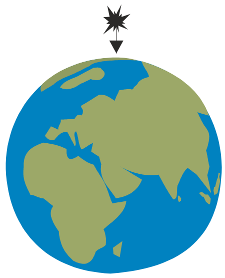
Relativita I – příklady

1. Mion

Zadání: Doba života mionu (těžkého elektronu) je $\Delta\tau = 2{,}2\times10^{-6}$ s. Mion vznikl ve výšce $h = 30$ km nad povrchem Země interakcí kosmického záření s horními vrstvami atmosféry a dopadl na Zem. Jakou musel mít minimální rychlost při vzniku?



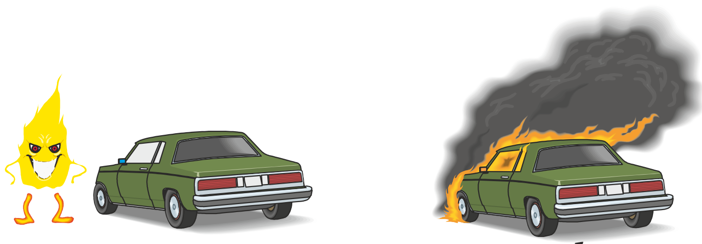
Řešení: Mion by podle klasické fyziky neměl na povrch Země vůbec dopadnout, protože se dříve rozpadne na normální elektron a neutrino. Z hlediska pozorovatele na Zemi je ale mion v pohyblivé soustavě a doba jeho života se prodlužuje na $\Delta t = \gamma\Delta\tau$. Mion proto může ulétnout až vzdálenost $h \le c\Delta t = c\gamma\Delta\tau$. Z tohoto vztahu vypočteme rychlost, kterou musí minimálně mít:

$$v \ge c\sqrt{1-\left(\frac{c\,\Delta\tau}{h}\right)^2} = 0{,}99976\,c\,. \tag{1}$$

Příklad lze také řešit v soustavě spojené s mionem jako kontrakci vzdálenosti, kterou musí mion ulétnout.

2. Interval

Zadání: Dokažte, že interval mezi dvěma událostmi je ve všech souřadnicových soustavách stejný.



a ***b***

Řešení: Předpokládejme, že se odehrály dvě události A a B a každá je popsána čtyřmi prostoročasovými údaji v nějaké souřadnicové soustavě S. Spočtěme interval v soustavě S' a v soustavě S. Ukážeme, že obě hodnoty jsou stejné. V S' platí

$$\Delta s'^2 = -c^2(t'_B - t'_A)^2 + (x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2 + (z'_B - z'_A)^2\,. \tag{2}$$

Interval přepíšeme pomocí přírůstků, které určíme z Lorentzovy transformace

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)\,, \qquad x' = \gamma(x - vt)\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,. \tag{3}$$

Pro interval tedy máme

$$\begin{aligned}
&\Delta s'^2 = -c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \qquad \Rightarrow \\
&\Delta s'^2 = -c^2\left[\gamma(\Delta t - v\,\Delta x / c^2)\right]^2 + \left[\gamma(\Delta x - v\,\Delta t)\right]^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 .
\end{aligned} \tag{4}$$

Po roznásobení se výrazy úměrné $\Delta x\,\Delta t$ vyruší a zbude

$$\Delta s'^2 = -c^2\gamma^2(\Delta t)^2 - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2(\Delta x)^2 + \gamma^2(\Delta x)^2 + \gamma^2 v^2(\Delta t)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \ .$$

Nyní sloučíme členy s Δx a Δt k sobě:

$$\Delta s'^2 = -\gamma^2\left(c^2 - v^2\right)\Delta t^2 + \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 .$$

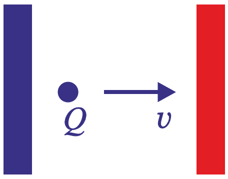
Využijeme-li definici koeficientu γ, máme okamžitě

$$\Delta s'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 = \Delta s^2 . \tag{5}$$

Interval mezi oběma událostmi je proto ve všech souřadnicových soustavách stejný.

3. Elektron

Zadání: Elektron je urychlen napětím $U = 10^6$ V. Určete jeho rychlost z klasického i relativistického výrazu pro kinetickou energii a výsledky porovnejte.



Řešení: Elektron v obou případech urychlením získá kinetickou energii

$$W_k = QU \ . \tag{6}$$

V klasickém případě je

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2QU}{m}} = 1{,}98\, c\, . \tag{7}$$

V relativistickém případě je

$$W_k = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + QU}\right)^2} = 0{,}94\, c\, . \tag{8}$$

Nerelativistický výraz tedy zjevně nemůžeme v tomto případě použít, vede k rychlostem pohybu elektronu vyšším než je rychlost světla.

4. Slunce

Zadání: Jak se změní hmotnost Slunce za jeden rok díky jeho vyzařování? Intenzita slunečního záření nad atmosférou Země je $I = 1{,}4$ kW/m^2, hmotnost Slunce je 2×10^{30} kg, vzdálenost Země od Slunce je $d = 150\times10^6$ km.

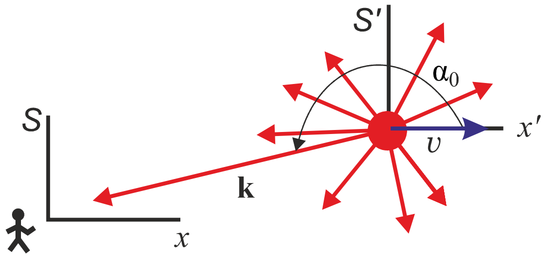
Řešení: Hmotnost se změní o

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = P\Delta t/c^2 = 4\pi d^2 I\,\Delta t/c^2 \sim 10^{17}\ \text{kg}. \tag{9}$$

Slunce přichází o zanedbatelný zlomek své celkové hmotnosti.

5. Dopplerův jev (na přednášce)

Zadání: Odvoďte relativistický Dopplerův jev pomocí transformace vlnového čtyřvektoru (k_x, k_y, k_z, ω/c). Zkuste se zamyslet nad tím, proč dochází k Dopplerovu jevu i tehdy, když zdroj pozorovatele jen míjí a jejich vzdálenost se nemění (tzv. transverzální neboli příčný Dopplerův jev).



Řešení: Snadno nalezneme řešení v soustavě S' spojené s zdrojem záření:

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}_{S'} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ k\cos\alpha_0 \\ k\sin\alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ \omega_0/c\cdot\cos\alpha_0 \\ \omega_0/c\cdot\sin\alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Nyní provedeme Lorentzovu transformaci do soustavy pozorovatele S (jde o inverzní Lorentzovu transformaci):

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ \omega_0/c\cdot\cos\alpha \\ \omega_0/c\cdot\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{S} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_0/c \\ \omega_0/c\cdot\cos\alpha_0 \\ \omega_0/c\cdot\sin\alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímá frekvence v místě pozorovatele, postačí nalézt jen nultý řádek maticového násobení:

$$\omega = \gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha_0\right)\omega_0 \,. \tag{12}$$

Tento vztah je známý jako relativistický Dopplerův jev. V limitě nízkých rychlostí (zanedbáme členy kvadratické a vyšší v v/c) je $\gamma \to 1$ a $\omega = (1 + v/c\cos\alpha_0)\,\omega_0$. Při vzdalování zdroje je $\alpha_0 = 180°$ a $\omega = (1 - v/c)\,\omega_0$, při přibližování zdroje je $\alpha_0 = 0°$ a $\omega = (1 + v/c)\,\omega_0$. Jde o známé nerelativistické Dopplerovy vztahy. Při vyšších rychlostech jsou tyto vztahy modifikovány koeficientem γ. Jestliže zdroj záření pozorovatele míjí ($\alpha_0 = \pm 90°$) je $\omega = \gamma\,\omega_0$. Ke změně frekvence tedy dochází i v případě, že se zdroj nevzdaluje ani nepřibližuje. Tento jev se nazývá transverzální Dopplerův jev a jde o čistě relativistický jev, který nemá v nerelativistické fyzice obdoby. Je způsoben změnou chodu času v pohybující se soustavě (dilatací času). Prostorové relace maticové transformace dají vztahy

$$\omega\cos\alpha = \gamma\omega_0(\beta + \cos\alpha_0)\,, \tag{13}$$

$$\omega\sin\alpha = \omega_0\sin\alpha_0\,. \tag{14}$$

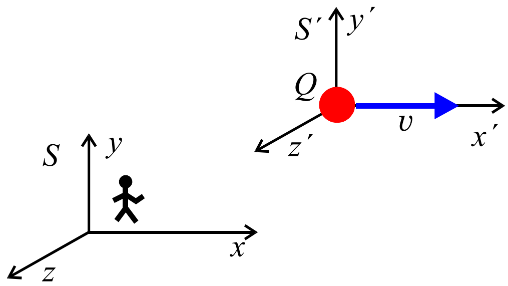
Pokud obě rovnice vydělíme, získáme vztah mezi oběma úhly, který je nezávislý na frekvencích a závisí jen na vzájemné rychlosti soustav:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha_0}{\gamma\beta + \gamma\cos\alpha_0} \tag{15}$$

Ze vztahu je zřejmé, že vlnoplocha změnila směr a že tato změna závisí jen na vzájemné rychlosti soustav v. Relativistický Dopplerův jev jsme zde odvodili jen pro světlo ($\omega = ck$) a nikoli pro obecné vlnění látky.

6. Heavisideovo pole

Zadání: Heavisideovo pole. Určete pole nabité částice letící konstantní rychlostí. Využijte transformaci čtyřvektoru potenciálu pole $(A_x, A_y, A_z, \phi/c)$.



Řešení: V soustavě spojené s nábojem je zřejmě vektorový potenciál nulový (není zde přítomno magnetické pole) a skalární potenciál je dán Coulombovým zákonem:

$$\phi' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\,. \tag{16}$$

Provedeme inverzní Lorentzovu transformaci do soustavy S pozorovatele

$$\begin{pmatrix}\phi/c\\ A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Q/(4\pi\varepsilon_0 c r')\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Po vynásobení matic dostáváme pro potenciály v soustavě pozorovatele

$$\phi = \frac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\,; \qquad A_x = \frac{\gamma\beta Q}{4\pi\varepsilon_0 c r'}\,; \qquad A_y = 0\,; \qquad A_z = 0\,. \tag{18}$$

Ve výsledku jsme označili

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{19}$$

Je zřejmé, že magnetické pole je již nenulové a elektrické pole je také modifikováno. Nový tvar polí je

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\gamma Q\,(x - vt)}{4\pi\varepsilon_0\left[\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}\,,\\
E_y &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{\gamma Q\, y}{4\pi\varepsilon_0\left[\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}\,,\\
E_z &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\gamma Q\, z}{4\pi\varepsilon_0\left[\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}\,.
\end{aligned} \tag{20}$$

Magnetické pole určíme jako rotaci vektorového potenciálu:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0\,,$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\gamma\beta Q\, z}{4\pi\varepsilon_0 c\left[\gamma^2 (x-vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}\,, \qquad (21)$$

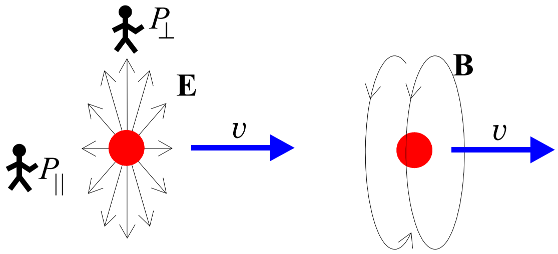
$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = +\frac{\gamma\beta Q\, y}{4\pi\varepsilon_0 c\left[\gamma^2 (x-vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}\,.$$

Důležitá je kolmá a rovnoběžná složka elektrického pole, určíme ji v místech označených na obrázku postavičkou pozorovatele:

$$E_\perp = \left.\sqrt{E_y^2 + E_z^2}\right|_{x=vt} = \gamma \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2+z^2)}\,, \qquad (22)$$

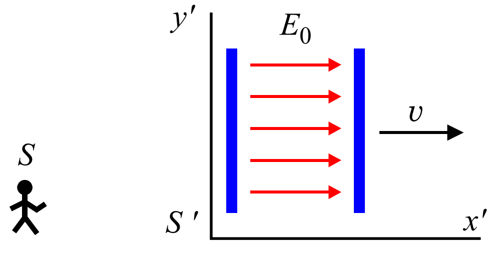
$$E_\parallel = \left. E_x \right|_{\substack{y=0\\ z=0}} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (x-vt)^2}\,. \qquad (23)$$

Vidíme, že elektrické pole je napříč pohybu nataženo faktorem γ a ve směru pohybu je stlačeno faktorem γ^{-2}. Pole se pohybuje spolu s nábojem. Magnetické pole tvoří kružnice kolmé na pohyb náboje. Pro nekonečnou řadu nábojů bychom získali pole kolem vodiče.



7. Letící kondenzátor

Zadání: Rovinný deskový kondenzátor s homogenním elektrickým polem se pohybuje vzhledem k pozorovateli rychlostí v ve směru silokřivek pole. Určete elektrické a magnetické pole, které bude pozorovatel pozorovat.



Řešení: Zavedeme souřadnicovou soustavu S' spojenou s kondenzátorem. Soustava S bude spojená s pozorovatelem. V soustavě spojené s kondenzátorem jsou potenciály pole triviální. Elektrické pole musí být záporně vzatým gradientem skalárního potenciálu, magnetické pole rotací vektorového potenciálu, odsud určíme potenciály:

$$\begin{aligned} \phi' &= -E_0\, x'\,, \\ A'_x &= 0\,, \\ A'_y &= 0\,, \\ A'_z &= 0\,. \end{aligned} \qquad (24)$$

Nyní provedeme inverzní Lorentzovu transformaci k soustavě spojené s pozorovatelem:

$$\begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -E_0\, x' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Výsledné potenciály jsou:

$$\begin{gathered} \phi = -\gamma E_0\, x' = -\gamma^2 E_0\,(x - v t), \\ A_x = -\frac{\gamma\beta E_0 x'}{c} = -\frac{\gamma^2 \beta E_0\,(x - v t)}{c}, \\ A_y = 0, \\ A_z = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Poslední částí výpočtu je určení nových elektrických a magnetických polí:

$$\begin{gathered} E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = \gamma^2 E_0 - \gamma^2 \frac{\beta}{c} E_0\, v = \gamma^2 (1 - v^2/c^2)\, E_0 \;=\; E_0, \\ E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = 0, \\ E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = 0, \\ B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \;=\; 0, \\ B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \;=\; 0, \\ B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \;=\; 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Pohybuje-li se zdroj homogenního elektrického pole ve směru silokřivek, pole se nezmění. Toto tvrzení ale neplatí pro pohyb napříč silokřivkám. V tomto případě se mění elektrické pole a generuje pole magnetické (Vyzkoušejte!).