Relativita II – příklady

1. Inverzní matice k LT (přednáška)

Zadání: Nalezněte inverzní matici k matici Lorentzovy transformace.

Řešení: V tomto případě stačí zaměnit $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$, takže je pak $\gamma \to \gamma$; $\beta \to -\beta$ a inverzní matice má tvar

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Transformační rovnice má tvar

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' \tag{2}$$

Ověřte, že platí

$$\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{1}. \tag{3}$$

2. Úhel rotace, rapidita

Zadání: Nalezněte úhel rotace u Lorentzovy transformace.

Řešení: Postupujeme jako při obyčejné rotaci v prostoru, kdy se otočíme o určitý úhel v rovině (x, y); souřadnice z se nemění. Tento obecný případ lze popsat jako transformaci

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4}$$

Transformační maticí při této rotaci je matice

$$\mathbf{R} \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

jejíž determinant je $\det \mathbf{R} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Jak je tomu u Lorentzovy transformace? Z Lorentzovy transformační matice se zdá, že jde o rotaci v rovině (t, x). Kdyby bylo $\gamma = \cos\varphi$, pak z determinantu Lorentzovy matice $\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$ vychází $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1 = \cos^2\varphi - 1$, což nedává $\sin^2\varphi$. Tento problém řeší hyperbolické funkce ch a sh. Provedeme tedy substituci

$$\gamma \equiv \operatorname{ch} u. \tag{6}$$

Pak je $\gamma^2\beta^2 = \operatorname{ch}^2 u - 1 = \operatorname{sh}^2 u$ a lze volit $\gamma\beta = \operatorname{sh} u$. Lorentzova matice získá tvar

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & -\operatorname{sh} u & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

který je velice podobný rotační transformační matici, determinant je zjevně roven jedné. Jde o rotaci v rovině (t ,x) o ryze imaginární úhel u, který se nazývá rapidita. Hodnotu rapidity snadno zjistíme:

$$\operatorname{th} u = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} = \frac{\gamma \beta}{\gamma} = \beta = \frac{v}{c} \qquad \Rightarrow \qquad u = \operatorname{arcth} \frac{v}{c} . \tag{8}$$

Rapidita je jednoduchou funkcí vzájemné rychlosti obou soustav.

3. Parametry částice

Zadání: Elementární částice má v soustavě pozorovatele hybnost $3{,}6\times10^{-22}$ kg m s^{-1} a celkovou energii $1{,}35\times10^{-13}$ J. Určete klidovou hmotnost a rychlost částice.

Řešení Napišme si nejprve vztahy pro hybnost a energii

$$\begin{aligned} p &= \gamma\, m_0 v , \\ E &= \gamma\, m_0\, c^2 . \end{aligned} \tag{9}$$

Vzhledem k tomu, že levé strany známe, můžeme rychlost získat vydělením obou rovnic:

$$v = \frac{p\, c^2}{E} = 240\times10^6 \,\mathrm{m\,s^{-1}} . \tag{10}$$

V dalším kroku určíme koeficient γ a klidovou hmotnost (buď ze vztahu pro hybnost, nebo ze vztahu pro energii):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ; \qquad m_0 = \frac{p}{\gamma v} = \;\cdots\; = 9{,}1\times10^{-31}\,\mathrm{kg} . \tag{11}$$

Klidová hmotnost elementární částice je rovna klidové hmotnosti elektronu.

4. Relativistické urychlení

Zadání: Řešte nerelativisticky a relativisticky pohybovou rovnici pro náboje, který je z nulové rychlosti urychlován ve směru elektrického pole.

Řešení nerelativistické: Budeme integrovat Newtonovu pohybovou rovnici

$$m\ddot{x} = QE \qquad \Rightarrow \qquad v(t) \equiv \dot{x} = \frac{QE}{m} t \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \frac{QE}{2m} t^2 . \tag{12}$$

Nerelativistické řešení má zjevné vady, například

$$\lim_{t\to\infty} v = \infty . \tag{13}$$

Náboj v konečném čase překročí rychlost světla a je urychlován dál a dál.

Řešení relativistické: Budeme integrovat relativistickou pohybovou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m v) = QE \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = QE \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = QE\, t . \tag{14}$$

Vidíme, že po první integraci jsme nedostali rychlost samotnou, ale vztah, ze kterého teprve musíme rychlost vypočítat:

$$\frac{m_0^2 v^2}{1-v^2/c^2} = Q^2 E^2 t^2 \qquad \Rightarrow \qquad m_0^2 v^2 = Q^2 E^2 t^2 \left(1 - v^2/c^2\right). \tag{15}$$

Z tohoto výrazu již snadno určíme hledanou rychlost

$$v(t) = \frac{QE\,t/m_0}{\sqrt{1+\dfrac{Q^2E^2t^2}{m_0^2 c^2}}}. \tag{16}$$

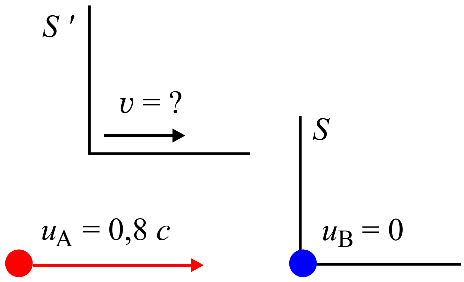
Výraz pro rychlost již není tak jednoduchý, zato ale nediverguje,

$$\lim_{t\to\infty} v = c. \tag{17}$$

Chcete-li znát polohu nabité částice, je třeba provést ještě jednu integraci.

5. Nepružná srážka

Zadání: Částice o klidové hmotnosti m_0 se nepružně srazí rychlostí 0,8 c s nepohyblivou částicí o stejné hmotnosti. Jaká bude rychlost spojených částic po srážce? Jaká bude jejich celková hmotnost?



Řešení: Laboratorní soustavu S spojíme s částicí B, která je v klidu. Dále zavedeme těžišťovou soustavu obou částic S', ve které se symetricky pohybují proti sobě. Rychlosti částic v těchto soustavách budou:

$$\begin{aligned} u_A &= 0{,}8\,c\,; \qquad & u_B &= 0\,, \\ u'_A &= -v \ ; \qquad & u'_B &= +v\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Transformační rovnice pro rychlost částice B nám dává:

$$u'_B = \frac{u_B - v}{1-\dfrac{u_B v}{c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{0{,}8c - v}{1-\dfrac{0{,}8\,v}{c}} \qquad \Rightarrow \qquad v = 0{,}5\,c\,. \tag{19}$$

Obě částice se tedy v těžišťové soustavě pohybují proti sobě rychlostí 0,5 c. Po srážce se spojené částice v těžišťové soustavě nepohybují. To znamená, že z hlediska laboratorní soustavy mají po srážce rychlost právě 0,5 c. Zbývá ještě určit jejich hmotnost. V těžišťové soustavě mají obě částice stejnou pohybovou hmotnost. Po srážce bude mít výsledná dvojice v těžišťové soustavě hmotnost:

$$m_T = 2m = 2\gamma m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-0{,}5^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\,m_0\,. \tag{20}$$

V těžišťové soustavě se po srážce částice nepohybují, proto jde o klidovou hmotnost spojené částice po srážce. Spojené částice se po srážce pohybují rychlostí 0,5 c a mají klidovou hmotnost $4m_0/\sqrt{3}$.

6. Poundův-Rebkův experiment

Zadání: Určete relativní změnu frekvence a vlnové délky v Pound-Rebkově experimentu. Foton prolétal věží o výšce $\Delta h = 22{,}6$ m. Použity byly fotony s energií 14,4 keV emitované izotopem kobaltu Co 57.

Řešení: Ze vztahu

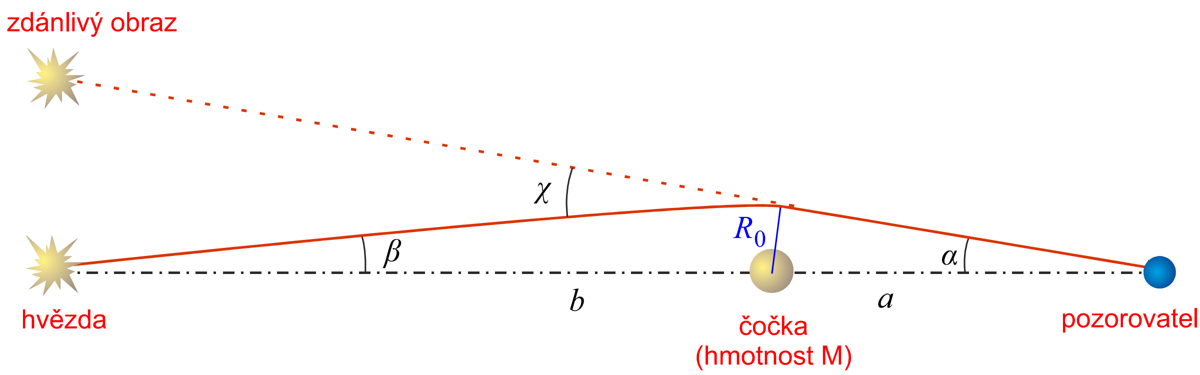
$$\Delta\omega/\omega_0 = -\,\Delta\lambda/\lambda_0 = \Delta\phi/c^2 = g\Delta h/c^2 \tag{21}$$

snadno určíme

$$\Delta\omega/\omega_0 = 2{,}5\times10^{-15},\ \Delta\lambda/\lambda_0 = -\,2{,}5\times10^{-15}. \tag{22}$$

7. Einsteinův prstenec

Zadání: Určete úhlový poloměr Einsteinova prstence, víte-li, že odklon paprsků je ve vzdálenosti R_0 od objektu $4GM/(c^2R_0)$.



Řešení: Hvězdu, která by byla v zákrytu za objektem o hmotnosti M, uvidíme podle obrázku jako prstenec s úhlovým poloměrem α. Všechny úhly jsou malé, proto můžeme psát

$$\alpha = \frac{R_0}{a}, \tag{23}$$

$$\beta = \frac{R_0}{b}, \tag{24}$$

Pro úhel ohybu platí

$$\chi = \frac{4GM}{c^2R_0}, \tag{25}$$

$$\chi = \alpha + \beta. \tag{26}$$

Poslední 4 rovnice můžeme chápat jako soustavu rovnic pro proměnné α, β, χ, R_0. Postupnou eliminací proměnných β, χ, R_0 získáme finální vztah pro úhlový poloměr Einsteinova prstence

$$\alpha = \sqrt{\frac{b}{a(a+b)}\frac{4GM}{c^2}}. \tag{27}$$

Einsteinovy prstence fotografované HST. Žlutý objekt uprostřed je mezilehlá čočkující galaxie.

8. Kosmologický posuv

Zadání: Kvazar má červený kosmologický posuv $z = 2{,}5$. Určete pozorovanou vlnovou délku čáry $\lambda = 680$ nm. Jaké byly rozměry vesmíru v době, kdy kvazar vyslal záření?

Řešení: Stačí vyjít ze základního vztahu pro kosmologický červený posuv:

$$z = \Delta\lambda/\lambda_0 = [R(t) - R(t_0)]/R(t_0). \tag{28}$$

Odsud snadno určíme:

$$2{,}5 = \lambda/\lambda_0 - 1 \quad \rightarrow \quad \lambda = 3{,}5\,\lambda_0 = 2380 \text{ nm}. \tag{29}$$

Obdobně

$$2{,}5 = R/R_0 - 1 \quad \rightarrow \quad R_0 = R\,/3{,}5 = 29\,\%\,R. \tag{30}$$

Vlnová délka je posunuta do neviditelné infračervené oblasti spektra. Vzdálenosti ve vesmíru byly v době vyslání signálu 29 % vzdáleností dnešních.