloviční hodnotu. Pro paprsky vzdálených hvězd procházejících těsně nad povrchem našeho Slunce ($R_0 = 700\,000$ km, $M = 2 \times 10^{30}$ kg) vyjde hodnota

$$\chi = 1,745''. \quad (3.392)$$

Polohy hvězd v blízkosti slunečního disku je možné měřit na snímcích pořízených při zatmění Slunce. Poté je třeba je porovnat s polohami změřenými v období, kdy Slunce v dané oblasti není (například po půl roce, kdy je daná oblast na noční obloze). První takové měření provedl sir Arthur Stanley Eddington (1889–1953) v roce 1919. Uspořádal expedici za zatměním Slunce, jejíž jedna část měřila na Princově ostrově v západní Africe a druhá v Sobralu v Brazílii. Platnost obecné relativity Eddington ověřil s relativní přesností 20 %.

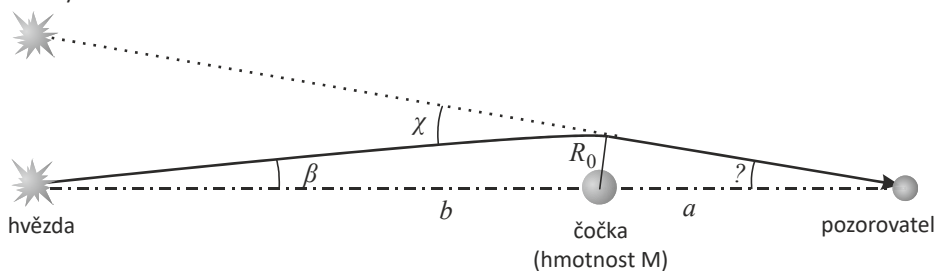
3.6.5 Gravitační čočky

Vhodný objekt mezi námi a zobrazovaným předmětem, například hvězdou nebo galaxií, může způsobit ohyb světla. Mezilehlý objekt funguje jako gravitační čočka. Myšlenka gravitačních čoček pochází od ruského fyzika Oresta Chvolsona (1852–1934), který o nich uvažoval v roce 1924 a jako první publikoval možnost jejich existence. V roce 1936 provedl orientační výpočty týkající se gravitačních čoček český astronom a pedagog František Link (1906–1984). Svou práci publikoval ve francouzském časopise, který ale komunita zabývající se obecnou relativitou nečetla. Ve 30. letech o gravitačních čočkách přemýšlel také český inženýr Rudi W. Mandl (1894–1948), který na možnost jejich existence upozornil Alberta Einsteina. Albert Einstein spočítal v roce 1936, že se takový objekt zobrazí jako vícenásobný, v ideálním případě jako prstenec. Výpočty Einstein na žádost Mandla publikoval na konci roku 1936 v časopise Science. Sám Einstein nevěřil, že by podobný jev mohl být někdy pozorovatelný. Einstein o existenci gravitačních čoček uvažoval už v roce 1912, jak dokládá jeho pracovní deník, ale výpočty tehdy nepublikoval.



Obr. 3.48: Einsteinovy prstence fotografované Hubblovým dalekohledem. Žlutý objekt uprostřed je mezilehlá čočkující galaxie.

zdánlivý obraz



Obr. 3.49: K výpočtu poloměru Einsteinova prstence

Hvězdu, která by byla v zákrytu za objektem o hmotnosti M , uvidíme podle obrázku jako prstenec s úhlovým poloměrem α . Všechny úhly jsou malé, proto můžeme psát

$$\alpha = \frac{R_0}{a}, \quad (3.393)$$

$$\beta = \frac{R_0}{b}, \quad (3.394)$$

Pro úhel ohybu platí

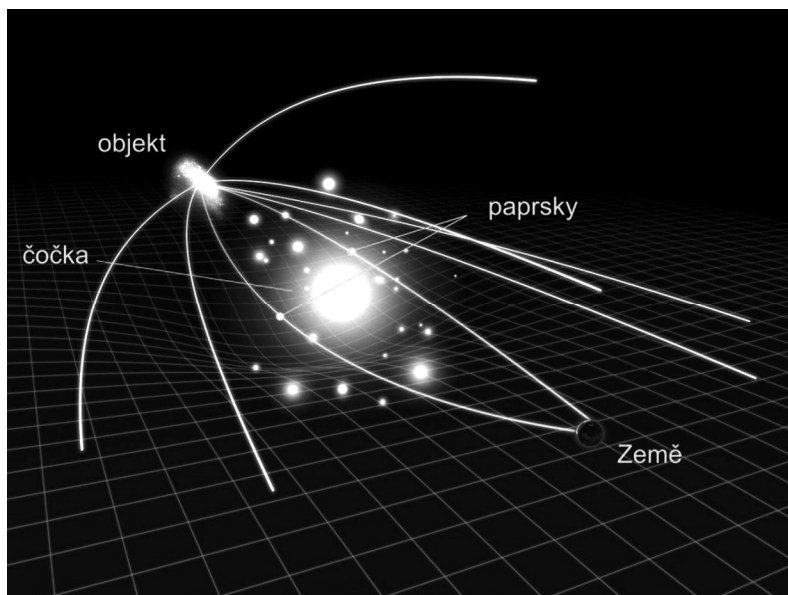
$$\chi = \frac{4GM}{c^2 R_0}, \quad (3.395)$$

$$\chi = \alpha + \beta. \quad (3.396)$$

Poslední 4 rovnice můžeme chápat jako soustavu rovnic pro proměnné α , β , χ , R_0 . Postupnou eliminací proměnných β , χ , R_0 získáme finální vztah pro úhlový poloměr Einsteinova prstence

$$\alpha = \sqrt{\frac{b}{a(a+b)} \frac{4GM}{c^2}}. \quad (3.397)$$

Pokud nejsou objekty na přímce nebo má čočkující objekt složitější tvar, objeví se vícenásobné obrazy (například Einsteinův kříž, viz obálka) či oblouky. První gravitační čočka byla objevena v roce 1979 při pozorování kvazaru QSO 0957+561. Objekt měl magnitudu 17, červený kosmologický posuv $z = 1,405$ a jeho obraz byl efektem gravitační čočky rozdvojený. Objekt objevil anglo-americký tým (Dennis Walsh, Robert Carswell a Ray Weyman) dvoumetrovým dalekohledem Arizonské observatoře na Kitt Peaku. První Einsteinův prstencem byl objeven v roce 1988 u radiového zdroje MG 1131+0456. Časté jsou obrazy galaxií zdeformovaných mezilehlou kupou galaxií do charakteristických oblouků. Dnes se gravitační čočkování využívá k rekonstrukci rozložení temné hmoty, která deformuje obrazy vzdálených galaxií nebo k objevu exoplanet, které spolu s mateřskou hvězdou charakteristicky deformují světlo vzdálenější hvězdy, pokud procházejí mezi ní a námi (tzv. efekt gravitační mikročočky).



Obr. 3.50: Čočkování mezilehlou kupou galaxií. Zdroj: NASA/ESA.

Mikročochky

V Einsteinových dobách nebyla pozorovací technika na takové úrovni, aby mohla gravitační čochky objevit. Dnes umíme pozorovat i čochování způsobené mnohem menšími tělesy, než jsou mezilehlé galaxie. Může jít například hvězdu přecházející před jinou hvězdou. Světlo vzdálenější hvězdy je zesíleno mezilehlou hvězdou. Jev je samozřejmě málo častý, ale při sledování obrovského množství hvězd v různých přehlídkových projektech je občas pozorovatelný. Pokud jde o čochování způsobené hvězdou či ještě menším objektem, hovoříme o *gravitační mikročochce*. První byla objevena Kanadsko-francouzským dalekohledem na Havaji v roce 1989, kdy bylo hvězdou z naší Galaxie zesíleno světlo vzdáleného kvazaru QSO 2237+0305. Nejznámější jsou ale gravitační mikročochky, které vznikají v okamžiku, kdy se dvě různě vzdálené hvězdy z naší Galaxie dostanou do jedné linie vůči pozorovateli.

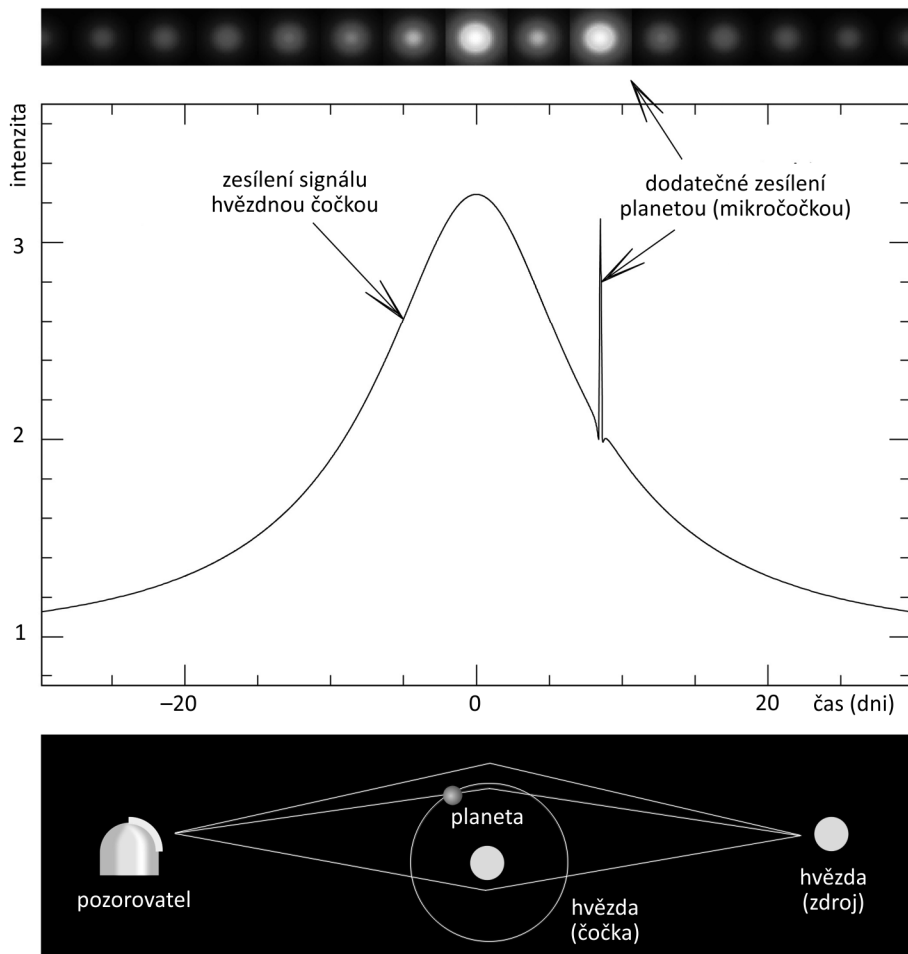
Gravitační mikročochka není dlouhodobým jevem. Hvězdy se v Galaxii pohybují a vždy jde jen o krátký okamžik, kdy je hvězda v oblasti působení mikročochky. Na světelné křivce vzdálenější hvězdy se proto objeví maximum (pík) intenzity. K jevu dojde bez ohledu na to, v jakém oboru elektromagnetického spektra mezilehlý objekt září. Dokonce nemusí svítit vůbec. Za pomoci jevu gravitační mikročochky je proto možné identifikovat i málo svítící objekty, jakými jsou bílí trpaslíci, hnědí trpaslíci, planety, černé díry nebo jakékoli kompaktní nesvítící objekty. Proto se využívají k odhadům množství nesvítící hmoty v haló naší Galaxie. Souhrnně se tyto objekty nazývají MA-CHOs (*Massive Astrophysical Compact Halo Objects*).

Pokud má mezilehlá (čochující) hvězda průvodce, například planetu, dojde k dalšímu zesílení světla vzdálené hvězdy a na světelné křivce se objeví sekundární lokální maximum. Mikročochkování lze tedy využít i k objevům extrasolárních planet.

Termín mikročochka poprvé použil polský astronom *Bohdan Paczyński* (1940–2007). Paczyński byl duchovním otcem prvního projektu pro vyhledávání mikročochek, který dostal název OGLE (*Optical Gravitational Lensing Experiment*). Mezinárodní projekt vznikl v roce 1992 a vede ho Andrzej Udalski z Varšavské univerzity. K pozorování se využívá dalekohled o průměru 1,3 metru, který je umístěn v chilské lokalitě Las Campanas a vyhledává mikročochky ve směru galaktické výdutě. Projekt ukázal, že mikročochování může pomoci objevovat exoplanety (objevil touto metodou první tři). Experiment OGLE detekuje zhruba 500 mikročochujících událostí ročně, detekce exoplanet je ale velmi vzácná, za celou dobu trvání projektu byly objeveny dvě desítky exoplanet. Dnes existuje celá řada dalších přehlídkových projektů, které vyhledávají mikročochky.

Mikročochkování se také může týkat dvojhvězd. V roce 1973 předpověděl švýcarský astronom *André Maeder* (*1942), že by při tranzitu jedné složky dvojhvězdy před druhou mohlo dokonce dojít k zvýšení intenzity celkového signálu z obou těles, a to právě díky gravitačnímu čochování. Jev by měl probíhat při přechodu malého kompaktního objektu přes disk druhé složky. Namísto očekávaného zeslabení signálu daného prostým součtem intenzit záření z obou těles (jedno těleso zakryje druhé a intenzita by měla poklesnout) by při vhodné konfiguraci mohlo dojít k opačnému jevu. V roce 2014 byl takový objekt poprvé detekován v přehlídkovém projektu Kepler (ten slouží k vyhledávání exoplanet za pomoci zákrytů). Objekt označený KOI-3278 byl jedním z kandidátů na další exoplanetu u hvězdy podobné našemu Slunci, která se nachází ve vzdálenosti 2 600 světelných roků v souhvězdí Lyry. Observatoř Kepler našla signál, který měl na světelné křivce pravidelná minima s periodou 88,18 dní. Zdálo se, že hvězdu obíhá exoplaneta. Při podrobnějším průzkumu Ethanem Krusem a Ericem Agolem z Washingtonovy univerzity v Seattlu se ukázalo, že na světelné křivce jsou také zjasnění o 0,1 %,

kteřá trvají 5 hodin. Po podrobných propočtech došli oba vědci k závěru, že kolem hvězdy obíhá bílý trpaslík. Celkový signál je zeslaben, když je trpaslík za hvězdou, a gravitační čočkou zesílen, když je trpaslík před hvězdou. Čtyři desetiletí po předpovědi Andrého Maedera byl tak konečně nalezen objekt, u něhož gravitační čočkování zvýší intenzitu světla přicházející z binárního systému, u něhož z pohledu od naší Země dochází k pravidelným zákrytům jednoho tělesa druhým.



Obr. 3.51: Světelná křivka mikročoky tvořené hvězdou s planetou

3.6.6 Strhávání časoprostoru rotujícím tělesem

Další velmi zajímavou úlohou obecné relativity je popis chování časoprostoru v okolí rotující kuličky. Takové řešení hledal z rovnic obecné relativity poprvé rakouský fyzik Hans Thirring (1888–1976) v roce 1918. Později mu s výpočty pomáhal rakouský matematik Josef Lense (1890–1985). Úlohu nejprve řešili pro tenkou rotující slupku. Vnitřek této slupky byl prázdný. Řešení uvnitř bylo shodné s Minkowského metrikou plochého časoprostoru, ale k velkému údivu obou vědců se časoprostor otáčel. Jde

o jistou manifestaci Machova principu, podle kterého jsou za setrvačnost těles zodpovědná všechna tělesa ve vesmíru. Rotující slupka ovlivnila stav časoprostoru uvnitř ní. Řešení konstruovali v rámci linearizované teorie, tj. s metrikou ve tvaru

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (3.398)$$

Později Lense a Thirring našli řešení pro rotující kouli a ukázali, že vně koule je časoprostor rotujícím tělesem strháván a v jeho blízkosti se otáčí. Jev se dnes nazývá Lenseův-Thirringův a připomíná strhávání viskózní kapaliny v okolí rotujícího objektu.

Analogie s elektrostatikou

Mezi elektrostatickým polem a gravitačním polem existuje silná analogie, většina rovnic má obdobný tvar. Uveďme vztahy pro sílu, intenzitu, potenciální energii a potenciál obou polí v případě pohybu testovacího tělesa (q, m) v poli centrálního tělesa (Q, M):

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{F}_G = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad (3.399)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{E}_G = -G \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad (3.400)$$

$$W = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad W_G = -G \frac{mM}{r}; \quad (3.401)$$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \phi_G = -G \frac{M}{r}. \quad (3.402)$$

V případě, že pole budí soustava částic, platí pro potenciály obou polí v diskrétním a spojitěm případě známé vztahy (\mathbf{r}_a jsou polohy diskrétních zdrojů pole, \mathbf{r}' je průběžná poloha elementu zdroje pole, \mathbf{r} je poloha pozorovatele, ρ_M je hustota hmoty a ρ_Q hustota náboje):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_a \frac{Q_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}, \quad \phi_G(\mathbf{r}) = -G \sum_a \frac{M_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}; \quad (3.403)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \phi_G(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.404)$$

Ve statickém případě nebo v případě pomalých pohybů zdrojů si vystačíme s Laplaceovou-Poissonovou polní rovnicí. Pokud jsou pohyby zdrojů podstatné, přejde Laplaceův operátor v D'Alambertův vlnový operátor:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}, \quad \Delta\phi_G = 4\pi G\rho_M; \quad (3.405)$$

$$\square\phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}, \quad \square\phi_G = 4\pi G\rho_M. \quad (3.406)$$

Řešením polních rovnic (3.405) jsou vztahy (3.404). Pokud budeme uvažovat rovnice s vlnovým operátorem, museli bychom v řešeních (3.404) použít retardovaný čas, tj. korigovat čas pozorovatele o dobu šíření signálu od zdroje k pozorovateli.

Gravitoelektrické pole

U rotujícího tělesa již nelze požadovat diagonálnost metriky. Kalibrační volnost nám opět umožní, abychom požadovali $h^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$. To je ale vše. Stopa poruch $s = h^\alpha_\alpha$ již nebude nulová a nulové nebudou ani hodnoty h_{0k} . Linearizovaná rovnice (3.277) bude mít nyní obecnější tvar:

$$\square \left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} s \eta_{\alpha\beta} \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}; \quad (3.407)$$

$$h^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0, \quad s \equiv h^\alpha_\alpha.$$

Na pravé straně budeme uvažovat tenzor energie a hybnosti nekoherentního prachu

$$T_{\alpha\beta} = \rho_M U_\alpha U_\beta. \quad (3.408)$$

Pro rotující těleso budou prostorové složky čtyřrychlostí nenulové. Vraťme se ale ještě na chvíli ke Schwarzschildově metrice nerotujícího tělesa a přepišme si její interval do lineárního přiblížení (3.398):

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\Omega^2; \quad (3.409)$$

$$ds^2 \approx \left(-1 + \frac{r_g}{r} \right) d(ct)^2 + \left(1 + \frac{r_g}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Pro poruchy $h_{\mu\nu}$ platí

$$h_{00} = h_{11} = \frac{r_g}{r} = -\frac{2\phi_G}{c^2}. \quad (3.410)$$

Hledejme nyní řešení rovnic (3.407) v tzv. izotropních souřadnicích, kde platí

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} \equiv h_0. \quad (3.411)$$

Stopa tenzoru poruch bude

$$s = h^\alpha_\alpha = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = -h_0 + h_0 + h_0 + h_0 = 2h_0. \quad (3.412)$$

Z rovnice (3.407) máme pro složku 00:

$$\square \left(h_{00} - \frac{1}{2} s \eta_{00} \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho_M U_0 U_0; \quad (3.413)$$

$$\square (h_0 + h_0) = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho_M c^2;$$

$$\square h_0 = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho_M.$$

V Newtonově limitě je $h_0 = -2\phi_G/c^2$ a pro gravitační potenciál máme rovnici

$$\square\phi_G = 4\pi G\rho_M. \quad (3.414)$$

Vidíme, že z Einsteinova gravitačního zákona jsme získali správnou polní rovnici pro gravitační potenciál. Pro pomalé pohyby můžeme v lineární aproximaci okamžitě pro dané rozložení hmoty napsat řešení ve tvaru (3.404):

$$\blacktriangleright \quad h_0 = h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = -\frac{2\phi_G(\mathbf{r})}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (3.415)$$

Poruchu h_0 pro její podobnost s elektrickým potenciálem nazýváme gravitoelektrický potenciál a jí odpovídající pole nazýváme *gravitoelektrické pole*. Odpovídající interval bude

$$ds^2 = (-1+h_0)d(ct)^2 + (1+h_0)d\mathbf{r}^2 + 2h_{0k}d(ct)dx_k. \quad (3.416)$$

Koeficient 2 u nediagonálních členů reflektuje symetrii tenzoru poruch, tj. $h_{0k} = h_{k0}$.

Gravitomagnetické pole

Přistupme nyní k výpočtu nediagonálních poruch h_{0k} . Z Einsteinova gravitačního zákona (3.407) máme pro pomalé pohyby zdrojů pole

$$\begin{aligned} \square h_{0k} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{0k}, \\ \square h_{0k} &= -\frac{16\pi G}{c^4} \rho_M U_0 U_k, \\ \square h_{0k} &= +\frac{16\pi G}{c^4} \rho_M c v_k. \end{aligned} \quad (3.417)$$

Polní rovnice pro nediagonální poruchy má tedy tvar

$$\begin{aligned} \square h_k &= +\frac{16\pi G}{c^3} j_k^{(M)}; \\ h_k &\equiv h_{0k}; \quad j_k^{(M)} \equiv \rho_M v_k, \end{aligned} \quad (3.418)$$

kde \mathbf{j}_M je tok hmoty. Vlnový operátor můžeme pro pomalé pohyby nahradit Laplaceovým operátorem a rovnice zapsat ve vektorové podobě:

$$\Delta \mathbf{h} = \frac{16\pi G}{c^3} \mathbf{j}_M. \quad (3.419)$$

Zde se nabízí analogie s magnetostatikou, ve které platí pro vektorový potenciál magnetického pole vztahy

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}_Q, \quad (3.420)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (3.421)$$

V gravitaci máme namísto toku náboje tok hmoty, jinak jsou vztahy zcela analogické. Poruchy h_0 a h_k tak hrají v gravitaci obdobnou roli, jakou má skalární a vektorový potenciál v elektřině a magnetizmu. Řešení Laplaceovy rovnice můžeme zapsat analogicky, jako tomu bylo u vztahu (3.404), tj.

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = -\frac{4G}{c^3} \int_V \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (3.422)$$

Zkontrolujte si, že výsledek je skutečně bezrozměrný (lineární poruchy $h_{\mu\nu}$ jsme zavedli jako bezrozměrné veličiny). Kompletní metriku pro pomalý rotační pohyb centrálního tělesa tedy můžeme zapsat ve finálním tvaru

$$ds^2 = (-1 + h_0) d(ct)^2 + (1 + h_0) d\mathbf{r}^2 + 2(\mathbf{h} \cdot d\mathbf{r}) d(ct);$$

►

$$h_0(\mathbf{r}) = \frac{2G}{c^2} \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (3.423)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = -\frac{4G}{c^3} \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}') \mathbf{v}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Člen mixující časovou složku s prostorovými je zodpovědný za strhávání časoprostoru rotujícím tělesem. Zakřivení časoprostoru dané poruchou \mathbf{h} nazýváme díky analogii s magnetickým polem *gravitomagnetické pole*.

Lenseův-Thirringův jev

Obdobně jako zavádíme pomocí vektorového potenciálu magnetické pole vztahem

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (3.424)$$

můžeme zavést gravitomagnetické pole

$$\mathbf{K} = \text{rot } \mathbf{h}. \quad (3.425)$$

V magnetickém poli dochází k precesnímu pohybu magnetických dipólů. Úhlová frekvence precesního pohybu je úměrná magnetickému poli. Díky analogii mezi magnetickým a gravitomagnetickým polem jsme naši úlohu převedli na magnetostatiku. Pro úhlovou frekvenci precese setrvačnicku můžeme podle této analogie použít vztah

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{LT}} = \frac{c}{2} \text{rot } \mathbf{h} \quad (3.426)$$

Po výpočtu integrálů (3.423) dostaneme pro okamžitou precesi setrvačnicku v okolí rotující koule jednoduchý vztah

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{LT}} = \frac{2G}{c^2} \frac{J}{r^3} \left[-\boldsymbol{\Omega} + \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \right]. \quad (3.427)$$

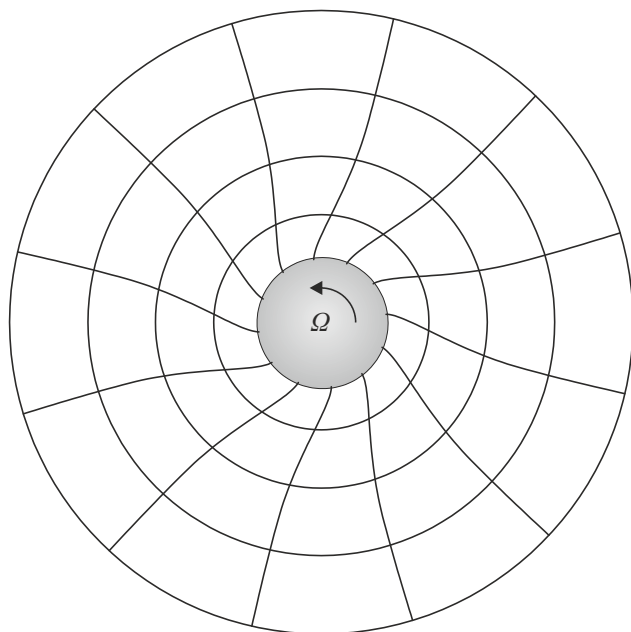
kde J je moment setrvačnosti rotující koule. Pokud má rotující koule konstantní hustotu, můžeme pro moment hybnosti psát

$$J = \frac{2}{5} MR^2. \quad (3.428)$$

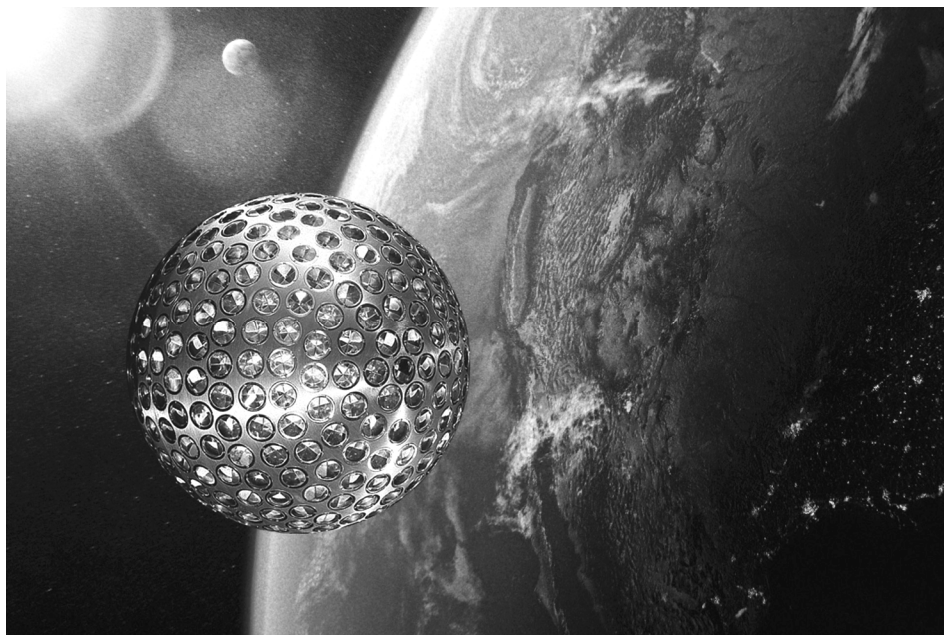
Precesní úhlová frekvence potom bude

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{LT}} = \frac{4GM}{5c^2} \frac{R^2}{r^3} \left[-\boldsymbol{\Omega} + \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \right] = \frac{4}{5} \frac{r_g}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \left[-\boldsymbol{\Omega} + \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \right]. \quad (3.429)$$

Okamžitá precesní frekvence závisí na „zeměpisné“ šířce a ubývá se třetí mocninou vzdálenosti od rotujícího tělesa. Družice obíhající na polární dráze se nad rovníkem po jednom oběhu nedostane do stejného místa. Díky strhávání časoprostoru rotující Zemí nebude trajektorie uzavřená a družice se při každém oběhu v rovníkové oblasti posune řádově o milimetrovou vzdálenost. Osa rotujícího setrvačníku se bude také měnit. Lenseův-Thirringovo strhávání časoprostoru bylo měřeno z neuzavřených drah družic LAGEOS 1 a LAGEOS 2 (název je zkratkou z *LAser GEOdynamics Satellites*). Družice připravovala italská kosmická agentura ASI spolu s americkou NASA. Hlavním cílem obou družic bylo měření tvaru Země. LAGEOS 1 startovala v roce 1976, LAGEOS 2 v roce 1992. Družice jsou bronzové koule s hliníkovým povrchem o průměru 60 cm a hmotnosti přibližně 400 kg a slouží jako pasivní odražeče laserového paprsku. Lenseův-Thirringův jev byl změřen s přesností 5 %. S vyšší přesností se tento jev pokusila změřit v roce 2006 americká družice Gravity Probe B, která měla na palubě 4 setrvačníky. Při sledování změn jejich osy rotace došlo k nežádoucímu rušení plazmoidy slunečního větru a měření byla neúspěšná. V současnosti je možné Lenseův-Thirringův jev studovat za pomoci družic evropského polohovacího systému Galileo.



Obr. 3.52: Deformace časoprostoru kolem rotujícího tělesa.
Za jev jsou zodpovědné nediagonální prvky metriky.



Obr. 3.53: Družice LAGEOS. Zdroj NASA/ASI.



3.7 Stručný úvod do kosmologie

3.7.1 Fridmanova metrika

V roce 1922 odvodil ruský fyzik Alexandr Fridman (1888–1925) z Einsteinova gravitačního zákona metriku vesmíru vyplněného nekoherentním prachem s konstantní hustotou. Ukázalo se, že je prostorová část metriky obdobná jako metrika na povrchu koule, jen je vynásobena faktorem $a(t)$, kterému se říká expanzní funkce.

$$\blacktriangleright \quad ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]; \quad (3.430)$$

$$\blacktriangleright \quad \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho a^2 = -c^2 k. \quad (3.431)$$

Koeficient k je tzv. Gaussova křivost, která může být kladná (jako na povrchu koule, záporná (jako sedlo koně) nebo nulová. Pro $a \rightarrow 1$ a $k \rightarrow 0$ přejde Fridmanova metrika v Minkowského metriku plochého časoprostoru. Obdobné řešení našel ve stejné době i belgický kněz George Lemaître a další. Je důležité si uvědomit, že pozorovatel je součástí vesmíru, tj. Fridmanova metrika popisuje pohled na vesmír v souřadnicové soustavě, která se pohybuje spolu s vesmírem (anglicky *comoving coordinates*).

Rovnice pro expanzní funkci má na levé straně dva členy. První je kinetický a popisuje expanzi vesmíru. Druhý souvisí s gravitačním přitahováním a popisuje kontrakci vesmíru. V reálném vesmíru jsou oba členy velmi veliké, ale přibližně sobě rovný. Výsledkem je, že pravá strana je velmi malá a celková křivost vesmíru blízká nule.

Vztahy pro metriku a expanzní funkci samozřejmě plynou přímo z rovnic obecné relativity. Je ale zajímavé, že Fridmanova metrika připomíná metriku na povrchu čtyřrozměrné koule a rovnice pro expanzní funkci má tvar analogický zákonu zachování energie v newtonovském homogenním izotropním vesmíru:

Metrika na povrchu 4D koule

Víme-li, že rovnice popisující povrch koule o poloměru R umístěné ve středu kartézských souřadnic je $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, můžeme obdobný vztah pro čtyřrozměrnou kouli napsat ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2, \quad (3.432)$$

kde w je čtvrtá prostorová souřadnice a všechny čtyři dimenze jsou navzájem kolmé. Pro element délky v těchto souřadnicích bude platit (Pythagorova věta)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2. \quad (3.433)$$

Proměnnou w z předchozího vzorce můžeme vyloučit, neboť pro popis trojrozměrné „plochy“ nám stačí tři souřadnice. Spočítáme totální diferenciál rovnice (3.432)

$$2x dx + 2y dy + 2z dz + 2w dw = 0 \quad \Rightarrow$$

$$dw = -\frac{x dx + y dy + z dz}{w} \quad (3.434)$$

a výsledek dosadíme do vztahu (3.433), přičemž w si vyjádříme z rovnosti (3.432):

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(x dx + y dy + z dz)^2}{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad (3.435)$$

Takto získanou metriku přepíšeme pomocí lokálních sférických souřadnic r, θ, φ

$$x = r \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad (3.436)$$

$$z = r \cos \theta.$$

Příslušné diferenciály pak mají tvar

$$dx = dr \cos \varphi \sin \theta - r \sin \varphi d\varphi \sin \theta + r \cos \varphi \cos \theta d\theta,$$

$$dy = dr \sin \varphi \sin \theta + r \cos \varphi d\varphi \sin \theta + r \sin \varphi \cos \theta d\theta, \quad (3.437)$$

$$dz = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta.$$

Dosazením vztahů (3.436) a (3.437) do jednotlivých členů vzorce (3.435) postupně dostaneme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

$$x dx + y dy + z dz = r dr, \quad (3.438)$$

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2 - r^2,$$

takže metrika (3.435) třírozměrného povrchu čtyřrozměrné koule vyjádřená pomocí sférických souřadnic má tvar

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} =$$

$$= \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.439)$$

a pokud zavedeme novou veličinu $k=1/R^2$ (Gaussovu křivost), dostaneme metriku (3.439) ve tvaru

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (3.440)$$

Metrika na povrchu 4D koule je tedy tvarem shodná s prostorovou částí Fridmanovy metriky homogenního izotropního vesmíru – ta je ještě vynásobena expanzní funkcí vyjadřující dynamiku vesmíru.

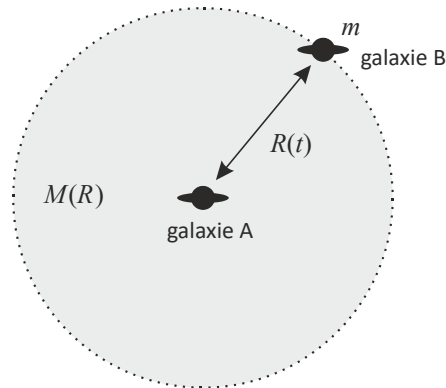
Newtonovský zákon zachování energie

Analogii rovnice pro expanzní funkci je možné odvodit i v klasické mechanice. Představme si dvě galaxie ve vzdálenosti R . Pohyb galaxie B vzhledem k galaxii A je dán jen hmotou rozprostřenou uvnitř koule se středem v A a poloměrem $R = AB$. Předpokládejme, že celková hmotnost v této oblasti je M a průměrná hustota ρ . Napišeme zákon zachování energie pro galaxii B a dosadíme do něho za hmotnost M

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GmM}{R} = E; \quad M = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Rightarrow \quad (3.441)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 = \frac{2E}{m}. \quad (3.442)$$

Tato rovnice je formálně shodná s rovnicí pro expanzní funkci. Namísto expanzní funkce a v ní vystupuje vzdálenost R a na pravé straně není křivost, ale dvojnásobek energie vztažený na jednotku hmotnosti. Je patrné, že obdobné rovnice plynou jak z obecné relativity, tak z klasické fyziky.



Obr 3.54: K výpočtu zákona zachování energie v homogenním izotropním vesmíru

Expanze vesmíru

Červené posuvy tzv. extragalaktických mlhovin (dnes víme, že jde o galaxie) naměřil na Lowellově observatoři americký astronom Vesto Slipher (1875–1969) už letech 1912 až 1915. I když byl jen malý krok od objevu expanze vesmíru, svá měření bohužel nijak neinterpretovat, a to ani později, po objevu obecné relativity. Mnohem dále se dostal belgický kněz abbé Lemaître (1894–1966), celým jménem Georges Henri Joseph Édouard Lemaître, který přednášel na Katolické univerzitě v Lovani. Z obecné relativity odvodil (obdobně jako Fridman) expanzi vesmíru a dva roky před Hubblem dokázal, že rychlost objektů měřená v konkrétním místě bude růst lineárně se vzdáleností.

$$v \sim d. \quad (3.443)$$

Výsledky publikoval v roce 1927 v belgickém časopise *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*. Lemaître dokonce na základě Slipherových měření červených po-

suvů odhadl hodnotu Hubbleovy konstanty ještě dříve, než ji Hubble zavedl. Vzhledem k tomu, že neznal přesné vzdálenosti objektů, vyšla mu (stejně jako Hubbleovi) hodnota cca $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, tedy o řád vyšší, než udáváme dnes. Lemaître si představoval, že vesmír vznikl z malé horké a husté oblasti, kterou nazýval prvotním atomem či zárodečným vejcem. Můžeme ho tedy považovat nejen za objevitele expanze vesmíru, ale také za autora teorie velkého třesku. Místní časopis, ve kterém své objevy publikoval, nebyl mezi astronomy znám, a tak někteří o Lemaîtreových výsledcích nevěděli. Existenci červeného posuvu spektra galaxií v důsledku expanze vesmíru také nezávisle předpověděl (z obecné relativity) americký matematik a fyzik Howard Percy Robertson (1903–1961) v roce 1928. V roce 1929 Edwin Hubble publikoval článek, v němž poukazoval, stejně jako Lemaître, na přímou úměrnost mezi rychlostí vzdalování objektů a jejich vzdáleností. Dnes tento klíčový vztah nazýváme Hubblův-Lemaîtreův zákon. Koeficient úměrnosti se nazývá Hubbleova konstanta, tj.

$$\blacktriangleright \quad v = Hd; \quad H \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (3.444)$$

Hubbleova konstanta je konstantou prostorovou, tj. předpokládáme, že je ve všech místech vesmíru stejná. S časem se ovšem v průběhu historie vesmíru měnila. V rámci historické pravdy je třeba říci, že o expanzi vesmíru a jejích důsledcích uvažovalo před Hubblem více fyziků a lineární vztah mezi rychlostí a vzdáleností zformuloval abbé Lemaître už dva roky před Edwinem Hubblem. Hubble o těchto výpočtech pravděpodobně nevěděl. Detailní analýzu všech možných způsobů expanze vesmíru provedl na základě matematické teorie grup anglický matematik Arthur Geoffrey Walker (1909–2001) až v roce 1936. Hubbleovu konstantu lze také vyjádřit jako poměr časové změny expanzní funkce ku expanzní funkci:

$$\blacktriangleright \quad H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.445)$$

Samotnou rovnici pro expanzní funkci (3.431) snadno přepíšeme do tvaru

$$\blacktriangleright \quad H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{c^2 k}{a^2}. \quad (3.446)$$

Pokud převládne první (kinetický) člen, bude vesmír stále expandovat a křivost na pravé straně musí být záporná. Pokud převládne záporný člen (gravitační), bude vesmír v budoucnu opět kolabovat do malé prostorové oblasti a jeho křivost bude kladná. Pokud budou oba členy vyrovnané, bude expanze stále pokračovat, ale limitně se zpomalovat k nule (analogie kamene vyhozeného s únikovou rychlostí). Tento mezní případ bude mít nulovou křivost a tzv. kritickou hustotu

$$\blacktriangleright \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.447)$$

Ze současně udávané hodnoty Hubbleovy konstanty vychází kritická hustota na několik protonů v jednom metru krychlovém. Skutečná hustota vesmíru je přibližně kritická.

Hubbleovu konstantu dnes měříme především dvěma základními metodami. První z nich je z rozboru fluktuací reliktního záření. Data ze sondy Planck (výsledky byly oznámeny v roce 2018) dávají hodnotu $67,4 \text{ s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ s nejistotou 1 %. Druhá metoda je založená na měření vzdáleností za pomoci supernov typu Ia. Do této kategorie patří například projekt SH0ES (*Supernova H_0 for the Equation of State*) probíhající na

Hubblově dalekohledu, který dává hodnotu $73,2 \text{ s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ s nejistotou cca 2,4 %. I když obě hodnoty nemají nenulový průnik (do měření nemusí být zahrnuty všechny systematické chyby), jsou hodnoty Hubblovky konstanty v řádovém souladu. Existují i jiná měření. Skupina Wendy Freedmanové z Chicagské univerzity měřila vzdálenost za pomoci červených obrů a výsledná hodnota Hubblovky konstanty vyšla $70 \text{ s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ s nejistotou něco málo přes 1 %. Všechny měřené hodnoty, ať už jde o jakoukoli metodu, jsou v okolí $70 \text{ s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Další z možností určení vzdálenosti, které je klíčové pro zjištění hodnoty Hubblovky konstanty, jsou kilonovy – gigantické gravitační a optické záblesky způsobené splynutím dvou neutronových hvězd. Jinou metodou je pozorování vícenásobných obrazů supernov způsobených gravitačním čočkováním. Z měření zpoždění explozí v jednotlivých obrazech je možné počítat parametry expanze vesmíru. Jev předpověděl a metodu navrhl už v roce 1964 mladičký norský teoretik Sjur Refsdal. Zesílené vícenásobné obrazy vzdálené supernovy byly poprvé pozorovány v letech 2014 a 2015. Ke zpřesnění měření hodnoty Hubblovky konstanty také mohou přispět nové observatoře, například právě stavěná observatoř Very Rubinové.

3.7.2 Vlastnosti Fridmanovy metriky

Objem vesmíru

Pro kladné zakřivení vesmíru ($k > 0$) můžeme psát jako $k = 1/R^2$ a využít substituci

$$\begin{aligned} r &= R \sin \chi ; \\ \chi &\in (0, \pi) . \end{aligned} \quad (3.448)$$

Prostorová část metriky získá tvar:

$$\begin{aligned} dl^2 &= a^2 R^2 \left(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 \right) = \\ &= a^2 R^2 d\chi^2 + a^2 R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2 + a^2 R^2 \sin^2 \chi d\theta^2 . \end{aligned} \quad (3.449)$$

Prostorová část metrického tenzoru proto je

$$\begin{pmatrix} a^2 R^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & a^2 R^2 \sin^2 \chi \end{pmatrix} \quad (3.450)$$

Výsledný objem pak snadno určíme z metriky

$$\begin{aligned} V &= \int \sqrt{\det g} \, d\chi \, d\theta \, d\varphi = \\ &= a^3 R^3 \left(\int_0^\pi \sin^2 \chi \, d\chi \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) = . \\ &= a^3 R^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\pi^2 a^3 R^3 . \end{aligned} \quad (3.451)$$

Vesmír s kladnou křivostí má tedy konečný objem, je uzavřený sám do sebe, a byť nemá žádnou hranici, je ve smyslu objemu konečný. Jinak je tomu v případě vesmíru se zápornou křivostí. ($k < 0$; $R^2 = 1/|k|$). Metrika má tvar

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 + (r/R)^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (3.452)$$

Tentokrát lze výhodně použít substituci

$$\begin{aligned} r &= R \operatorname{sh} \chi; \\ \chi &\in (0, \infty) \end{aligned} \quad (3.453)$$

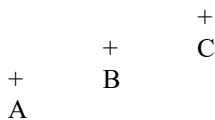
při níž nabývá metrika tvaru

$$dl^2 = a^2 R^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\Omega^2). \quad (3.454)$$

Podobným postupem, jako tomu bylo u modelu s kladnou křivostí, nyní pro objem dostáváme $V \rightarrow \infty$. Tento model vesmíru má nekonečný objem. Ve Fridmanově geometrii vedou prostory s kladnou křivostí na konečný objem vesmíru, modely se zápornou a nulovou křivostí na nekonečný objem. To ale platí jen pro vesmíry jednoduše souvislé („bez děr“). Vesmír, kterému by ve dvou dimenzích odpovídal například toroid nebo dvojtoroid, již není jednoduše souvislý. Upustíme-li od požadavku jednoduché souvislosti, může existovat vesmír s konstantní zápornou křivostí a konečným objemem.

Kosmologický princip

To, že expanze probíhá podle Hubbleova-Lemaîtreova zákona (úměrně vzdálenosti) neznamená, že bychom museli být ve středu expanze. Z lineárního vztahu totiž plyne, že stejný typ expanze bude vnímat každý pozorovatel ve vesmíru (tzv. *kosmologický princip*). Předpokládejme, že body A, B a C jsou na přímce a platí $AB = BC$.



Z homogenity vesmíru ve velkých vzdálenostech plyne vztah $\mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_{CB}$. Pro rychlost \mathbf{v}_{CA} můžeme psát:

$$\mathbf{v}_{CA} = \mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C - \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{CB} + \mathbf{v}_{BA} = 2 \mathbf{v}_{BA}. \quad (3.455)$$

Odsud okamžitě plyne lineární vztah

$$v = Hd. \quad (3.456)$$

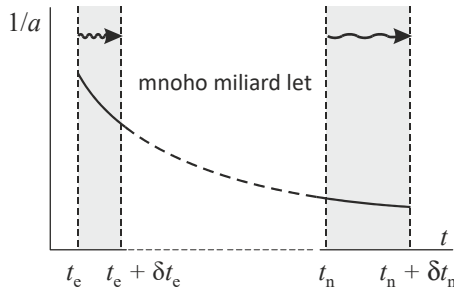
Lineární závislost rychlosti expanze na vzdálenosti je jediným typem závislosti, který bude platit současně ve všech místech ve vesmíru. Libovolný pozorovatel na libovolném místě uvidí expanzi podle Hubbleova-Lemaîtreova zákona. Ve vesmíru nenajdeme žádné preferované místo.

3.7.3 Kosmologický červený posuv

Uvažujme šíření světelného pulsu ve vesmíru a jeho změny vlivem Fridmanovy metriky (3.430). Pro světlo je $ds^2 = 0$, souřadnicový systém zvolíme tak, aby vymizely úhlové závislosti, a proto

$$\frac{c dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (3.457)$$

Impuls se začal šířit v místě r_e , v čase t_e a trval dobu δt_e . K pozorovateli dolétl po mnoha miliardách let do místa r_n , v čase t_n a trvá δt_n .



Obr. 3.55: Červený kosmologický posuv

Pro šíření počátku impulsu platí

$$\int_{t_e}^{t_n} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{r_e}^{r_n} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (3.458)$$

a pro šíření „posledního“ fotonu impulsu platí

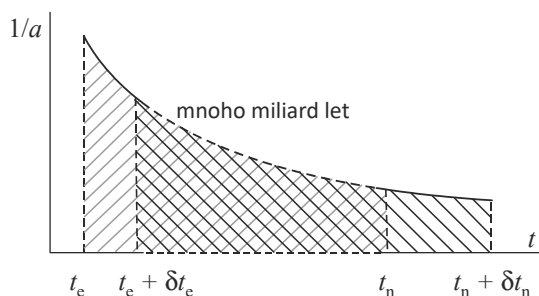
$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_n+\delta t_n} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{r_e}^{r_n} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (3.459)$$

Nás zajímá délka impulsu a její změny, tedy rozdíl dvou posledních vztahů:

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_n+\delta t_n} \frac{c dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_n} \frac{c dt}{a(t)} = 0. \quad (3.460)$$

Oba integrály probíhají přes obrovský časový úsek, v průběhu kterého se expanzní funkce změnila mnohonásobně. Uvědomíme-li si ale, že integrál má význam plochy pod křivkou $1/a$, odečte se při integraci společná plocha obou integrálů a zbude

$$\int_{t_n}^{t_n+\delta t_n} \frac{c dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{c dt}{a(t)} = 0 \quad (3.461)$$



Obr. 3.56. K integraci šíření signálu

Tyto integrály jsou již jen přes dobu trvání impulsu, nikoli přes celou dobu šíření. Protože je doba impulsu nesrovnatelně menší než doba trvání vesmíru, je možno považovat expanzní funkci $a(t)$ v době vyslání impulsu za konstantní a v době přijetí také:

$$\int_{t_n}^{t_n + \delta t_n} \frac{c dt}{a_n} - \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{c dt}{a_e} = 0. \quad (3.462)$$

Nyní jde o integrály z konstanty a řešení je jednoduché:

$$\begin{aligned} \frac{c \delta t_n}{a_n} - \frac{c \delta t_e}{a_e} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{c \delta t_e}{a_e} &= \frac{c \delta t_n}{a_n} \Rightarrow \\ \frac{\lambda_e}{a_e} &= \frac{\lambda_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (3.463)$$

Vyslaný impuls se tedy natahuje tak, jak se mění expanzní funkce. Stručně lze říci, že při putování vesmírem se vlnová délka záření natahuje přesně tak, jak se „nafukuje“ vesmír. Jako míra změny vlnové délky se zavádí červený posuv

$$\blacktriangleright \quad z \equiv \frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a - a_e}{a_e}. \quad (3.464)$$

- Největší měřené červené kosmologické posuvy mají hodnotu kolem 10.
- Kosmologický posuv se často udává místo vzdálenosti objektu. Je to praktické. Posuvy jsou měřené veličiny, zatímco vzdálenosti závisí na daném modelu.
- Natahování vlnové délky synchronně s expanzní funkcí probíhá jen pro částice s nulovou klidovou hmotou ($ds^2 = 0$). Hmotové vlny částic s nenulovou klidovou hmotou tuto vlastnost nemají.
- Červený kosmologický posuv nelze zaměňovat s Dopplerovým jevem. Pouze v prvním řádu Taylorova rozvoje dávají tyto dva různé jevy stejný vztah.

3.7.4 Expanzní funkce

Expanzní funkce pro různé entity

Hustota (je jedno, zda energie či hmoty) běžné látky klesá se třetí mocninou expanzní funkce. Hustota energie záření klesá se čtvrtou mocninou, protože

$$\rho_{\text{rad}} = \frac{E}{V} \sim \frac{1/\lambda}{a^3} \sim \frac{1/a}{a^3} \sim \frac{1}{a^4}. \quad (3.465)$$

Hustota vakuových fluktuací je dokonce na expanzní funkci nezávislá. Pripusťme, že je vesmír vyplněný obecnou entitou, která na expanzi reaguje podle vztahu

$$\rho_E = \frac{K}{a^\alpha}, \quad (3.466)$$

kde ρ_E je hustota energie. Z rovnice pro expanzní funkci (3.431) (malý člen na pravé straně zanedbáme) máme

$$\dot{a} \sim a^{\frac{2-\alpha}{2}}. \quad (3.467)$$

Po separaci proměnných máme

$$\int \frac{da}{a^{(2-\alpha)/2}} = \int dt. \quad (3.468)$$

Po jednoduché integraci máme

$$\blacktriangleright \quad a(t) \sim \begin{cases} t^{\frac{2}{\alpha}}, & \alpha \neq 0, \\ e^{\chi t}, & \alpha = 0. \end{cases} \quad (3.469)$$

Pro vesmír vyplněný zářením (počáteční období, částice s nulovou klidovou hmotou) je $a(t) \sim t^{1/2}$, pro vesmír vyplněný látkou (od 400 000 roků, částice s nenulovou klidovou hmotou) je $a(t) \sim t^{2/3}$ a pro vesmír dominantně zaplněný kvantovými fluktuacemi vakua (snad od 7 miliard let) je $a(t) \sim e^{\chi t}$. Z definice $H \equiv \dot{a}/a$ nalezneme H pro různé průběhy expanzní funkce:

bez expanze:	$a = 1$	$H = 0$
záření:	$a \sim t^{1/2}$	$H = 1/2t$
látka	$a \sim t^{2/3}$	$H = 2/3t$
vakuum	$a \sim e^{\chi t}$	$H = \chi$

Pro vesmír vyplněný zářením a látkou klesá Hubbleova konstanta nepřímo úměrně času. Převrácená hodnota Hubbleovy konstanty se nazývá *Hubbleův čas* (řádový odhad stáří vesmíru při nahrazení expanze lineární závislostí).

Horizont částic

Horizontem částic nazýváme maximální vzdálenost, ze které k nám dolétly částice za dobu existence vesmíru. Této vzdálenosti se také někdy říká *horizont pozorovatelného vesmíru*, protože do větší vzdálenosti není možné dohlédnout, i když tam také částice jsou. Jejich světlo k nám ale za dosavadní dobu existence vesmíru nestihlo ještě dolétnout. Za částice vezmeme fotony (pohybují se nejrychleji). Šíření světla je v souřadnicích unášených expandujícím vesmírem dáno rovnicí

$$-c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1-kr^2} = 0. \quad (3.470)$$

Separací získáme v integrální podobě rovnici šíření světla za celou dobu existence vesmíru:

$$\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_{r_0}^{r_i} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (3.471)$$

Horizont částic je dán vztahem

$$R_H(t) = \int_{r_0}^{r_i} dl = \int_{r_0}^{r_i} \frac{a(t)dr}{\sqrt{1-kr^2}} = a(t) \int_{r_0}^{r_i} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (3.472)$$

Poslední integrál vyjádříme ze vztahu (3.471):

$$\blacktriangleright \quad R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}. \quad (3.473)$$

Vidíme, že horizont částic přirozeným způsobem závisí na průběhu expanzní funkce. V našem vesmíru po většinu jeho existence dominovala látka, a tak můžeme odhadnout (při stáří 14 miliard let), že $R_H = 3 \times 14 \times 10^9 \text{ ly} \approx 42 \text{ miliard ly}$.

Parametr w

Nalezneme stavovou rovnici entity, která při expanzi mění hustotu energie s expanzní funkcí jako K/a^α . Objem přitom roste se třetí mocninou expanzní funkce, tj. $V \sim a^3$. Pro danou entitu napíšeme první větu termodynamickou v adiabatickém přiblížení (diferenciál tepla je nulový, vesmír nevyměňuje teplo s okolím).

$$\begin{aligned} dU + p dV &= 0 \\ d(\rho_E V) + p dV &= 0 \\ d\left(\frac{K}{a^\alpha} a^3\right) + p da^3 &= 0 \\ (3-\alpha)Ka^{2-\alpha} da + 3pa^2 da &= 0 \\ (3-\alpha)\frac{K}{a^\alpha} + 3p &= 0 \end{aligned}$$

$$p = \left(\frac{\alpha}{3} - 1\right) \frac{K}{a^\alpha},$$

$$p = w\rho_E; \quad w \equiv \left(\frac{\alpha}{3} - 1\right). \quad (3.474)$$

Výsledkem je lineární vztah mezi tlakem a hustotou energie s koeficientem w , který je jedním ze základních kosmologických parametrů. Shrňme veškeré dosavadní výsledky do tabulky:

exponent α ($\rho \sim 1/a^\alpha$)	expanzní funkce	Hubbleova konstanta	horizont částic	stavová rovnice	parametr w	entita
$\alpha = 4$	$C t^{1/2}$	$\frac{1}{2t}$	$2ct$	$p = \rho/3$	$+1/3$	záření ($m_0 = 0$)
$\alpha = 3$	$C t^{2/3}$	$\frac{2}{3t}$	$3ct$	$p = 0$	0	látka ($m_0 \neq 0$)
$\alpha = 2$	$C t$	$\frac{1}{t}$	$ct \ln(t/t_0)$	$p = -\rho/3$	$-1/3$	křivost ($k < 0$)
$\alpha = 0$	$C e^{\chi t}$	χ	$c \left(\frac{e^{\chi t} - 1}{\chi} \right)$	$p = -\rho$	-1	projevy vakua

Podstatná je hodnota parametru w pro temnou energii. Aby docházelo k pozorované zrychlené expanzi vesmíru, musí podle rovnic obecné teorie relativity platit $w < -1/3$. Pro vakuovou energii spojenou s kvantově mechanickými procesy ve vakuu je $w = -1$ a expanzní funkce roste exponenciálně. Pokud by dokonce bylo $w < -1$ ($\alpha < 0$), bude expanze natolik překotná, že zasáhne samotnou strukturu látky a rozerve v budoucnu samotná atomová jádra. Této situaci říkáme *big rip* – velké rozervání. Z měření WMAP, CBI, 2dF, SDSS a mnoha dalších experiemntů vychází, že parametr w se pro temnou energii nachází v okolí hodnoty -1 .

3.7.4 Kosmologická konstanta

V roce 1998 byla objevena zrychlená expanze vesmíru (Adam Riess, Saul Perlmutter) a na levé straně Einsteinova gravitačního zákona přibyl kosmologický člen s nenulovou kosmologickou konstantou:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \quad (3.475)$$

Původ kosmologického členu není dosud znám, snad souvisí s kvantovými fluktuacemi vakua, pro které platí

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \rho_{\text{vakua}} g^{\mu\nu} \quad (3.476)$$

a člen na levé straně by mohl mít původ v tenzoru energie a hybnosti kvantového vakua. Rovnice pro expanzní funkci se změni na

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 - c^2 \frac{\Lambda}{3} a^2 = -c^2 k. \quad (3.477)$$

Po vydělení kvadrátem expanzní funkce, zavedení Hubbleovy konstanty a rozdělení hustoty energie na záření a látku máme:

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_{\text{rad}} + \frac{8}{3}\pi G\rho_{\text{mat}} + c^2 \frac{\Lambda}{3} - \frac{c^2 k}{a^2}. \quad (3.478)$$

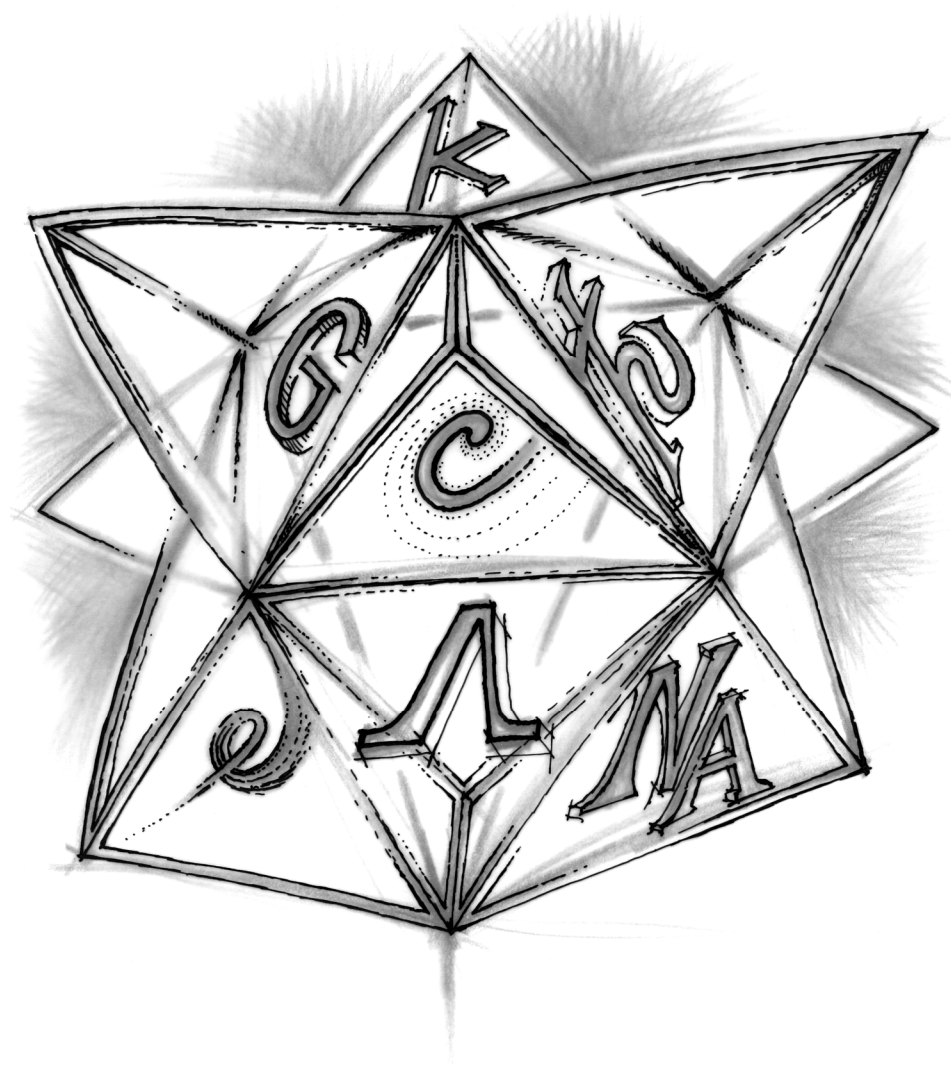
Na pravé straně jsou entity různě reagující na expanzi. První člen klesá se čtvrtou mocninou expanzní funkce, druhý se třetí mocninou, třetí s nultou (kosmologický člen) a poslední s druhou mocninou (křivostní člen, ten je ale v našem vesmíru přibližně nulový). Pokud je Hubbleova konstanta nenulová, můžeme rovnici vydělit jejím kvadrátem a získat tak jednoduchou relaci

$$\begin{aligned} 1 &= \Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\text{mat}} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k; \\ \Omega_{\text{rad}} &\equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{\text{rad}}; \\ \Omega_{\text{mat}} &\equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{\text{mat}}; \\ \Omega_{\Lambda} &= \frac{c^2 \Lambda}{3H^2}; \\ \Omega_k &= -\frac{c^2 k}{a^2 H^2}. \end{aligned} \quad (3.479)$$

Příspěvek křivostního členu je podle současných měření zanedbatelný. Zářivý člen má v současnosti hodnotu přibližně $\Omega_{\text{rad}} \approx 0,05\%$. Příspěvek látky je cca $\Omega_{\text{mat}} \approx 32\%$, z toho činí 5% atomární látka a 27% temná hmota. Příspěvek kosmologického členu (temné energie) je přibližně 68%. Samotná kosmologická konstanta má hodnotu $2,25 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$. Éra záření dominovala do 400 000 roků, éra látky do poloviny stáří vesmíru a dnes žijeme v éře temné energie. Detailní popis jednotlivých entit a jejich výzkumu může čtenář nalézt v učebnicích specializovaných na tuto problematiku.



Seznam symbolů



a	expanzní funkce, velikost zrychlení, vzdálenost	\mathcal{E}	radiační elektrické pole
a^μ	čtyřzrychlení	f	hustota síly, hustota volné energie
\mathbf{a}	zrychlení	F	volná energie
a_e	klasický poloměr elektronu	F, \mathbf{F}	síla
\mathbf{a}_k	amplituda potenciálu	F_k	složky síly
$\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger$	kreační operátor	$F^{\mu\nu}$	tenzor elektromagnetického pole
$\hat{\mathbf{a}}_k$	anihilační operátor	g	Landéův faktor, tíhové zrychlení
ash	argument sinu hyperbolického	\mathbf{g}	mechanická hustota hybnosti, tíhové zrychlení
atg	arkustangenta	g_n	stupeň degenerace (degenerační faktor)
ath	argument tangenty hyperbolické	$g_{\mu\nu}$	metrický tenzor
A	amplituda, dynamická proměnná, mechanická práce	G	Gibbsův potenciál, gravitační konstanta, Greenova funkce
A^μ	čtyřpotenciál pole	$G_{\mu\nu}$	Einsteinův tenzor
\mathbf{A}	vektorový potenciál	h	Planckova konstanta
\mathcal{A}	čtyřvektor jako objekt	\hbar	redukováná Planckova konstanta
b	Wienova konstanta, vzdálenost	$h_{\mu\nu}$	odchylky od Minkowského metriky
\mathbf{b}	moment hybnosti	\mathbf{H}	intenzita magnetického pole
\mathbf{B}	magnetická indukce	H	entalpie, Hamiltonova funkce, Hubblova konstanta
\mathcal{B}	radiační magnetické pole	\mathcal{H}	radiační část hamiltoniánu
c	měrná tepelná kapacita, rychlost světla	\hat{H}	operátor energie
ch	kosinus hyperbolický	i	proud na jednotku délky
cos	kosinus	I	elektrický proud, intenzita, intenzita záření
ctg	kotangenta	\mathbf{j}	tok
cth	kotangenta hyperbolická	\mathbf{j}_0	proudová hustota, tok náboje
C	tepelná kapacita	J^μ	čtyřtok
C	cirkulace pole	J	celkový moment hybnosti, moment setrvačnosti, vazební konstanta
\mathbf{D}	indukce elektrického pole	J^μ	čtyřtok náboje
$D/D\tau$	úplná dervace	k	křivost, velikost vlnového vektoru
det	determinant	\mathbf{k}	vlnový vektor
div	divergence	k_B	Boltzmannova konstanta
ds^2	interval	k^μ	vlnový čtyřvektor
e	Eulerovo číslo		
e	elementární náboj		
\mathbf{e}_k	jednotkový vektor		
exp	exponenciála		
E	energie		
E_{nN}	energie stavu n při N systémech		
\mathbf{E}	elektrická intenzita		

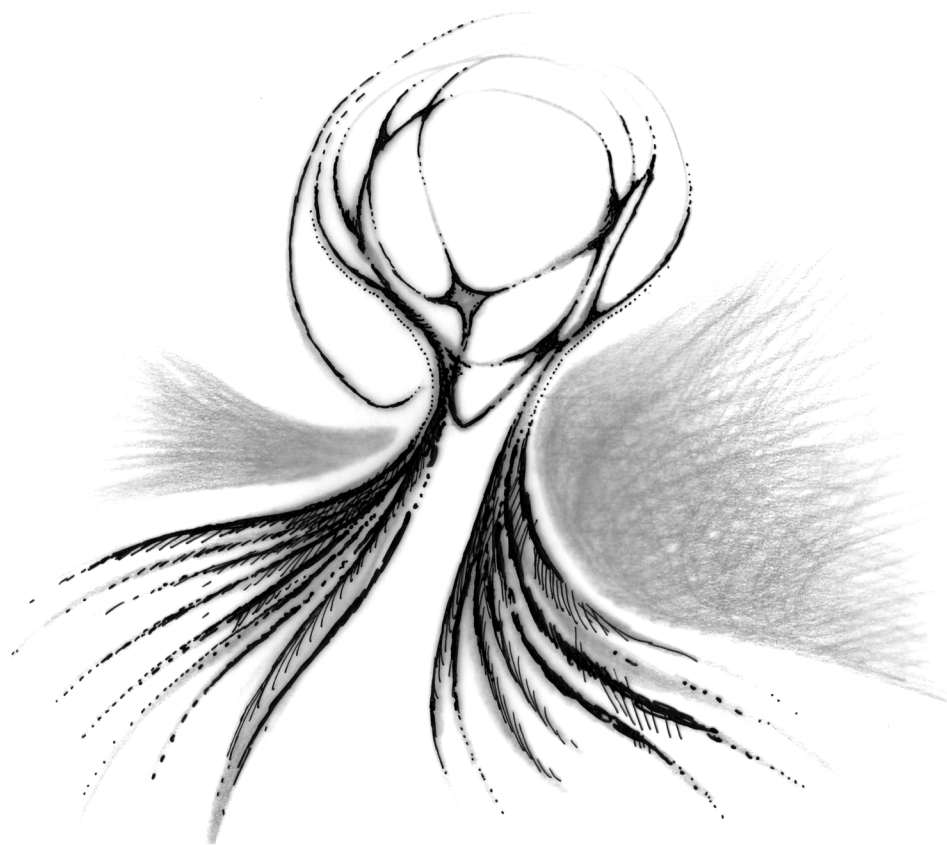
l	vzdálenosti vedlejší kvantové číslo	\mathcal{P}	hustota výkonu
ℓ	moment hybnosti na hmotnost	\mathcal{P}	radiální výkon
\ln	přirozený logaritmus	P_{nk}	matice hybnosti
L	Lagrangeova funkce, orbitální moment hybnosti	$\hat{\mathbf{P}}$	operátor hybnosti
\mathcal{L}	hustota Lagrangeovy funkce, Laplaceova transformace	\mathbf{q}, q_k	zobecněné souřadnice
\mathbf{L}	vektor momentu hybnosti	Q	náboj, počet stavů v Pottsově modelu, teplo, zobecněná souřadnice
LIS	lokální inerciální soustava	\mathbf{Q}_k	zobecněná souřadnice pole v dutině
m	hmotnost, magnetické kvantové číslo	Q_{kl}	elektrický kvadrupól. moment
m_s	setrvačná hmotnost	r	radiální vzdálenost, amplituda odrazivosti, poloměr
m_g	gravitační hmotnost	r_g	Schwarzschildův poloměr
\mathbf{M}	moment síly, vektor magnetizace	\mathbf{r}	polohový vektor
M	hmotnost, magnetizace	rot	rotace
\mathcal{M}_{kl}	hustota momentu hybnosti	R	odrazivost, skalární křivost
\mathcal{M}_U	uzavřená množina	$R_{\alpha\beta}$	Ricciho tenzor
n	hlavní kvantové číslo, index lomu, koncentrace, kvantový stav	$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$	Riemannův tenzor křivosti
\mathbf{n}	normálový vektor	s	hustota entropie
N	počet částic, počet parametrů, počet systémů	S	entropie, plocha, spinový moment hybnosti
N_k	obsazovací čísla	\mathbf{S}	Poyntingův vektor
\mathbf{N}_k	generátory Lorentzovy grupy	\mathcal{S}	radiální část Poynt. vektoru
\mathcal{N}_{klm}	tok momentu hybnosti	sh	sinus hyperbolický
\mathbf{p}	vektor hybnosti	sin	sinus
p	hybnost, tlak, zobecněná hybnost	t	amplituda propustnosti, čas, parametr, vazební konstanta Hubbardova modelu
p_{nN}	tlak stavu n při N systémech	T	absolutní teplota, kinetická energie, propustnost, perioda, teplota
\mathbf{p}_E	elektrický dipólový moment	T_{kl}	tenzor toku hybnosti (tenzor tlaku, pnutí)
\mathbf{p}_G	gravitační dipólový moment	T_{kl}^{EM}	Maxwellův tenzor pnutí
\mathbf{p}_M	magnetický dipólový moment	T_V	vibrační teplota
p^μ	čtyřhybnost	T_R	rotační teplota
$\bar{\mathbf{I}}$	jednotková matice	Tr	stopa matice
\mathbf{P}	vektor polarizace	$T^{\mu\nu}$	tenzor energie a hybnosti
P	polarizace, výkon		
P^μ	čtyřhybnost		
\mathbf{P}_k	zobecněná hybnost pole v dutině		

u	hustota vnitřní energie, rapidita, rychlost	δ_A	disperze veličiny A
\mathbf{u}	rychlostní pole	∂S	hranice plochy
U	napětí, reálná část komplexní funkce, vnitřní energie	$\partial \Omega$	hranice množiny
U^μ	čtyřrychlost	Δ	konečný přírůstek, Laplaceův operátor (∇^2)
\mathbf{v}, v	rychlost	ε	energie jednoho stavu, Leviho-Civitův tenzor, permitivita
v_f	fázová rychlost	ε_0	permitivita vakua
v_g	grupová rychlost	ε_{kl}	tenzor permitivity
var	variance	ζ	fugacita
V	objem, potenciální energie, imag. část komplexní funkce	$\eta_{\mu\nu}$	Minkowského metrika
V_{eff}	efektivní potenciál	θ, ϑ	odklon od osy z
w	pravděpodobnost, parametr w	θ	úhel mezi zrychlením a normáloou
w_{nN}	energie stavu n při N systémech	κ_{kl}	elektrická susceptibilita
W	energie	λ	charakteristické (vlastní) číslo, parametr světočáry, vlnová délka
W_P	potenciální energie	Λ	kosmologická konstanta
x_k	souřadnice	$\mathbf{\Lambda}$	Lorentzova matice
\mathbf{x}	polohový vektor	μ	chemický potenciál, permeabilita
x^μ	událost	μ_{kl}	tenzor permeability
$\hat{\mathbf{X}}$	operátor polohy	ν	frekvence, kmitočet
\hat{x}	operátor souřadnice	ξ	pomocná proměnná
y	souřadnice	Ξ	grandkanonická partiční suma
z	komplexní proměnná, partiční suma jednoho systému	π	hustota veškeré hybnosti
Z	partiční suma, stupeň ionizace	ρ	hustota, hustota pravděpodobnosti, skutečná radiální vzdálenost, vzdálenost
α_k	integrační konstanty	ρ_c	kritická hustota expanze
β	reciproká teplota $1/k_B T$, relativistický koeficient v/c	ρ_E	hustota energie
γ	hustota energetických stavů, integrační cesta, Lorentzův faktor	ρ_M	hustota hmoty
γ	hustota hybnosti pole	ρ_Q	hustota náboje
Γ	váhový faktor	$\hat{\rho}$	operátor hustoty
$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$	Christiffelovy symboly, koeficienty afinní konexe	σ	diferenciální vodivost, plošný náboj, Stefanova-Boltzmannova konstanta, účinný průřez
δ	Diracova distribuce, Kroneckerův symbol	τ	společný retardovaný čas, vlastní čas
		φ	azimut, fáze, úhel

ϕ	fáze, fázový prostor, gravitační potenciál, skalární potenciál	ω_{LT}	úhlová frekvence precese (Lenseův-Thirringův jev)
ϕ^*	bezrozměrný grav. potenciál	Ω	časoprostorová oblast, grandkanonický potenciál, podíl hustoty ku kritické (kosmologický parametr), prostorová oblast, prostorový úhel
χ	odklon paprsku	Ω	úhlová frekvence rotace
χ_{kl}	magnetická susceptibilita	∇	gradient
ψ	tok pole, vlnová funkce	\square	D'Alembertův operátor
ω	úhlová frekvence		
ω_c	cyklotronní frekvence		



Rejstřík osobností

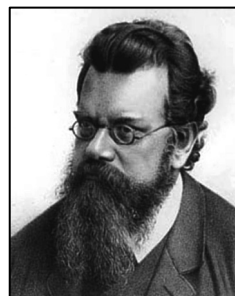


Statistická fyzika



Bloch, Felix (1905–1983), ve Švýcarsku narozený americký fyzik, který sdílí Nobelovu cenu za fyziku za rok 1952 spolu s Edwardem Purcellem za objevení metody měření magnetického pole atomového jádra pomocí magnetické rezonance. Bloch učil na univerzitě v Lipsku, a to až do roku 1933, kdy Adolf Hitler přišel k moci. Emigroval do USA, kde v roce 1939 získal občanství. Poté co se v roce 1934 stal zaměstnancem Stanfordovy univerzity v Palo Alto, navrhl metodu na rozdělení svazků neutronů do dvou složek, která byla založena na dvou možných orientacích spinu neutronů v magnetickém poli. V roce 1939 změřil spolu s Luisem Alvarezem magnetický moment neutronu. Během druhé světové války pracoval v Los Alamos a na Harvardově univerzitě (vývoj obranných radarů). V roce 1945 se Bloch vrátil do Stanfordu, kde spolu s Williamem Hansenem a Martinem Packardem rozvinul princip magnetické rezonance ke zjišťování vztahu mezi magnetickými vlastnostmi jader a krystalickou strukturou látek. Magnetická rezonance našla také uplatnění v diagnostické medicíně. Bloch byl prvním ředitelem Evropského střediska jaderného výzkumu CERN (1954–1955).

Boltzmann, Ludwig Eduard (1844–1906), rakouský fyzik, zakladatel statistické fyziky. V roce 1872 zformuloval vztah mezi entropií a pravděpodobností. Je autorem H teorému o nárůstu entropie v nevratných procesech. Zabýval se kinetickou teorií. Ekvipartiční teorém pokládal za základní rys kinetické teorie. Zastával atomickou hypotézu. V roce 1869 se stal profesorem matematické fyziky na Univerzitě v Grazu. Po Boltzmannovi jsou pojmenovány: Boltzmannova rovnice pro pravděpodobnost a pro časový vývoj hustoty pravděpodobnosti, Boltzmannův H teorém, Boltzmannova konstanta a kráter na Měsíci.



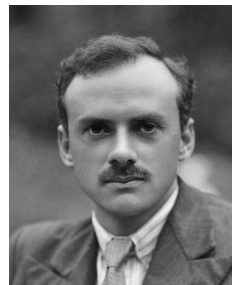
Bose, Satyendra Nath (1854–1948), indický fyzik, který se zabýval především kvantovou statistikou. Na jeho počest jsou pojmenovány částice s celočíselným spinem, tzv. bosony, a jeho jméno nese statistické rozdělení těchto částic (Boseho-Einsteinovo rozdělení). Název bosony pro tyto částice poprvé použil Paul Dirac. Zabýval se také rentgenovou krystalografií, elektromagnetickými vlastnostmi ionosféry a jednotnou teorií pole. Jeho průlomový článek o kvantovém chování světla (odvodil v něm na základě kvantového chování mnoha identických fotonů Planckův vyzářovací zákon) z roku 1924 odmítla redakce vydat. Bose ho zaslal Einsteinovi k posouzení. Einstein článek přeložil do němčiny a zařadil jeho vydání v Německu. Sám pak myšlenky dále rozpracoval, proto se dnes hovoří o Boseho-Einsteinově statistickém rozdělení nebo Boseho-Einsteinově kondenzátu.



Curie, Pierre (1859–1906), francouzský chemik a fyzik, který spolu se svou manželkou, Marií Curie, objevil v roce 1898 ve smolinci uran, polonium a radium. Také přišel na to, že stálý magnet ztrácí magnetické schopnosti, když je zahřátý nad určitou teplotu,

kteřá se dnes nazývá Curieova teplota. Objevil také piezoelektrický jev: při deformaci piezoelektrického krystalu vzniká elektrické napětí. Pierre Curie vystudoval pařížskou Sorbonnu. V roce 1903 obdržel nevyšší britské ocenění za chemii – Davyho medaili. Téhož roku získal i Nobelovu cenu za fyziku. Po manželech Curiových byl pojmenován prvek curium. Pierre Curie zemřel při dopravní nehodě (byl sražen kočárem).

Dirac, Paul Adrien Maurice (1902–1984), anglický fyzik, jeden z hlavních tvůrců kvantové teorie 20. století. Položil základy kvantové elektrodynamiky a kvantové teorie pole. V roce 1928 odvodil slavnou Diracovu rovnici – relativistickou rovnici pro elektron. Stavby se zápornými energiemi správně interpretoval jako antičástice a předpověděl existenci pozitronu. Pozitron byl objeven Carlem Andersonem až v roce 1932. Nezávisle na Enrico Fermim odvodil statistické rozdělení pro částice s poločíselným spinem (Fermi-Diracovo rozdělení). Je autorem Diracovy symboliky v kvantové teorii. Ukázal ekvivalenci Schrödingerova a Heisenbergova přístupu ke kvantové mechanice. Je autorem metody druhého kvantování, které umožňuje přechod od kvantové teorie částic ke kvantové teorii pole. Předpověděl polarizaci vakua a netriviální dynamické vlastnosti vakua způsobené kvantovými jevy. Předpověděl existenci magnetického monopólu. Je autorem mnohačasticového formalismu v kvantové teorii. Za jeho práci na antičásticích a kvantové teorii pole byl v roce 1933 odměněn Nobelovou cenou za fyziku. V pozdějších letech se zabýval důsledky, které by plynuly z hypotetické proměnnosti základních konstant (gravitační, rychlosti světla a Planckovy konstanty). Po celý život byl zastáncem principu jednoduchosti fyzikálních rovnic. Jako jeden z prvních si uvědomil, že symetrie v přírodě jsou primárním principem při sestavování fyzikálních rovnic.



Doppler, Christian (1803–1853), rakouský matematik a fyzik, část svého krátkého života strávil jako profesor Pražské techniky (předchůdce ČVUT v Praze), později přednášel na Vídeňské polytechnice. Ve známost vešel především objevem změny frekvence vlnění při vzájemném pohybu zdroje a pozorovatele (Dopplerův jev). Dopplerův jev způsobuje statistické rozšíření spektrálních čar. S nástupem relativity byl odvozen i relativistický Dopplerův jev. Publikoval také práce o elektřině a magnetismu, zabýval se časovou proměnností magnetické deklinace, napsal několik článků z optiky a astronomie. Pod Dopplerovi jsou pojmenovány kráter na odvrácené straně Měsíce a planetka 3905 Doppler.



Dulong, Pierre Louis (1785–1838), francouzský fyzik a chemik. Zabýval se pružnými vlastnostmi páry, vedením tepla a měrnými tepelnými kapacitami plynů. Také měřil indexy lomu různých plynů. Několikrát spolupracoval s Alexisem Petittem, s nímž v roce 1819 experimentálně objevil Dulongův-Petitův zákon týkající se tepelné kapacity látek. Studoval Pařížskou polytechniku, ale jeho studia byla znemožněna chatrným zdravím. Objevil výbušnost chlorodusíku (chloridu dusitého), při explozi přišel o oko a tři prsty. Nehodu tajil, proto v jiné laboratoři došlo k další explozi s ještě horšími důsledky. Za spoluobjevení

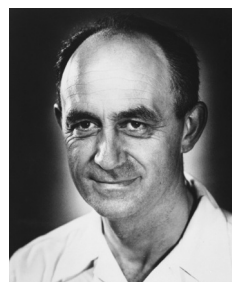
Dulongova-Petitova zákona obdržel cenu Francouzské akademie věd.



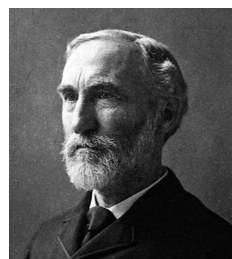
Ehrenfest, Paul (1880–1933), rakouský fyzik, který se zabýval statistickou fyzikou a termodynamikou. V roce 1900 navrhl model difúze a statistickou interpretaci druhé věty termodynamické. V roce 1912 se v Praze poprvé setkal s Albertem Einsteinem. Později pracoval v oblasti kvantové teorie rotujících systémů. Ehrenfest studoval na Vídeňské univerzitě a doktorská studia zakončil pod vedením Boltzmannu v Göttingenu v roce 1904. Pracoval na mnoha univerzitách a významných pracovištích, k nejdůležitějším patřil pobyt v Leidenu. Jeho studenty byly například Hendrik Casimir a George Uhlenbeck, významně byl ovlivněn Ralphem Kronigem. Na jeho počest jsou pojmenovány Ehrenfestovy teorémy o vztahu mezi kvantovou a klasickou podobou pohybových rovnic.

Einstein, Albert (1879–1955), viz sekce Relativita

Fermi, Enrico (1901–1954), italsko-americký fyzik, který se věnoval především kvantové teorii a teorii elementárních částic. Malou neutrální částici, která vzniká při beta rozpadu pojmenoval neutrino (v italštině „neutronek“). Na jeho počest jsou pojmenovány částice s poločíselným spinem jako fermiony. Jde o částice, které splňují Pauliho vylučovací princip. Tyto částice splňují statistické rozdělení pojmenované Fermiho-Diracovo rozdělení. Enrico Fermi zkonstruoval a spustil v roce 1942 pod stadionem Chicagské univerzity první jaderný reaktor na světě. Byl postaven z grafitových cihlíček, které sloužily současně jako moderátor. V roce 1943 založil Aragonskou národní laboratoř. Enrico Fermi se také zabýval způsobem urychlování kosmického záření a navrhl statistické urychlení nabitých částic při jejich odrazech od magnetických zrcadel. Dnes tento mechanismus nazýváme Fermiho mechanismus. V roce 1938 získal Nobelovu cenou za fyziku za objev umělých radioaktivních prvků, které vznikají z jader při ostřelování neutrony. Podle Fermiho je pojmenována rentgenová observatoř vypuštěná do vesmíru v roce 2008.



Gibbs, Josiah Willard (1839–1903), americký matematik a teoretický fyzik, který se zabýval termodynamikou a statistikou. Zformuloval pojem termodynamické rovnováhy pomocí energie a entropie. Zformuloval také jednoduché pravidlo chemické rovnováhy několika fází (Gibbsovo pravidlo fází). V matematice založil vektorovou analýzu. Studoval na Univerzitě v Yale, kde získal PhD v oboru inženýrství. Později se na této univerzitě stal profesorem. V jeho pracích se spolu setkávala matematika, fyzika a chemie. Po Gibbsovi jsou pojmenovány: Gibbsovo pravidlo fází a Gibbsův termodynamický potenciál.



Heisenberg, Werner (1901–1976), německý teoretik, který se zabýval základními rysy kvantové teorie. Je autorem maticové kvantové mechaniky, kterou odvodil v roce 1925. Jde o jiný postup výpočtu kvantových stavů, než je Schrödingerova vlnová mechanika. Heisenberg odvodil také slavné relace neurčitosti, podle kterých nelze současně přesně změřit polohu a hybnost objektu, což vede na statistické fluktuační, kterým nelze nijak zabránit. Měření jedné veličiny narušuje výsledek měření druhé

veličiny. Za vybudování základů kvantové teorie získal v roce 1932 Nobelovu cenu za fyziku. Heisenberg vystudoval teoretickou fyziku na Univerzitě v Mnichově. Titul PhD získal pod vedením Sommerfelda v roce 1923 a stal se asistentem Maxe Borna v Göttingen. Tři roky pracoval v Kodani s Nielsem Bohrem, kde se spolu podíleli na tzv. kodaňské interpretaci kvantové teorie. Navrhl také úspěšný model feromagnetik se dvěma fázovými přechody. Od roku 1927 do roku 1941 byl profesorem teoretické fyziky v Lipsku, od roku 1942 do roku 1945 byl ředitelem Institutu Maxe Plancka v Berlíně a od roku 1946 byl ředitelem Institutu Maxe Plancka v Kodani.

Hubbard, John (1931–1980), anglický fyzik, autor Hubbardova modelu, Hubbardova-Boseho modelu a dalších modelů interagujících elektronů. Vystudoval londýnskou Imperial College, kde získal doktorát. Později pracoval v americké výzkumné laboratoři IBM v San Jose a v Harwellově laboratoři ve Velké Británii. Hlavním polem jeho působnosti byla fyzika kondenzovaných stavů.



Ising, Ernst (1900–1998), německý fyzik, který se zabýval především fázovými přechody ve feromagnetických a paramagnetických látkách. Je autorem velmi úspěšného Isingova modelu, který problematiku fázových přechodů feromagnetik řeší na mříži. Ising spočítal v rámci doktorské práce partiční sumu tohoto modelu pro řetězec dvojstavových spinů. Ve dvou dimenzích problém vyřešil Lars Onsager až v roce 1944. Ising vystudoval Hamburskou univerzitu, kde také určitou dobu pracoval. V roce 1939 prchl před nacisty do Lucemburska, kde se živil jako pastevce a dělník na železnici. Po okupaci Lucemburska byl nucen pracovat pro armádu.

V roce 1947 se mu i s rodinou podařilo emigrovat do USA, kde se stal profesorem na Bradleyově univerzitě v Illinois. Zde pracoval až do konce života.

Jeans, James (1877–1946), anglický matematik a astronom, který se zabýval širokým spektrem fyzikálních problémů. Nevěřil Laplaceově hypotéze o vytvoření sluneční soustavy z prvopočáteční mlhoviny. Namísto toho vytvořil vlastní teorii, podle které způsobil průlet blízké hvězdy kolem Slunce slapové vyvržení hmoty, z níž vznikla sluneční soustava. Tato teorie byla později vyvrácena. Jeans se také zabýval termodynamikou a zářením absolutně černého tělesa, podařilo se mu odvodit vyzařovací zákon pro nízké frekvence. Spolu s Eddingtonem se stal zakladatelem britské kosmologie. Byl odpůrcem teorie Velkého třesku a zastával teorii ustáleného vesmíru, která byla vyvrácena objevem reliktního záření. Od roku 1928 se Jeans stal úspěšným populárním spisovatelem. Jeans vystudoval fyziku v Cambridge, poté pracoval v Cambridge a v Princetonu.



Kosterlitz, John Michael (*1942), britsko-americký fyzik, který se celý život zabývá fyzikou kondenzovaných stavů, jednorozměrnými a dvojrozměrnými spinovými systémy, mřížovými modely a spinovými skly (feromagnetiky, jejichž vazební konstanta se mění od místa k místu).. Vystudoval Cambridžskou univerzitu, doktorát získal na Oxfordu. Po studiích vystřídal několik míst na univerzitách v různých částech světa. Pracoval například na Birminghamské univerzitě, kde se setkal s Davidem Thoulessem, na Cornellově univerzitě i jinde. Profesorské místo



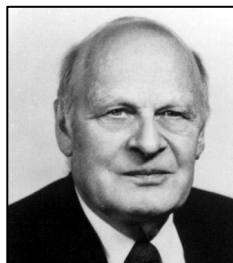
získal na Brownově univerzitě ve Spojených státech. V současnosti je výzkumným pracovníkem na univerzitě Aalto-yliopisto ve finských Helsinkách. Společně s Davidem Thoulesssem v roce 1972 zjistil, že u některých typů feromagnetik existuje mezi vysokoteplotní neuspořádanou fází a nízkoteplotní doménovou fází ještě jedna fáze, v níž se směr spinů mění jen velmi pomalu a spiny vytvářejí spinové vlny a víry. Přechod z vysokoteplotní fáze do této tzv. „soft“ fáze se dnes nazývá Kosterlitzův-Thoulessův přechod. Kosterlitz spolu s Thoulesssem v 70. letech předpověděl existenci povrchové supravodivosti jako důsledek topologického stavu plošné periodické struktury. V osmdesátých letech 20. století vyvinul spolu s Duncanem Haldanem metody popisu fázových přechodů, při nichž není narušení symetrie určující charakteristikou. Za svou práci získal řadu ocenění, jimž vévodí Nobelova cena za fyziku pro rok 2016.



Landé, Alfred (1888–1976), německo americký fyzik, který se celý život zabýval kvantovou fyzikou. Známy je Landéův faktor určující degeneraci stavu, který je klíčovou veličinou při anomálním Zeemanově jevu nebo při magnetické rezonanci. Landé se věnoval také spektroskopii. V pozdějších letech nesouhlasil, podobně jako Einstein, s kodaňskou interpretací kvantové teorie a hledal vlastní pojetí kvantové teorie. Landé vystudoval Mníchovskou univerzitu. V roce 1929 přednášel na Ohijské univerzitě, při druhé návštěvě (1930–1931) se rozhodl v USA zůstat.

Liouville, Joseph (1809–1882), francouzský matematik, který se zabýval teorií čísel, komplexní analýzou, diferenciální geometrií, topologií, teoretickou fyzikou a astronomií. Přispěl k řešení integrálních rovnic za pomoci vlastních čísel, detailně se věnoval integrabilitě soustav rovnic a ukázal, že se při časovém vývoji v hamiltonovských systémech zachovává fázový objem (Liouvilův teorém). Je po něm pojmenována celá řada matematických objektů a kráter na Měsíci.

Maxwell, James Clerk, viz sekce Elektromagnetické pole



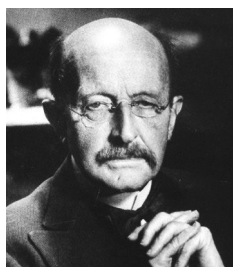
Onsager, Lars (1903–1976), norsk-americký chemik a teoretický fyzik. V roce 1968 získal Nobelovu cenu za chemii. Zabýval se teorií elektrolytů a Brownovým pohybem iontů. Uchvátila ho statistická fyzika a termodynamika. Zkoumal difúzi částic způsobenou gradientem teploty a koncentrace a produkci entropie při těchto procesech. Své poznatky zobecnil na tzv. Onsagerovy relace reciprocity, které popisují symetrie mezi toky a jejich příčinami. Působil na Brownově univerzitě, Hopkinsově univerzitě a Univerzitě v Yale.

Pauli, Wolfgang (1900–1958), rakousko-německo-americký fyzik, v roce 1925 zformuloval Pauliho vylučovací princip, který říká, že dva fermiony se nemohou nacházet ve stejném kvantovém stavu. Tento princip je zodpovědný za rozdílné vlastnosti různých atomů a za chemické vlastnosti látek. Významně se podílel na vzniku kvantové mechaniky. Je po něm pojmenována Pauliho rovnice, první kvantová rovnice, která obsahovala spin. Ve 30. letech předpověděl existenci neutrina. Za své práce, zejména za objev vylučovacího principu, získal v roce 1945 Nobelovu cenu za fyziku. Tento princip dominantně ovlivňuje



statistické chování částic při nízkých teplotách. Pauli se narodil ve Vídni, jeho kmotrem byl Ernst Mach. Prarodiče Pauliho z otcovy strany pocházeli z pražské židovské rodiny. První vědecký článek o obecné relativitě publikoval v 18 letech. Studoval v Mnichově pod vedením Sommerfelda, zde získal v roce 1921 Ph.D. na základě práce o kvantových vlastnostech molekuly vodíku. Pauli byl rok na Univerzitě v Göttingen, kde pracoval pod vedením Maxe Borna. Také pracoval na Ústavu teoretické fyziky v Kodani (dnes Ústav Nielse Bohra), na Univerzitě v Hamburku a ve švýcarském Curychu. V roce 1931 byl hostujícím profesorem na Michiganské univerzitě a v roce 1935 v Princetonu. V roce 1939 se politické poměry v Evropě zhoršily natolik, že se Pauli odstěhoval do Spojených států, kde pracoval jako profesor teoretické fyziky v Princetonu. Po druhé světové válce se stal americkým občanem.

Petit, Alexis Thérèse (1791–1820), francouzský fyzik, který se zejména zabýval účinností parních motorů. Diskutoval se Sadi Carnotem problematiku tepelných strojů a termodynamické účinnosti. Několikrát spolupracoval s Pierrem Louišem Dulongem. Výsledkem byl experimentální objev vztahu pro měrnou molární kapacitu látek, který se dnes nazývá Dulongův-Petitův zákon. Vystudoval Pařížskou polytechniku, vstoupil na ní v nejnižším možném věku (16 letech). Ve svých 23 letech se stal profesorem.



Planck, Max (1858–1947), německý fyzik, který formuloval rovnici popisující vyzařování absolutně černého tělesa za předpokladu, že energie je kvantována a elementární kvantum je úměrné frekvenci. Tento předpoklad zavedl ryze matematicky, aby rovnice byly řešitelné. Fyzikální interpretaci příliš nedůvěřoval. V roce 1918 získal Nobelovu cenu za svou kvantovou teorii, úspěšně vyzkoušenou Einsteinem na fotoelektrickém jevu a Bohrem na prvním modelu atomu. Planck se hluboce zabýval termodynamikou, je po něm pojmenována jedna z možných formulací druhé věty termodynamické. Planck byl kritikem pravděpodobnostní interpretace entropie. V roce 1900 poprvé použil univerzální plynovou konstantu a Avogadrovo číslo. Po Planckovi jsou pojmenovány tzv. Planckovy škály – typická hmotnost, délka, čas a energie získané kombinací základních konstant. Planckovo jméno také nesou: největší síť vědeckých ústavů v Německu (Max Planck Institute), kráter na Měsíci a evropská sonda zkoumající reliktní záření.

Potts, Renfrey Burnard (1925–2005), australský matematik, který vyvinul Pottsův model feromagnetik využívající libovolný počet projekcí spinu. Tento model zobecnil Isingův model. Potts měl velmi široký záběr. Zajímal se také o robotiku a intenzivně se věnoval dopravnímu inženýrství (sledování automobilů, optimalizaci jejich pohybu v závislosti na dopravní situaci atd.). Vystudoval Univerzitu v Adelaide a Oxfordskou univerzitu. Za své práce získal cenu Australské matematické společnosti.

Rayleigh, John William Strutt (1842–1919), viz sekce Elektromagnetické pole

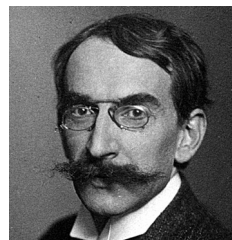
Stefan, Jožef (1835–1893), slovinský fyzik, matematik a básník. Studoval matematiku a fyziku na Vídeňské univerzitě. Z Dulongova-Petitova zákona odvodil formuli pro celkový tok energie z absolutně černého tělesa. Z tohoto zákona odhadl povrchovou teplotu Slunce. Řešil také rozložení teploty při fázovém přechodu (Stefanův problém) a další úlohy na pomezí matematiky, fyziky a chemie. Jeho žákem byl Ludwig Boltzmann. Je po něm pojmenován Stefanův-Boltzmannův zákon, Stefanův tok a Stefanův problém. Stefan vystudoval Vídeňskou univerzitu a je nositelem Liebenovy ceny.

Thouless, David James (*1937), anglický teoretik, který vystudoval Cambridžskou univerzitu. Doktorské studium absolvoval ve Spojených státech na Cornellově univerzitě pod vedením Hanse Betheho. Jako čerstvý doktorand získal tzv. „postdoc“ pozici na Kalifornské univerzitě v Berkeley". V letech 1965 až 1978 se vrátil do rodné Anglie a stal se profesorem na Birminghamské univerzitě. Poté se znovu vrací do Spojených států, kde získává profesorské místo na Washingtonské univerzitě v Seattlu. Profesně se zabývá statistickými vlastnostmi dvourozměrných systémů, mřížovými modely, feromagnetiky, supravodivostí a fázovými přechody. Spolu s Michaelem Kosterlitzem v roce 1972 zjistil, že u některých typů feromagnetik existuje mezi vysokoteplotní neuspořádanou fází a nízkoteplotní doménovou fází ještě jedna fáze, v níž se směr spinů mění jen velmi pomalu a spiny vytvářejí spinové vlny a víry. Přechod z vysokoteplotní fáze do této tzv. „soft“ fáze se dnes nazývá Kosterlitzův-Thoulessův přechod. Thouless spolu s Kosterlitzem v 70. letech předpověděl existenci povrchové supravodivosti jako důsledek topologického stavu plošné periodické struktury. Thouless získal řadu ocenění včetně Nobelovy ceny za fyziku (2016).

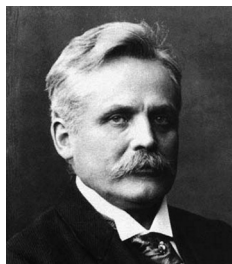


Verlinde, Erik Peter (*1962), holandský teoretický fyzik, který šokoval fyzikální obec v roce 2009, kdy představil svou entropickou teorii gravitace. Gravitaci v této teorii nepovažuje za samostatnou sílu, ale za typickou entropickou sílu, která je způsobena gradientem informace. Sama informace je v jeho teorii lokalizována na dvourozměrné nadploše (tzv. holografický princip). Z teorie zevrubně odvodil Newtonovy pohybové zákony, gravitační zákon i obecně relativistický popis přírody. V roce 2016 přidal jako další zdroj entropie objemovou složku – vakuové fluktuace. Ty způsobí, že předpovědi už nejsou shodné s obecnou relativitou. Zdá se, že by jeho teorie mohla vnést světlo i do problematiky temné energie a temné hmoty. Sám přirovnává gravitaci k tlaku. Jednotlivé molekuly či atomy nevyvíjí tlak, ale jako celek ano. Obdobně je, dle Verlindeho, gravitace důsledkem kvantového chování velkého množství objektů mikrosvěta. Jeho hypotéza má řadu odpůrců. Verlinde vystudoval Utrechtskou univerzitu, působil v Princetonu, v současnosti je na Amsterodamské univerzitě. Jsou po něm pojmenovány Verlindeho algebra a Verlindeho formule (využívané v kvantové teorii pole).

Weiss, Pierre-Ernest (1865–1940), francouzský fyzik, který se zabýval magnetizmem. V roce 1907 vytvořil teorii magnetických domén, které jsou po něm pojmenovány. Zabýval se také teorií středního pole, která ho přivedla ke Curieově-Weissově zákonu popisujícímu závislost magnetické susceptibility na teplotě. Vystudoval univerzitu v Rennes, dále studoval v Lyonu, na Curyšské polytechnice ETH (Švýcarsko) a na Štrasburské univerzitě. Za své práce získal v roce 1935 Řád čestné legie.



Wien, Wilhelm (1864–1928), německý fyzik, jenž dostal Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1911 za posunovací zákon pro absolutně černé těleso, který objevil v roce 1893. Tento zákon ukazuje, že vlnová délka maxima vyzářování klesá s teplotou tělesa. Teplejší tělesa tak vyzářují na kratších vlnových délkách než chladnější tělesa. Wien



získal doktorát na Berlínské univerzitě v roce 1886 a brzo poté začal pracovat právě na problematice záření absolutně černého tělesa. Wien se pokusil o odvození intenzity vyzařování černého tělesa v závislosti na teplotě a byl úspěšný pro krátkovlnnou část spektra, v dlouhovlnné oblasti jeho vyzařovací zákon nebyl správný. Úplný zákon záření černého tělesa odvodil až Max Planck na základě předpokladu o kvantování energie záření, čímž položil základy kvantové teorie. Wien byl jmenován v roce 1899 profesorem na Giessenské univerzitě a v roce 1920 na Mnichovské univerzitě. Svými poznatky také přispěl k výzkumu katodových trubíc generujících rentgenové záření.

Elektromagnetické pole

Ampère, André Maria (1775–1836), francouzský matematik a fyzik, který ukázal, že se kolem vodiče protékajícího proudem nachází magnetické pole. Prováděl pokusy s natáčející se ručkou kompasu a zjistil vzájemný vztah mezi směrem proudu a magnetických indukčních čar, který dnes nazýváme Ampèrovo pravidlo pravé ruky. Ukázal, že se dva vodiče protékající proudem shodným směrem přitahují, obráceně se pak odpuzují. Magnetismus vysvětloval pomocí elektrických proudů v molekulách. Zjistil, že se cívka protékající proudem chová jako tyčový magnet. Tento svůj vynález nazval solenoid. Vynalezl také elektrický telegraf. Byl samoukem, přesto se stal členem Francouzské akademie věd a profesorem na slavné Pařížské polytechnice (*École Polytechnique*). Po Ampèrovi je pojmenována jednotka elektrického proudu ampér, Ampèrův zákon a Ampèrovo pravidlo pravé ruky.

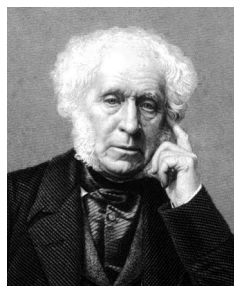
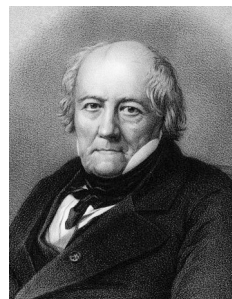


Anderson, Carl David (1905–1991), americký fyzik, který obdržel v roce 1936 Nobelovu cenu za objev pozitronu (kladného elektronu), první známé částice antihmoty. Anderson získal titul PhD v roce 1930 na Kalifornském technologickém institutu v Pasadeně, kde pracoval s fyzikem Robertem Andrewsem Millikanem. Od roku 1927 studovali rentgenové fotoelektrony (uvolňují se při srážkách atomů s vysoce energetickými fotony), v roce 1930 začali zkoumat kosmické gama záření. Anderson v mlžné komoře vyfotografoval stopy sekundárních spršek kosmického záření a při studiu takto vzniklých fotografií objevil množství stop, z jejichž tvaru vyplývalo, že by mohly vzniknout působením kladně nabitých částic – ovšem částic mnohem menších než protony. V roce 1932 publikoval, že stopy jsou způsobeny pozitrony – kladně nabitými částicemi se stejnou hmotností jako elektrony. Existenci pozitronu jakožto antičástice k elektronu předpověděl v roce 1928 Paul Dirac. V roce 1936 Anderson objevil mion (těžký elektron), částici 207× těžší než elektron. Nejdříve myslel, že nalezl mezon (částici, která váže proton a neutron dohromady v atomovém jádře) předpovězený japonským fyzikem Hideki Yukawou, ale ukázalo se, že mion s těmito částicemi interaguje jen slabě a jde o těžší verzi elektronu. Skutečný mezon byl pak objeven v roce 1947 britským fyzikem Cecillem Powellem a pojmenován π mezon neboli pion. Anderson spojil celou svou kariéru s Kalifornským

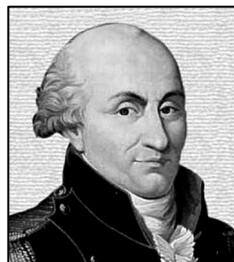


technologickým institutem (Caltech), kam nastoupil v roce 1933 a jako profesor působil až do roku 1976. Během druhé světové války se zapojil do raketového výzkumu.

Biot, Jean-Baptiste (1774–1862), francouzský fyzik, astronom a matematik, který vstoupil do historie Biotovým-Savartovým-Laplaceovým zákonem, který umožňuje výpočet magnetického pole ze znalosti rozložení elektrických proudů. Z pětikilometrové výšky zkoumal spolu s Gay-Lussacem z balónu, jak se chová magnetické pole Země. Zkoumal zbytky meteoritu dopadlého v roce 1803 do okolí L'Aigle a dospěl k závěru, že tyto zbytky pocházejí z kosmického prostoru. Zkoumal fyzikální vlastnosti vinného kamene. Z velkého množství téměř tří set prací jsou nejdůležitější asi ty, ve kterých se zabývá polarizací a dvojlomem světla. Studoval Pařížskou polytechniku (*École Polytechnique*) Biot byl za své činy odměněn Rumfordovou medailí, kterou uděluje Královská akademie věd v Londýně.



Brewster, David (1781–1868), skotský fyzik, matematik, astronom a vynálezce, který objevil, že stlačení isotropaní látky může vést ke vzniku optického dvojlomu. Dále experimentálně zjistil, že svírá-li odražený a lomený paprsek pravý úhel, je odražený paprsek lineárně polarizovaný (Brewsterův jev). Úhel dopadu se při této situaci nazývá Brewsterův úhel. Brewster studoval dvouosé krystaly a ukázal, že dvě optické osy nemusí nutně vést k dvojlomu. Vynalezl mj. kaleidoskop. Brewster studoval Edinburskou univerzitu, poté pracoval na Univerzitě v St. Andrews. Za své práce v optice získal řadu ocenění, například Coleyho medaili, Rumfordovu medaili, Keithovu cenu, Královskou medaili a další.

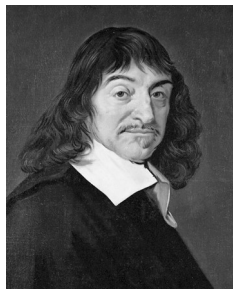


Coulomb, Charles-Augustin de (1736–1806), francouzský fyzik a vojenský inženýr, který prováděl pokusy s torzními vahami, které nezávisle na něm popsal také anglický chemik a objevitel kyslíku Joseph Priestley. Jeho výzkumy ho vedly k závěrům, že elektrické a magnetické síly ubývají s druhou mocninou vzdálenosti. Pro elektrické jevy vešel vztah $F = k qQ/r^2$ ve známost jako Coulombův zákon, přestože ho již před Coulombem zavedl skotský fyzik John Robison. Coulomb se také zabýval výzkumem tření. Po Coulombovi je nazvána jednotka elektrického náboje – coulomb. V době revoluce (1789) spolupracoval s revoluční vládou na tvorbě nových jednotek měř a vah. Podílel také se na návrhu podpůrných stěn pro zamezení sesuvu půdy. Vystudoval Královskou inženýrskou školu v severofrancouzském městě Charleville-Mézières.

Debye, Peter Joseph William (1884–1966), holandský fyzik a chemik. Na počátku kariéry se zabýval vířivými proudy. Jako první popsal chování asymetrických molekul pomocí dipólového momentu a přímo je zkoumal rentgenovou difraktoметриí. Na jeho počest se proto měří dipólový moment molekul v jednotkách debye. Jeho práce měla velmi široký záběr, rozšířil například Einsteinovu teorii měrného tepla o nízkofrekvenční fonony, zabýval se teorií elektrické vodivosti elektrolytů, teorií atomár-



ních obalů, vysvětlil Comptonův jev. V roce 1936 obdržel Nobelovu cenu za chemii za příspěvek ke studiu molekulárních struktur. Ve fyzice je podle něho pojmenována Debyeova stínící vzdálenost. Jeho původní holandské jméno Petrus Josephus Wilhelmus Debye si nechal legálně změnit na Peter Joseph William Debye.



Descartes, René (1596–1650), francouzský filosof, který vyčlenil matematiku a fyziku z filozofie a stal se otcem současného pojetí vědy. Odmítal navazovat na práce svých předchůdců, vždy šel svou vlastní cestou. Ve vědě předpokládal, že problémy je třeba analyzovat, tedy nejprve problém rozdělit na řadu jednodušších celků, ty samostatně řešit a teprve poté spojit do výsledného řešení. Zabýval se mnoha oblastmi matematiky a fyziky, například teorií čísel, zavedl a prosadil kartézskou souřadnicovou soustavu, spolu s Pierrem de Fermatem se stal zakladatelem analytické geometrie. Ve fyzice se věnoval zejména

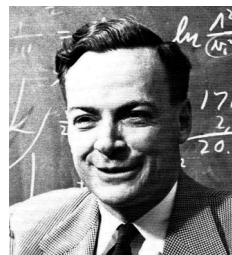
klasické mechanice a optice. Z hlediska zde probíraného elektromagnetického pole se pokusil odvodit zákon zachování lomu. To se mu podařilo na základě mechanické představy kuliček prolétajících stěnou. Ve výsledném vztahu je podíl rychlostí před a za stěnou, který ale mu vyšel obráceně, než tomu je u skutečného lomu světla. Pokud tento podíl dále nezkoumal a označil za materiálovou konstantu (index lomu), nebyla chyba v odvození poznatelná. Na základě odvozeného vztahu propracoval teorii duhy a konstruoval jednoduchá optická zařízení, například mikroskop. Descartes studoval mnoho škol, první z nich byla Univerzita v Poitiers.



Faraday, Michael (1791–1867), anglický knihař, který se zajímal o elektřinu. Získal možnost pracovat jako sekretář a později jako asistent v laboratoři Humphry Davyho, kde prováděl své experimenty. V roce 1821 napsal článek o současném náhledu na elektřinu a magnetismus, ve kterém uveřejňuje Oerstedovy pokusy. Byl jedním z největších experimentátorů vůbec. Jelikož byl samouk, stávalo se, že občas nerozuměl matematické z Ampèrových prací. Vlastnosti magnetické síly vedly Faradaye k domněnce, že magnetická síla je kruhová. Také objevil, že otáčení

magnetu lze využít k výrobě elektrického proudu. V roce 1821 vzniklo dynamo (zařízení, které je schopné přeměnit pohyb na elektřinu). V roce 1831 objevil elektromagnetickou indukci a v roce 1857 formuloval zákony pro elektrolýzu. V letech 1839–1855 publikoval své výsledky ve třísvazkovém díle *Experimental Researches in Electricity*. V roce 1845 vytvořil koncept, který popisoval elektrická a magnetická pole (plní formulace elektřiny a magnetizmu). Experimentoval také s dielektriky v kondenzátorech. Zobrazil magnetické pole tyčového magnetu pomocí železných pilin. Věnoval se ale i jiným oblastem, než byly elektřina a magnetismus. V roce 1859 vysvětlil například regulaci – spojení dvou bloků ledu do jednoho celku díky působení tlaku. Správně předpokládal, že se tlakem vytvoří mezi bloky ledu tenká vrstva vody, která poté zamrzne.

Feynman, Richard Philips (1918–1988), americký fyzik, který se zabýval kvantovou elektrodynamikou a stal se jedním z jejich spoluvůrců. V roce 1965 byl za tyto práce odměněn Nobelovou cenou za fyziku spolu se Shin-Itiro Tomonagou a Julianem Schwingerem. Nejznámější je pravděpodobně díky Feynmanovým

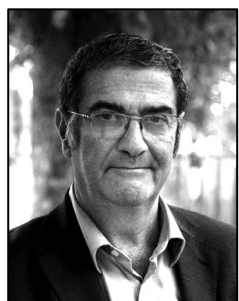


diagramům, které umožňují provádět komplikované výpočty v kvantové teorii pole a jednoduše graficky prezentují probíhající kvantové procesy. V elektřině a magnetizmu je po Feynmanovi pojmenována Feynmanova formule pro výpočet elektrických a magnetických polí včetně zářivých členů. Feynman byl vynikající pedagog a zanechal po sobě skvělou učebnici fyziky (Feynmanovy přednášky z fyziky), která je souhrnem jeho přednášek zapsaných studenty. V pozdějších letech také napsal několik populárních humorných sbírek o svém životě.



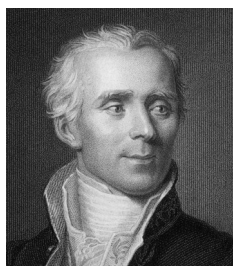
Fresnel, Augustin-Jean (1788–1827), francouzský fyzik, který nezávisle provedl stejný dvojtěrbinový experiment jako Thomas Young. Fresnel ukázal, že pouze příčné vlnění světla může být zodpovědné za dvojitý lom. Při odvozování Fresnelových rovnic pro odraz a lom postupoval obráceně, od známých skutečností k teorii. Vytvořil také matematickou teorii lomu a polarizace v anizotropních krystalech. Z této teorie předpověděl William Rowan Hamilton kónický lom, který byl zanedlouho objeven. Fresnel vystudoval Pařížskou polytechniku (École Polytechnique). Za své práce získal řadu ocenění, například Velkou cenu za matematické vědy, Rumfordovu medaili, stal se zahraničním členem Královské společnosti a jeho jméno je zapsáno mezi 72 nejvýznamnějšími vědci na Eiffelově věži v Paříži (spolu s například Coulombem, Laplacem a Cauchym). Jsou po něm pojmenovány: Fresnelův hranol, Fresnelova čiočka a Fresnelovy vztahy.

Gauss, Karl Friedrich (1777–1855), německý matematik, který je občas nazýván princem mezi matematiky. Byl fenomenálním dítětem, ve třech letech upozornil otce na chybu při výpočtu mzdy a řekl mu správný výsledek. Když byl ve škole a vyučující jim zadal sečíst čísla od 1 do 100, odvodil formuli pro součet aritmetické řady. Podle Gausse se ve statistice nazývá Gaussovo rozdělení. V integrálním počtu je na jeho počest pojmenována Gaussova věta pro převod plošného a objemového integrálu. Podle Gausse je také pojmenována jednotka indukce magnetického pole gauss. Zabýval se teorií čísel, integrálním a diferenciálním počtem, teorií čísel, geometrií, matematickou analýzou, elektrostatikou, magnetostatikou, astronomií, optikou, geodézií a mnoha dalšími obory přírodních věd. Stěžejní dílo z teorie čísel (*Disquisitiones Arithmeticae*) napsal již v 21 letech.



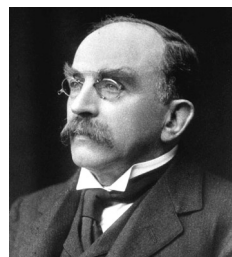
Haroche, Serge (*1944), francouzský fyzik, který získal Nobelovu cenu za fyziku pro rok 2012 za vývoj nových technik měření na kvantových objektech, která tyto objekty nezničí a umožní nedestruktivní zjištění jejich kvantového stavu a manipulaci s nimi. Haroche se narodil marockému právníkovi ukrajinské učitelce. Haroche se trvale usídlil ve Francii v roce 1956. Dnes je profesorem a vedoucím katedry kvantové fyziky na Francouzské kolejí (nejprestižnější francouzská vědecká kolej sídlící poblíž staré Sorbonny). Haroche se zabývá především atomovou fyzikou a kvantovou optikou. V 70. letech vyvinul novou metodu laserové spektroskopie založenou na kvantových rázech předpovězených kvantovou elektrodynamikou. Poté se dlouhodobě zabýval kvantovými vlastnostmi Rydbergových atomů. Tyto obří atomy jsou mimořádně citlivé na mikrovlny, a to je

přímo předurčuje ke studiu interakce atomů s fotony. Haroche se svým týmem sledoval ztrátu kvantových vlastností Rydbergova atomu (dekoherenci) ve specializovaném (Ramseyově) interferometru. Jeho dvě ramena byla doplněna supravodivou mikrovlnnou dutinou, kterou jeho skupina vyvinula. Dutina obsahující jen několik fotonů je vhodná pro testování kvantové dekoherence a k realizaci logických operací, které využívají kvantový přenos informace.

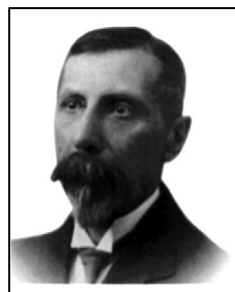


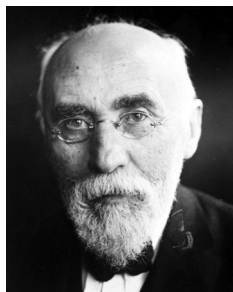
Laplace, Pierre Simon de (1749–1827), francouzský fyzik a matematik, který dal konečnou podobu matematické astronomii tím, že shrnul poznatky všech svých předchůdců v pěti svazcích díla *Mécanique Céleste* (Nebeská mechanika) z let 1799–1825. Jako první spočítal z klasické mechaniky poloměr tělesa, které neopustí ani světlo (dnes hovoříme o Schwarzschildově poloměru). Laplace systematizoval a dále rozvíjel teorii pravděpodobnosti ve svém dalším díle *Essai Philosophique sur les Probabilités* (1814). Jako první vyřešil Gaussův integrál jako odmocninu z π . Také studoval integrální transformaci, dnes nazývanou Laplaceova transformace. K dokonalosti ji dovedl Heaviside. Laplace se podepsal na Lavoisierově kalorimetrické teorii. Určil pomocí sebou navrženého kalorimetru měrná tepla mnoha látek. Objevil a zavedl gravitační potenciál a ukázal, že ve vakuu ho je možné spočítat pomocí Laplaceovy rovnice. Totéž platí pro elektrostatiku a magnetostatiku. Poté, co byl Napoleonem zvolen ministrem vnitra, byl zanedlouho propuštěn se slovy: „Přinášíte nekonečně malou naději k vyřešení velkých problémů.“

Larmor, Joseph sir (1857–1942), irský fyzik a matematik. Vysvětlil Fitz-Geraldovu kontrakci nezávisle na Lorentzovi a předpověděl dilataci času. Navrhl éter jako dokonale nestlačitelnou a elastickou tekutinu a propojil tuto teorii s mechanickým modelem éteru, který navrhl Kelvin (mříž setrvačnicků). Larmor vypočetl energii uvolňovanou při záření urychleného náboje (dnes tento vztah nazýváme Larmorova formule), vysvětlil rozštěpení spektrálních čar v magnetickém poli. Jako jeden z prvních předpokládal, že geomagnetické bouře souvisí se slunečními vzplanutími a jsou způsobeny elektrony přicházejícími ze Slunce. Zabýval se elektrodynamikou, termodynamikou a elektronovou teorií látek. Studoval v Belfastu a v Cambridgi. V roce 1903 se stal profesorem v Cambridgi. Na jeho počest je pojmenován Larmorův poloměr – poloměr pohybu nabitě částice v magnetickém poli a Larmorova formule udávající výkon dipólového záření.



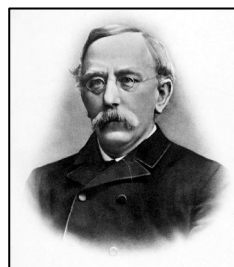
Liénard, Alfred-Marie (1869–1958), francouzský fyzik a inženýr. Vystudoval Pařížskou polytechniku, po třech letech se stal profesorem elektroinženýrství na Důlní škole v Paříži. Nejvíce se zabýval mechanikou a elektřinou a magnetizmem. Nezávisle na Emilu Wiechertovi odvodil elektromagnetické potenciály pohybující se nabitě částice se započtením retardace signálu. Dnes tyto potenciály nazýváme Lienardovy-Wiechertovy potenciály. Zabýval se ale i pružností a pevností, termodynamikou a hydrodynamikou. Za své výzkumy získal Ponceletovu cenu a Řád čestné legie. Byl prezidentem Francouzské matematické společnosti a Francouzské společnosti pro elektrotechniku.



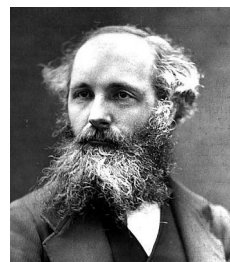


Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928), holandský fyzik, který v šestnácti letech začal studovat na Leidské univerzitě, promoval jako dvaadvacetiletý a po dvou letech se stal vysokoškolským profesorem teoretické fyziky v Leidenu. Upustil díky Hertzovým pokusům od Helmholtzovy teorie elektromagnetického pole a chápal Maxwellovu teorii, k níž se ihned přiklonil, za velký úspěch. Čistě na základě Maxwellovy teorie elektromagnetického pole zcela přestavěl tehdejší fyziku. Jako první považoval za zdroje elektromagnetického pole oscilující nabitě částice, které jsou součástí atomů (elektrony). Maxwellovy rovnice odvodil z představy látky jako soustavy oscilátorů. Předpověděl, že silné magnetické pole povede k rozštěpení spektrálních čar. Experimentálně tento fakt prokázal jeho žák Pieter Zeeman. Oba získali Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1902. Objevil transformaci proměnných, vůči které Maxwellovy rovnice nemění svůj tvar (dnes Lorentzova transformace). Nezávisle na Fitzgeraldovi prokázal nulový výsledek Michelsonova-Morleyho experimentu plynoucí ze zkracování ramen interferometru. Těmito pracemi postavil základy pro vytvoření speciální relativity. Po Lorentzovi je pojmenována Lorentzova síla působící na nabitou částici v elektromagnetickém poli a Lorentzova transformace ve speciální relativitě.

Lorenz, Ludvig Valentin (1829–1891), dánský fyzik a matematik. Zabýval se materiálovými charakteristikami. Pro průhledné materiály odvodil nezávisle na Lorentzovi matematický výraz pro závislost indexu lomu na hustotě (Lorentzova-Lorenzova rovnice). Objevil také vztah závislosti elektrické a tepelné vodivosti na teplotě (Wiedemannův-Franzův-Lorenzův zákon). Je autorem Lorenzovy kalibrační podmínky pro elektromagnetické potenciály, která mu umožnila výpočty vlastností světelného vlnění, včetně rychlosti světla. Zabýval se rozptylem světla. Několik let před Oliverem Heavisidem odvodil telegrafní rovnici, ale nepublikoval ji.

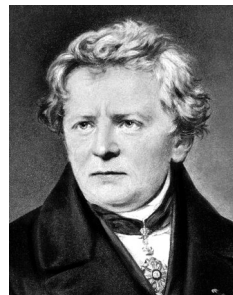


Maxwell, James Clerk (1831–1879), skotský matematik a fyzik, publikoval matematickou a fyzikální teorii elektromagnetického pole. Chtěl prezentovat teorii elektromagnetických jevů mnohem jednodušeji než Faraday, Kelvin i Ampère, kteří se touto oblastí již zabývali. Odvodil, že světlo je složeno z příčných modů a je způsobeno magnetickými a elektrickými jevy. Svoji teorii elektřiny a magnetizmu publikoval v roce 1873 v knize *A Treatise on Electricity and Magnetism*, ve které byly zahrnuty vztahy dnes známé jako Maxwellovy rovnice. Dnešní podobu rovnic ovšem vytvořili Oliver Heaviside a Heinrich Hertz. Maxwellova teorie elektromagnetického pole přímo vede k existenci elektromagnetických vln. Jejím přirozeným důsledkem je speciální relativita, která splňuje stejné časoprostorové transformace jako Maxwellovy rovnice. Maxwellem předpověděnou existenci elektromagnetických vln dokázal Heinrich Hertz až po Maxwellově smrti. Maxwell správně odhadnul, že Saturnovy prstence jsou tvořeny drobným kamenitým materiálem. S Clausiem vyvinul Maxwell kinetickou teorii plynů a jeho studie kinetické teorie ho zavedla v roce 1867 k formulování paradoxu Maxwellova démona. Ukázal, že druhý termodynamický zákon je pouze statistický zákon popisující vlastnosti velkého počtu částic. V roce 1871 se stal prvním ředitelem dnes slavné Cavendishovy laboratoře v Cambridgi. Po Max-



wellovi jsou kromě Maxwellových rovnic pojmenovány: Maxwellovo rozdělení, Maxwellův démon, jednotka magnetického toku, horský masiv na Venuši, mezera mezi Saturnovými prstenci a dalekohled JCMT (James Clerk Maxwell Telescope) pro infračervený obor. Existuje také Maxwellova nadace.

Ohm, Georg Simon (1789–1854), německý fyzik, který se zabýval elektřinou. Z pokusů s elektrickými články vlastní konstrukce odvodil, že proud tekoucí vodičem je přímo úměrný napětí a průřezu vodiče a nepřímo jeho délce. Zabýval se také akustikou a optikou. Valnou část vzdělání získal samostudiem. Doktorát mu byl udělen na Univerzitě v Erlangenu. Zpočátku učil na jezuitském gymnáziu. V roce 1825 publikoval práci o závislosti proudu na délce vodiče. O rok později navrhl popis elektrického obvodu založeném na Fourierově modelu vedení tepla. Svůj zákon $I = U/R$ pak definitivně formuloval v roce 1827, když odjel na rok do Berlína, kde se věnoval výzkumu. Doufal, že zde dostane nabídku z univerzity, což se nestalo, ale Ohm zde zůstal a začal učit matematiku na berlínských školách. Roku 1833 získal místo v Norimberku, ale stále to nebyla jeho vysněná univerzita. Roku 1842 se stal zahraničním členem anglické Královské společnosti. Na univerzitu se dostal až pět let před svou smrtí v Mnichově a o tři roky později se stal i řádným profesorem fyziky. Kromě známého Ohmova zákona o vztahu mezi proudem a napětím Ohm formuloval i zákony z fyziologické akustiky. Ohmův akustický zákon říká, že hudbu lidské ucho vnímá jako součty čistých harmonických tónů. Ohmův fázový zákon pak tvrdí, že fáze a tvar zvukové vlny nemá vliv na to, jak ho ucho přijímá. Po Ohmovi je také pojmenována jednotka elektrického odporu ohm.

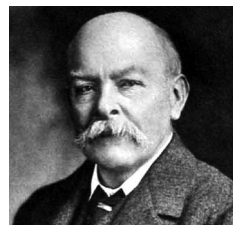


Planck, Max, viz sekce Statistická fyzika

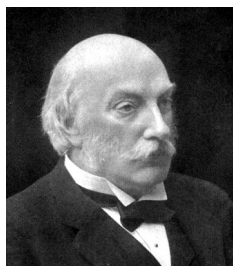


Poisson, Siméon Denis (1781–1840), francouzský matematik, fyzik a geometr. Poisson byl Laplaceův student. Zobecnil Laplaceovu rovnici v elektřině a magnetizmu o zdrojové členy. Nyní se tato rovnice nazývá Poissonova. Ukázal, že na povrchu vodiče musí být konstantní potenciál. Formuloval teorii povrchových proudů a objemových magnetizací. Posuzoval Fresnelovu práci věnující se ohybu světla a známé jsou také jeho práce zabývající se pravděpodobností. Studoval Pařížskou polytechniku. Již po dvou letech studia publikoval dvě vědecké práce a obdržel za ně mimořádné ocenění. Navštěvoval přednášky Josepha Lagrange z funkcionální analýzy. Ihned po ukončení studií se stal asistentem, v roce 1802 mimořádným a v roce 1806 řádným profesorem. Od roku 1808 pracoval jako astronom v Bureau des Longitudes. I přes své obrovské vytížení (zastával mnoho významných funkcí) publikoval více než 300 matematických prací.

Poynting, John Henry (1852–1914), anglický fyzik, který zkoumal vyzařování energie v elektromagnetických vlnách. V roce 1884 publikoval zákon zachování energie v elektromagnetickém poli, jehož součástí je poznatek, že tok energie záření je dán vektorovým součinem intenzity elektrického pole a intenzity magnetického pole (Poyntingovým vektorem). V tomto směru se přenáší energie a míří grupová rychlost. V roce 1893 měřil nezá-



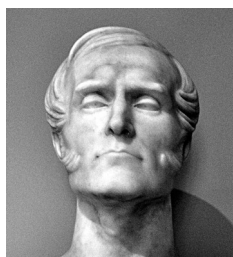
visle na ostatních gravitační konstantu. Je po něm také pojmenován Poyntingův–Robertsonův jev popisující drift prachových částic způsobený tlakem slunečního záření, který spoluobjevil v roce 1903. Poynting studoval fyziku na Owenově koleji v Manchesteru, k jeho učitelům patřil například Osborne Reynolds. Poté studoval matematiku v Cambridgi. Na konci 70. let pracoval v Cavendishově laboratoři pod vedením Jamese Clerka Maxwella. Byl profesorem fyziky na Masonově vědecké koleji (dnes Univerzita v Birminghamu).



Rayleigh (1842–1919), vlastním jménem John William Strutt, s šlechtickým titulem třetí baron Rayleigh. Rayleigh byl anglický fyzik zabývající se akustikou a optikou, zejména šířením vln v tekutinách. V roce 1904 získal Nobelovu cenu za fyziku za izolování inertního plynu argonu. Jeho špatný zdravotní stav mu znemožnil dokončit studia na dvou školách (Eton, Harrow). V roce 1857 započal soukromé čtyřleté studium pod vedením vlastního učitele. V roce 1861 vstoupil na Kolej Trinity v Cambridgi. Studia ukončil v roce 1865. Intenzivně se zabýval Max-

wellovou teorií elektromagnetizmu, a to jak experimentálně, tak teoreticky. V roce 1878 vydal dvoudílný spis *The Theory of Sound*, který se stal základem akustické literatury. Odvodil rovnici popisující závislost rozptylu světla v atmosféře na vlnové délce a vysvětlil tak jako první modrou barvu oblohy. Pokoušel se také, jako mnozí, odvodit zákon záření absolutně černého tělesa. Jeho vztah (Rayleighův zákon) popisuje správně závislost intenzity záření na vlnové délce pro dlouhé vlnové délky. Pro krátké vlnové délky intenzita diverguje a zákon neplatí. Pro celé spektrum se podařilo zákon odvodit až Maxu Planckovi v roce 1901.

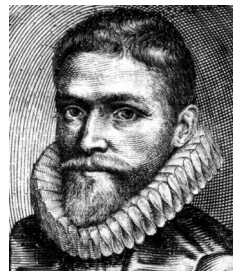
Sahl, Ibn (940–1000), perský matematik a fyzik. Kolem roku 984 napsal pojednání o optice, v něž navazoval na Ptolemaiovu *Optiku*. Ve spisu se zabýval zakřivenými zrcadly a čočkami a objevil zákon lomu. Na základě tohoto zákona počítá tvar čoček, které zajistí, aby neměly některé vady způsobené jejich geometrií. Zabývá se parabolickými a eliptickými zrcadly, čočkami s dvěma konvexními plochami i dalšími optickými prvky. Zákon lomu v západním světě znovuobjevili až René Descartes a Willebrord Snellius.



Savart, Félix (1791–1841), francouzský fyzik a akustik. Savart původně vystudoval medicínu ve vojenské nemocnici v Métách, v roce 1816 získal lékařský titul na Univerzitě ve Štrasburku. Savartovi ale učarovala různá vibrující tělesa a jimi vytvářené vlny a začal se zabývat akustikou. Vynalezl tzv. Savartovo kolo – rotující kovový disk se zuby, který je zdrojem zvuku přesně definované frekvence úměrné úhlové rychlosti kola. V roce 1817 se přestěhoval do Paříže, kde zkonstruoval housle, na kterých konal pokusy se zvukem, zejména ho zajímal přenos zvuku ze

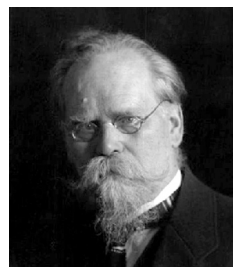
strun do dřevěného těla houslí. Studoval také hlasy zvířat a lidí. V roce 1820 získal místo učitele fyziky na Pařížské univerzitě. Zde spolu s Biotem konali experimenty s magnetickým polem generovaným elektrickým proudem. V roce 1820 objevili Biotův–Savartův zákon, podle kterého lze z rozložení elektrických proudů dopočítat vytvořené magnetické pole. Laplace dal tomuto zákonu elegantní matematickou podobu. V roce 1827 se Savart stal členem Pařížské akademie a o rok později profesorem na Collège de France. Po Savartovi jsou pojmenovány: Biotův–Savartův zákon, Savartovo kolo.

Snellius, Willebrord van Roijen (1580–1626), holandský fyzik, astronom, optik a matematik. V roce 1621 znovuobjevil zákon lomu, který byl znám již v roce 984 perskému matematikovi Ibn Sahlvi. Podrobně zkoumal křivku loxodromu. Vylepšil metodu výpočtu čísla π pomocí polygonů a spočítal ho na 7 platných cifer (v té době bylo známo na 2 platné cifry). Navrhnul způsob měření obvodu Země za pomoci triangulace mezi dvěma městy na stejné zeměpisné šířce. Vystudoval, stejně jako jeho otec, Univerzitu v Leidenu, kde zastával pozici profesora matematiky od roku 1613. Je po něm pojmenován kráter na Měsíci Willebrord Snellius.



Thomson, Joseph John, sir (1856–1940), anglický fyzik, v roce 1897 objevil elektron v katodovém záření. Spočítal poměr hmoty a náboje elektronu a navrhl hmotový spektrometr, pomocí kterého objevil izotopy prvků. Je také tvůrcem pudingového modelu atomu (spojitý atom s elektrony jako rozinkami). Tento model byl překonán jeho studentem, Ernestem Rutherfordem v roce 1911, kdy Rutherford objevil atomové jádro. Thomson objevil přirozenou radioaktivitu draslíku. Jako první prokázal, že vodík má jen jeden jediný elektron. Dlouhá léta se také zabýval elektrickou vodivostí plynů. Odvodil formuli pro rozptyl elektromagnetického vlnění na volné nabitě částici, například na elektronu (Thomsonův rozptyl). Thomson studoval inženýrství na Univerzitě v Manchesteru (tenkrát Owens College), studia ale zakončil v Cambridgi, kam se přestěhoval. V roce 1884 se zde stal profesorem fyziky. Byl mimořádně nadaným učitelem. Sedm z jeho žáků získalo Nobelovu cenu za fyziku. Toto nejvyšší ocenění navíc získal v roce 1937 i jeho syn George Paget Thomson za objev vlnových vlastností elektronu při ohybu elektronu na krystalické mřížce. Od roku 1884 byl členem Královské společnosti (v letech 1915 až 1920 jejím prezidentem). V roce 1906 získal Nobelovu cenu za fyziku za objev elektronu a výzkum vodivosti plynů. V roce 1908 byl Thomson povýšen do šlechtického stavu, v roce 1912 získal královský řád za zásluhy. Od roku 1918 byl děkanem koleje Trinity v Cambridgi. Zde setrval až do konce svého života.

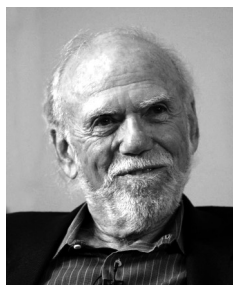
Wiechert, Emil Johann (1861–1928), německý fyzik a geofyzik. Rovným dílem přispíval k oběma vědním oborům. V geofyzice razil myšlenku, že je nitro Země složeno z různých vrstev a prosazoval zkoumání nitra Země seismickými vlnami. Ve fyzice objevil nezávisle na Josephu Thomsonovi elektron v katodovém záření. Zajímal se o Einsteinovu speciální relativitu. Nezávisle na Alfrédu Liénardovi nalezl potenciály pro pohybující se nabitou částici se započtením retardace signálu (tzv. Liénardovy-Wiechertovy potenciály). Vystudoval univerzitu v Königsbergu a Univerzitu v Göttingenu. Po Wiechertovi je pojmenován kráter na Měsíci.



Wien, Wilhelm, viz sekce Statistická fyzika

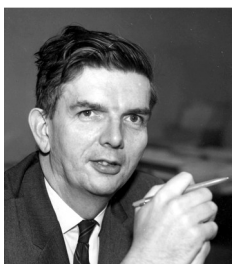
Relativita

Carswell, Robert (Bob), anglický astronom, spoluobjevitel první gravitační čočky. Carswell je profesorem v Astronomickém institutu Cambridžské univerzity. Zabývá se zejména pozorováním a vyhodnocováním spekter kvazarů. Je autorem programového balíku VoigtFit (v Pythonu) pro vyhodnocování profilů absorpčních spektrálních čar. V roce 1979 spolu s Dennisem Walshem a Rayem Weymanem objevili první gravitační čočku. Šlo o podvojný kvazar QSO 0957+561A/B, jehož spektra si byla velmi podobná. Ukázalo se, že jde o dva obrazy téhož kvazaru zobrazeného mezilehlou gravitační čočkou. Carswell se také zabývá kosmologií, zejména hledáním případné proměnnosti konstanty jemné struktury z pozorování velmi vzdálených objektů. K tomu využívá Zeemanův jev (rozštěpení čar v magnetickém poli). Je členem Mezinárodní astronomické unie a Královské astronomické společnosti.



Barish, Barry Clark (*1936), americký fyzik narozený v Neb-rasce. Fyziku vystudoval na Kalifornské univerzitě v Berkeley. Po studiích, v roce 1963, se stal experimentátorem na Caltechu. Nejprve se věnoval částicovým urychlovačům a připravoval experimenty pro Fermilab. Cílem jeho snažení byl detailní průzkum kvarkové struktury nukleonů. V jeho experimentech byly jako v jedněch z prvních pozorovány neutrální toky ve slabé interakci. V 80. letech byl ředitelem experimentu MACRO v italské podzemní laboratoři Gran Sasso. V experimentu vědci hledali exotické částice včetně magnetických monopolů.

Zdrojem částic bylo kosmické záření. V těchto experimentech byla nezávisle potvrzena nenulová hmotnost neutrin vedoucí na jejich oscilace. V roce 1991 se Barish stal profesorem na Caltechu a od roku 1994 fungoval jako vědecký pracovník rodičího se projektu LIGO. V roce 1997 byl jmenován ředitelem tohoto projektu. Za jeho ředitelování bylo LIGO nejen zprovozněno, ale vznikl i projekt na kompletní rekonstrukci detektoru (Advanced LIGO), která se nakonec uskutečnila v letech 2010 až 2015 a vedla v roce 2015 k objevu gravitačních vln. V letech 2005 až 2013 byl Barish ředitelem projektu mezinárodního lineárního urychlovače ILC. Je nositelem řady cen a členem mnoha vědeckých společností. V roce 2017 získal Nobelovu cenu za fyziku, a to za rozhodující podíl na stavbě detektoru LIGO a na detekci gravitačních vln.

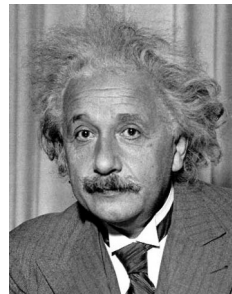


Dicke, Robert Henry (1916–1997), americký astronom a fyzik, který se zabýval kosmologií, jadernou fyzikou a teorií gravitace. Na konci šedesátých let v Princetonu vedl skupinu, která prováděla výpočty vzniku lehkých jader v průběhu velkého třesku a oddělení reliktního záření na konci velkého třesku. Skupina se pokoušela zkonstruovat anténu, kterou by reliktní záření zachytili, ale předběhli je Penzias a Wilson s anténou Bellových telefonních laboratoří. Dicke se svou skupinou také prováděl přesná ověřování platnosti principu ekvivalence. Dicke studoval v Princetonu, doktorát získal na Rochesterské univerzitě. V průběhu druhé světové války pracoval v Radiační laboratoři MIT, kde zkonstruoval citlivý radiometr, kterým stanovil

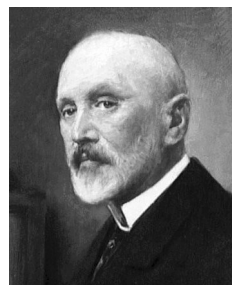
pracoval v Radiační laboratoři MIT, kde zkonstruoval citlivý radiometr, kterým stanovil

horní hranici teploty reliktního záření. Po válce se vrátil do Princetonu. V pozdějších letech se hluboce zabýval obecnou relativitou a jejími alternativními teoriemi. Dicke obdržel Národní medaili za vědu udělovanou prezidentem USA a Comstockovu cenu za fyziku, kterou uděluje Národní akademie věd USA. Z Dickeho skupiny získal Nobelovu cenu za kosmologii jediný Jim Peebles, a to až v roce 2019.

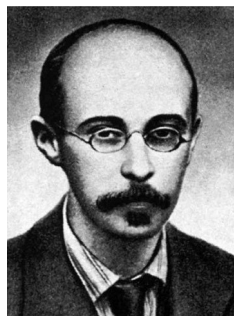
Einstein, Albert (1879–1955), německo-americký fyzik, autor speciální a obecné teorie relativity, vědec, který objasnil fotoelektrický jev a Brownův pohyb a odvodil společně s Bosem statistické rozdělení částic s celočíselným spinem. Speciální relativitu publikoval v roce 1905. Dal v ní do souladu klasickou mechaniku s Maxwellovou elektrodynamikou, ze které plynula nezávislost rychlosti světla na pohybu zdroje. Speciální relativita s sebou přinesla kontrakci délek, dilataci času a poznání, že čas a prostor nejsou absolutní. V roce 1905 Einstein také vysvětlil fotoelektrický jev. Předpokládal, že se světlo skládá z částic, jejichž energie je rovna násobkům elementárních kvant energie, která zavedl Max Planck při vysvětlení záření absolutně černého tělesa. Možnost vytržení elektronu kovu za pomoci světla je dána frekvencí jednotlivých kvant (fotonů), nikoli jejich počtem. Název foton pro tyto částice poprvé použil americký chemik Gilbert Lewis (1875–1946) až v roce 1926. V roce 1905 Einstein také vysvětlil Brownův pohyb. V roce 1916 publikoval novou teorii gravitace – obecnou relativitu. Gravitaci popisuje jako zakřivený časoprostor. Sama tělesa přispívají k zakřivení časoprostoru a pohybují se v něm po nejrovnějších možných drahách – geodetikách. Albert Einstein získal Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1921, paradoxně však za vysvětlení fotoelektrického jevu a nikoli za obecnou relativitu, která byla jeho hlavním přínosem k poznání zákonitostí přírody.



Eötvös, Loránd, baron (1848–1919), maďarský fyzik, který se ve svých vědeckých počátcích zabýval kapilárním jevy a povrchovým napětím. Později se věnoval gravitaci. Pomocí torzních vah ukázal, že podíl gravitační a setrvačné hmotnosti je konstantní s relativní přesností 5×10^{-9} . Dnes je tato skutečnost ověřena s přesností 10^{-14} a je základním stavebním kamenem obecné relativity. Vynalezl také torzní kyvadlo. Eötvös se narodil v revolučním roce 1848 tehdejšímu ministru školství v povstalecké vládě. Eötvös studoval na univerzitách v Heidelbergu a Königsbergu. Po získání doktorátu se vrátil do Maďarska a působil na



Budapešťské univerzitě, která byla v roce 1950 přejmenována na Univerzitu Loránda Eötvöse. Po Eötvösovi je dále pojmenován Eötvösův zákon (týká se povrchového napětí) a kráter na Měsíci. Loránd Eötvös byl šlechticem, celé jeho jméno je baron Loránd Eötvös de Vásárosnamény.



Fridman, Alexandr (1888–1925), ruský matematik, fyzik a meteorolog. V roce 1922 našel nestacionární řešení Einsteinových rovnic obecné relativity pro homogenní prostředí, které znamenalo nutnost rozpínání nebo smršťování Vesmíru. Vytvořil první kosmologický model začínající Velkým třeskem nezávisle na Lemaîtreovi nebo Gamowovi. Ukázal také, že Vesmír se zápornou křivostí má nekonečné rozměry jen pokud je jednoduše souvislý, tj. jeho geometrie nemá „díry“ jako ementál. Za první.

světové války byl letcem, vyučoval na letecké škole. Učarovalo mu balónové létání, kterému se věnoval po válce. Při posledním letu měl jeho balón poruchu, Fridman ve stratosféře prochládl, dostal zápal plic a zanedlouho po tomto letu zemřel. Po Fridmanovi je pojmenována Fridmanova metrika a kráter Fridman na Měsíci. Správný český přepis jeho příjmení do češtiny je Fridman. V západním světě se požívá Friedman nebo Friedmann, kráter na Měsíci má název Fridman dle ruského originálu jména.



Fuller, Robert Works (*1936), americký teoretický fyzik, který se krátce zabýval kvantovou teorií, jadernou fyzikou a obecnou relativitou. V roce 1962 spolu s Johnem Archibaldem Wheelerem studovali stabilitu Einsteinova-Rosenova mostu a zjistili, že je toto řešení nestabilní. Fuller vystudoval fyziku v Princetonu, kde získal doktorát. Poté přednášel na Kolumbijské univerzitě. Sociální neklid 60. let přivedl Fullera k politice, stal se autorem sociálních reforem. Většinu aktivní kariéry strávil na Oberlinské univerzitě, kde se především vyučují humanitní a společenské obory a umění. Na této vysoké škole Fuller úspěšně vystudoval bakalářskou etapu svého vysokoškolského studia (pobýval zde před studiem v Princetonu). V roce 1970 se stal desátým rektorem Oberlinské univerzity. Politická kariéra ho přivedla i do Oválné pracovny, v níž se setkal s prezidentem Spojených států Jimmim Carterem.



Hubble, Edwin Powel (1889–1953), americký astronom, vedoucí osobnost astronomie 20. století. Hubble byl sportovně založený vysoký a urostlý muž, za studií na Univerzitě v Chicagu hrál aktivně basketbal a také se věnoval boxu, který chtěl původně dělat profesionálně. Původně studoval práva a krátce dokonce provozoval advokátní kancelář. V roce 1919, pouhé tři roky po publikování Einsteinovy obecné relativity, získal místo na observatoři na Mount Wilsonu, kde byl tehdy největší dalekohled světa, dvouapůlmetrový Hookův dalekohled. V roce 1923 s ním zkoumal Velkou mlhovinu v Andromedě a ke svému překvapení zjistil, že je složena z mnoha hvězd. Nalezl zde i cefeidy, pomocí kterých odhadl vzdálenost. Edwin Hubble tak jako první objevil cizí galaxii a uvědomil si, že Mléčná dráha není celým vesmírem. V následujících letech objevil řadu dalších galaxií a naráz tak zvětšil svět, ve kterém žijeme. Hubble se detailně zabýval objevenými galaxiemi a navrhl jejich klasifikaci. V roce 1929 z posuvu spektrálních čar zjistil, že se galaxie vesměs od nás vzdalují, a to úměrně jejich vzdálenosti (Hubblův-Lemaîtreův zákon). Hubble stanovil konstantu úměrnosti na $526 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Dnes se její hodnota odhaduje na $70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Chyba byla dána tehdejší neznalostí vzdáleností ve vesmíru. Červené posuvy tzv. extragalaktických mlhovin (název galaxií před jejich Hubblovým objevem) naměřil již Vesto Slipher v letech 1912 až 1915. Slipherova měření interpretoval jako expanzi vesmíru belgický kněz abbé Lemaître v roce 1927, tedy o dva roky dříve než Hubble. Dokonce odhadl koeficient úměrnosti mezi rychlostí vzdalování a vzdáleností (dnešní Hubblovu konstantu) a vyšla mu přibližně stejná hodnota jako Hubblovi. Není známo, zda Hubble o této práci věděl. Hubble Slipherova měření použil také a doplnil je dalšími hodnotami. Hubble se stal prvním pozorovatelem na pětimetrovém dalekohledu na Mt. Palomaru. Hubble získal Newcombovu cenu, Bruceovu medaili, zlatou medaili Královské společnosti a další ocenění. Jsou po něm pojmenovány: kráter na Měsíci, planetka 2069 Hubble a Hubblův vesmírný dalekohled.

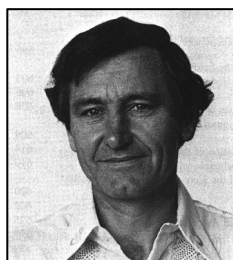


Hulse, Russel Alan (*1950), americký fyzik a radioastronom, který spolu s Josephem Taylorem zkoumali podvojnou neutrovnou hvězdu PSR 1913+16. Jde o unikátní relativistický systém, na kterém pozorovali změnu orbitální periody přesně odpovídající úniku energie ze systému gravitačními vlnami. Šlo tak o první nepřímé potvrzení existence gravitačních vln. Za tyto práce obdrželi Russel Hulse a Joseph Taylor Nobelovu cenu za fyziku v roce 1993. Hulse získal doktorát v roce 1975 na Massachusettské univerzitě v Amherstu. Poté pracoval na radioteleskopu v Green Banku. Nakonec se stal zaměstnancem Princetonu, kde pracoval dlouhá léta v Plazmatické laboratoři. Od roku 2003 vyučoval na Texaské univerzitě v Dallasu.



Christoffel, Elwin Bruno (1829–1900), německý matematik zabývající se především tenzorovým počtem (zde jsou po něm pojmenovány koeficienty afinní konexe – Christoffelovy symboly). Zabýval se také dalšími partiemi matematiky: diferenciálními rovnicemi, konformním zobrazením, teorií potenciálů, teorií invariantů, ortogonálními polynomy atd. Věnoval se také geodézii a rázovým vlnám. Vystudoval Berlínskou univerzitu, kde byl žákem Johanna Dirichleta. Doktorát získal v roce 1856. V roce 1872 se stal profesorem na Univerzitě ve Štrasburku, kde zůstal až do důchodu.

Chvolson, Orest Danilovič (1852–1934), ruský a později sovětský fyzik. Byl jedním z prvních, kteří navrhli a zkoumali jev gravitační čočky. Svou práci publikoval už v roce 1924, Einsteinova zmínka o gravitačních čočkách vyšla až v roce 1936. První gravitační čočka byla pozorována v roce 1979. Chvolson studoval na Univerzitě v St. Pětěrburgu, kde se později stal profesorem. Chvolson publikoval řadu článků z různých odvětví fyziky, například se zabýval elektřinou a magnetizmem, fotometrií a měřením teploty slunečního povrchu. V roce 1924 ukázal, že vyšší koncentrace hmoty může posloužit jako gravitační čočka, která zobrazí sféricky symetrický objekt umístěný v jedné linii s čočkou a pozorovatelem jako prsteneček, kterému se dnes většinou říká Einsteinův prsteneček. Chvolson se stal čestným členem Akademie věd Sovětského svazu a obdržel Řád rudé zástavy práce. Je po něm pojmenován kráter na Měsíci Khvolson.

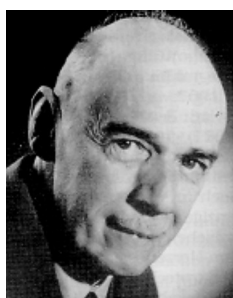


Kerr, Roy (1934), novozélandský matematik, který jako první našel v roce 1963 řešení Einsteinových rovnic obecné relativity pro rotující symetrické těleso. Nalezl tak vlastnosti časoprostoru v okolí rotujících černých děr. Vystudoval Univerzitu v Canterbury na Novém Zélandě, doktorát získal v Cambridgi. Poté pracoval na Syrakuské univerzitě a krátkodobě u amerických vzdušných sil. Od roku 1962 pracoval na Univerzitě v Austinu, kde objevil Kerrovu metriku rotujícího tělesa. V roce 1971 se vrátil na Univerzitu v Canterbury.

Laplace, Pierre Simon, viz sekce Elektromagnetické pole

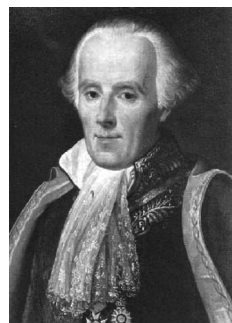


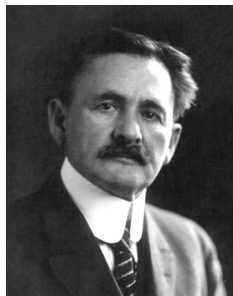
Lemaître, Georges Henri Joseph Édouard (1894–1966), belgický kněz, zpočátku abbé, později monseigneur, který se zabýval kosmologií a obecnou relativitou. Byl profesorem na Kato­lické univerzitě v Lovani. Znal práce Alexandra Fridmana, který na základě obecné relativity ukázal, že se homogenní vesmír může buď rozpínat, nebo smršťovat. Také věděl o červeném posuvu extragalaktických mlhovin (tak se nazývaly galaxie před jejich objevem), které naměřil americký astronom Vesto Slipher. Jako první odvodil z obecné relativity vztah, podle kterého je v expandujícím vesmíru rychlost objektu (galaxie) úměrná jeho vzdálenosti (Hubblův-Lemaîtreův zákon) a dokonce odhadnul ze Slipherových měření hodnotu konstanty úměrnosti (Hubbleovu konstantu). Její velikost mu vyšla přibližně desetinásobná oproti dnes udávané hodnotě. To bylo způsobeno značnou nejistotou v odhadech vzdáleností. Lemaître si byl vědom toho, že expandující vesmír musel být na počátku mimořádně hustý a horký. Tomuto stavu říkal prvotní atom (dnes hovoříme o velkém třesku). Svě poznatky publikoval v roce 1927 ve francouzštině v lokálním bruselském vědeckém periodiku. Říká se, že jeho práce nebyla v anglicky mluvícím světě známa, ale Lemaître prokazatelně o svých výsledcích informoval Alberta Einsteina a zúčastnil se i konference, na níž byl Edwin Hubble, který znovuobjevil lineární vztah mezi rychlostí expanze a vzdáleností o dva roky později, v roce 1929. Prvenství objevu expanze vesmíru jednoznačně patří Lemaîtreovi. Těsně před jeho smrtí bylo obje­veno reliktní záření (1965), které je považováno za klíčový důkaz expanze vesmíru.



Lense, Josef (1890–1985), rakouský matematik, který pomáhal Hansu Thirringovi s výpočty metriky časoprostoru v okolí rotujícího tělesa. Strhávání časoprostoru, které předpověděli v roce 1918, se proto nazývá Lenseovým-Thirringovým jevem. Lense byl profesorem aplikované matematiky na Technické univerzitě v Mnichově, v letech 1946 až 1951 byl ředitelem Matematického ústavu této univerzity. Kromě matematické fyziky se zabýval i čistou matematikou, například deskriptivní geometrií, rozvoji funkcí do řad a speciálními funkcemi. Věnoval se také historii matematiky a jejímu vztahu k ostatním vědám.

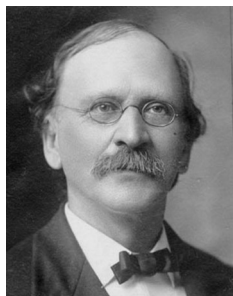
Michell, John (1724–1793), anglický filosof, fyzik a geofyzik, který byl průkopníkem seismologie, astrofyziky, optiky, zabýval se magnetizmem a gravitací. Jeho záběr byl velmi široký. Navrhl existenci objektů, z nichž nemůže uniknout světlo (dnes jim říkáme černé díry), předpokládal, že se zemětřesení šíří seismickými vlnami, zjistil, že dvojhvězdy jsou vázány vzájemným gravitačním působením, navrhl a zkonstruoval umělý magnet, vyráběl dalekohledy pro astronomická pozorování a navrhl torzní váhy pro změření hmotnosti Země. Ty posléze využil jeho přítel Henry Cavendish k určení velikosti gravitační konstanty. Měření hmotnosti Země či určení gravitační konstanty je totiž z experimentálního hlediska jedno a to samé. Michell je považován za otce seismologie a magnetometrie (věda, zabývající se měřením magnetického pole). Při popisu vesmíru využíval statistické metody. Vystudoval Queens' College v Cambridgi.





Michelson, Albert Abraham (1852–1931), fyzik, který se narodil v Polsku, ale ve třech letech s rodiči emigroval do Spojených států, kde začal v sedmnácti letech studovat námořní akademii. Stal se brzo uznávaným americkým vědcem. Dva roky získával zkušenosti s optikou v Německu a ve Francii (1880–1882), poté se navrátil do USA. Zkonstruoval Michelsonův interferometr, kterým zkoumal pohyb Země éterem. Uskutečnil mnoho pokusů spolu s Edwardem Morleyem, známých jako Michelsonovy-Morleyho pokusy. Došli k závěru, že rychlost světla je vždy stejná, bez ohledu na orientaci, místo nebo dobu umístění experimentu. Tím definitivně potvrdili platnost Maxwellovy elektrodynamiky, z níž plyne jiné skládání rychlostí než z klasické mechaniky. Za provedené experimenty získal Michelson jako první Američan Nobelovu cenu v roce 1907.

Misner, Charles (*1932), americký fyzik, jeden z průkopníků kvantové gravitace a numerických simulací v obecné relativitě. Spolu s Kipem Thornem a Johnem Wheelerem je jedním ze spoluautorů slavné učebnice obecné relativity *Gravitation*. Zabývá se kosmologií, problémem horizontu a úlohou topologie v obecné relativitě. Je jedním ze spoluvůrců Hamiltonovy formulace Einsteinových rovnic – tzv. ADM formalizmu (Arnowitt, Dressler, Misner), který by mohl vést k vytožené kvantové gravitaci a je odrazovým můstkem numerických simulací v obecné relativitě. Studoval na University of Notre Dame a v Princetonu.



Morley, Edward (1838–1923), americký chemik a vědec, spolupracovník Alberta Michelsona. Spolu provedli v roce 1887 slavný experiment, ve kterém zjistili, že rychlost světla nezávisí na vztažné soustavě. Morley vystudoval Williamsovu kolej v roce 1860. V roce 1869 se stal profesorem na Western Reserve College. Byl vynikajícím optikem, kolem roku 1887 byl asistentem a spolupracovníkem Michelsona. V roce 1895 se stal prezidentem Americké asociace pro pokročilý výzkum (AAAS) a v roce 1899 prezidentem Americké chemické společnosti. Získal řadu cen a medailí. Je po něm pojmenován kráter na Měsíci.

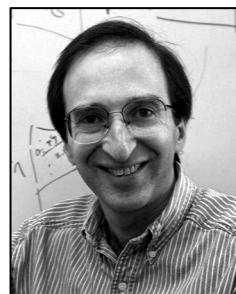
Nordström, Gunnar (1881–1923), finský teoretický fyzik, který se nejvíce proslavil tím, že spočetl metriku v okolí sféricky symetrického nabitého tělesa. Stejně řešení Einsteinových rovnic obecné relativity nezávisle také našli Hans Reissner, Hermann Weyl a George Barker Jeffery. Dnes se této metrice říká Reissnerova-Nordströmova metrika. Nordström je také autorem jedné z alternativních teorií k obecné relativitě, která ztroskotala na předpovědi ohybu světla kolem hmotných objektů. S Einsteinem byli přátelé a vzájemně se respektovali. V roce 1914 Nordström jako první využil extradimenze k zajištění vazby mezi elektromagnetizmem a gravitací. Později se tento proces stal součástí Kaluzovy-Kleinovy teorie. Nordström studoval na Technické univerzitě v Helsinkách (bakaláře) a na Helsinské univerzitě (magistra a doktorát). Mimo mateřské univerzity pracoval také na univerzitách v Göttingen a Leidenu.



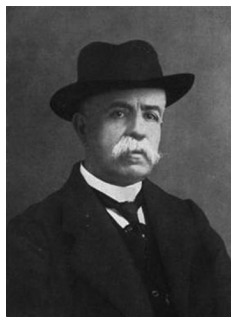
Paczyński, Bohdan (1940–2007), polský astronom, který se zabýval hvězdným vývojem, akrečními disky, gama záblesky a gravitačním mikročočkováním. Paczyński byl iniciátorem programu OGLE (*Optical Gravitational Lensing Experiment*), který se stal prototypem pro vyhledávání gravitačních mikročoček. Samotný termín mikročočkování pochází právě od Paczyňského. Byl také spoluiniciátorem celooblohové přehlídky ASAS (*All Sky Automated Survey*). Paczyński vystudoval astronomii na Varšavské univerzitě. V roce 1981 měl sérii přednášek na Caltechu. Nakonec se do Spojených států přestěhoval a až do smrti byl profesorem astrofyziky v Princetonu. Za svou práci získal mnoho ocenění, například Schwarzschildovu medaili, Eddingtonovu medaili, medaili Henryho Drapera, zlatou medaili Královské astronomické společnosti, Bruceovu medaili, medaili Mariana Smoluchowského, cenu Bruna Rossiho, Heinemanovui cenu i další ocenění.



Perlmutter, Saul (*1969), americký astrofyzik, který je dnes zaměstnancem Lawrenceovy národní laboratoře v Berkeley a profesorem fyziky na Kalifornské univerzitě v Berkeley. Perlmutter studoval na Harvardu, doktorát získal na Kalifornské univerzitě. Perlmutter je vedoucím projektu SCP (*Supernova Cosmology Project*), který nezávisle na týmu Adama Riese a Briana Schmidta objevil v roce 1998 zrychlenou expanzi vesmíru na základě pozorování supernov typu Ia. Perlmutterova skupina publikovala objev na počátku roku 1999. Projekt SCP běží dodnes a shromáždil neuvěřitelné množství pozorování, která naznačují, že by temná energie nejpravděpodobněji měla souviset s kvantovými vlastnostmi vakua. Perlmutter byl také vedoucím pracovníkem ve skupině, která připravovala sondu SNAP (*SuperNova/Acceleration Probe*), jejímž úkolem by mělo být napozorovat velké množství supernov typu Ia a zpřesnit naše představy o zrychlené expanzi vesmíru. Projekt byl později přejmenován na *Destiny (Dark Energy Space Telescope)* a nakonec na *JDEM (Joint Dark Energy Mission)*. Osud projektu je v současnosti nejasný. Perlmutter je nositelem řady cen a medailí, z nichž nejvýznamnější jsou: cena Ernesta Lawrence pro rok 2002, Shawova cenu za astronomii pro rok 2006, Gruberova cenu za kosmologii pro rok 2007 a Nobelova cena za fyziku pro rok 2011.

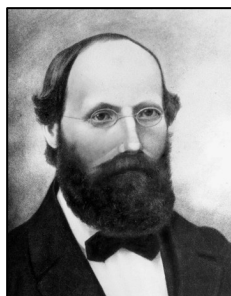


Reissner, Hans Jacob (1874–1967), německý letecký inženýr. Navrhl první celokovové letadlo. S jeho konstrukcí mu pomáhal Hugo Junkers, kterého tato spolupráce později přivedla k letectví. Za průkopnické práce při návrzích letadel za první světové války byl vyznamenán železným křížem druhé třídy. Reissnerovou velkou zálibou byla teoretická fyzika. Jako první spočetl z rovnic obecné relativity metriku v okolí nabitého sféricky symetrického tělesa. V průběhu dalších let tuto metriku nezávisle spočetli také Gunnar Nordström, Hermann Weyl a George Barker Jeffery. Dnes se nazývá Reissnerova-Nordströмова metrika. Reissner se stal profesorem na Aachenské univerzitě, byl také zaměstnancem Berlínské technické univerzity. Měl židovské předky, proto musel Německo za nacistického režimu opustit. V roce 1938 emigroval do Spojených států amerických, kde začal přednášet na Illinoiském technologickém institutu. V roce 1944 přesídlil na Brooklynskou polytechniku, kde strávil zbytek kariéry.



vě pod vedením Felixe smrti byl profesorem zkrácené jméno Ricci.

Ricci-Curbastro, Gregorio (1853–1925), italský matematik, který se zabýval především tenzorovým počtem, diferenciálními rovnicemi a hypergeometrickými funkcemi. Spolu s Levi-Civitem (jedním ze svých studentů) zavedl do fyziky a zejména obecné relativity tenzorový počet. Je po něm pojmenován Ricciho tenzor křivosti, dvojindeksový tenzor, který lze získat zúžením Riemannova tenzoru křivosti. V šestnácti letech (1869) začal studia matematiky na Univerzitě v Římě, po roce ale z důvodů politických šarvátek univerzitu opustil. O dva roky později začal studovat v Pise, kde získal doktorát v roce 1875. V období 1877 až 1878 pobýval na Technické univerzitě v německém Mnichově. V roce 1879 se vrátil do Pisy a od roku 1880 až do své smrti byl profesorem matematiky na Univerzitě v Padově. Na člancích používal



gen. Zde se v roce 1857 stal mimořádně jmenovaným profesorem. Je po něm pojmenováno několik desítek matematických pojmů, které objevil nebo vyvinul: především jde o neeuklidovskou Riemannovu geometrii, kterou začal budovat v roce 1854 a která umožnila pozdější vznik obecné relativity, a Riemannův tenzor křivosti popisující vlastnosti této geometrie. Dále jsou po Riemannovi pojmenovány: Cauchy-Riemannovy podmínky pro existenci derivace komplexní funkce, zobecněný Riemannův integrál, Riemannův-Stieltiesův integrál, Riemannova zeta funkce, Riemannova theta funkce, Riemannova sféra, Riemannův povrch a mnohé další. Riemannovo jméno nese také kráter na Měsíci a planetka 4167 Riemann.

Riess, Adam Guy (*1969), americký fyzik a astrofyzik. Jeho rodiče emigrovali z nacistického Německa do Spojených států v roce 1936. Riess vystudoval Massachusettský institut technologií (MIT), doktorát získal na Harvardu v roce 1996. Již v rámci své doktorské práce se zabýval určováním vzdáleností za pomoci supernov typu Ia. Spolu s Brianem Schmidtem vedl tým *High-z Supernova Search Team*, který hledal stopy po expanzi vesmíru za pomoci sledování galaxií, jejichž vzdálenosti byly určovány ze supernov Ia. V roce 1998 oznámila skupina vedená Riessel a Schmidtem objev zrychlené expanze. Téměř současně publikovala stejný objev skupina vedená Saulem Perlmutterem. V současnosti je zaměstnancem Hopkinsonovy univerzity a výzkumného ústavu Space Telescope Science Institute. Vede projekt SH0ES (*Supernova H_0 for the Equation of State*), který má za cíl zpřesnit hodnotu Hubbleovy konstanty s využitím Hubbleova dalekohledu. Adam

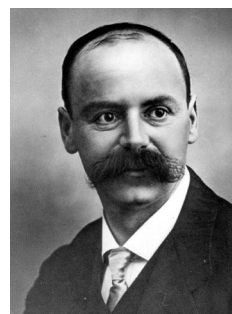


Riess je nositelem řady ocenění a medailí, z nichž k nejvýznamnějším patří Shawova cena za astronomii pro rok 2006 a Nobelova cena za fyziku pro rok 2011.

Rosen, Nathan (1909–1995), americko-izraelský teoretický fyzik, který se narodil židovské rodině v Brooklynu (část New Yorku). Fyziku vystudoval na Massachusettském institutu technologií (MIT) a v produktivním věku se zabýval především kvantovou teorií a obecnou relativitou. Nejznámějším se stal formulací EPR paradoxu (Einsteinův-Podolského-Rosenův paradox), při němž díky provázanosti vlnové funkce páru částic můžeme uskutečněním měření na jednom členu páru okamžitě získat informace o druhém členu páru. Těto provázanosti pak využil při prvním korektním popisu stavu elektronů ve vodíkové molekule. V roce 1935 spolu s Albertem Einsteinem předpověděli teoretickou možnost existence časoprostorového mostu mezi dvěma různými oblastmi prostoru. Později se tomuto Einsteinově-Rosenovu mostu začalo říkat červí díra. Ukázalo se, že původní řešení je nestabilní vůči jakýmkoli malým poruchám a zmizí natolik rychle, že jím neprojde ani částice světla. Dodnes se ale konají pokusy s nalezením metriky časoprostoru, která by umožňovala rychlé spojení dvou odlehlých oblastí. Nathan Rosen často cestoval, dva roky pobýval v Sovětském svazu a neustále se vracel do Izraele, který považoval za svůj domov. V Izraeli pomáhal založit Izraelskou akademii věd a klasického vzdělávání, Izraelskou fyzikální společnost (jejím prezidentem byl v letech 1955 až 1957) a Mezinárodní společnost pro obecnou relativitu a gravitaci (prezidentem byl v letech 1974 až 1977).

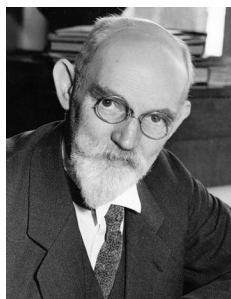


Schiff, Leonard Isaac (1915–1971), americký fyzik, duchovní otec testů obecné relativity na oběžné dráze Země. Schiff vystudoval teoretickou fyziku na Ohijské státní univerzitě, doktorát získal na Massachusettském technologickém institutu (MIT). Po studiích vystřídal několik zaměstnání – působil na Kalifornské univerzitě, na Caltechu, Pensylvánské univerzitě a v Los Alamos. Od roku 1948 až do své smrti pracoval na Stanfordově univerzitě. Zde napsal hojně používanou učebnici kvantové mechaniky, která poprvé vyšla v roce 1949. Od konce padesátých let prosazoval testování projevů obecné relativity za pomoci setrvačníků pohybujících se po geodetice na oběžné dráze. Stál u zrodu družice Gravity Probe B, která se připravovala na Stanfordově univerzitě. Družice byla vypuštěna v roce 2004, tedy až 33 let po jeho smrti. Úspěšně detekovala zakřivení časoprostoru naší Zemí, ale bohužel se jí nepodařilo prokazatelně naměřit strhávání časoprostoru způsobené rotací Země (Lenseův-Thirringův jev). Důvodem bylo podcenění rušivého vlivu plazmatu slunečního větru. Schiff byl vynikajícím učitelem, za výuku získal Oerstedovu medaili a Dinkelspielovu cenu. Jeho jméno nese jedna z poslucháren ve Stanfordu.



Schwarzschild, Karl (1873–1916), německý matematik a fyzik. Studoval v Mnichově, kde se zabýval vznikem Sluneční soustavy. Svůj první vědecký článek o nebeské mechanice napsal v šestnácti letech. Devět let působil v Göttingen, kde spolupracoval s Felixem Kleinem, Davidem Hilbertem a Hermannem Minkowskim. Hlavními tématy jeho prací byla elektrodynamika,

optika a vyzařování hvězd. Za první světové války byl na frontě v Rusku, zabýval se vznikající kvantovou teorií a obecnou relativitou. Nalezl řešení Einsteinových rovnic pro případ sféricky symetrického zdroje, které vedlo na objev černých děr. Toto řešení nese jeho jméno (Schwarzschildovo řešení, 1916), stejně tak jako poloměr horizontu černé díry (Schwarzschildův poloměr). Karl Schwarzschild se ale nezabýval jen obecnou relativitou. Nalezl také kritérium pro vznik konvektivní zóny uvnitř hvězd. Po Schwarzschildovi je pojmenován kráter na Měsíci. Schwarzschild v Rusku těžce onemocněl a zemřel těsně po návratu do vlasti.



Sitter, Willem, de (1872–1934), holandský astronom, fyzik a matematik, který našel řešení Einsteinových rovnic obecné relativity pro případ kladné nenulové kosmologické konstanty a nulové hmoty. Takovému vesmíru se dnes říká de Sitterův vesmír. Exponenciálně se rozpíná a neobsahuje žádnou hmotu. Hubblova konstanta se po celou dobu expanze v takovém vesmíru nemění. V roce 1932 publikoval de Sitter spolu s Einsteinem článek o tom, že by ve vesmíru mohlo být velké množství nsvítící hmoty. De Sitter vystudoval Univerzitu v Groningenu. Dva roky (1897 až 1899) pracoval v Jižní Africe na observatoři v Kapském městě. Od roku 1908 byl vedoucím katedry astronomie na Leidenské univerzitě a v roce 1919 se stal ředitelem Leidenské observatoře, kterou vedl až do své smrti. Po de Sitterovi je pojmenován kráter na Měsíci a planetka 1686 De Sitter.



Slipher, Vesto Melvin (1875–1969), americký astronom, který se zabýval spektroskopií galaxií a mlhovin. Vystudoval na Univerzitě v Indianě, kde získal doktorát v roce 1909. Poté pracoval na Lowellově observatoři, kde se zabýval spektroskopií. Z počátku se věnoval určování rotačních period planet a složením planetárních atmosfér. V dalších letech se věnoval měření spekter mlhovin. V té době se za mlhoviny považovaly i ostatní galaxie, pokud byl znám odhad jejich vzdálenosti, hovořilo se o nich jako o extragalaktických mlhovinách. V roce 1912 Slipher našel modrý posuv Andromedy, která se k nám přibližuje. V následujících letech zjistil, že většina dalších objektů jeví červený posuv. I když byl jen malý krok od objevu expanze vesmíru, svá měření bohužel nijak neinterpretoval, a to ani později, po objevu obecné relativity. Jiný významný astronom, Arthur Eddington, byl v interpretaci také velmi zdrženlivý, hlavní problém viděl v tom, že neexistují měření z opačné polokoule Země a mohlo by jít o výsledek našeho vlastního pohybu. Správné data jako expanzi vesmíru interpretoval belgický abbé Georges Lemaître v roce 1927. Jeho článek publikovaný v bruselském lokálním vědeckém periodiku nebyl některým kosmologům znám. Objev expanze vesmíru je proto mylně přisuzován Edwinu Hubbleovi, který Slipherova měření doplnil dalšími vlastními měřeními a dospěl ke stejnému závěru jako Lemaître.



Taylor, Joseph Hooton (*1941), americký fyzik působící v Princetonu. Spolu s Russelem Hulsem zkoumali podvojnou neutronovou hvězdu PSR 1513+16 objevenou radioteleskopem v Arcibu v roce 1974. Na tomto systému našli řadu relativistických efektů (například stáčení periastra o celé 4° za rok!). Největším

objevem bylo zjištění změny oběžné periody odpovídající ztrátě energie vyzařováním gravitačních vln. Šlo o prvé, byť nepřímé potvrzení existence gravitačních vln. Za tento objev dostali Taylor a Hulse Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1993. Taylor studoval na Moorestown Friends School v New Jersey, na Haverfordově koleji v Pensylvánii a na Harvardu, kde získal v roce 1968 doktorát. Krátce pracoval na Univerzitě v Massachusetts, kde se stal profesorem astronomie. Poté se stal ředitelem radioobservatoře RCAO fungující při univerzitě. Od té doby se věnoval radioastronomii na nejrůznějších významných observatořích.

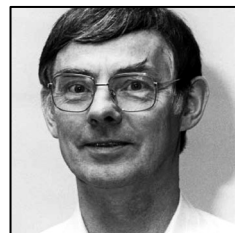


Thirring, Hans (1888–1976), rakouský teoretický fyzik, který jako první spočítal v roce 1918 metriku kolem rotujícího sféricky symetrického tělesa. S výpočty mu pomáhal matematik Josef Lence. Ukázali, že časoprostor je rotujícím tělesem strháván. Dnes se tento jev nazývá Lenseův-Thirringův jev. Thirring vystudoval Vídeňskou univerzitu. Byl znám svými pacifistickými názory. Šest let byl členem horní komory rakouského parlamentu. Za svou práci získal Hastingerovu cenu. Jeho syn Walter se dal, stejně jako jeho otec, také na fyzikální dráhu.

Thorne, Kip Stephen (*1940), americký teoretický fyzik, zabývá se teorií gravitace, astrofyzikou a kosmologií. Je expertem na aplikace obecné relativity v astrofyzikálních problémech, zabýval se například možností existence červích děr, které by mohly spojovat dvě různé oblasti časoprostoru. Studoval na Caltechu (bakaláře) a v Princetonu (magistra), kde dělal i doktorát pod vedením Archibalda Wheelera. V roce 1970 se stal profesorem na Caltechu. Thorne je pedagogem, který vychoval generace fyziků. Dlouhá léta spolupracoval se Stephenem Hawkingem a Carlem Saganem. Thorne napsal řadu populárních i odborných knih. Z populárních jmenujme alespoň Černé díry a zborcený čas (česky vyšlo v Mladé frontě v roce 2004). Z odborných jde především o jednu z nejvýznamnějších učebnic obecné relativity Gravitation, která je v odborných kruzích nazývána podle počátečních jmen autorů MTW (Misner, Thorne, Wheeler). Thorne se také podílel na scénářích některých sci-fi filmů. Kip Thorne vyvinul novou metodu zobrazování pokřiveného časoprostoru (za pomoci tzv. vírových a tahových čar). Jde o alternativu k obvykle používaným diagramům vnoření. Je také duchovním otcem interferometrických detektorů gravitačních vln, stál u zrodu detektorů MARK a LIGO. V roce 2017 získal Nobelovu cenu za fyziku, a to za rozhodující podíl na stavbě detektoru LIGO a na detekci gravitačních vln.

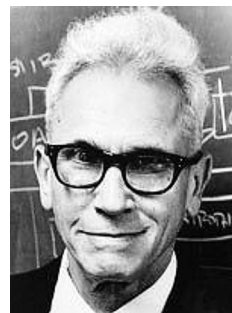


Walsh, Dennis (1933–2005), anglický astronom, který pozoroval v optickém i rádiovém oboru. K pozorování využíval celou řadu teleskopů a radioteleskopů. Z optické oblasti jmenujme alespoň Dalekohled Isaaca Newtona na Kanárském ostrově La Palma se zrcadlem o průměru 2,54 m a z radioteleskopů Lovellův radioteleskop v Jodrell Bank (v blízkosti Manchesteru), který má průměr 76 metrů. Spektroskopické sledování kvazarů z přehlídky Jodrell Bank 966MHz Survey ho přivedlo v roce 1979 k objevu první gravitační čočky. Ukázalo se, že dvojice blízkých kvazarů má téměř identické spektrum a jde o jediný objekt, jehož obraz byl zdvojen mezilehlou



gravitační čočkou. Walsh vystudoval fyziku na Manchesterské univerzitě, doktorát dělal na Jodrell Bank. Od roku 1959 se věnoval rádiovému výzkumu ionosféry na Michiganské univerzitě v USA, kde také přednášel. V roce 1967 se vrátil do anglického Manchesteru, kde se zabýval výzkumem atmosféry z družic. Osm let byl hospodářem Královské astronomické společnosti.

Weber, Joseph (1919–2000), americký fyzik, který jako první přišel na princip laseru a maseru a jako první se pokusil detekovat gravitační vlny. Weber studoval elektroniku na Americké námořní akademii, tam také sloužil za druhé světové války. Poté pokračoval ve studiích na Katolické univerzitě Spojených států, kde pracoval na svém doktorátu. Souběžně získal v roce 1948 místo na Univerzitě v Marylandu. Zabýval se mikrovlnnou spektroskopii v chemické kinetice a doktorát na toto téma obhájil v roce 1951. V roce 1952 objasnil na veřejné přednášce princip koherentního zesílení mikrovln nebo světla (princip maseru a laseru). Tyto myšlenky nezávisle rozvíjeli Charles Townes, Nikolaj Basov a Alexandr Prochorov, kteří vytvořili funkční prototypy těchto zařízení a získali za ně Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1964. Weber se jako první se pokoušel již v roce 1966 detekovat gravitační vlny za pomoci rezonančních válců z hliníku. Citlivost zařízení ale nebyla dostatečná. Experimenty prováděl přes 10 let, válce používal z důvodu vyloučení náhodné vibrace vždy dva současně, a to ve vzdálenosti 1000 km (jeden v Marylandu a druhý v Aragonu). Jednou zaznamenal signál na obou válcích, pravděpodobně ale šlo o náhodnou koincidence, která byla navíc chybně zpracována. V roce 1972 byl součástí mise Apollo 17 detektor gravitačních vln, který Weber zkonstruoval.



Weiss, Reiner (*1932), americký fyzik, který se narodil v Německu právě v období, kdy se stupňovala protizidovská agrese. Proto jeho židovská rodina uprchla nejprve do Prahy a po okupaci Československa do Spojených států, kde Weiss vystudoval a prožil většinu profesního života. Působil na několika univerzitách, například Tuftsově univerzitě, Luisiánské státní univerzitě a na Massachusettském technologickém institutu (MIT), kde má v současnosti status emeritního profesora a kde původně studoval. Podílel se na vývoji technologií pro družici COBE (COsmic Background Explorer) a jako prvním se mu podařilo změřit spektrum reliktního záření. Pro tyto účely vyvinul monolitický křemíkový bolometr. Družice COBE byla vůbec prvním přístrojem pro cílený výzkum reliktního záření, v němž objevila teplotní anizotropii – fluktuace reliktního záření, které v sobě skrývají důležité informace o ranném vesmíru. Frekvenční analýzu těchto fluktuací provedly sondy WMAP a Planck. Se stejnou vervou se Weiss podílel na přípravě a provozu detektoru gravitačních vln LIGO a lze říci, že u obou projektů se stal klíčovou postavou. Je vynálezcem laserové interferometrie, na níž je experiment LIGO založen. Dalším experimentem, v němž má Weiss důležitou roli, je Fermilabský holometr – čtyřicetimetrový laserový interferometr, který zkoumá mikroskopické kvantové fluktuace. Weiss získal množství nejrůznějších cen, například Gruberovu kosmologickou cenu a cenu Alberta Einsteina udělovanou Americkou fyzikální společností, Shawovu cenu, Kavliho cenu, Harveyovu cenu a další ocenění. V roce 2017 obdržel cenu nejvyšší – Nobelovu cenu za fyziku, a to za rozhodující podíl na stavbě detektoru LIGO a na detekci gravitačních vln.



Weymann, Ray, americký astronom a astrofyzik, který se zabýval výrony hmoty z galaxií a studiem červeného posuvu galaxií v kosmologických vzdálenostech. V roce 1979 se stal spoluobjevitelem první gravitační čočky. S kolegy pořizoval spektrum dvojitého kvazaru 2,3metrovým dalekohledem Arizonské univerzity. Podobnost spekter obou objektů znamenala, že jde o jediný kvazar, jehož obraz byl rozštěpen mezilehlou gravitační čočkou. Studoval v Princetonu, kde získal doktorát. Je členem Národní akademie věd USA a byl prezidentem Pacifické astronomické společnosti. Založil tým CSRRT (Climate Science Rapid Response Team), jehož hlavním cílem je poskytovat médiím korektní informace o klimatických problémech. Hlavním pracovištěm Weymanna je soukromá organizace CIW (Carnegie Institution of Washington neboli Carnegie Institution for Science Observatories).



Wheeler, John Archibald (1911–2008), přední americký teoretický fyzik, který se zabýval obecnou relativitou. Narodil se na Floridě. Fyziku vystudoval na univerzitě Johna Hopkinse. Roku 1933 získal doktorát, poté pokračoval ve studiu v Kodani u Nielse Bohra. S Bohrem se znovu setkal v USA, kde společně vypracovali model jaderného štěpení. V této době začal Wheeler vyučovat fyziku na Univerzitě v Princetonu, pak přešel na Texaskou univerzitu v Austinu. K jeho postgraduálním studentům patřili například Richard Feynman, Kip Thorne nebo Charles Misner. Za války pracoval na projektu atomové bomby a posléze vodíkové bomby. Po válce se vrátil na Univerzitu v Princetonu. Od roku 1953 začal v Princetonu vyučovat obecnou teorii relativity. Wheeler se snažil tuto teorii více přiblížit lidem, proto pro lepší pochopení vytvořil názvy černá díra a červí díra. Ukázal, že červí díra je nestabilním řešením Einsteinových rovnic. Roku 1973 Wheeler publikoval společně s Charlesem Misnerem a Kipem Thornem knihu *Gravitation*. Tato kniha obsahuje dosud nejúplnější zpracování poznatků a otázek výzkumu gravitace. Wheeler se také zabýval kvantovou fyzikou a jejím spojením s obecnou relativitou. Za své fyzikální výzkumy získal řadu cen, například cenu Alberta Einsteina, cenu Enrica Fermiho, Franklinovu medaili, národní medaili za vědu, Oerstedovu medaili, Oppenheimerovu cenu, Wolfovu cenu a mnohé další.



Rejstřík pojmů

- Boltzmannova konstanta 28, 45
- bosony 61, 63
- cirkulace pole 105, 119
- černé díry 301–303
- červený posuv
 - gravitační 252–261
 - kosmologický 328–329
- čtyřvektory 172, 219–222, 241
- Debyeova vzdálenost 124
- derivace
 - kovariantní 240
 - úplná 24, 244
- diagramy vnoření 298–301
- dilatace času 214–216, 252–255
- disperze 79
- disperzní relace 151–157, 280
- dvouhadinový systém 54–55
- Einsteinův gravitační zákon 262–277
- Einsteinův-Rosenův most 299–301
- elektrostatika 119–132
- energie
 - elektrického pole 126
 - fotonů při expanzi 75
 - magnetického pole 141
 - tepelná 13, 43, 48
 - volná 15
- entalpie 14
- entropická síla 81–82
- entropie 13, 28, 77–80
- ergodický problém 22
- expanzní funkce 330
- experiment
 - Aharonův-Bohmův 175
 - Berkeleyký 260
 - Eötvösův 238
 - Hafeleho-Keatingův 257
 - Poundův-Rebkův 256
- fázový
 - objem 18–21
 - prostor 18
- fenomenologie 12
- fermiony 61–63, 65
- fluktuační
 - energie 78
 - magnetizace 89
 - rychlosti 78
 - střední kvadratická 77, 89
- Fresnelovy vztahy 165
- fugacita 60
- funkce
 - expanzní 330
 - Greenova 120–122
 - Lagrangeova 174, 304
- gravitační čočky 312–315
- gravitační vlny 278–291
- Gravity Probe A 259–260
- Gravity Probe B 239, 266–267, 320
- Harochova rezonanční dutina 199, 208
- Hertzův dipól 183
- hmotnost
 - setrvačná 236
 - gravitační 236
- hustota
 - energetických stavů 25
 - pravděpodobnosti 21
- Christoffelovy symboly 241–243
- ideální plyn 33
- integrační faktor 13
- interval 223
- jev
 - Londonův 267
 - Lenseův-Thirringův 319
 - Zeemanův 91
- koeficienty afinní konexe 240
- kompresibilita 77, 79
- kontrakce délek 214–216
- kosmologická konstanta 332
- kosmologie 322–333
- kovariantní derivace 240
- kvadrupól 130
- kvantový
 - rotátor 47
 - vibrátor 42
- Landéův faktor 89
- Larmorova formule
 - diferenciální 182
 - integrální 182
- LIC 192
- Liouvilleův teorém 23
- lokálně inerciální soustava 239

- Lorenzova kalibrační podmínka 135, 175, 199, 200, 279
 magnetická rezonance 91
 magnetizace 77, 86–89, 92, 104, 109–115, 133, 137
 magnetostatika 1333–140
 mechanická práce 13
 metrika 219
 Fridmanova 322
 Minkowského 219
 Schwarzschildova 292
 model
 Heisenbergův 96
 Hubbardův 97
 Isingův 93
 mřížový 93–98
 Pottsův 95
 t-J 98
 Z_Q 95
 moment
 dipólový 83, 102, 129, 137
 dipólový elektrický 83, 102, 129
 dipólový gravitační 282–283
 dipólový magnetický 85, 90, 104, 137
 druhý centrální 77
 kvadrupólový 130–131, 180, 191
 multipólový rozvoj
 stacionární 128, 136
 zářivý 178
 newtonovská limita 248
 obecná Lorentzova transformace 218
 ohyb světla 308
 oscilátor
 anharmonický 52
 harmonický 40, 42
 paralelní přenos 245
 parametr w 331
 partiční suma
 kanonická 30
 grandkanonická 58
 podmínky na rozhraní 115
 polarizace 68, 84, 102, 113, 158
 pole
 elektromagnetické 99–208
 gravitoelektrické 317
 gravitomagnetické 318
 hrotu 125
 konzervativní 119, 126, 270
 v dutině 199–208
 potenciál(y)
 čtyřpotenciál 173, 179, 221, 226, 229
 Gibbsův 16
 grandkanonický 16
 chemický 13, 34, 57, 59
 kalibrační volnost 173
 Liénardovy-Wiechertovy 192
 Morseův 44
 nejednoznačnost 279
 retardovaný a advanceovaný 175–177
 skalární 179, 199, 226, 279
 termodynamické 14–17
 v dutině 199
 ve volném prostoru 175
 vektorový 133
 Poyntingův vektor 142, 166, 181, 195
 princip ekvivalence 236–240
 slabý 237
 silný 237
 velmi silný 237
 rapidita 217
 raytracing 169
 relativita
 obecná 236–333
 speciální 210–235
 rotující válec 37
 rovinná vlna 151
 rovnice
 Boltzmannova 29
 geodetiky 244
 Gibbsova-Helmholtzova 1. dr. 15, 31
 Gibbsova-Helmholtzova 2. dr. 16
 Hamiltonovy 18, 23, 154, 169
 Hamiltonovy (pole) 203
 kontinuity 23, 100, 141, 268, 276
 Lorentzova pohybová 101
 Maxwellovy 100–118
 Poissonova 119–124, 134, 175, 274
 rozdělení
 Boltzmannovo 37
 Boseho-Einsteinovo 63
 Fermiho-Diracovo 62
 Maxwellovo 38
 rozptyl
 Thomsonův 184
 Rayleighův 186
 rychlost
 fázová 152
 grupová 153
 kvadratická 39
 nejpravděpodobnější 39
 střední 39
 skalární křivost 265
 skládání rychlostí
 klasické 210
 relativistické 214
 sluneční konstanta 74
 soubor
 bosonů 63

- fermionů 61–62, 65
- fotonů 68
- Gibbsův kanonický 26–32
- grandkanonický 56–60
- spinová skla 96
- SQUID 267
- středování 22
- tenzor
 - elektromagnetického pole 172
 - energie a hybnosti 271
 - hmoty a energie 272–273
 - Ricciho 278, 293
 - Riemannův 262–267, 278, 293, 301
- tepelná kapacita
 - dvouatomárního plynu 50–52
 - dvouhadinového systému 54–55
 - rotátoru 47–49
 - translačních stupňů 51
 - vibrátoru 42–45
- teplota
 - absolutní 13, 28
 - planety 74
 - rotační 48–51
 - vibrační 44, 48
- termodynamika 12–17
- tlak
 - pole 146
 - statický 146
 - záření 146
- tok pole 105–106
- transformace
 - elektromagnetického pole 229
 - Lorentzova 210–218
 - Galileova 210
 - gradientní 133, 173
- úhlová frekvence 150
- variance 77–79
- Verlindeho gravitace 82
- věta
 - druhá termodynamická 13
 - Gaussova elektrostatiky 107
 - Gaussova magnetostatiky 105
 - první termodynamická 13
- vlastní čas 225
- vlnoplocha 150
- vlnový balík 153–154
- vlnový vektor 150
- vlny
 - ve vakuu 156
 - v anizotropním prostředí 159
 - ve vodiči 162
 - základní pojmy 150
- výkon Slunce 74
- zákon
 - Ampérův 108–111
 - Biotův-Savartův 136
 - Brewsterův 167
 - Curieův 92–93
 - Faradayův indukční 107–108
 - odrazu a lomu 163–165
 - Planckův vyzařovací 68–71, 206–207
 - Stefanův-Boltzmannův 72
 - úplného odrazu 168
 - Wienův posunovací 71, 73
 - zachování energie 24, 88, 101, 141–142
 - zachování hybnosti 142–144, 269–270
 - zachování momentu hybnosti 148
 - zachování náboje 100
- záření
 - brzdné 187
 - brzdné relativistické 195
 - cyklotronní 189
 - elektrické dipólové 181
 - husté jako voda 75
 - synchrotronní 195
 - tepelné (Planckovo) 68, 205
 - vyšší momenty 191
- zázrak boží 12
- zrychlená expanze 332



Literatura

Nahrávky přednášek

server www.aldebaran.cz, sekce studium; portál www.vsprednasky.cz

Navazující učebnice

- [1] P. Kulhánek: *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky I (Teoretická mechanika, Kvantová teorie, Matematika pro fyziku)*; AGA 2020, ISBN: 978-80-906638-2-4, online verze: <http://www.aldebaran.cz/studium/>
- [2] P. Kulhánek: *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky III (Teorie plazmatu, Numerické simulace)*; AGA 2020, ISBN: 978-80-906638-4-8, online verze: <http://www.aldebaran.cz/studium/>

Statistická fyzika

- [3] J. Kvasnica: *Termodynamika*, SNTL, Praha 1965
- [4] J. Kvasnica: *Statistická fyzika*, Academia, Praha 1998 ◀
- [5] T. Opatrný: *Kapitoly z termodynamiky a statistické fyziky*; Univerzita Palackého, 2009; online: <http://www.ktf.upol.cz/tom/bookex1.pdf>
- [6] M. Varady: *Statistická fyzika*; UJEP 2007; online: http://physics.ujep.cz/~mvarady/skripta_sf.pdf
- [7] F. Bloch, J. Dirk Walecka: *Fundamentals of Statistical Mechanics*; World Scientific, 2000
- [8] M. Dvorak, T. Ohno: *Liouville's Theorem*; PHGN 505 Report, Colorado School of Mines 2011; online http://inside.mines.edu/~tohno/teaching/PH505_2011/liouville_dvorak.pdf
- [9] P. Kubáček, Z. Michaličková: *Základy fyzikální chemie*; Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, 2014; online: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js11/fyz_chem/web/index.htm
- [10] Stuart Mackenzie: *Molecular Vibrational Spectroscopy*; University of Oxford, 2011; online [http://mackenzie.chem.ox.ac.uk/teaching/Molecular Vibrational Spectroscopy.pdf](http://mackenzie.chem.ox.ac.uk/teaching/Molecular_Vibrational_Spectroscopy.pdf)
- [11] L. Kadanoff: *Bosons and fermions*; Lecture Notes, Perimeter Institute statistical physics, 2009; online [http://jfi.uchicago.edu/~leop/Physics 352/PSI course lectures/](http://jfi.uchicago.edu/~leop/Physics_352/PSI_course_lectures/)

- [12] M. Towler: *Exchange, antisymmetry and Pauli repulsion*; TCM Group, Cavendish Laboratory, University of Cambridge; 2010; online http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~mdt26/PWT/lectures/towler_pauli.pdf
- [13] J. P. Sethna: *Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters, and Complexity*, Oxford University Press, 2008
- [14] Erik Verlinde: *On the origin of gravity and the laws of Newton*; Journal of High Energy Physics 04 (2011) 029; online: [https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/JHEP04\(2011\)029.pdf](https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/JHEP04(2011)029.pdf)
- [15] Erik Verlinde: *Emergent Gravity and the Dark Universe*; SciPost Phys. 2, 016 (2017); arXiv:1611.02269v2 [hep-th] 8 Nov 2016; online: <https://arxiv.org/abs/1611.02269>
- [16] Petr Kulhánek: *Zvítězí Verlinde nad temnotou?*; Aldebaran bulletin 18/2019, online: https://www.aldebaran.cz/bulletin/2019_18_ver.php
- [17] R. Bauerschmidt: *Ferromagnetic spin systems*; Harvard 2016; online: <http://www.math.harvard.edu/~brt/doc/spin.pdf>

Elektromagnetické pole

- [18] James Clerk Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism I, II*; Oxford, Clarendon Press 1873 ◀
- [19] Julius Adam Stratton: *Electromagnetic Theory*; McGRAW-HiLL Book Company 1941, další reedice Adams Press 2008 ◀
- [20] John David Jackson: *Classical Electrodynamics*; John Wiley & Sons, New York, 1962, 1999 a další reedice
- [21] Lev Davidovich Landau, Evgeny Lifschitz: *The Classical Theory of Fields – Course of Theoretical Physics 2*; originál 1939, 1973, reedice 1994 Butterworth Heinemann
- [22] Lev Davidovich Landau, Evgeny Lifshitz: *Electrodynamics of Continuous Media*, Volume 8 in Course of Theoretical Physics; Elsevier 1984
- [23] Jozef Kvasnica: *Teorie elektromagnetického pole*, Academia 1985 ◀
- [24] George B. Rybicki, Alan P. Lightman: *Radiative Processes in Astrophysics*; John Willey & Sons 1979.
- [25] Thomas Howard Stix: *Waves in Plasmas*; Springer 2006
- [26] Umran S. Inan, Robert A. Marshall: *Numerical Electromagnetics – The FDTD Method*; Cambridge University Press 2011
- [27] Anupam Garg: *Classical Electromagnetism in a Nutshell*; Princeton University Press 2012
- [28] Andrew Zangwill: *Modern Electrodynamics*; Cambridge University Press 2013
- [29] David J. Griffith: *Introduction to Electrodynamics*; první vydání 1981; čtvrtá reedice Cambridge University Press 2017

- [30] Jakob Schwichtenberg: *No-Nonsense Electrodynamics: A Student Friendly Introduction*; No-Nonsense Books 2018
- [31] John Pierrus: *Solved Problems in Classical Electromagnetism – Analytical and Numerical Solutions with Comments*; Oxford University Press 2018
- [32] Ophelia Burgess: *Principles of Electromagnetism*; Larsen & Kefer 2019
- [33] Jonathan W. Keohane, Joseph P. Foy: *An Introduction to Classical Electrodynamics*; Maricourt Academic Press 2019
- [34] Xin Tao: *Classical Electrodynamics*; University of Science and Technology of China, 2019

Relativita

- [35] Karel Kuchař: *Základy obecné relativity*; Academia 1968
- [36] Václav Votruba: *Základy speciální teorie relativity*, Academia, Praha 1969
- [37] Leoš Dvořák: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*; SPN 1984 ◀
- [38] Vojtěch Ulmann: *Gravitace, černé díry a fyzika prostoročasu*; Čas 1986; online: <http://astronuklfyzika.sweb.cz/GravitCerneDiry.htm>
- [39] Pavel Krtouš: *Speciální teorie relativity a žížalí farma*; ÚTF MFF UK 2004; online: <http://utf.mff.cuni.cz/popularizace/zizaly/zizaly-D.html> ◀
- [40] Jan Horský, Jan Novotný, Milan Štefaník: *Úvod do fyzikální kosmologie*; Academia 2004
- [41] Jaroslav Reichl: *Speciální teorie relativity*; Encyklopedie fyziky, 2006; online: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/658-specialni-teorie-relativity>
- [42] Jan Novotný, Jana Jurmanová, Jan Geršl, Marta Svobodová: *Základy teorie relativity*; Masarykova univerzita 2008, multimediální text; online: <https://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps06/f5010/tr.zip>, <https://is.muni.cz/elportal/?id=703391s> ◀
- [43] Pedro G. Ferreira: *Nádherná teorie*; Vyšehrad 2015
- [44] James J.: Callahan: *The Geometry of Spacetime: an Introduction to Special and General Relativity*; Springer 2000
- [45] James B. Hartle: *Gravity: an Introduction to Einstein's General Relativity*; Addison-Wesley 2003
- [46] Sean M. Carroll: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*; Addison-Wesley 2004
- [47] Ta-Pei Cheng: *Relativity, Gravitation and Cosmology: a Basic Introduction*; Oxford University Press 2005
- [48] Øyvind Grøn, Sigbjørn Hervik: *Einstein's General theory of Relativity*; Springer 2007

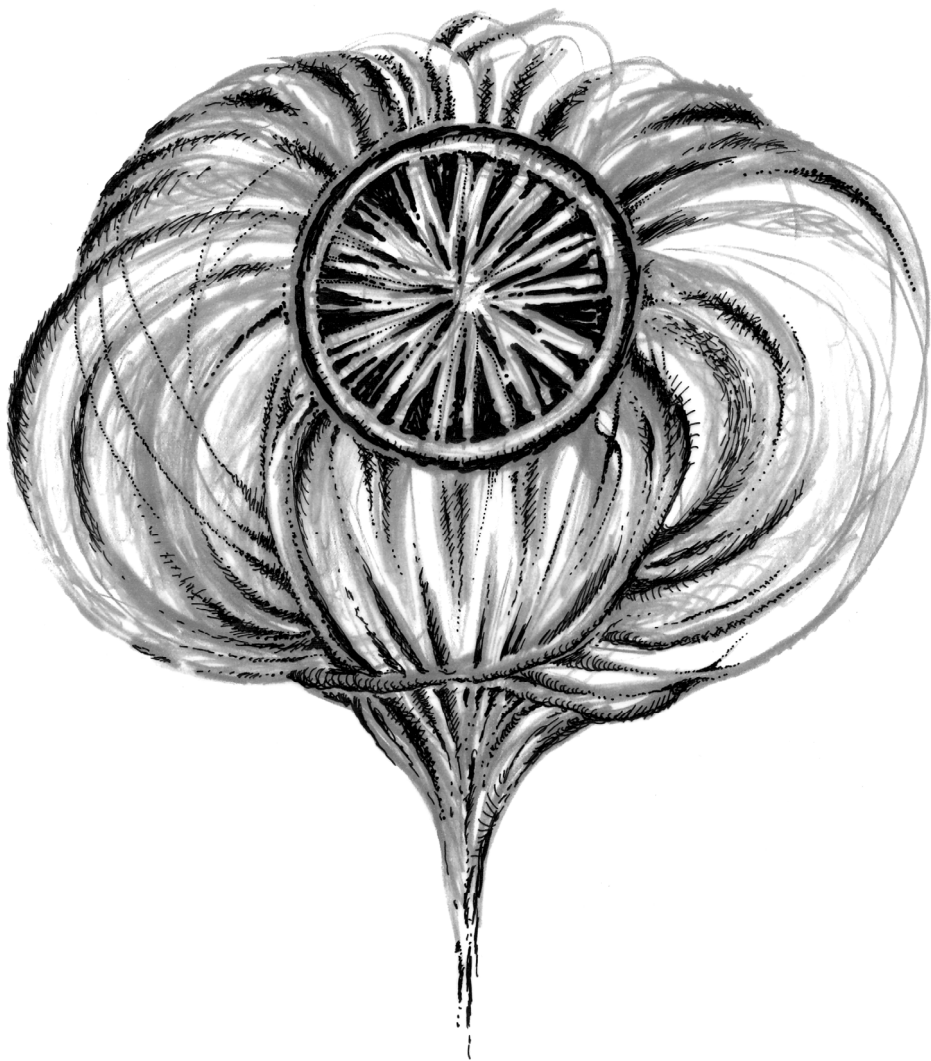
- [49] Bernard F. Schutz: *A First Course in General Relativity*; Cambridge University Press 2009
- [50] Edwin F. Taylor, John Archibald Wheeler: *Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity*; Freeman 2007 ◀
- [51] Edwin F. Taylor, John Archibald Wheeler: *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*; Addison Wesley 2000, 2010 ◀
- [52] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler: *Gravitation*; W. H. Freeman Princeton University Press 1973, 2017 ◀

Relativita – bulletin

- [53] Petr Kulhánek: *Gravity Probe B – o neslavném konci jedné slavné sondy*; Aldebaran bulletin 24/2008; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2008_24_gpb.php
- [54] Petr Kulhánek: *Trochu zvláštní zatmění aneb gravitační čočka v akci*; Aldebaran bulletin 16/2014; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2014_16_gra.php
- [55] Petr Kulhánek: *Můžeme měřit zakřivení časoprostoru pomocí kvantových jevů?*; Aldebaran bulletin 5/2015; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2015_05_gra.php
- [56] Petr Kulhánek: *Gravitační vlny byly konečně polapeny*; Aldebaran bulletin 6/2016; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2016_06_gra.php
- [57] Petr Kulhánek: *Nobelova cena za gravitační vlny aneb i Virgo se probouzí*; Aldebaran bulletin 34/2017; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2017_34_nob.php
- [58] Petr Kulhánek: *Bájný Ikaros a gravitační superčočka*; Aldebaran bulletin 28/2018; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2018_28_len.php
- [59] Petr Kulhánek: *Naděje pro Lizu*; Aldebaran bulletin 12/2019; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2019_12_lis.php
- [60] Petr Kulhánek: *Jak díry přicházejí o energii*; Aldebaran bulletin 27/2019; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2019_27_bla.php
- [61] Petr Kulhánek: *Jak díry přicházejí k výtryskům*; Aldebaran bulletin 28/2019; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2019_28_bla.php
- [62] Rudolf Mentzl: *Mapa gravitačních teorií*; Aldebaran bulletin 34/2019; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2019_34_gra.php
- [63] Petr Kulhánek: *Pulzary jako lovci gravitačních vln*; Aldebaran bulletin 20/2023; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2023_20_pta.php
- [64] Petr Kulhánek: *Mohou černé díry za expanzi vesmíru?*; Aldebaran bulletin 35/2023; https://www.aldebaran.cz/bulletin/2023_35_bhd.php



Co najdete v dalších dílech?





Vybrané kapitoly z teoretické fyziky I

První díl „Vybraných kapitol“ je úvodním dílem celé série. Začíná základními pojmy z teoretické mechaniky. Čtenář se seznámí se elegancí popisu mechanických i dalších dějů za pomoci Lagrangeových, Hamiltonových rovnic a Poissonových závorek. Druhá část je věnována kvantové teorii. Relativně standardní partie týkající se stavby a interpretace kvantové teorie jsou následovány problematikou týkající se hranice mezi kvantovým a klasickým světem, vyvrácením existence skrytých parametrů, EPR paradoxem a Bellovými nerovnostmi. Poslední část prvního dílu „Vybraných kapitol“ je věnována základům matematiky, které jsou nutné ke studiu fyzikálních dějů. Čtenář může do této části učebnice nahlédnout, kdykoli nebude znát matematiku potřebnou pro četbu fyzikálních partií.

TEORETICKÁ MECHANIKA

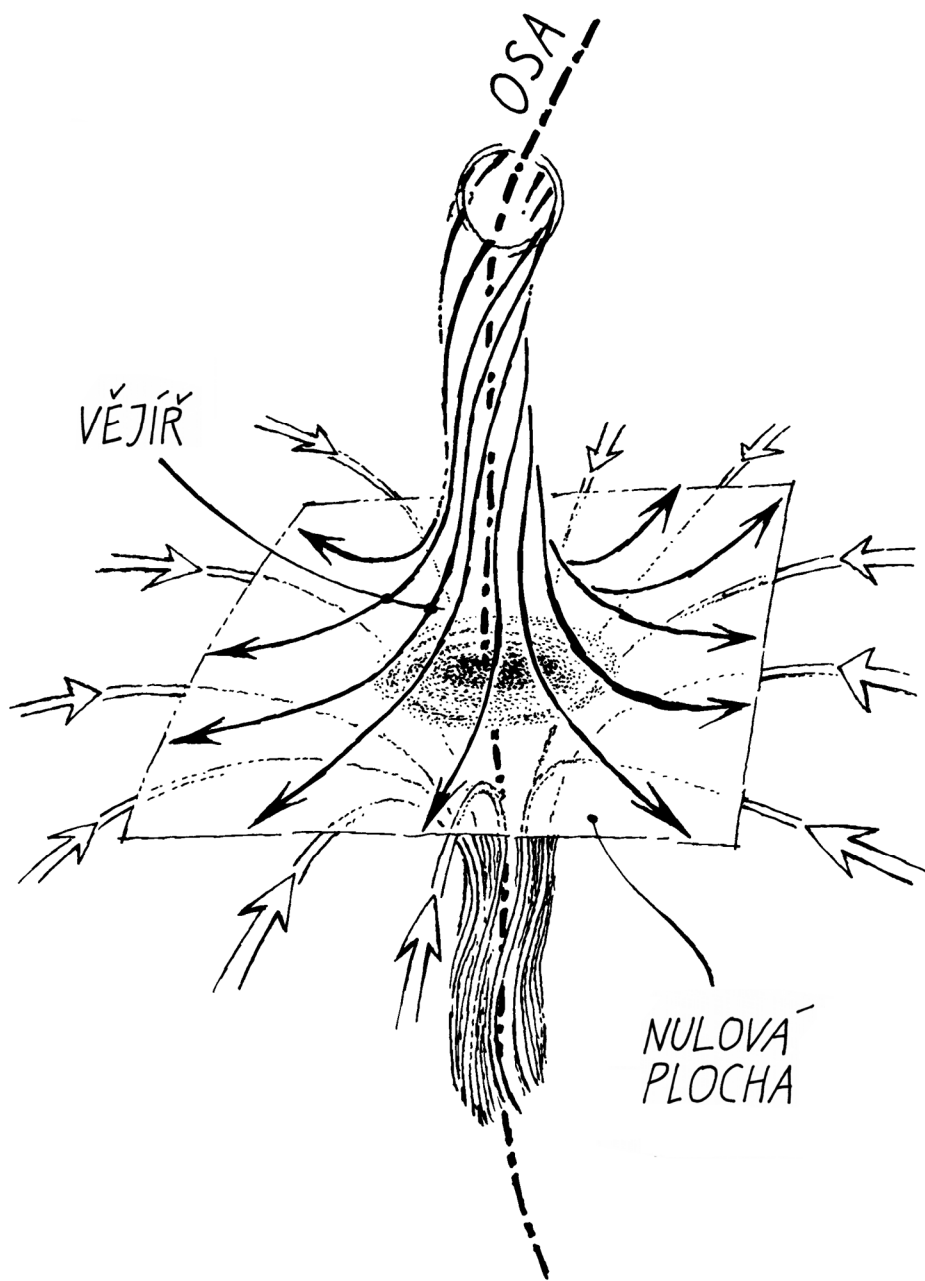
- Integrální principy mechaniky
- Zákony zachování v přírodě
- Hamiltonovy kanonické rovnice
- Vybrané úlohy z teoretické mechaniky
- Nelineární dynamické systémy
- Lagrangeovy rovnice pro polní problémy

KVANTOVÁ TEORIE

- Mikrosvět a makrosvět
- Základní principy kvantové teorie
- Harmonický oscilátor
- Jednoduché jednorozměrné systémy
- Sférický symetrický potenciál
- Časový vývoj
- Relativistická kvantová teorie, spin
- Fermiony a bosony
- Kvantová teorie a skryté parametry

MATEMATIKA PRO FYZIKU

- Einsteinova sumační konvence
- Komplexní čísla a funkce
- Vektory a tenzory
- Diracova symbolika a operátory v kvantové teorii
- Od gradientu k helicitě
- Vícerozměrné integrály
- Některé speciální funkce
- Zobecněné funkce
- Kuželosečky, trigonometrie a další



Vybrané kapitoly z teoretické fyziky III

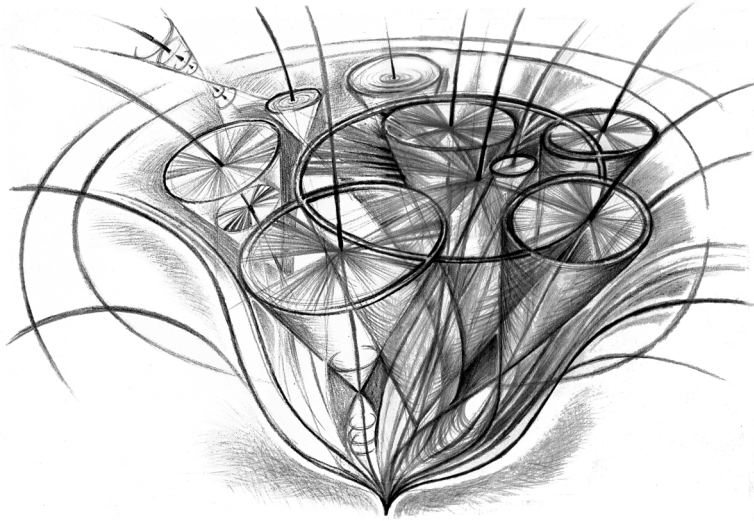
Třetí a poslední díl „Vybraných kapitol“ je věnován fyzice plazmatu a numerickým metodám řešení fyzikálních úloh. Fyzika plazmatu je bouřlivě se rozvíjejícímu odvětvím vědy, které umožňuje chápat nejen procesy ve vesmíru. Lidstvu také přináší převratné technologie, které se stávají součástí našeho běžného života. Fyzika plazmatu umožňuje nové metody léčby pacientů v medicíně. Za základ této části knihy posloužila dřívější učebnice „Úvod do teorie plazmatu“, která byla rozšířena o nelineární partie, zejména solitony, turbulenci a fyziku ubíhajících elektronů, jež mohou snadno poškodit naše drahá zařízení. Druhá část posledního dílu „Vybraných kapitol“ je věnována naprostým základům numerických simulací fyzikálních procesů. Razantní nástup výpočetní techniky umožňuje fascinující simulace procesů probíhajících i za extrémních podmínek, které jsou často experimentálně nedosažitelné.

TEORIE PLAZMATU

- Pohyby nabitých částic
- Adiabatické přiblížení
- Drifty
- Pohyby ve speciálních konfiguracích
- Magnetohydrodynamika
- Helicita
- Tekutinové dynamo
- Přepojení siločar
- Rovnováha plazmatu
- Rázové vlny
- Lineární vlny v plazmatu
- Elektromagnetický komplex
- CMA diagram
- Faradayova rotace
- Magnetoakustické vlny
- Nestability v plazmatu
- Statistický popis plazmatu
- Fokkerova-Planckova rovnice
- Nelineární jevy: turbulence, solitony, ubíhající elektrony

NUMERICKÉ SIMULACE

- Pohyby částic
- Schémata pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic
- Tvorba diferenčních schémat pro parciální diferenciální rovnice
- Particle in Cell (PIC) simulace
- Řešení polynomiálních rovnic
- Monte Carlo simulace
- Realizace pravděpodobnostního rozdělení
- Simulované ochlazování
- Metropolisova metoda



Petr Kulhánek
Vybrané kapitoly z teoretické fyziky II
(1. Statistická fyzika, 2. Elektromagnetické pole, 3. Relativita)

Žádná část této publikace nesmí být publikována a šířena žádným způsobem a v žádné podobě bez výslovného svolení autora a sdružení AGA.

Autor: prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.
Grafika a obálka: Ing. arch. Ivan Havlíček
Formát: 165×235 mm, 384 stran, 222 obrázků
Nakladatelství: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)
Nahrávky přednášek: aldebaran.cz (Daniel Handl, FEL ČVUT)
Přední strana obálky: Einsteinův kříž Q2237+030, Gemini/GMOS
Zadní strana obálky: Einsteinův kříž H1413+117, CFA/Harvard
Vydání: druhé, aktualizovaný dotisk, březen 2024, Praha
Aktualizace elektronické verze: březen 2024
Tisk: TISK CENTRUM s.r.o.

ISBN 978-80-906638-3-1