Elektromagnetické vlny – příklady I

1. Vlnová rovnice (na přednášce)

Zadání: Ukažte, že z Maxwellových rovnic ve vakuu plyne vlnová rovnice pro elektrické i magnetické pole.

Návod: použijte vektorovou identitu rot rot **K** = grad div **K** −Δ**K**.

Řešení: Vyjdeme z Maxwellových rovnic ve vakuu

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1}$$

Budeme se snažit vyloučit z rovnic elektrické pole, proto provedeme rotaci na třetí rovnici

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} &= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\operatorname{rot}\mathbf{E}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}-\Delta\mathbf{B} &= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\operatorname{rot}\mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2}$$

Za div **B** dosadíme z druhé Maxwellovy rovnice, za rot **E** z poslední a získáme vlnovou rovnici pro magnetické pole:

$$\Delta\mathbf{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0\,. \tag{3}$$

Zcela obdobně bychom získali vlnovou rovnici pro elektrické pole (rotací poslední rovnice). Provedeme-li ve vlnové rovnici Fourierovu transformaci získáme disperzní relaci

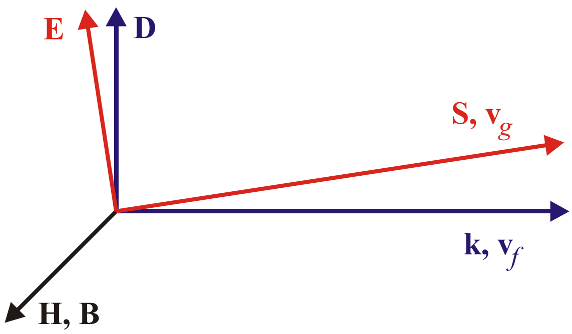
$$\omega^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}k^2\,. \tag{4}$$

Tuto disperzní relaci bychom získali i okamžitým použitím Fourierovy transformace na (1).

2. Vlny v anizotropním prostředí

Zadání: Řešte pomocí Fourierovy transformace Maxwellových rovnic konfiguraci polí v elektromagnetické vlně v elektricky anisotropním prostředí. V jakém směru míří fázová rychlost a v jakém směru míří grupová rychlost?

Předpoklady: V anizotropním prostředí nemusí vektory **E** a **D** mířit ve stejném směru. Připomeňme si, že **D** = ε_0**E** + **P**. Vektor elektrické polarizace **P** je objemová hustota dipólových momentů, které vyvolá pole **E**. Ty ale mohou sledovat například krystalografické roviny a ne pole **E**. Výsledkem je, že pole **E** a **D** mají různý směr. Stejně tak může u magneticky aktivních materiálů docházet k magnetizaci prostředí a vektor **H** = **B**/μ_0 − **M** (kde **M** je tzv. magnetizace) nemusí mířit ve stejném směru jako **B**. Budeme předpokládat anizotropii elektrických vlastností, tj. elektrické vektory **D** a **E** nejsou rovnoběžné.



Řešení: V Maxwellových rovnicích položíme $\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$. Vzhledem k anizotropii musíme v rovnicích ponechat oba elektrické vektory. Provedeme Fourierovu transformaci Maxwellových rovnic:

div $\mathbf{D} = 0$,	$\Rightarrow$	$\mathbf{k}\cdot\mathbf{D} = 0$	$\Rightarrow$	$\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$
div $\mathbf{B} = 0$,	$\Rightarrow$	$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0$	$\Rightarrow$	$\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$
rot $\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t$,	$\Rightarrow$	$\mathbf{k}\times\mathbf{H} = -\omega\mathbf{D}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{D} \perp \mathbf{k}, \mathbf{H}$
rot $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$	$\Rightarrow$	$\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \omega\mathbf{B}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{B} \perp \mathbf{k}, \mathbf{E}$

Fázová rychlost míří ve směru vlnového vektoru **k**, grupová rychlost ve směru šíření energie, tj. ve směru Poytingova vektoru $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$. Poměry v elektromagnetické vlně v elektricky anizotropním prostředí jsou vystiženy v obrázku.

3. Pole ve slunečním světle

Zadání: Sluneční záření má v okolí Země intenzitu $I = 1.4$ kW/m^2. Nalezněte průměrnou hodnotu intenzity elektrického a indukce magnetického pole v slunečním záření v místě, kde se nachází Země.

Řešení: Intenzita dopadající energie je dána velikostí Poyntingova vektoru: $I_Z = |\,\mathbf{S}\,| = EH$. Poměr elektrické intenzity a magnetické indukce v elektromagnetické vlně je $E/B = c$. Tyto dva vztahy můžeme chápat jako soustavu dvou rovnic pro elektrické a magnetické pole:

$$\mu_0 I = EB\,; \qquad \frac{E}{B} = c\,.$$

Vynásobením a vydělením obou rovnic dostaneme řešení:

$$E = \sqrt{c\mu_0 I}\,; \qquad B = \sqrt{\frac{\mu_0 I}{c}}\,.$$

Výsledek: $E = 726$ V/m, $B = 2.4\times10^{-6}$ T.

Poznámka: Pole 726 V/m se na první pohled zdá být enormní. Musíme si však uvědomit, že rozdíl potenciálů 726 V je měřen na vzdálenosti 1 m. Skutečné emisní akty však tvají krátkou dobu a pozorované světlo se skládá z úseků rozměrů několikanásobku vlnové délky. Na této vzdálenosti je již rozdíl potenciálů malý.

4. Prachový ohon

Zadání: Určete rozměry částeček prachu, u kterých je v mlhovině kolem hvězdy vyrovnána gravitační síla tlakem záření.

Řešení: Veličinu x charakterizující centrální hvězdu v mlhovině budeme označovat indexem x_*, veličinu x charakterizující zrníčko prachu indexem x_p. Pro gravitační sílu působící na zrníčko prachu vychází:

$$F_{\mathrm{G}} = G\,\frac{m_p m_*}{r^2} = G\,\frac{\frac{4}{3}\pi R_p^3 \rho_p m_*}{r^2}\,. \tag{5}$$

Sílu elektromagnetického záření určíme jako součin tlaku záření a účinné plochy zrníčka. Ta závisí na tvaru zrníčka a jeho orientaci vzhledem k dopadajícímu záření. V prvním přiblížení ji lze považovat za průřez zrníčka:

$$F_{\mathrm{RAD}} = p_{\mathrm{RAD}} \cdot S_p = \frac{1}{3} u \cdot \pi R_p^2 = \frac{1}{3}\frac{I(r)}{c} \cdot \pi R_p^2 \tag{6}$$

Intenzitu záření na povrchu hvězdy můžeme určit ze Stefan-Boltzmannova zákona $I(R_*) = \sigma T_*^4$. Intenzita ubývá s kvadrátem vzdálenosti a v místě zrníčka proto bude $I(r) = \sigma T_*^4 \cdot R_*^2 / r^2$. Výsledný vztah pro sílu způsobenou tlakem záření tedy bude:

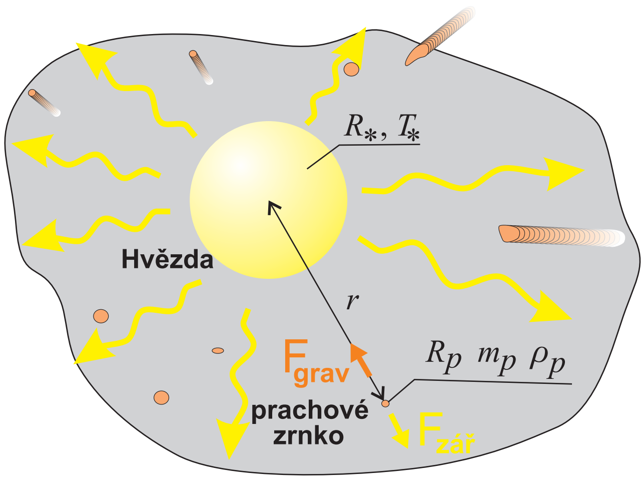
$$F_{\mathrm{RAD}} = \frac{1}{3}\frac{\pi\sigma}{c}\frac{T_*^4 \cdot R_*^2 \cdot R_p^2}{r^2}\,. \tag{7}$$

Povšimněte si, že gravitační síla i síla od tlaku záření ubývají s druhou mocninou vzdálenosti od hvězdy! Budou-li pro zrno určité velikosti vyrovnány v blízkosti hvězdy, budou také vyrovnány ve větší vzdálenosti. Malá zrníčka tak budou vypuzena tlakem záření a velká zrníčka udržována v mlhovině gravitací nezávisle na tom, o kterou část mlhoviny jde.

Porovnáním obou sil snadno určíme rozměry zrníčka, pro které jsou obě síly vyrovnány:

$$R_{p0} = \frac{\sigma}{4cG} \cdot \frac{T_*^4 R_*^2}{m_*} \cdot \frac{1}{\rho_p}\,. \tag{8}$$

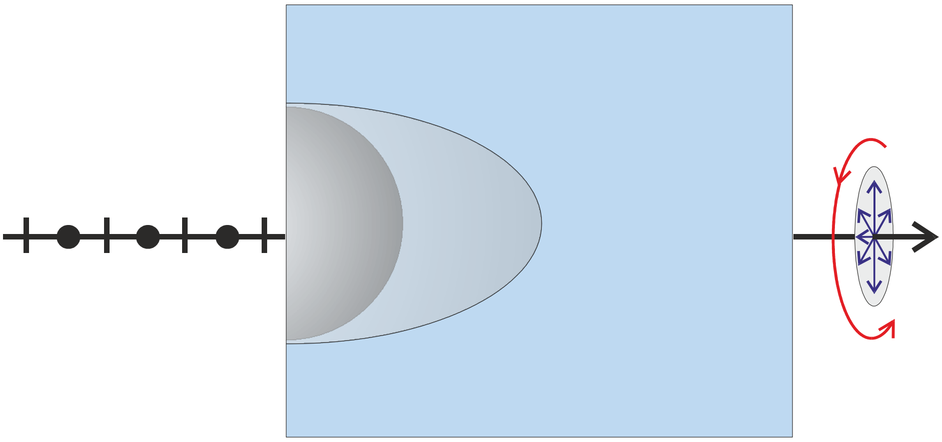
Pro rozměry zrníček $R_p < R_{p0}$ převládne tlak záření a pro rozměry zrníček $R_p > R_{p0}$ převládne gravitace.



Poznámky: Uvedené vztahy závisí jen na hustotě prachu, která bývá v celé mlhovině stejná. V mlhovině jsou však oblasti s malými rozměry zrnek a oblasti s většími rozměry. Dojde-li v mlhovině ke vzniku mladé hvězdy, jsou oblasti drobných zrnek vyfoukány vně mlhovinu, podobně jako je na poušti větrem odvát drobný prach na úkor hrubozrnného písku. Tomuto jevu se říká fotoevaporace, zpravidla je způsobena ultrafialovým světlem mladých hvězd. Výsledkem fotoevaporace jsou charakteristické ostře ohraničené oblasti mlhoviny, které odolaly agresivnímu záření mladých hvězd. Například u Orlí mlhoviny obklopující hvězdokupu M 16 se těmto útvarům říká „Sloupy stvoření“. Obdobný jev také známe u komet. Často mívají dva ohony, jeden z hrubších částeček, který míří blíže ke Slunci a je ovládán gravitací a druhý z drobnějších částeček, který míří spíše od Slunce a je ovládán tlakem záření. Vzhledem k přítomnosti odstředivé síly nejsou oba ohony na spojnici kometa-Slunce.

5. Čtvrtvlnná destička

Zadání: Nalezněte tloušťku čtvrtvlnné destičky vyrobené z berylu pro světlo o vlnové délce $\lambda = 500$ nm.



Řešení: Řádná a mimořádná vlna mají vzájemně kolmé polarizace. Čtvrtvlnná destička je navržena tak, aby se obě vlny fázově posunuly o 90°, čímž vznikne kruhově polarizovaná vlna. K tomu dojde, je-li řez tak tlustý, aby rozdíl optických drah byl $\lambda/4$:

$$\left(n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{o}}\right) d = \frac{\lambda}{4} \tag{9}$$

Odsud snadno určíme tloušťku destičky d. Pro beryl, který má řádný index lomu 1,598 a mimořádný 1,590 vychází $d = 15.6$ µm.