Vlnění – druhá sada

1. Ladička

Zadání: Zdroj zvuku se pohybuje na vozíku rychlostí v = 25 cm s^{-1} směrem ke stěně. Na opačné straně slyší pozorovatel rázy na frekvenci f_R = 3 Hz. Jaká byla frekvence zdroje zvuku, jestliže je rychlost zvuku c_S = 340 m/s?

Řešení: Pozorovatel slyší jednak přímou vlnu nižší frekvence (zdroj se vzdaluje) a jednak vlnu odraženou od stěny (vyšší frekvence − zdroj se pohybuje ke stěně). Obě vlny se skládají v rázy na rozdílové frekvenci:

$$f_1 = f_0\left(1 - \frac{v}{c}\right), \qquad f_2 = f_0\left(1 + \frac{v}{c}\right), \qquad f_R = f_2 - f_1 = 2f_0\,\frac{v}{c_S} \tag{1}$$

Korekce frekvence na pohyb zdroje jsme napsali do čitatele ($v \ll c_S$). Vidíme, že $f_0 = f_R c_S/(2v)$.

Výsledek: f_0 = 2 040 Hz.

2. Pískající lokomotiva

Zadání: Lokomotiva jedoucí rychlostí 72 km/h píská 2 sekundy. Jak dlouho trvá zvuk, který vnímá v klidu stojící pozorovatel

a) přijíždí-li lokomotiva k němu

b) vzdaluje-li se lokomotiva od něho.

Rychlost zvuku je 340 ms^{-1}.

Řešení: Celkový počet kmitů obsažených v signálu se vlivem Dopplerova jevu nemění. Mění se jen frekvence a doba trvání signálů v místě pozorovatele. Označíme-li n počet kmitů v signálu, lze psát

$$n = f_0 t_0 = f_1 t_1 = f_2 t_2 \,.$$

Kmitočet f_0 se při přibližování zdroje změní v důsledku Dopplerova jevu na

$$f_1 = f_0 \frac{c}{c - v}\,,$$

při vzdalování na

$$f_1 = f_0 \frac{c}{c + v}\,.$$

S použitím uvedených vztahů dostaneme pro přibližování

$$t_1 = \frac{n}{f_1} = \frac{f_0 t_0}{f_0 \frac{c}{c - v}} = t_0 \frac{c - v}{c} = 2\,\frac{340 - 20}{340} = 1{,}88 \text{ s}\,.$$

a pro vzdalování

$$t_2 = \frac{n}{f_2} = \frac{f_0 t_0}{f_0 \frac{c}{c + v}} = t_0 \frac{c + v}{c} = 2\,\frac{340 + 20}{340} = 2{,}12 \text{ s}\,.$$

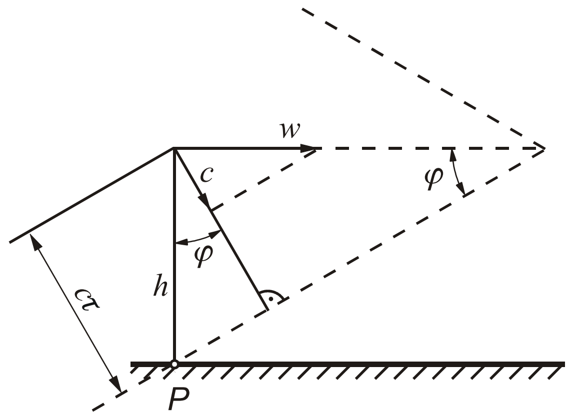
3. Rotující hvězda

Zadání: Nalezněte vztah pro rozšíření spektrální čáry způsobené rotací hvězdy. Vztah přepište pro vlnovou délku čar.

Řešení: Rotace hvězdy způsobuje, že jeden okraj hvězdy se k nám přibližuje rychlostí $v = R\omega$ a druhý okraj se toutéž rychlostí vzdaluje. R je poloměr hvězdy a ω úhlová rychlost rotace hvězdy. Výsledkem je dopplerovské rozšíření spektrální čáry. Krajní frekvence budou dány vztahy $f_{1,2} = f_0\,(1 \pm R\omega/c)$ a krajní vlnové délky $\lambda_{1,2} = c/[f_0\,(1 \pm R\omega/c)] \sim (c \pm R\omega)/f_0$. Opět jsme využili toho, že korekce jsou malé a lze je se změnou znaménka převézt z jmenovatele do čitatele ($1/[1 + x] \sim [1 - x]$). Rozdíl vlnových délek obou čar tedy bude $\Delta\lambda = 2R\omega/f_0$.

4. Rázová vlna za letadlem

Zadání. Letadlo Concorde letí v konstantní výšce $h = 18$ km rychlostí $w = 2376$ km/h. Za jakou dobu uslyší pozorovatel na povrchu země sonický třesk letadla poté, co jej uviděl kolmo nad hlavou? (Zanedbejte zakřivení a ostatní nerovnosti zemského povrchu a nehomogenitu atmosféry, pro výpočet uvažujte $c = 330$ m/s. Jaký další předpoklad je v následujícím řešení obsažen?



Řešení: Letadlo letí nadzvukovou rychlostí, vytvoří se rázová vlna. Její čelo se pohybuje (normálovou) rychlostí c a dorazí k pozorovateli za čas τ. Pro poloviční vrcholový úhel rázové vlny platí $\sin\varphi = c/w$. Poloha pozorovatele je však určena výškou h, kterou vyjádříme pomocí c, τ a w

$$h = \frac{c\tau}{\cos\varphi} = \frac{c\tau}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{c\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{w}\right)^2}}\ , \tag{2}$$

$$\tau = \frac{h}{c}\sqrt{1-\left(\frac{c}{w}\right)^2} = 47{,}2\ \text{s}\,. \tag{3}$$

Předpokládá se, že rychlost šíření světla (viz slovo „uviděl“) je dostatečně velká oproti rychlosti zvuku, aby ji bylo možno zanedbat.

5. Vlnová rovnice

Zadání: V (malé ale konečné) části periody jisté jednorozměrné postupné příčné vlny bylo zjištěno konstantní zrychlení a kmitajícího elementu. Stanovte, jak rychle se mění výchylka h elementu během průchodu této části vlny jistým bodem prostoru ve směru šíření. Fázová rychlost šíření je známa.

Řešení: Vlnění lze popsat jednorozměrovou vlnovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{1}{v_f^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}=0,$$

kde výraz $\partial^2 h/\partial t^2$ představuje v našem případě zrychlení kmitajícího bodu. Je tedy

$$\frac{1}{v_f^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}=\frac{1}{v_f^{\,2}}a=\text{konst}=K \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=K\,.$$

Rychlost změny výchylky podle souřadnice x je

$$\tau_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\int\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx=\int Kdx=Kx=\frac{1}{v_f^2}ax\,.$$

v uvažovaném intervalu se proto mění lineárně.

Poznámka: Již ze zadání snadno nahlédneme, že se ve směru kolmém na rychlost šíření jedná o pohyb rovnoměrně zrychlený a výchylka se bude i podle souřadnice *x* měnit s lineárně rostoucí nebo klesající rychlostí. Vlnová rovnice nám však poskytuje i hodnotu rychlosti této změny.

6. Disperzní relace vlnové rovnice

Zadání: Nalezněte disperzní relaci vlnové rovnice

Řešení: Na klasickou vlnovou rovnici narazíme v mnoha vědních odvětvích. Odpovídá jednoduchým vlnám bez disperze.

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi=0 \tag{4}$$

Rovnice je lineární a každé její „rozumné“ řešení je možné zapsat pomocí Fourierovy transformace jako superpozici rovinných vln. Po dosazení rovinné vlny do vlnové rovnice získáme disperzní relaci

$$\omega^2=c^2k^2\,. \tag{5}$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_\mathrm{f}=\frac{\omega}{k}=c; \qquad v_\mathrm{g}=\frac{\partial\omega}{\partial k}=c\,. \tag{6}$$

Fázová i grupová rychlost je stejná a nezávisí na vlnové délce parciální vlny, což je charakteristické pro lineární disperzní relace typu $\omega = ck$.

7. Disperzní relace Kleinovy-Gordonovy rovnice

Zadání: Nalezněte disperzní relaci Kleinovy-Gordonovy rovnice

Řešení: Kleinova-Gordonova rovnice je správnou relativistickou rovnicí pro volnou částici se spinem rovným nule

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\mu^2\right)\psi=0\,; \qquad \mu^2\equiv\frac{m^2c^2}{\hbar^2}. \tag{7}$$

Jde o vlnovou rovnici s konstantním členem, která se využívá pro popis částic s nulovým spinem v kvantové teorii. Rovnice je lineární, její řešení opět budeme chápat jako superpozici rovinných vln. Po provedení Fourierovy transformace Kleinovy-Gordonovy rovnice získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 + c^2 \mu^2 . \tag{8}$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$\begin{aligned} v_\mathrm{f} &= \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1+\frac{\mu^2}{k^2}} = c\sqrt{1+\frac{\mu^2\lambda^2}{4\pi^2}} , \\ v_\mathrm{g} &= \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{\mu^2}{k^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{\mu^2\lambda^2}{4\pi^2}}} . \end{aligned} \tag{9}$$

Na první pohled je zřejmé, že grupová rychlost je vždy podsvětelná. Oproti tomu fázová rychlost je vždy nadsvětelná a nemá význam přenosu informace. Mezi oběma rychlostmi je jednoduchý vztah $v_\mathrm{f} v_\mathrm{g} = c^2$. Obě rychlosti závisí na vlnové délce parciální vlny (tzv. disperze).

8. Zvukové vlny v pohyblivém prostředí

Zadání: Nalezněte disperzní relaci pro zvukové vlny v pohybujícím se plynu

Řešení: Za výchozí soustavu rovnic využijme rovnici kontinuity, pohybovou rovnici a stavovou rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} &= 0 , \\ \rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} &= -\nabla p , \\ p = p(\rho) &= K\rho^\gamma . \end{aligned} \tag{10}$$

Připusťme nyní nenulovou rychlost ve stacionárním řešení (to odpovídá šíření zvuku v pohybujícím se prostředí) a požadujme řešení ve tvaru

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho , \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u} , \qquad p = p_0 + \delta p . \tag{11}$$

Výpočet probíhá zcela analogicky jako u zvukových vln v nepohyblivém prostředí. Nejprve provedeme linearizaci (v rovnicích ponecháme členy lineární v poruchách):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0\delta\mathbf{u} + \mathbf{u}_0\delta\rho) &= 0 , \\ \rho_0\frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0(\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\delta\mathbf{u} &= -\nabla\delta p , \\ \delta p = \alpha\delta\rho ; \quad \alpha &\equiv \frac{\partial p}{\partial\rho} . \end{aligned} \tag{12}$$

Po Fourierově transformaci máme

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0 - \omega)\delta\rho + \rho_0\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u} &= 0 , \\ +\mathbf{k}\delta p + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0 - \omega)\rho_0\delta\mathbf{u} &= , \\ \delta p = \alpha\delta\rho ; \quad \alpha &\equiv \frac{\partial p}{\partial\rho} . \end{aligned} \tag{13}$$

Po eliminaci proměnných (z poslední rovnice určíme δp, z předposlední $\delta\mathbf{u}$ získáme disperzní relaci

$$\left[\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0\right]^2 - \alpha(\rho_0)k^2 = 0\,; \qquad \alpha = \frac{\partial p}{\partial \rho} \tag{14}$$

a z ní pozorovanou úhlovou frekvenci

$$\omega = c_\mathrm{s}k + \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0 = c_\mathrm{s}k + ku_0\cos\varphi = c_\mathrm{s}k\left(1 + \frac{u_0}{c_\mathrm{s}}\cos\varphi\right)\,.; \qquad c_\mathrm{S} \equiv \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \tag{15}$$

Ve výrazu jsme φ označili úhel mezi vlnovým vektorem **k** a rychlostí prostředí $\mathbf{u}_0$. značíme-li ještě frekvenci zvuku v nepohyblivém prostředí $\omega_0 = c_\mathrm{s}k$, máme výsledný vztah

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{u_0}{c_\mathrm{s}}\cos\varphi\right)\,, \tag{16}$$

který není nic jiného než Dopplerův vzorec pro změnu frekvence vlivem pohybu zdroje vlnění. U pohybujících se tekutin se tedy v disperzní relaci objeví místo úhlové frekvence ω kombinace $\Omega = \omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0$.