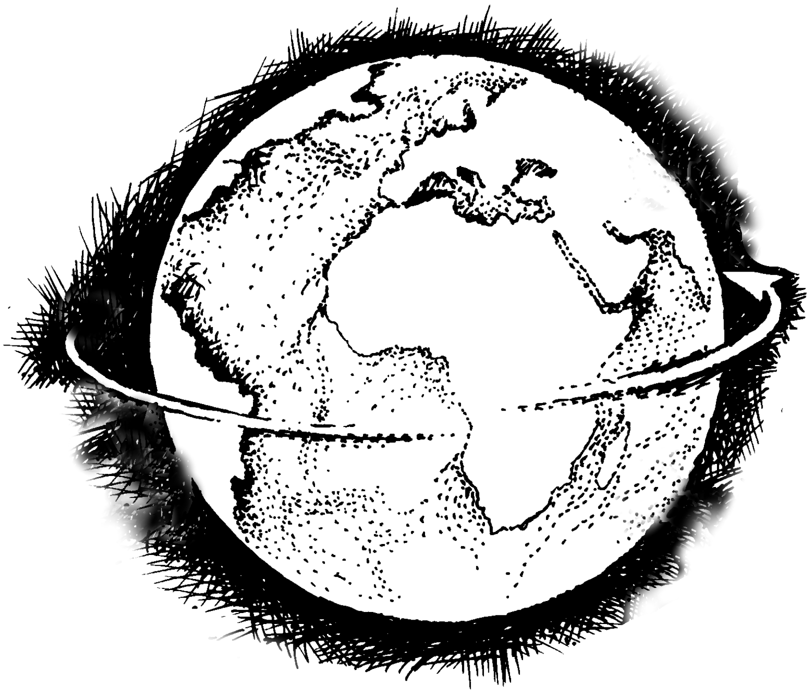
F7

MOMENT SETRVAČNOSTI

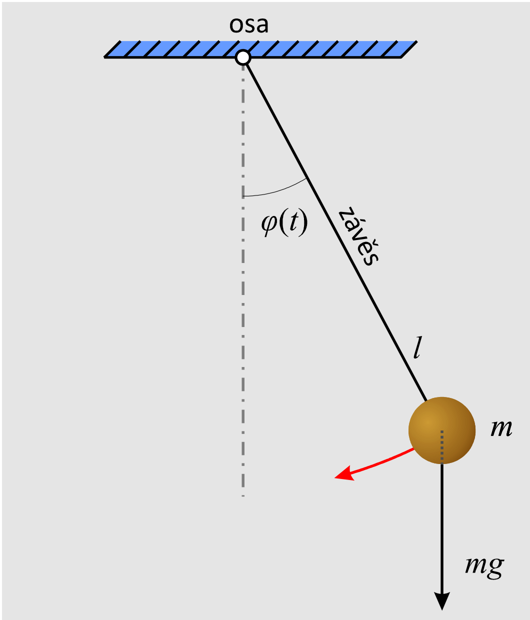


Evropský sociální fond Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

F7 MOMENT SETRVAČNOSTI

V této části si spočteme některé jednoduché příklady na rotační pohyby a seznámíme se s několika užitečnými triky.

Kyvadlo na nehmotném závěsu



◖ **Příklad 7.1:** Řešte pomocí diferenčního schématu pohyb kyvadla s obecnými počátečními podmínkami. Zanedbejte hmotnost závěsu, těleso na konci považujeme za malou kuličku.

Řešení:Vyjděme z pohybové rovnice rotujícího tělesa:

$$J\ddot{\varphi} = M_F \qquad (7.1)$$

Za moment setrvačnosti dosadíme ze vztahu (6.9) a za moment síly ze vztahu (6.1)

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mg\,l\sin\varphi\,. \qquad (7.2)$$

Znaménko minus na pravé straně vyjadřuje, že moment síly je vratnou silou, tedy při vzdalování z rovnovážné polohy působí proti pohybu. Rovnici můžeme upravit do standardního tvaru s klesajícím stupněm derivací a s koeficientem 1 u nejvyšší derivace:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0\,. \qquad (7.3)$$

Povšimněte si, že hmotnost zmizela – už dříve jsme se zmínili o tom, že jde o důležitou vlastnost gravitačního (tíhového) pole. Odvozená rovnice pro kyvadlo je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu, která je nelineární, a proto velmi obtížně řešitelná. Pro malé rozkmity (přibližně do 5°) lze funkci sinus nahradit argumentem ($\sin x \approx x$) a rovnice přejde v jednoduchou lineární rovnici

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi \approx 0\,, \qquad (7.4)$$

kterou se naučíme řešit později. Této aproximaci říkáme *matematické kyvadlo*, uvidíme, že vede na harmonické oscilace. Nyní řešme numericky původní nelineární rovnici (7.3) pro libovolné rozkmity. Nejprve rovnici převedeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu:

$$\dot{\varphi} = \omega\,,$$
$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\varphi\,. \tag{7.5}$$

Derivace nahradíme konečnými diferencemi

$$\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t} = \omega_n\,,$$
$$\frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} = -\frac{g}{l}\sin\varphi_n \tag{7.6}$$

a vypočteme nové hodnoty pomocí starých:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_n\,\Delta t\,,$$
$$\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{g}{l}(\sin\varphi_n)\,\Delta t\,. \tag{7.7}$$

Z odvozeného diferenčního schématu vypočítáme z hodnoty úhlu a úhlové rychlosti v čase t_n nové hodnoty v čase $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. ◗

Trik první

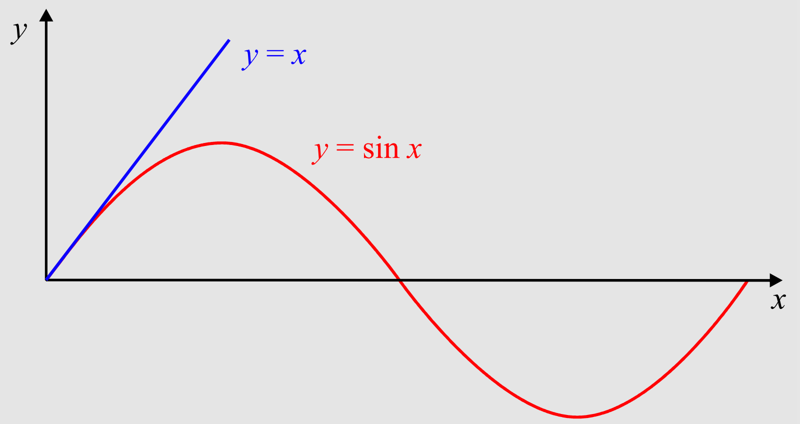
Složité nelineární výrazy můžeme často nahradit s malou ztrátou přesnosti lineárními výrazy. Pro malé argumenty funkcí ($x << 1$) lze psát

$\sin x \approx x$,	$\cos x \approx 1$,	$e^x \approx 1 + x$,
$\sinh x \approx x$,	$\cosh x \approx 1$,	$\ln(1+x) \approx x$,
$(1+x)^p \approx 1+px$,	$(1+x)^2 \approx 1+2x$,	$(1+x)^3 \approx 1+3x$,
$(1+x)^{1/2} \approx 1+x/2$,	$1/(1-x) \approx 1+x$,	$1/(1+x) \approx 1-x$.

Posledních pět výrazů je jen aplikací formulky $(1+x)^p \approx 1+px$. Zkuste si nakreslit grafy několika prvních funkcí. Jejich lineární náhražky jsou rovnice tečen v počátku souřadnic. Určeme například sin 3°. Argument musíme převést na radiány:

$$\sin 3° \approx 3° \approx \frac{3°}{360°}2\pi \approx 0{,}0523598...$$

Přesná hodnota sin 3° = 0,052335956... a liší se od aproximace až ve čtvrté platné číslici.



Ždímačka

◖ **Příklad 7.2:** Ždímačka rotuje s frekvencí f = 1 500 ot/min. Poloměr bubnu je R= 30 cm. Při otevření se motor vypne a ždímačka se působením brzdy zastaví za 4 s. Po kolika otáčkách se zastaví buben? Jaký je průběh odstředivého zrychlení kapesníku na obvodu bubnu?

Řešení: Nejprve si zapišme počáteční podmínky úlohy, tj. počáteční úhlovou frekvenci (je dána otáčkami ždímačky) a úhel otočení v čase t = 0:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \;; \qquad f = \frac{1\,500}{1\,\mathrm{min}} = \frac{1\,500}{60\,\mathrm{s}} = 25\,\mathrm{Hz}\;; \qquad (7.8)$$
$$\varphi_0 = 0\,.$$

Nyní sestavíme pohybovou rovnici

$$J\ddot{\varphi} = M_F \qquad (7.9)$$

Moment síly na pravé straně bude dán brzdným momentem M, bude působit proti pohybu, proto napíšeme $M_F = -M$ a provedeme první integraci (rovnice je lineární s konstantní pravou stranou)

$$J\ddot{\varphi} = -M \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{M}{J} \quad \Rightarrow$$
$$\omega(t) = -\frac{M}{J}t + c_1 \quad \Rightarrow$$
$$\varphi(t) = -\frac{M}{2J}t^2 + c_1 t + c_2\,.$$

Integrační konstanty určíme z počátečních podmínek $\omega(0)= \omega_0$, $\varphi(0) = 0$:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M}{J}t\;; \qquad (7.10)$$
$$\varphi(t) = \omega_0 t - \frac{M}{2J}t^2\,.$$

Zajímá nás situace na konci pohybu, tj. v koncovém čase t_k = 4 s, kdy bude úhlová frekvence již nulová a úhel bude roven koncovému úhlu φ_k:

$$0 = \omega_0 - \frac{M}{J}t_\mathrm{k}\;; \qquad (7.11)$$
$$\varphi_\mathrm{k} = \omega_0 t_\mathrm{k} - \frac{1}{2}\frac{M}{J}t_\mathrm{k}^2\,.$$

Z první rovnice můžeme spočítat neznámý podíl M/J a poté z druhé koncový úhel φ_k:

$$\frac{M}{J} = \frac{\omega_0}{t_\mathrm{k}}\;;$$
$$\varphi_\mathrm{k} = \omega_0 t_\mathrm{k} - \frac{1}{2}\frac{M}{J}t_\mathrm{k}^2 = \omega_0 t_\mathrm{k} - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{t_\mathrm{k}}t_\mathrm{k}^2 = \frac{1}{2}\omega_0 t_\mathrm{k}\,.$$

Hledaný počet otáček a průběh odstředivého zrychlení jsou:

$$N = \varphi_k / 2\pi = \frac{1}{2}\frac{\omega_0 t_k}{2\pi} = \frac{1}{2} f t_k = 50\,.$$

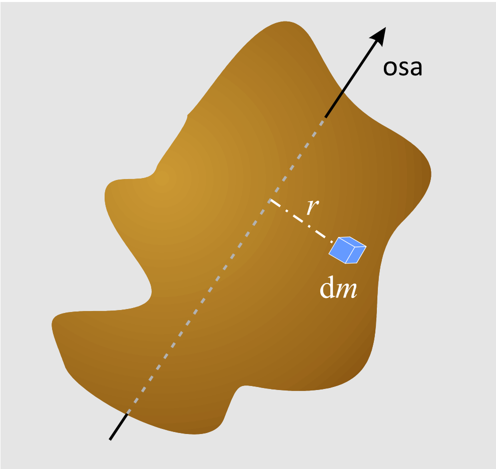
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 = R\left(\omega_0 - \frac{M}{J}t\right)^2 = R\left(\omega_0 - \frac{\omega_0}{t_k}t\right)^2 = R\omega_0^2\left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^2.$$

Buben ždímačky vykoná ještě 50 otáček. Odstředivé zrychlení bude postupně slábnout z hodnoty $R\omega_0^{\,2}$ na nulu, které dosáhne v koncovém čase t_k.

◗

Moment setrvačnosti obecného tělesa

Moment setrvačnosti vzhledem k ose jsme zatím zavedli jen pro kuličku na provázku. Uvažujme nyní rotaci obecného tělesa kolem osy. Představme si, že toto těleso složíme z malých elementů o hmotnosti dm (objemu dV) a vzdálenosti od osy otáčení r, které přispějí k celkovému momentu setrvačnosti hodnotou dJ= r^2dm.

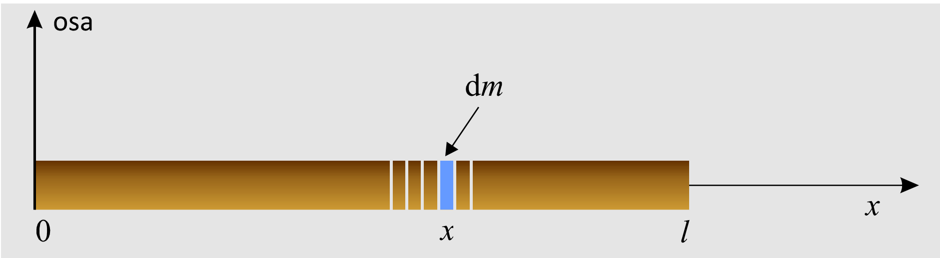


Celkový moment setrvačnosti bude součtem (integrálem) všech příspěvků:

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m\,. \qquad (7.12)$$

Jak zvolíme hmotné elementy v praxi? Nejjednodušší je těleso rozřezat na kousky, jejichž všechny body budou všechny stejně vzdálené od osy otáčení. Poté hmotnost těchto elementů vyjádříme jako hustotu násobenou objemem a objem zapíšeme za pomoci vhodného diferenciálu. Ukažme si tento postup na jednoduchém příkladu rotující tyče uchycené na konci.

◖ **Příklad 7.3:** Rotující tyč



Tyč rozřežeme na svislé řezy (elementy), jak je naznačeno na obrázku. Jeden z řezů jsme vyznačili odlišnou barvou, jeho poloha je x. Pokud budou tyto svislé řezy infinitezimálně tenké (dx), mají všechny objem dV = S dx (S je průřez tyče). Přes tyto řezy budeme integrovat od nuly (levý konec tyče) do l (celková délka tyče):

$$J = \int_0^l x^2 \mathrm{d}m = \int_0^l x^2 \rho \mathrm{d}V = \int_0^l x^2 \rho S \,\mathrm{d}x = \rho S \int_0^l x^2 \,\mathrm{d}x = \rho S \frac{l^3}{3}.$$

Nyní vyjádříme hustotu za pomoci celkové hmotnosti tyče m a celkového objemu V.

$$J = \frac{m}{V} S \frac{l^3}{3} = \frac{m}{Sl} S \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} m l^2.$$

Získali jsme známý vztah pro moment setrvačnosti tyče otáčející se kolem konce:

$$J = \frac{1}{3} m l^2 . \tag{7.13}$$

◗

Poznámky:

- Pokud by tyč byla kovová a roztavili bychom ji, pak z ní odlili kouli, a s touto koulí točili na velmi málo hmotném lanku, byl by moment setrvačnosti roven ml^2, tedy třikrát větší. Dobrý setrvačník má hmotnost rozloženou co možná nejdále od osy otáčení. Tím se zvýší jeho moment setrvačnosti (schopnost setrvávat v rotačním stavu pohybu).
- Moment setrvačnosti má vždy rozměr hmotnost násobené kvadrátem délky. Je dobré si to u výsledku pokaždé zkontrolovat.

Trik druhý

Při výpočtu můžete těleso rozložit na libovolný počet částí a moment setrvačnosti počítat jako součet momentů jednotlivých částí. Těleso také můžeme rozdělit na infinitezimální elementy, celkový moment setrvačnosti je pak integrálem (*r* je vzdálenost k ose otáčení)

$$J = \sum_k J_k \,; \qquad J = \int r^2 \mathrm{d}m .$$

◖ **Příklad 7.4:** Nalezněte moment setrvačnosti kyvadla, jehož závěs lze považovat za tyč se stejnou hmotností *m*, jako má zavěšené těleso. Rozměry tělesa zanedbejte.

Řešení: Výsledný moment setrvačnosti bude součtem momentů závěsu a zavěšeného tělesa

$$J = J_{\text{závěs}} + J_{\text{těleso}} = \frac{1}{3} m l^2 + m l^2 = \frac{4}{3} m l^2.$$

Tento moment setrvačnosti bude vystupovat v pohybové rovnici (7.1) pro kyvadlo. ◗

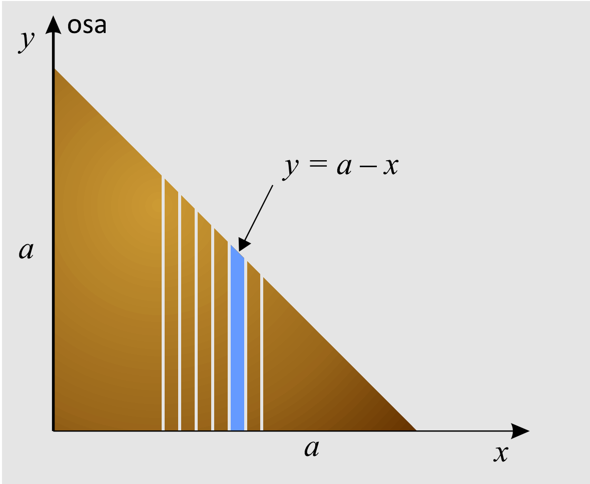
◖ **Příklad 7.5:** Spočtěte moment setrvačnosti rovnostranného pravoúhlého trojúhelníku, který rotuje kolem jedné ze svých odvěsen (mají délku *a*).

Řešení: Trojúhelník bude mít plošnou hustotu

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{a^2/2} = \frac{2m}{a^2}.$$

Rozřežeme ho na elementy rovnoběžné s osou otáčení podle obrázku (hmotný element vyjádříme pomocí polohy elementu *x*)

$$\mathrm{d}m = \sigma \,\mathrm{d}S = \sigma y \,\mathrm{d}x = \sigma (a - x) \,\mathrm{d}x .$$



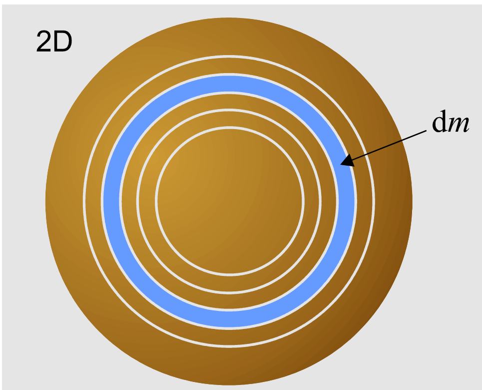
$$J=\int_0^a x^2\mathrm{d}m=\int_0^a x^2\sigma(a-x)\,\mathrm{d}x=\sigma\int_0^a\left(ax^2-x^3\right)\mathrm{d}x=\sigma\left[a\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a=$$

$$=\sigma\left(\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}\right)=\sigma a^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}\sigma a^4=\frac{1}{12}\frac{2m}{a^2}a^4=\frac{1}{6}ma^2.$$

Moment setrvačnosti zadaného trojúhelníku vzhledem k odvěsně je $ma^2/6$. ◗

◖ **Příklad 7.6:** Spočtěte moment setrvačnosti homogenního válce (kola, kruhu) o poloměru R vzhledem k ose procházející středem.

Řešení: Kruh rozřežeme na soustředná mezikruží dle obrázku



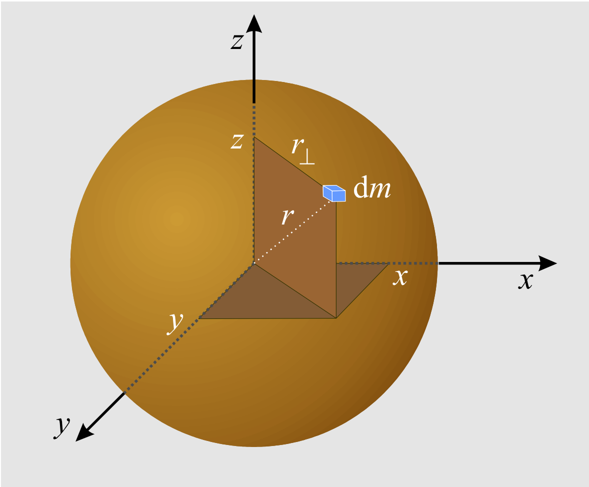
$$J=\int_0^R r^2\mathrm{d}m=\int_0^R r^2\sigma\,\mathrm{d}S=\sigma\int_0^R r^2\,2\pi r\,\mathrm{d}r=2\pi\sigma\frac{R^4}{4}=2\pi\frac{m}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}=\frac{1}{2}mR^2.$$ ◗

Moment setrvačnosti koule

◖ **Příklad 7.7:** Spočtěte moment setrvačnosti homogenní koule hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose procházející středem.

Řešení: Počítejme například moment setrvačnosti vzhledem k ose z. Kouli bychom potřebovali rozřezat na soustavu válečků soustředných s osou z (tak, aby body řezů měly stejnou vzdálenost od osy otáčení). Takový postup je sice možný, ale zbytečně složitý. Výpočet provedeme za pomoci jednoduchého triku. Vyberme si libovolný element uvnitř koule se souřadnicemi (x, y, z). Vzdálenost elementu od osy rotace z bude $r_\perp$, vzdálenost od počátku r:

$$r_\perp^2 = x^2 + y^2 ;$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 . \tag{7.14}$$



Pro moment setrvačnosti vzhledem k ose z bude platit

$$J_z = \int r_\perp^2 \, \mathrm{d}m = \int \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m . \tag{7.15}$$

Obdobně můžeme vyjádřit i momenty setrvačnosti vzhledem ke zbývajícím osám:

$$J_x = \int \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m ;$$
$$J_y = \int \left(z^2 + x^2\right) \mathrm{d}m . \tag{7.16}$$

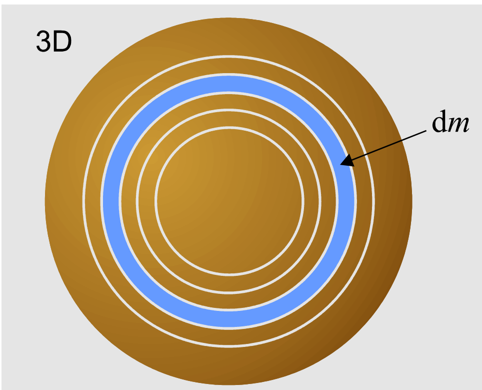
Výsledek všech tří integrací musí být stejný (setrvačné vlastnosti jsou shodné), tj. musí platit

$$J_x = J_y = J_z . \tag{7.17}$$

Výpočet každého z těchto integrálů je složitý, ale snadno dokážeme spočítat jejich součet. Na každý z integrálů pak zbude právě jedna třetina výsledku. Nalezněme tedy součet všech tří momentů setrvačnosti:

$$J = J_x + J_y + J_z = \int \left(2x^2 + 2y^2 + 2z^2\right) \mathrm{d}m = 2\int r^2 \, \mathrm{d}m .$$

V tomto integrálu má r^2 význam kvadrátu vzdálenosti od středu koule. Při integraci by tedy byly vhodné množiny, jejichž vzdálenost od středu je konstantní. Proto postačí rozřezat celou kouli na mnoho mezikulí o objemech $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}r = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$.



Následná integrace je již snadná:

$$J = 2\int r^2 \,\mathrm{d}m = 2\int r^2 \rho \mathrm{d}V = 2\int_0^R r^2 \rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r = 8\pi\rho\int_0^R r^4 \mathrm{d}r = 8\pi\rho \frac{R^5}{5}.$$

Za hustotu nyní dosadíme hustotu celé koule:

$$J = 8\pi \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{R^5}{5} = \frac{6}{5} mR^2 .$$

Na moment setrvačnosti vzhledem k jedné jediné (libovolné) ose zbývá třetina, tj.

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mR^2 . \tag{7.18}$$

Moment setrvačnosti homogenní koule vzhledem k ose procházející středem je $\frac{2}{5} mR^2$. ◗

Trik třetí

Při výpočtu momentu setrvačnosti koule vzhledem k ose se vyplatí spočíst součet momentů kolem všech tří os. Vzhledem k tomu, že jsou tyto momenty stejné, připadne na každý z nich třetina výsledku.

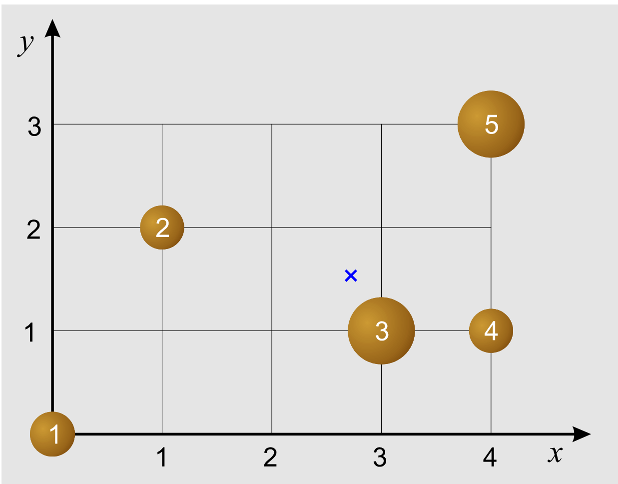
Steinerova věta

Nejprve si připomeňme definici hmotného středu pro soustavu hmotných bodů a pro spojité těleso:

$$\mathbf{r}_S \equiv \frac{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k m_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k}; \qquad \mathbf{r}_S \equiv \frac{\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}. \tag{7.19}$$

Jde vlastně o váhovaný průměr přes hmotnost, ve jmenovateli je celková hmotnost všech těles nebo tělesa.

◖ **Příklad 7.8:** Spočtěte polohu hmotného středu pro soustavu těles dle obrázku (malé kuličky mají hmotnost 1 kg, velké kuličky 2 kg).



Řešení: Počítejme polohu hmotného středu podle vztahu (7.19):

$$\mathbf{r}_S \equiv \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2 + \mathbf{r}_3 m_3 + \mathbf{r}_4 m_4 + \mathbf{r}_5 m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5};$$

$$\mathbf{r}_1 = (0,0); \quad \mathbf{r}_2 = (1\,\mathrm{m}, 2\,\mathrm{m}); \quad \mathbf{r}_3 = (3\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}); \quad \mathbf{r}_4 = (4\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}); \quad \mathbf{r}_5 = (4\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m}).$$

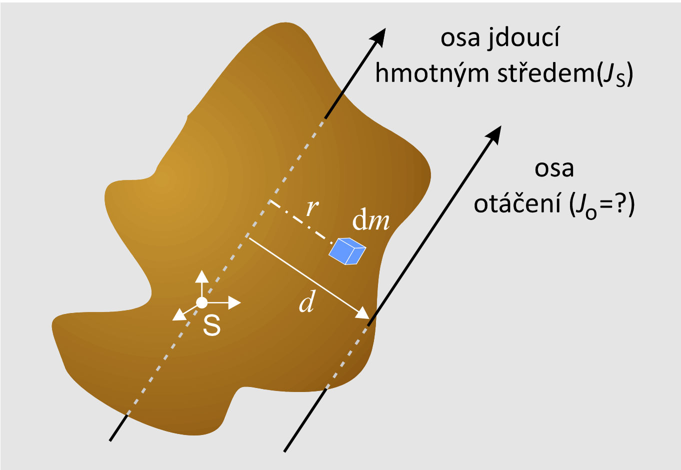
Souřadnice hmotného středu tedy budou:

$$x_S \equiv \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2}{1+1+2+1+2}\,\mathrm{m} = \frac{19}{7}\,\mathrm{m},$$

$$y_S \equiv \frac{0\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 2}{1+1+2+1+2}\,\mathrm{m} = \frac{11}{7}\,\mathrm{m}.$$

◗

Určeme moment setrvačnosti tělesa kolem obecné osy za pomoci momentu setrvačnosti kolem osy vedené hmotným středem, která je s námi zvolenou osou rovnoběžná. Hmotný střed bude v počátku souřadnicové soustavy, tj. $\mathbf{r}_S = (0, 0, 0)$. Situace je znázorněná na obrázku:



Moment setrvačnosti vzhledem k obecné ose můžeme zapsat takto:

$$J_o = \int (d - r)^2\,\mathrm{d}m = \int (\mathbf{d} - \mathbf{r})^2\,\mathrm{d}m =$$

$$= \int \mathbf{d}^2 \mathrm{d}m - \int 2\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}\,\mathrm{d}m + \int \mathbf{r}^2 \mathrm{d}m =$$

$$= d^2 \int \mathrm{d}m - 2\mathbf{d}\cdot\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m + \int r^2 \mathrm{d}m.$$

První člen je snadno integrovatelný, druhý je nulový (integrál v něm vyjadřuje souřadnice hmotného středu, a ty jsou nulové) a třetí člen je momentem setrvačnosti vzhledem k hmotnému středu. Máme tedy jednoduchý vztah

$$J_o = md^2 + J_S, \tag{7.20}$$

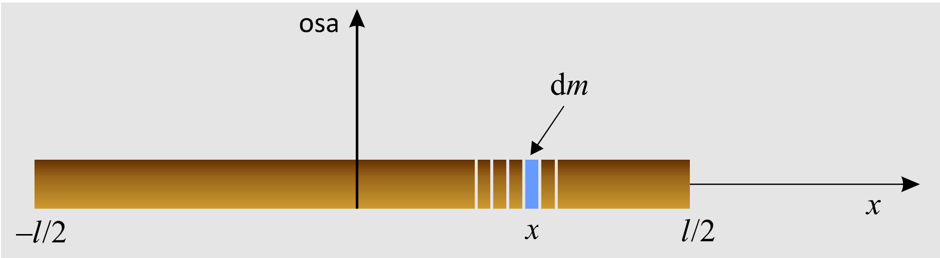
který se nazývá Steinerova věta podle švýcarského matematika Jakoba Steinera (1796–1863). Ze Steinerovy věty je patrné, že moment setrvačnosti je nejmenší vzhledem k ose procházející hmotným středem, všechny ostatní momenty jsou větší.

Trik čtvrtý

Při výpočtu momentu setrvačnosti vzhledem k ose postačí znát moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející hmotným středem. Všechny ostatní momenty vzhledem k dalším rovnoběžným osám získáme přičtením členu md^2, kde d je vzdálenost aktuální osy otáčení od osy procházející hmotným středem.

◖ **Příklad 7.9:** Spočtěte moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose procházející hmotným středem a z něho určete moment vzhledem k ose procházející koncem tyče.

Řešení: Budeme postupovat stejně jako v příkladu 7.3, jen meze budou jiné:



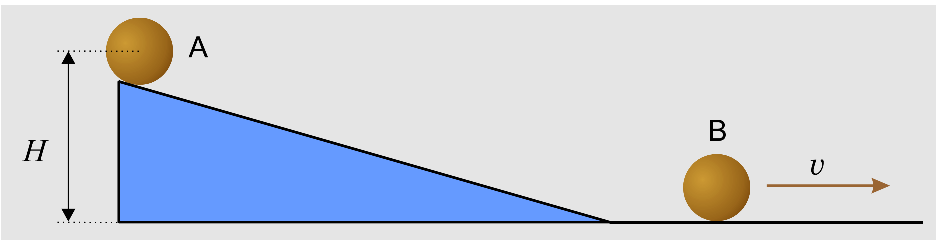
$$J_S = \int_{-l/2}^{+l/2} x^2\,\mathrm{d}m = \rho S \int_{-l/2}^{+l/2} x^2\,\mathrm{d}x = \rho S \left[x^3/3 \right]_{-l/2}^{+l/2} = \frac{m}{Sl} S \frac{l^3}{12} = \frac{1}{12} m l^2 . \qquad (7.21)$$

Nyní za pomoci Steinerovy věty určíme moment kolem kterékoli rovnoběžné osy, pro konec tyče dostaneme

$$J_o = md^2 + J_S = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} ml^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) ml^2 = \frac{1}{3} ml^2 . \qquad (7.22)$$

Výsledek je stejný jako při přímém výpočtu v příkladu 7.3. ◗

◖ **Příklad 7.10:** Spočtěte rychlost kuličky a poté válce (kola), které se skutálely po nakloněné rovině z výšky H.



Řešení: Rychlost určíme ze zákona zachování energie. V bodě A má těleso jen potenciální energii, v bodě B je jeho energie složena z kinetické energie translačního pohybu hmotného středu a rotačního pohybu vzhledem k hmotnému středu:

$$mgH = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 \qquad \Rightarrow$$

$$mgH = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J(v/R)^2 \qquad \Rightarrow$$

$$mgH = \frac{1}{2} mv^2 \left(1 + \frac{J}{mR^2} \right).$$