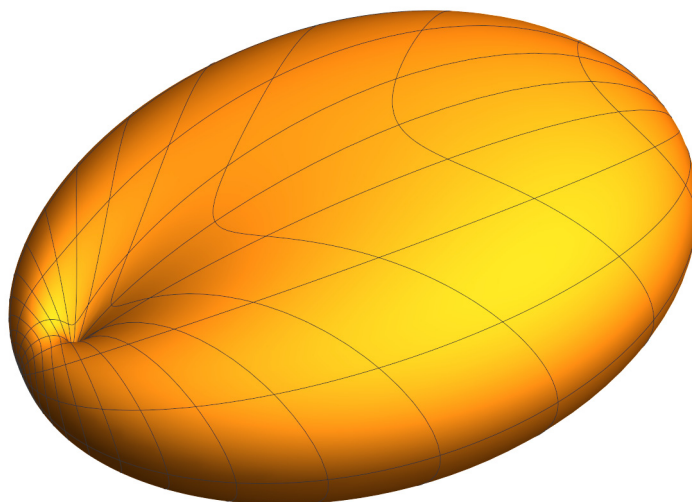


TF4: Teorie elektromagnetického pole



STUDIJNÍ TEXT
PETR KULHÁNEK



OBSAH

PŘEDMLUVA, ÚVOD	4
1. MAXWELLOVY ROVNICE	5
ZÁKON ZACHOVÁNÍ NÁBOJE	5
LORENTZOVA POHYBOVÁ ROVNICE	6
ELEKTRICKÝ A MAGNETICKÝ DIPÓL	6
MAXWELLOVY ROVNICE	8
ÚPLNOST SOUSTAVY	13
MATERIÁLOVÉ VZTAHY	15
PODMÍNKY NA ROZHRANÍ	17
2. ELEKTROSTATIKA	20
POISSONOVA ROVNICE A JEJÍ ŘEŠENÍ	20
ZAJÍMAVÉ PŘÍKLADY	23
ENERGIE ELEKTRICKÉHO POLE	26
MULTIPÓLOVÝ ROZVOJ	27
ELEKTRICKÝ DIPÓL VE VNĚJŠÍM POLI	31
3. MAGNETOSTATIKA	32
VEKTOROVÝ POTENCIÁL	32
POISSONOVA ROVNICE A JEJÍ ŘEŠENÍ	33
BIOTŮV-SAVARTŮV ZÁKON	34
MULTIPÓLOVÝ ROZVOJ	34
MAGNETICKÝ DIPÓL	36
4. ZÁKONY ZACHOVÁNÍ	38
ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE	38
ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI	39
TLAK POLE	42
ZÁKON ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBNOSTI	43
POLE JAKO REÁLNÁ ENTITA	44
5. ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY	45
ZÁKLADNÍ POJMY	45
VLNY VE VAKUU	50
VLNY V ANIZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ	52
VLNY VE VODIVÉM PROSTŘEDÍ	54
SVĚTLO NA ROZHRANÍ DVOU PROSTŘEDÍ	56
RAYTRACING	60
6. ELEKTROMAGNETICKÉ POTENCIÁLY	62
DEFINICE POTENCIÁLŮ	62
LORENTZOVA TRANSFORMACE	62
ČTYŘVEKTORY	65
TENZOR ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE	67
AHARONŮV-BOHMŮV EXPERIMENT	70
RETARDOVANÉ A ADVANCEOVANÉ POTENCIÁLY	72
7. ELEKTROMAGNETICKÉ ZÁŘENÍ	74
ZÁŘIVÝ MULTIPÓLOVÝ ROZVOJ	74
ELEKTRICKÉ DIPÓLOVÉ ZÁŘENÍ	76
THOMSONŮV ROZPTYL	78
RAYLEIGHŮV ROZPTYL	80
BRZDNÉ ZÁŘENÍ ELEKTRONŮ NA IONTECH	82

CYKLOTRONOVÉ ZÁŘENÍ	83
VYŠŠÍ MOMENTY ZÁŘENÍ	84
LIÉNARDOVY-WIECHERTOVY POTENCIÁLY	86
RELATIVISTICKÉ BRZDNÉ A SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ	88
8. POLE V REZONANČNÍ DUTINĚ	91
POTENCIÁLY V DUTINĚ	91
VLASTNÍ KMITY POLE	91
ENERGIE A HYBNOST POLE V DUTINĚ	93
HAMILTONOVY ROVNICE	94
TEPELNÉ ZÁŘENÍ	96
9. MAGNETOHDRODYNAMIKA	99
MINIMÁLNÍ VARIANTA	100
KONCEPT ZAMRZLÝCH POLÍ	101
HELICITA	103
TEKUTINOVÉ DYNAMO	106
VLNY KONEČNÉ AMPLITUDY	111
MAGNETOZVUKOVÉ VLNY	113
DODATKY	117
TABULKA POTENCIÁLŮ	117
VEKTOROVÉ IDENTITY	117
LITERATURA	118

PŘEDMLUVA, ÚVOD

Elektřina a magnetismus jsou rubem a lícem téže mince. Měnící se magnetické pole vytváří pole elektrické a měnící se pole elektrické dává vzniknout poli magnetickému. Od roku 1873, kdy James Clerk Maxwell publikoval své monumentální dílo „*A Treatise on Electricity and Magnetism*“, už uplynulo hodně vody. Maxwellova elektrodynamika předpověděla existenci mnoha jevů, které změnily za jediné století naši civilizaci k nepoznání. Dnes si náš život už sotva dokážeme představit bez elektrických a elektronických pomocníků. Elektromagnetické děje se podílejí i na procesech ve vesmíru – prach v mlhovinách se elektrostaticky lepí do zárodků, z nichž vznikají planety, hvězdy jsou obřími plazmovými koulemi s výraznými elektromagnetickými projevy a magnetická pole se prolínají vesmírem na všech škálách. Ale i naše technologie nevyužívají elektřinu a magnetismus jen v elektrických strojích a elektronických zařízeních. Razantní nástup fyziky plazmatu přinesl zcela nevídané technologie – nanášení ultrapevných povrchů, úpravy tkanin, plazmové řezání a obrábění a plazmovou medicínu, která je doslova hitem posledních let. Není divu, že se fyzika plazmatu stává studijním oborem na stále větším množství vysokých škol. Vím jen o jedné fakultě, která se vydala proti toku dějin a dobrovolně zrušila doktorský program Fyzika plazmatu.

Ke studiu elektromagnetického pole budete potřebovat určité základy z matematiky, především jde o pojmy: gradient, rotace, divergence, integrace per partes v N -dimenzích, Leviho-Civitův tenzor, Kroneckerovo delta, skalární, vektorový a tenzorový součin, helicity, distribuce a Greenova funkce. Vše najdete v mém učebním textu [3] *Vztah matematiky a fyziky* (naleznete ho na serveru aldebaran.cz v sekci Studium). Všem, kdo se pustili do studia elektromagnetických dějů, přeji zažít údiv nad elegancí teoretického popisu a radost z pochopení našeho popisu elektromagnetické interakce.

V Praze 22. února 2020,
Petr Kulháněk

1. MAXWELLOVY ROVNICE

Každá z interakcí má svůj charakteristický náboj, který určuje míru vzájemné interakce jednotlivých těles. U gravitační interakce je oním „nábojem“ hmotnost těles, u elektromagnetické interakce jde o elektrický náboj, u silné interakce o barevný náboj a u slabé interakce o vůni. Není proto divu, že se nejprve zaměříme na elektrický náboj částic či těles a vyjádříme si diferenciální podobu zákona zachování elektrického náboje, tzv. rovnici kontinuity. Následující postup neplatí jen pro elektrický náboj, ale pro jakoukoli zachovávanou extenzivní veličinu (extenzivní znamená rostoucí s počtem jedinců, například hmotnost, energie, hybnost, moment hybnosti, teplo, tepelná kapacita atd.).

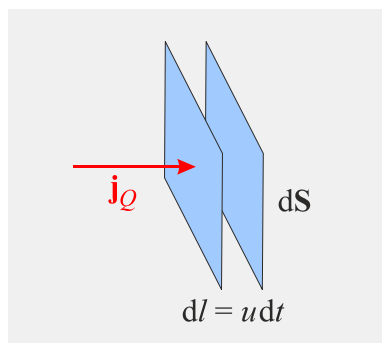
Zákon zachování náboje

Zavedme nejprve hustotu náboje a tok náboje vztahy

$$\blacktriangleright \quad \rho_Q \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}. \quad (1)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{j}_Q \equiv \rho_Q \mathbf{u}. \quad (2)$$

Hustota náboje má v soustavě SI jednotku C/m^3 , tok náboje A/m^2 . Tok náboje je vektorová veličina a jako každý vektor má velikost a směr. Směr je jasný na první pohled, jde o směr rychlostního pole, popisujícího tok náboje. Velikost toku snadno zjistíme, pokud budeme sledovat tečení náboje kolmou plochou. Za čas dt se částice dostanou o $dl = u dt$ dále k jiné myšlené ploše:



Pro velikost toku platí:

$$j_Q = \rho_Q u = \frac{dQ}{dV} \frac{dl}{dt} = \frac{dQ}{dS} \frac{dl}{dt} = \frac{dQ}{dS dt}. \quad (3)$$

Tok náboje má tedy význam množství náboje proteklého kolmou jednotkovou plochou za jednotku času. Alternativním názvem této veličiny je *proudová hustota*. Náboj se při proudění neztrácí ani nepřibývá, jeho časový úbytek z libovolného objemu musí být roven toku veličiny přes plochu obklopující tento objem:

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_Q dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S}. \quad (4)$$

Hranice objemu V je označena ∂V . Na levé straně přesuneme časovou derivaci do integrace, ρ_Q je ale funkcí času i prostoru, proto se derivace změní na parciální. Na pravou stranu budeme aplikovat Gaussovu větu a plošný integrál převedeme na objemový:

$$-\iiint_V \frac{\partial \rho_Q}{\partial t} dV = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{j}_Q dV. \quad (5)$$

Oba integrály nyní spojíme:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_Q \right) dV = 0. \quad (6)$$

Uvedený vztah musí při proudění platit v libovolném objemu, a to je možné jen tehdy, je-li argument integrálu roven nule (mohl by v principu být nenulový jen v některých bodech nebo plochách, obecně na množině menší dimenze, než přes kterou integrujeme):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_Q = 0. \quad (7)$$

Odvozená rovnice je zákonem zachování náboje v diferenciální podobě a nazývá se *rovnice kontinuity pro náboj*. Ukazuje, že čtveřice veličin popisující tečení náboje (ρ_Q, \mathbf{j}_Q) není nezávislá, tyto čtyři funkce splňují v každém bodě prostoru rovnici kontinuity a jsou závislé. Ve stacionárním případě má zákon zachování náboje tvar $\operatorname{div} \mathbf{j}_Q = 0$.

Lorentzova pohybová rovnice

Při sledování pohybu nabitých částic se ukázalo, že elektrické pole urychluje částice, zatímco magnetické pole působí silou kolmou jak na sebe sama, tak na rychlost částice. Výsledky mnoha experimentů lze shrnout do jednoduché formule

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (8)$$

se kterou jsme se již setkali v teoretické mechanice. Časová změna hybnosti částice má elektrickou a magnetickou část. V magnetické části vystupuje vektorový součin, který popisuje prostý fakt, že síla je kolmá jak na rychlost, tak na magnetické pole a že na nepohybující se částice magnetické pole nepůsobí. Magnetická síla způsobuje, že částice kloužou po šroubovicích podél siločar magnetického pole. Pomocí této rovnice můžeme predikovat pohyby částic při známých polích. Rovnice může posloužit i jako definiční rovnice obou polí, neboť ze síly působící na částici můžeme (nejlépe odděleně) určit obě pole \mathbf{E} a \mathbf{B} .

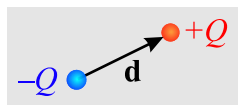
Nás bude ale zajímat nejen reakce částic na daná pole, ale také úloha v jistém smyslu opačná: Jaká pole generují pohybuující se částice? Na tuto otázku dává jednoznačnou odpověď soustava Maxwellových rovnic. Než se ale pustíme do jejich analýzy, musíme se ještě seznámit s dvěma pojmy: elektrickým a magnetickým dipólovým momentem.

Elektrický a magnetický dipól

Pro pochopení interakce látky s elektromagnetickým polem jsou klíčové pojmy elektrického a magnetického dipólu. V tuto chvíli se seznámíme s jejich nejjednodušší definicí, kterou později zobecníme pro jakoukoli soustavu nabitých částic.

Elektrický dipól

To, že jsou atomy a molekuly elektricky neutrální, vůbec neznamená, že by elektricky neinteragovaly. Většinou v sobě mají oblast s kladným i záporným nábojem. Nejjednodušší aproximací jejich chování je náhrada elektrickým dipólem: stejným kladným a záporným nábojem separovaným na určité vzdálenosti.



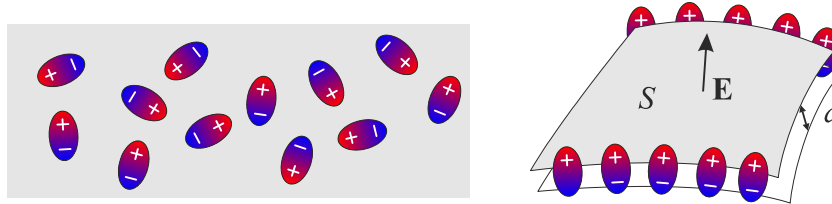
Takový objekt je jako celek elektricky neutrální, ale přesto reaguje na elektrické pole. Elektrický dipólový moment je definován jako součin velikosti náboje a vektoru spojujícího záporný náboj s kladným:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{p}_E \equiv Q\mathbf{d}; \quad [\mathbf{p}_E] = \text{Cm}. \quad (9)$$

Představme si, že se látka skládá z velkého množství takových elementárních elektrických dipólů (například polárních vodních molekul). Užitečné je zavést hustotu elektrického dipólového momentu všech takových dipólů:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{P} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_E}{\Delta V}; \quad [\mathbf{P}] = \frac{C}{m^2}, \quad (10)$$

$\Delta \mathbf{p}_E$ je celkový dipólový moment všech jedinců v objemové jednotce. Veličinu \mathbf{P} nazýváme polarizace látky a je jasné, že pokud budou dipóly orientovány náhodně, bude výsledná polarizace nulová. Zapneme-li ale elektrické pole, dipóly se budou snažit zorientovat ve směru pole a výsledná polarizace bude nenulová. Snadno určíme rozměr polarizace, je to C/m^2 , což je rozměrově plošný náboj.



A skutečně, při působení pole se na povrchu oblasti zaplněné dipóly (například dielektrika) objeví – díky podobné orientaci dipólů – nenulový plošný elektrický náboj. Představme si původně neutrální atomy, které se vlivem působení elektrického pole polarizovaly, tj. kladný elektrický náboj se posunul ve směru pole a záporný náboj proti směru pole, takže se vytvořily elektrické dipóly se vzdáleností obou nábojů d . Určeme nyní polarizaci (hustotu dipólových momentů ve vrstvě přiléhající k povrchu (obrázek napravo). Velikost hustoty elektrického dipólového momentu bude

$$P = \frac{N Q d}{\Delta V} = \frac{N Q d}{S d} = \frac{N Q}{S} \quad (11)$$

Velikost vektoru polarizace je tedy pro pole kolmé k povrchu rovna plošné hustotě vázaného náboje σ_b (index b je z anglického „bound“) indukovaného na povrchu dielektrika:

$$P = \sigma_b. \quad (12)$$

Vektor polarizace v tomto případě míří ve směru elektrického pole, kterým působíme na dielektrikum. Pokud by elektrické pole nepůsobilo kolmo na povrch dielektrika, ale šikmo, natočí se dipóly ve směru pole a příhraniční vrstva bude mít tloušťku $d \cos \alpha$, kde α je odklon elektrického pole, a tím i dipólů, od normály k povrchu. Výsledkem bude vztah $P \cos \alpha = \sigma_b$, tedy z vektoru polarizace se uplatní jen normálová složka $P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \alpha$:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \sigma_b. \quad (13)$$

Magnetický dipól

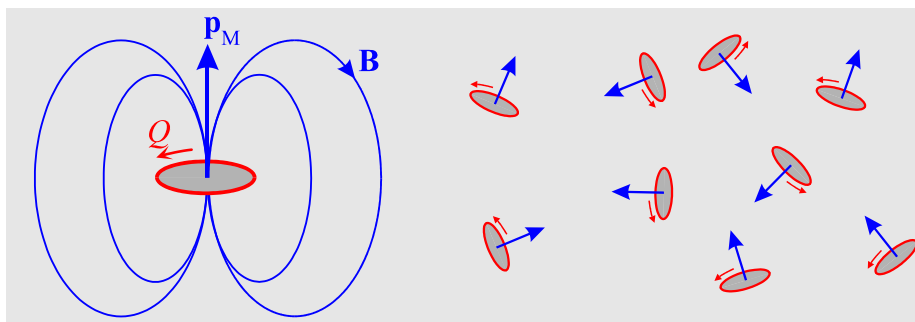
Už jsme si řekli, že nejpřirozenějším pohybem nabitých částic v magnetickém poli je kroužení. Kroužící částice ale generuje magnetické pole. Je-li kroužek malý, vznikne tzv. magnetické dipólové pole. Takovou kroužící částici budeme popisovat veličinou, které se říká magnetický dipólový moment, Je definovaný jako součin plochy a elektrického proudu, který vytváří obíhající částice:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{p}_M \equiv I \mathbf{S}; \quad [\mathbf{p}_M] = A m^2. \quad (14)$$

Magnetický moment míří ve směru normály k ploše obíhané nabitou částicí. Později budeme definovat magnetický moment pro obecnou soustavu pohybujících se nabitých částic. Pokud budeme mít velké množství takových elementárních magnetických momentů, můžeme zavést hustotu magnetického momentu vztahem

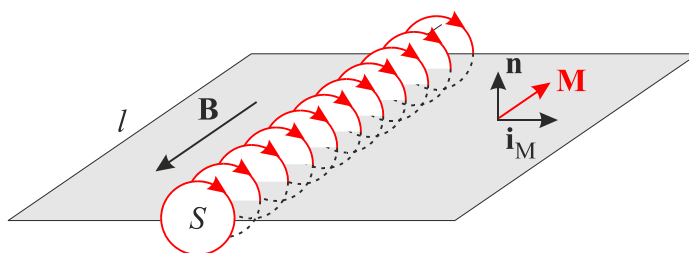
$$\blacktriangleright \quad \mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_M}{\Delta V}; \quad [\mathbf{M}] = \frac{A}{m}. \quad (15)$$

Uvedená veličina se nazývá magnetizace. Její rozměr je A/m. Stejný rozměr má proud vztahovaný na jednotku délky (například protékající napříč nějaké křivky). Nejde o náhodu. Pokud na soustavu magnetických dipólů nepůsobí magnetické pole, mohou být orientovány zcela náhodně a výsledná magnetizace je nulová.



Představme si magneticky aktivní materiál, ke kterému přiložíme magnetické pole mířící podél povrchu. Nabité částice začnou v magnetickém poli vykonávat krouživý pohyb dle obrázku. Uvnitř materiálu se elektrický proud vzniklý tímto krouživým pohybem vyruší, na povrchu ale zůstane nenulový povrchový proud (magnetizační proud). Jednotlivé kroužící částice budeme považovat za elementární dipóly s magnetickým momentem IS . U povrchu magnetika vybereme jeden válec kroužících částic s objemem Sl a určíme velikost magnetizace v tomto povrchovém válci:

$$M \equiv \frac{NIS}{\Delta V} = \frac{NIS}{Sl} = \frac{NI}{l}$$



Magnetizace je tedy u povrchu magnetika rovna celkovému povrchovému magnetizačnímu proudu vztahovému na jednotku příčné délky. Takovou veličinu budeme označovat i :

$$M = i_M. \quad (16)$$

V objemových tělesech je zajímavou veličinou proud tekoucí na jednotku plochy, na povrchu těles je důležitý proud tekoucí na jednotku příčné délky. Uvážíme-li směry vektorů (magnetický dipólový moment je kolmý na tekoucí proud i a na normálu k povrchu), pak v našem případě platí vektorový vztah

$$\mathbf{M} \times \mathbf{n} = \mathbf{i}_M. \quad (17)$$

Takový vztah platí i při obecném směru magnetického pole a magnetizace materiálu. Pokud míří magnetizace šikmo k povrchu, bude se na genuzi proudu podílet jen tečná složka magnetizace, jejíž velikost je rovna $M \sin \alpha$ (α je úhel mezi magnetizací a normálou k povrchu). Proto je ve vztahu (17) vektorový součin, který s sebou přináší sinus obou vektorů. V našem případě volně kroužících částic je směr magnetizace opačný než směr magnetického pole (to platí například v plazmatu). Hovoříme o tzv. *diamagnetickém* chování látky.

Maxwellovy rovnice

Nyní máme vše připraveno k tomu, abychom si popsali jednotlivé rovnice z Maxwellovy soustavy publikované v roce 1873. Dnešní podobu dal rovnicím Oliver Heaviside. Maxwell psal rovnice ve složkovém zápisu a navíc využíval kvaterniony – zobecnění komplexních čísel do čtyř dimenzí. Rovnice jsou popisem experimentálně získaných zkušeností, mj. Coulombova zákona, Ampérova zákona a Faradayova indukčního zákona.

V pasáži věnované zákonu zachování náboje jsme se seznámili s tokem extenzivní veličiny, konkrétně šlo o tok náboje \mathbf{j}_Q . Obdobně můžeme mít tok hmoty, tok energie, tepelný tok atd. Tok je vždy definován jako součin hustoty příslušné veličiny a rychlosti jejího proudění. U vektorových veličin (elektrické pole, magnetické pole, rychlostní pole atd.) nazýváme tokem pole plošný integrál

$$\psi_K \equiv \iint_S \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}. \quad (18)$$

Míří-li příslušné pole ve směru normály plochy, je tok pole maximální, míří-li podél plochy, je tok plochou nulový. Příslušná plocha může, ale nemusí být uzavřená. Pro nás bude užitečný jak tok magnetického pole, tak tok elektrického pole.

Druhou důležitou veličinou je křivkový integrál, v němž nasčítáváme pole podél křivky:

$$\mathcal{C}_K \equiv \int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}. \quad (19)$$

Je-li polem síla, dostáváme mechanickou práci vykonanou silou na dané dráze. Jde-li o elektrické pole, je výsledkem napětí mezi počátečním a koncovým bodem křivky. Příslušná křivka může, ale nemusí být uzavřená. Je-li uzavřená, nazýváme integrál (19) cirkulací pole \mathbf{K} . Toky a cirkulace polí jsou klíčovými pojmy v Maxwellových rovnicích.

Gaussova věta magnetostatiky

Z experimentů víme, že magnetické pole všemi body pouze prochází. Nikde nemá žádné zdroje, neexistují magnetické monopóly, ze kterých by vyvěralo. Možná v prvních fázích vesmíru existovaly, ale při inflační fázi se vesmír natolik rozepnul, že se v pozorovatelné části vesmíru vyskytuje jen několik monopólů, které nemáme šanci zaznamenat. Pokud vyčleníme v prostoru jakýkoli makroskopický objem, bude tok magnetických indukčních čar ohraničující plochou vždy nulový (ty, které vniknou dovnitř, prostor zase opustí):

$$\oiint_{S=\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (20)$$

Po aplikaci Gaussovy věty máme

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0. \quad (21)$$

Vzhledem k tomu, že relace platí pro jakýkoli objem, musí být integrand nulový (matematicky přesně by bylo „nulový až na množiny menší míry, resp. dimenze, než je oblast integrace“, těmito „jemnostmi“ se ale nebudeme zabývat a v dalších případech už na ně nebudeme upozorňovat):

$$\blacktriangleright \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (22)$$

Jde o první z Maxwellových rovnic, která vyjadřuje nezdvojovost magnetického pole.

Coulombův zákon

Z úvodních kurzů fyziky víme, že náboj vytváří elektrické pole

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (23)$$

Tok pole bude pro všechny ohraničující plochy stejný (viz úvodní kurzy matematiky nebo fyziky, například [4]), proto při výpočtu toku elektrického pole stačí kolem náboje vytvořit kulovou plochu s poloměrem r :

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S E \, dS = E \oiint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (24)$$

Tuto konstrukci je možné zobecnit na jakýkoli náboj, tj. tok elektrického pole uzavřenou plochou musí být úměrný volnému náboji Q plus vázanému náboji Q_b nalézajícímu se v prostoru ohraničeném touto plochou:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q + Q_b}{\epsilon_0}. \quad (25)$$

Pokud půjde o látkové prostředí, například dielektrikum, dojde k jeho polarizaci. Uvnitř látky se náboj dipólů vyruší, v blízkosti její hranice nikoli. Na ohraničující ploše vznikne podle (13) plošný náboj $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, pod plochou $-\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$. Celkový vázaný náboj v uvažované oblasti bude

$$Q_b = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (26)$$

Po dosazení do (25) máme

$$\oiint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q - \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (27)$$

Integrál z pravé strany převedeme nalevo a máme

$$\oiint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = Q. \quad (28)$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q; \quad \mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}). \quad (29)$$

Nově zavedený vektor \mathbf{D} se nazývá elektrická indukce. Zahrnuje v sobě reakci materiálu na vzniklé či působící elektrické pole (tu popisuje vektor polarizace \mathbf{P} , který reprezentuje hustotu vzniklých elektrických dipólů). Vektor polarizace je samozřejmě funkcí přiloženého pole \mathbf{E} . Náboj na pravé straně je volný náboj pod integrační plochou. Rovnice (29) je integrální podobou další Maxwellovy rovnice. Převedme vztah do diferenciálního tvaru. Nalevo budeme aplikovat Gaussovu větu (integrál bude přes objem ohraničený integrační plochou), pravou stranu napíšeme jako objemový integrál z hustoty elektrického náboje:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV = \iiint_V \rho_Q \, dV. \quad (30)$$

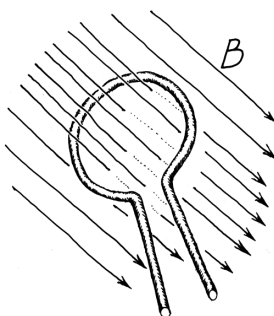
Uvedená relace musí platit pro jakýkoli objem, integrandy musí proto být totožné, tj.

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q. \quad (31)$$

Jde o diferenciální podobu Gaussovy věty elektrostatiky (zobecněného Coulombova zákona), která říká, že elektrická indukce \mathbf{D} vyvěrá z oblastí kladných nábojů a noří se do oblastí záporných nábojů. Na pravé straně vystupuje hustota volného náboje.

Faradayův indukční zákon

Při svých rozsáhlých experimentech s elektřinou a magnetizmem přišel anglický fyzik Michael Faraday na velmi zajímavou věc. Pokud vodivou smyčkou procházel časově proměnný magnetický tok, vznikalo v ní elektrické napětí a následně tekla elektrický proud. Důležité je, že magnetický indukční tok musí být proměnný.



Toho dosáhneme otáčením smyčky, otáčením magnetu nebo přibližováním či vzdalováním magnetu a smyčky. Na mikroskopické úrovni je elektrický proud samozřejmě generován Lorentzovou silou působící na nabitě částice. Faradayův indukční zákon lze zapsat velmi jednoduše:

$$U = -\frac{d\psi_B}{dt}. \quad (32)$$

Elektrické napětí je rovno časové změně magnetického indukčního toku smyčkou. Znaménko minus symbolizuje, že vzniklé napětí a jím generovaný proud působí proti změně, která ho vyvolala (Lenzovo pravidlo). Označíme-li symbolem S plochu smyčky a symbolem $\gamma = \partial S$ hraniční křivku, můžeme snadno přepsat Faradayův indukční zákon do tvaru

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (33)$$

Pokud přemístíme časovou derivaci napravo do argumentu integrálu, musíme použít parciální derivaci, neboť je magnetické pole funkcí času i prostoru a při derivování máme na výběr z více proměnných:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (34)$$

Faradayův indukční zákon zapsaný ve tvaru (34) je integrální podobou další z Maxwellových rovnic. Nás bude opět zajímat diferenciální tvar této rovnice. Proto převedeme integrál vlevo za pomoci Stokesovy věty na plošný integrál

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (35)$$

Oba integrály se musí rovnat pro jakoukoli zvolenou plochu, proto musí být integrandy totožné, což nás přivádí k diferenciální podobě další z Maxwellových rovnic – Faradayova indukčního zákona:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (36)$$

Ampérův zákon

Vodič, kterým protéká elektrický proud, kolem sebe generuje magnetické pole. Velikost pole je úměrná protékajícímu proudu a nepřímo úměrná vzdálenosti od vodiče:

$$B \sim \frac{I}{r}. \quad (37)$$

V soustavě jednotek SI tuto úměru zapisujeme ve tvaru

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (38)$$

který lze chápat jako definiční vztah permeability vakua μ_0 . Provedeme-li integraci pole podél libovolné uzavřené siločáry ve vzdálenosti R od vodiče (po kružnici, která je hranicí plochy S , píšeme $\gamma = \partial S$, nezaměňte symbol křivky s diferenciální vodivostí), vyjde:

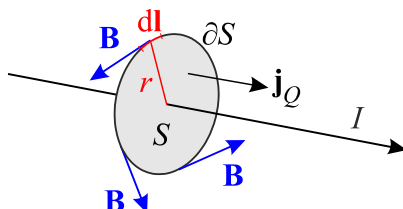
$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma=\partial S} B dl = B \oint_{\gamma=\partial S} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I.$$

Uvedený výsledek bude platit pro libovolnou plochu a její hraniční křivku, nemusí jít o siločáru. Pokud křivku od vodiče vzdálíme, naroste její délka úměrně vzdálenosti a magnetické pole poklesne nepřímo úměrně vzdálenosti. Obě závislosti se vyrovnají a integrál se nezmění.

Zdeformujeme-li křivku, také se nic nestane, a výsledek bude stále stejný. Výsledný tvar Ampérova zákona tedy je:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C. \quad (39)$$

Proud I_C je tzv. vodivostní proud (*Conductive*) zodpovědný za vznik magnetického pole \mathbf{B} . Křivkový integrál z magnetické indukce je úměrný vodivostnímu proudu protékanému plochou, kterou křivka ohraničuje. Koeficientem úměrnosti je permeabilita vakua. Uvedený zákon platí jen pro stacionární situaci v nemagnetických prostředích.



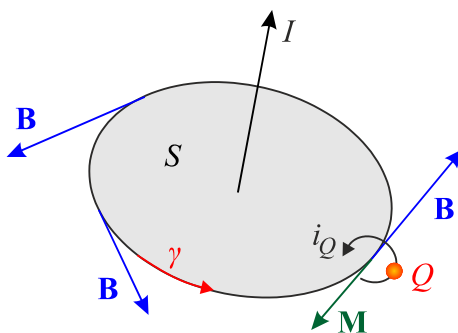
V obecném prostředí začnou částice na hraniční křivce kroužit a vytvoří další sekundární, tzv. magnetizační proudy. Ve výsledném zákoně musíme psát:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_C + I_M). \quad (40)$$

Ze vztahu (16), resp. (17) už víme, že magnetizační proud vztahovaný na jednotku příčné délky má číselně velikost magnetizace. Co se směru týče, míří kolmo na magnetizaci (ta je v jednoduchých prostředích rovnoběžná s magnetickým polem). V našem případě bude magnetizační proud dán integrací

$$I_M = \oint_{\gamma=\partial S} i_Q dl = \oint_{\gamma=\partial S} M dl = \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (41)$$

Magnetizace \mathbf{M} míří u kroužících částic v opačném směru než má přiložené nebo generované pole \mathbf{B} , v jehož směru míří hraniční křivka γ , skalární součin v posledním členu je tedy záporný. Směry jednotlivých vektorů jsou patrné z obrázku.



Nyní dosadíme magnetizační proud (41) do Ampérova zákona (40):

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I_C + \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}.$$

Nyní oba křivkové integrály sloučíme do jednoho, tj. z pravé strany převedeme křivkový integrál přes magnetizaci na levou stranu rovnosti:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = I_C.$$

Ampérův zákon doplněný o reakci materiálu má proto tvar

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_C ; \quad \mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{B}). \quad (42)$$

Druhý vztah je definičním vztahem intenzity magnetického pole, která v sobě zahrnuje jak původní pole \mathbf{B} , tak reakci látky \mathbf{M} . Proud na pravé straně je vodivostní proud tekoucí plochou uvnitř ohraničující křivky γ . Povšimněte si, že uzávorkování jednotlivých členů je z historických důvodů jiné než v případě elektrického pole (29). Rovnici opět převedeme do diferenciálního tvaru. Nalevo použijeme Stokesovu větu, napravo vyjádříme proud pomocí toku volného náboje plochou, kterou ohraničuje zvolená křivka:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S}. \quad (43)$$

Uvedené vztahy musí platit pro libovolnou plochu, proto jsou integrandy totožné:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q. \quad (44)$$

Na pravé straně je hustota vodivostního proudu protékaného uvažovanou plochou. Takto zapsaný Ampérův zákon platí jen pro ustálený elektrický proud. Snadno to ukážeme provedením divergence na poslední rovnici. Na levé straně dostaneme nulu (divergence z rotace je vždy nulová), takže by mělo platit

$$\text{div } \mathbf{j}_Q = 0,$$

což je stacionární podoba zákona zachování náboje (7). Pro nestacionární děje by zákon zachování náboje neplatil. Proto James Clerk Maxwell do rovnice přidal další člen (tzv. Maxwellův posuvný proud), který zajistí platnost zákona zachování náboje:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (45)$$

Snadno to ověříme. Po aplikaci divergence máme

$$0 = \text{div } \mathbf{j}_Q + \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \text{div } \mathbf{j}_Q + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D}.$$

Za $\text{div } \mathbf{D}$ nyní dosadíme z Maxwellovy rovnice $\text{div } \mathbf{D} = \rho_Q$, viz (31), a máme

$$0 = \text{div } \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \rho_Q}{\partial t},$$

což je právě zákon zachování náboje. Rovnice (45) říká, že vír magnetického pole může vzniknout jednak v okolí vodiče s proudem, a jednak působením proměnného elektrického pole. Taková situace je například v okolí deskového kondenzátoru (mezi deskami předpokládejme nezaplňenou mezeru). Pokud teče vodičem střídavý proud, generuje kolem vodiče magnetické pole (směr vírů se střídá ve shodě s momentálním směrem elektrického proudu). Na desky kondenzátoru je přiváděn v některých fázích kladný náboj, v jiných záporný náboj. Díky tomu vznikne mezi deskami časově proměnné elektrické pole, které je zdrojem magnetického pole v okolí desek. Vzdálený pozorovatel z magnetického pole nepozná, že je obvod přerušen deskami kondenzátoru.

Úplnost soustavy

Celá sada Maxwellových rovnic představuje matematický popis výsledků experimentů (magnetostatiky, Coulombova zákona, Ampérova zákona, Faradayova zákona elektromagnetické indukce). Jde tedy o zobecněnou zkušenost získanou za desítky let experimentů s elektrickými a magnetickými ději. James Clerk Maxwell psal svou soustavu ve složkách a, jak jsme se už zmínili, používal kvaternionový formalismus, takže je v původním zápise Maxwellova soustava pro dnešního čtenáře jen obtížně čitelná. Pro naše účely nás bude zajímat diferenciální podoba rovnic. Sepíšme všechny obdržené rovnice do jednoho celku:

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (46)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (47)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (48)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (49)$$

Nemá žádný větší smysl diskutovat, jak rovnice řadit. Vždy najdeme důvody, pro právě zvolenou dvojici k sobě patří: První dvě rovnice jsou testy na zdroje polí, druhé dvě na víry polí. Navíc druhé dvě rovnice v sobě obsahují časové derivace, tedy jde o rovnice pro časový vývoj polí. Můžeme ale seskupit rovnice jinak: první s třetí neobsahují zdroje polí, druhá a čtvrtá obsahují zdroje polí (hustotu a tok náboje). Nebo můžeme také tvrdit, že k sobě patří první a čtvrtá rovnice – jde o rovnice pro magnetické pole, a druhá se třetí – jde o rovnice pro elektrické pole.

Ať už rovnice seskupíme jakkoli, na jejich vstupu je čtveřice ρ_Q a \mathbf{j}_Q popisující rozložení a pohyb nábojů. Na výstupu jsou elektrická a magnetická pole \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} . Na první pohled zde něco nehraje. Máme 12 neznámých (potřebujeme určit čtveřici vektorů) a k dispozici máme jen 8 rovnic (dvě skalární a dvě vektorové). K úspěšnému řešení je třeba doplnit informace o tom, jak daná látka reaguje na přiložená elektrická a magnetická pole, tedy vztahy mezi oběma elektrickými a oběma magnetickými vektory:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}); \quad (50)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{B}). \quad (51)$$

Vektor polarizace \mathbf{P} a vektor magnetizace \mathbf{M} popisují, jak látka na přiložená pole zareaguje, tj. zda a v jakém množství se vytvoří elektrické a magnetické dipóly. Tyto tzv. *materiálové vztahy* můžeme získat buď experimentálně, nebo pro konkrétní látku teoretickým výpočtem procesů, které se v látce odehrávají. Povšimněte si, že uzávorkování obou vztahů je z historických důvodů různé. Oba vztahy jsou většinou silně nelineární, polarizace a magnetizace bývá složitou funkcí intenzit polí \mathbf{E} a \mathbf{H} . Látka si dokonce může „pamatovat historii“ a vztahy mohou být ovlivněny minulostí systému. Vzpomeňte si například na hysterezní smyčku magneticky aktivních látek. Jen pro velmi slabá pole lze oba vztahy Taylorovsky rozvinout a dostat lineární závislost mezi vektory \mathbf{D} a \mathbf{E} , resp. \mathbf{B} a \mathbf{H} . (viz Vybrané kapitoly z teoretické fyziky, AGA 2018, [1]).

Materiálové vztahy přináší dalších šest rovnic do Maxwellovy soustavy, celkový počet rovnic tedy vzroste na 14. Vzhledem k tomu, že máme 12 neznámých, musí být v soustavě dvě rovnice nadbytečné. Ukažme nyní, že první dvě rovnice pro divergence hledaných polí jsou ve skutečnosti jen počátečními podmínkami pro druhé dvě rovnice, které řeší časový vývoj polí. Aplikujme na třetí rovnici soustavy (48) operaci divergence:

$$0 = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = f(\mathbf{r}).$$

Vidíme, že z Faradayova indukčního zákona plyne, že $\operatorname{div} \mathbf{B}$ nesmí být funkcí času, ale pouze funkcí prostorových proměnných. Hodnota $\operatorname{div} \mathbf{B}$ je tedy stále stejná, jako byla na počátku. Rovnice $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ říká, že tato funkce byla na počátku nulová a jde o počáteční podmínku k rovnici (48). Obdobně je tomu s druhou rovnicí. Aplikujme operaci divergence na Ampérův zákon (49):

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{j}_Q + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

První člen na pravé straně vyjádříme ze zákona zachování náboje (7):

$$0 = -\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} (-\rho_Q + \operatorname{div} \mathbf{D}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{D} - \rho_Q = g(\mathbf{r}).$$

Kombinace $\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho_Q$ je pouze prostorovou funkcí a nezávisí na čase. Rovnice (47) jen říká, že tato funkce je nulová a byla tedy nulová i na počátku. Rovnice (47) má tedy charakter počáteční podmínky k Ampérovu zákonu. Ve výsledku máme tedy šest rovnic pro časový vývoj polí (48), (49) a šest materiálových vztahů, tedy 12 rovnic pro 12 neznámých.

Materiálové vztahy

V předchozí kapitole jsme ukázali, že Maxwellovy rovnice je nutné doplnit materiálovými vztahy popisujícími reakci látky na přiložená pole

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}); \quad (52)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{B}). \quad (53)$$

Pole \mathbf{E} , \mathbf{B} jsou doplněna o reakce materiálu $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ a $\mathbf{M}(\mathbf{B})$. Je to cena za to, aby jako zdrojové členy v Maxwellových rovnicích vystupovaly jen vodivostní proudy a volné náboje. Nová pole se započteným vlivem reakce látky označujeme \mathbf{D} , \mathbf{H} . Pole \mathbf{E} , \mathbf{H} nazýváme intenzity, pole \mathbf{D} , \mathbf{B} nazýváme indukce.

Reakci prostředí $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ a $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ můžeme v některých výjimečných případech vypočítat teoreticky. Ukážeme si to později na příkladu elektromagnetické vlny procházející plazmatem. Elektronů začnou vlivem vlny kmitat, čímž vznikne objemová hustota elektrického dipólového momentu (nenulová polarizace prostředí). Ve většině případů se reakce látky na přiložená pole určuje experimentálně. Závislosti $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ a $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ jsou zpravidla silně nelineární, v některých případech dokonce nezávisí jen na aktuálně přiložených polích, ale také na předchozí historii materiálu. Do této kategorie jevů spadají například různá zbytková pole, která jsou důsledkem působení polí na látku v minulosti. V takovém případě nezávisí polarizace a magnetizace jen na okamžitých hodnotách polí, ale také na jejich časových změnách, tj.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}, \ddot{\mathbf{E}}, \dots), \quad (54)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B}, \dot{\mathbf{B}}, \ddot{\mathbf{B}}, \dots). \quad (55)$$

Předpokládejme pro jednoduchost pouze lineární odezvu materiálu v celé historii a jednorozměrný případ

$$M = \int_{-\infty}^t K(t-t') B(t') dt'. \quad (56)$$

Funkce K určuje, jak moc do minulosti si materiál pamatuje expozici polem. Provedme substituci $\tau = t - t'$, parametr τ je čas, který uplynul od minulosti do současnosti:

$$M = \int_0^{\infty} K(\tau) B(t-\tau) d\tau. \quad (57)$$

Nyní provedeme Taylorův rozvoj

$$B(t-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^{(k)}(t)}{k!} (-\tau)^k = B(t) - \tau \frac{dB}{dt} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 B}{dt^2} \pm \dots \quad (58)$$

Po dosazení do integrace (57) je jasné, že magnetizace bude mít tvar

$$M(t) = c_1 B(t) + c_2 \dot{B}(t) + c_3 \ddot{B}(t) + \dots \quad (59)$$

Pokud si látka pamatuje historii, je i v lineárním případě magnetizace funkcí nejen pole, ale i jeho časových derivací. Koeficienty c_k jsou výsledky jednotlivých integrací přes τ .

* * *

Zabývejme se dále jednoduchou látkou, která si historii nepamatuje, tj. $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$. Pro slabá pole lze odezvu systému považovat za lineární a provést Taylorův rozvoj vektoru polarizace do prvního řádu (používáme sumační konvenci):

$$P_k \doteq \frac{\partial P_k}{\partial E_l} E_l \equiv \varepsilon_0 \kappa_{kl} E_l; \quad (60)$$

$$\blacktriangleright \quad \kappa_{kl} \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial P_k}{\partial E_l} \quad (61)$$

Příslušná matice koeficientů κ_{kl} se nazývá *tenzor elektrické susceptibility*. Permittivita vakua v definici zajišťuje bezrozměrnost susceptibility. Vektorově lze psát

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \mathbf{E}. \quad (62)$$

Vztah mezi indukci a intenzitou $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ v limitě slabých polí dává

$$D_k = \varepsilon_{kl} E_l; \quad \varepsilon_{kl} \equiv \varepsilon_0 (\delta_{kl} + \kappa_{kl}), \quad (63)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{D} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}; \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \varepsilon_0 (\tilde{\mathbf{1}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}}). \quad (64)$$

Matice ε_{kl} se nazývá *tenzor permittivity*. Pole \mathbf{D} a \mathbf{E} nemusí mířit ve stejném směru. Ve statistické fyzice se dokazuje, že tenzory permittivity a susceptibility musí být symetrické. V homogenním izotropním prostředí je matice susceptibility dokonce diagonální a všechny prvky na diagonále jsou stejné. V limitě slabých polí platí v tomto případě jednoduchý vztah

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (65)$$

V magnetickém poli je situace obdobná. Definiční vztah intenzity magnetického pole (53) přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H})]. \quad (66)$$

Magnetizaci jsme zapsali jako funkci pole \mathbf{H} (aby na pravé straně vystupovalo jen jedno z polí). To samozřejmě můžeme, obě pole jsou převeditelná definičním vztahem (53). Pro slabá pole lze odezvu systému považovat za lineární a provést Taylorův rozvoj vektoru magnetizace do prvního řádu:

$$M_k \doteq \frac{\partial M_k}{\partial H_l} H_l = \chi_{kl} H_l; \quad (67)$$

$$\blacktriangleright \quad \chi_{kl} \equiv \frac{\partial M_k}{\partial H_l}. \quad (68)$$

Příslušná matice koeficientů se nazývá *tenzor magnetické susceptibility*. Vektorově lze psát

$$\mathbf{M} = \tilde{\boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{H}. \quad (69)$$

Vztah mezi indukci a intenzitou dává v limitě slabých polí

$$B_k = \mu_{kl} H_l; \quad \mu_{kl} \equiv \mu_0 (\delta_{kl} + \chi_{kl}). \quad (70)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \tilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}; \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}} \equiv \mu_0 (\tilde{\mathbf{1}} + \tilde{\boldsymbol{\chi}}). \quad (71)$$

Matice μ_{kl} se nazývá tenzor permeability. Pole \mathbf{B} a \mathbf{H} nemusí mířit ve stejném směru. Tenzory susceptibility a permeability musí být symetrické. V homogenním izotropním prostředí je matice susceptibility dokonce diagonální a všechny prvky na diagonále jsou stejné. V limitě slabých polí platí v tomto případě ještě jednodušší vztah

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (72)$$

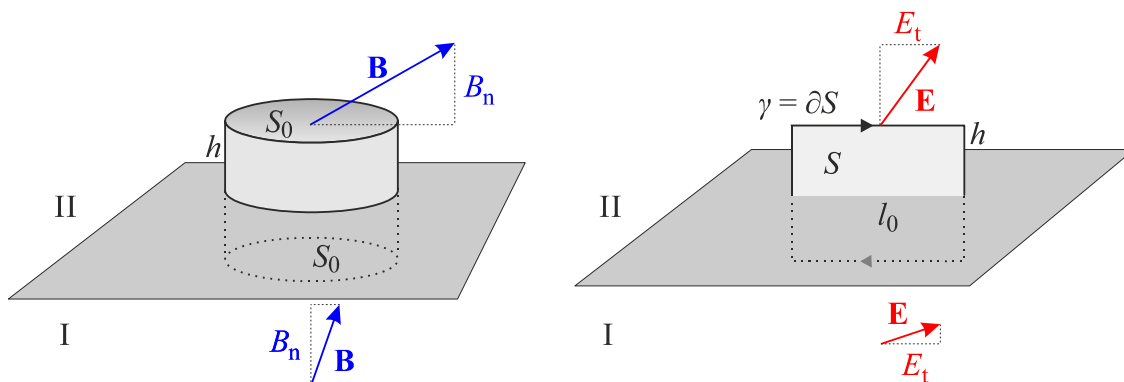
Tenzory elektrické a magnetické susceptibility jsou jakýmsi ukazatelem fázového přechodu, v jehož oblasti mají charakteristické píky v závislosti na nějakém parametru. Shrňme nyní výsledky lineárního přiblížení do přehledné tabulky:

Elektrické pole	Magnetické pole
$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E})$	$\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H})]$
$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \bar{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{M} = \bar{\boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{H}$
$\kappa_{kl} \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial P_k}{\partial E_l}$	$\chi_{kl} \equiv \frac{\partial M_k}{\partial H_l}$
$\mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}$
$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \equiv \varepsilon_0 (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\boldsymbol{\kappa}})$	$\bar{\boldsymbol{\mu}} \equiv \mu_0 (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\boldsymbol{\chi}})$

V silných polích ale takové rozvoje neplatí a je třeba uvažovat obecné vztahy (52) a (53).

Podmínky na rozhraní

Elektrická a magnetická pole nezřídka procházejí rozhraními, na nichž mění svůj směr. Tato změna směru má svá pravidla vyplývající z Maxwellových rovnic v integrálním tvaru. Podle následujícího obrázku budeme rovnice s divergencemi integrovat v okolí rozhraní dvou prostředí I a II přes váleček s objemem V a hranicí S . Pokud chceme znát podmínky na rozhraní, musíme limitně snižovat výšku válečku h k nule. Na tvaru podstavky válce nezáleží.



Vyzkoušejme si to nejprve na Gaussově větě magnetostatiky:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \oiint_{S=\partial V} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0.$$

Integrace probíhá přes plochu ohraničující válec. Pokud začneme jeho výšku snižovat, zbude jen integrace přes horní a dolní podstavu. Vnější normála bude na těchto podstavách mířit opačným směrem:

$$\mathbf{B}_{\text{II}} \cdot \mathbf{n}_{\text{II}} S_0 + \mathbf{B}_{\text{I}} \cdot \mathbf{n}_{\text{I}} S_0 = 0$$

Předpokládejme, že normála k rozhraní \mathbf{n} míří například nahoru, potom je $\mathbf{n}_{\text{II}} = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_{\text{I}} = -\mathbf{n}$:

$$\blacktriangleright \quad B_{n\text{II}} - B_{n\text{I}} = 0, \quad (73)$$

tedy normálová složka magnetické indukce se na rozhraní vždy zachovává (viz obrázek na-levo). Provedme stejnou úvahu pro druhou divergentní rovnici:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV = \iiint_V \rho_Q \, dV \quad \Rightarrow \quad \oiint_{S=\partial V} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \iiint_V \rho_Q \, dV.$$

Na levé straně budeme postupovat stejně, tj. budeme limitně snižovat výšku válečku, až dostaneme rozdíl normálových složek indukce elektrického pole. Na pravé straně je nyní situace poněkud odlišná. Pokud je ve válečku jen prostorový náboj, dostaneme při integraci napravo nulu (objem válce se limitně blíží k nule) a normálové složky indukce elektrického pole budou spojité – stejně, jako je tomu u magnetického pole. Jiný výsledek obdržíme, pokud je na rozhraní lokalizovaný plošný náboj:

$$(D_{nII} - D_{nI}) S_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \rho_Q V = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{S_0 h} S_0 h = \Delta Q.$$

Po převedení plochy z levé na pravou stranu vidíme, že platí

$$\blacktriangleright \quad D_{nII} - D_{nI} = \sigma. \quad (74)$$

V případě, že rozhraní obsahuje plošný náboj, bude se měnit normálová složka indukce elektrického pole skokem. Pokud na rozhraní náboj není, bude spojitá. Analyzujme nyní Faradayův indukční zákon. Provedeme integraci přes obdélník dle obrázku napravo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Při limitním snižování výšky obdélníku se bude integrál napravo blížit nule (plocha, přes kterou se integruje, vymizí). Nalevo z ohraničující křivky zůstanou po limitním přechodu jen části rovnoběžné s rozhráním:

$$\mathbf{E}_{II} \cdot \mathbf{t}_{II} l_0 + \mathbf{E}_I \cdot \mathbf{t}_I l_0 = 0,$$

kde \mathbf{t} je tečný vektor k rozhraní mířící ve směru integrační křivky. Vzhledem k tomu, že platí $\mathbf{t}_{II} = \mathbf{t}$, $\mathbf{t}_I = -\mathbf{t}$, dostáváme vztah

$$\blacktriangleright \quad E_{tII} - E_{tI} = 0, \quad (75)$$

tedy tečná složka intenzity elektrického pole je na rozhraní vždy spojitá (viz pravá část obrázku). Zbývá nám poslední z Maxwellových rovnic – Ampérův zákon. Opět provedeme integraci přes obdélník v pravé části obrázku:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow$$

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Integrál nalevo při limitním přechodu půjde k rozdílu tečných složek násobených délkou křivky podél rozhraní. Oba integrály napravo budou v případě prostorových proudů nulové (integrační plocha se limitně blíží k nule). V takovém případě budou tečné složky intenzity magnetického pole spojité tak, jak tomu bylo u intenzity elektrického pole. Pokud ale v ploše rozhraní poteče elektrický proud (plošný proud), bude situace jiná:

$$(H_{tII} - H_{tI}) l_0 = \lim_{h \rightarrow 0} j_Q S = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{l_0 h} l_0 h = \Delta I.$$

Po převedení délky křivky z levé strany na pravou máme

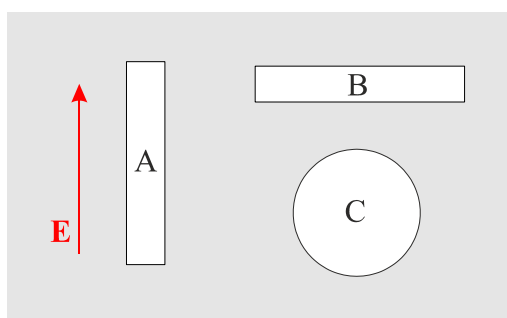
$$\blacktriangleright \quad H_{tII} - H_{tI} = i. \quad (76)$$

V případě, že rozhraní obsahuje tekoucí proudy, bude se měnit tečná složka intenzity magnetického pole skokem. Velikost skoku bude rovna proudu tekoucímu rozhraním vztaženému na jednotku délky. Pokud v rozhraní proudy netečou, bude tečná složka intenzity magnetického pole spojitá. Uvedme na závěr všechny podmínky na rozhraní v jednom jediném vztahu:

$$\begin{aligned} B_{nII} - B_{nI} &= 0, \\ D_{nII} - D_{nI} &= \sigma, \\ E_{tII} - E_{tI} &= 0, \\ H_{tII} - H_{tI} &= i. \end{aligned} \quad (77)$$

Bez plošných proudů a nábojů se zachovávají normálové složky indukci \mathbf{B} , \mathbf{D} a tečné složky intenzit \mathbf{E} , \mathbf{H} . V případě plošných nábojů a proudů v rozhraní se mění skokem indukce elektrického pole a intenzita magnetického pole (ty veličiny, které v sobě zahrnují reakci látky na přiložená pole).

Příklad: pole v dutině



Elektrické pole ovlivňuje dielektrikum, v němž jsou vyříznuty tři dutiny. První dutina (A) míří dominantně ve směru pole. Do dutiny prosakuje tečná složka elektrického pole, která je za všech okolností spojitá, proto bude v dutině A stejné pole jako v okolním dielektriku:

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}. \quad (78)$$

Dutina B je orientována dominantně kolmo na pole, tj. do dutiny prosakuje normálová složka elektrického pole. Ta je ale nespojitá a má skok. Spojité jsou naopak normálové složky elektrické indukce $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ (pokud by na povrchu dutiny byla nenulová plošná hustota náboje, bude mít skok i elektrická indukce). Polarizace v dielektriku je nenulová, v dutině nulová, proto platí:

$$\mathbf{E}_B = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \quad (79)$$

Nejsložitější je příklad kulové dutiny, kdy musíme v každém místě povrchu rozložit pole na normálovou a kolmou část a poté všechny příspěvky sečíst. Pokud si dáte tu práci, dostanete

$$\mathbf{E}_C = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (80)$$



2. ELEKTROSTATIKA

Při proměnných polích jsou elektrické a magnetické děje provázané. Časově proměnná magnetická pole generují pole elektrická a naopak. V této kapitole budeme předpokládat, že pole jsou časově neproměnná a jde o nevodivé prostředí (dielektrikum), kterým neteče žádný elektrický proud. V takovém případě budou elektrické děje v Maxwellově soustavě popisovat pouze rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (81)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (82)$$

Vidíme, že elektrické děje se staly nezávislými na magnetických. Navíc budeme v této kapitole předpokládat, že látka, v níž děje probíhají (dielektrikum), nemá paměť, tj. reakce látky závisí jen na momentálně přiloženém poli. Dále budeme předpokládat homogenní a izotropní látku, tj. nejjednodušší možný materiálový vztah

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (83)$$

Poissonova rovnice a její řešení

Konzervativnost elektrického pole

Rovnice (82) říká, že elektrické pole ve stacionárním případě nevytváří žádné víry. Jeho rotace je nulová. Po integraci přes libovolnou plochu dostaneme ze Stokesovy věty pro ohraničující křivku vztah

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (84)$$

Je to jen jiné vyjádření nevírovosti pole. Nenulovou hodnotu cirkulace pole může mít jen pole ve tvaru víru. Nevírová pole nazýváme *konzervativní*. V elektrostatice je elektrické pole konzervativním polem. Pokud rovnici (84) vynásobíme nábojem, objeví se nalevo integrál ze síly působící na částici v elektrickém poli:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (85)$$

Křivkový integrál ze síly je vykonaná práce. Ta je u konzervativního pole pro uzavřenou křivku vždy nulová. Sílu konzervativního pole je možné zapsat jako záporně vzatý gradient potenciální energie. Obdobně lze elektrické pole splňující rovnici (82) vždy zapsat jako

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (86)$$

Veličinu ϕ nazýváme potenciálem elektrického pole. Znaménko minus zajišťuje, aby se částice pohybovaly do minima potenciální energie, nikoli do maxima. Snadno ověříme, že rovnice (82) je automaticky splněna (rotace z gradientu je vždy nulová). Funkce ϕ bude vždy existovat, rovnice (86) je jednoduchá parciální diferenciální rovnice, která má vždy řešení. To znamená, že k popisu elektrostatického pole postačí jediná skalární funkce. Z ní jsme vždy pomocí vztahu (86) schopni dané elektrické pole vygenerovat. Skalární potenciál není určen jednoznačně. K jednomu elektrickému poli může existovat více potenciálů. Ze vztahu (86) je jasné, že například dva potenciály lišící se o konstantu dají stejné elektrické pole. Volnost ve volbě potenciálu k danému poli je ale mnohem širší a budeme se jí podrobněji zabývat až v nestacionárním případě.

Poissonova rovnice

Rovnice (81) vyjadřuje, že zdrojem elektrického pole jsou elektrické náboje. Převeďme indukci elektrického pole na intenzitu a tu na potenciál pole:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q &\Rightarrow \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho_Q \Rightarrow \\ \operatorname{div} \varepsilon (-\nabla \phi) = \rho_Q &\Rightarrow \operatorname{div} (\nabla \phi) = -\frac{\rho_Q}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Pokud si uvědomíme, že divergence z gradientu je Laplaceův operátor, dostáváme základní rovnici elektrostatiky (tzv. *Poissonovu rovnici*)

$$\blacktriangleright \quad \Delta \phi = -\frac{\rho_Q}{\varepsilon}. \quad (87)$$

Uvedené odvození samozřejmě platí jen pro stacionární případ, lineární vztah mezi indukcí a intenzitou elektrického pole a homogenní izotropní prostředí, v němž je permitivita konstantní. V prvním kroku nalezneme pro dané rozložení nábojů řešení Poissonovy rovnice pro potenciál. V druhém kroku převedeme pomocí vztahu (86) potenciál na elektrické pole.

Greenova funkce Laplaceova operátoru

Pro bodový náboj umístěný v počátku souřadnicové soustavy je potenciál elektrického pole

$$\blacktriangleright \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}. \quad (88)$$

Z této skalární funkce snadno vygenerujeme všechny tři složky elektrického pole v okolí bodového náboje. Při derivování se hodí známý vztah

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r}. \quad (89)$$

Snadno ho odvodíme, pokud si uvědomíme, že $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Nyní již ukážeme, že potenciál (88) je vhodným potenciálem pro bodový náboj:

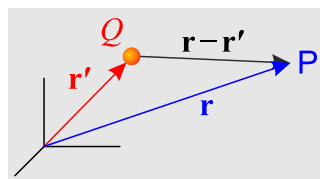
$$\begin{aligned} E_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k} &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_k} r^{-1} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{d}{dr} (r^{-1}) \frac{\partial r}{\partial x_k} = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} (-r^{-2}) \frac{x_k}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \frac{x_k}{r}, \end{aligned}$$

což je správný vztah pro intenzitu elektrického pole, kterou lze vektorově zapsat

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \mathbf{e}_r. \quad (90)$$

Povšimněte si, že potenciál bodového náboje je funkcí $1/r$, zatímco intenzita pole má velikost úměrnou $1/r^2$. Pokud částice nesídlí v počátku, ale v místě \mathbf{r}' (čárkou budeme vždy označovat polohy zdrojů polí, symbolem bez čárky polohu pozorovatele), bude mít v místě \mathbf{r} , kde sídlí pozorovatel, potenciál hodnotu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (91)$$



Ve jmenovateli figuruje, stejně jako předtím, vzdálenost náboje od pozorovatele (místa měření pole). Potenciál bodového náboje, jehož hustota náboje je dána distribucí $\rho_Q = Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, musí splňovat Poissonovu rovnici, tj. bude platit

$$\Delta \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = -\frac{Q \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\epsilon}$$

Jednoduchou úpravou osamostatníme na pravé straně Diracovu distribuci:

$$\Delta \left(-\frac{1}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Řešení Poissonovy rovnice s Diracovým impulzem na pravé straně je ale Greenova funkce příslušného operátoru, v tomto případě Laplaceova operátoru v třírozměrném neomezeném prostoru:

$$\blacktriangleright \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (92)$$

Greenova funkce se nám bude hodit při konstrukci řešení Poissonovy rovnice elektrostatiky pro zcela obecné rozložení nábojů v prostoru.

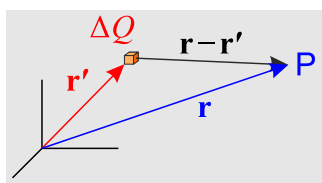
Obecné řešení Poissonovy rovnice

Obecné řešení Poissonovy rovnice $\Delta\phi = -\rho_Q/\epsilon$ je konvolucí Greenovy funkce s pravou stranou, tj.

$$\phi = G * \left(-\frac{\rho_Q}{\epsilon} \right) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(-\frac{\rho_Q(\mathbf{r}')}{\epsilon} \right) d^3\mathbf{r}', \quad \text{tj.}$$

$$\blacktriangleright \quad \phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho_Q(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (93)$$

Jde o řešení Poissonovy rovnice pro zcela obecné rozložení nábojů. Objemové integrály budeme nadále zapisovat s jediným integračním symbolem. Násobnost integrace je patrná z exponentu v diferenciálu. Vektor \mathbf{r} je místem pozorovatele či detektoru pole, vektor \mathbf{r}' , přes který integrujeme, probíhá jednotlivé náboje. Uvedený výsledek můžeme dostat i jednoduchou fyzikální úvahou. Představme si, že ze spojitě rozložených nábojů vyřízneme malý objemový element dle obrázku:



Uvedený element přispěje k potenciálu v místě pozorovatele podle vztahu (91)

$$\Delta\phi = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\rho_Q(\mathbf{r}') \Delta V}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (94)$$

Element náboje budeme nyní považovat za infinitezimální a celkový potenciál určíme jako integraci přes všechny takové elementy:

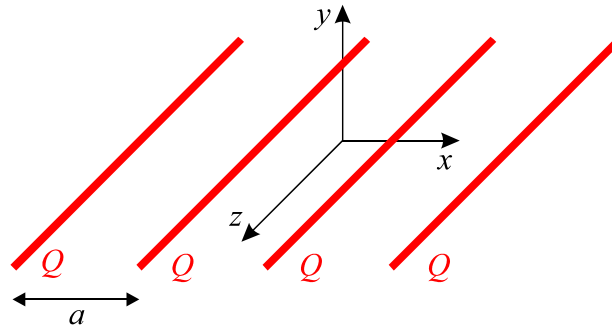
$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho_Q(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'.$$

Výsledek je stejný jako při použití Greenovy funkce. Zdůrazněme, že získaný vztah platí pro stacionární případ, je tedy užitečný v elektrostatice. Pokud by se náboje pohybovaly, bude se signál šířit konečnou rychlostí a vztah bude složitější. Odvodíme si ho později.

Zajímavé příklady

V některých konkrétních případech lze získat řešení Poissonovy rovnice různými triky. Některé z nich si nyní ukážeme.

Síť nabitých vodičů



Představme si síť rovnoměrně rozložených nabitých vodičů. Buzené elektrické pole bude součtem jednotlivých Fourierových komponent:

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y) \cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) \quad (95)$$

Dosažením jedné Fourierovy komponenty do Laplaceovy rovnice (Poissonova rovnice ve vakuu, tj. bez pravé strany) získáme obyčejnou diferenciální rovnici pro amplitudy $A_n(y)$:

$$\frac{d^2 A_n}{dy^2} - \left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 A_n = 0 \quad (96)$$

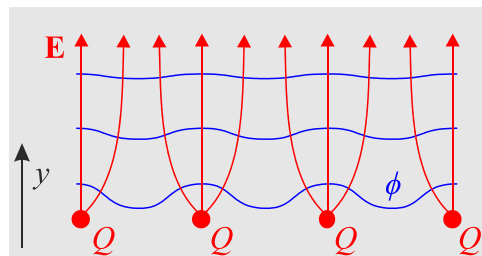
Řešení je jednoduché:

$$A_n(y) = \begin{cases} c_0 y; & n = 0, \\ c_n \exp[-2\pi n y/a]; & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (97)$$

Všechna harmonická řešení pro $n > 1$ jsou již ve vzdálenosti několika a silně utlumena. Nejpomaleji klesá základní mód s $n = 1$. Pro $y > a$ se pole chová s dosti dobrou přesností jako homogenní pole představované členem $n = 0$. Síť z vodičů stíní stejně dobře jako kovová rovina. Ve velké vzdálenosti se uplatní jediná složka

$$\phi_0 = c_0 y = -Ey, \quad (98)$$

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla \phi_0 = (0, E, 0).$$



Vzhledem k tomu, že intenzita elektrického pole je gradientem potenciálu, míří elektrické pole (a tedy i siločáry) vždy kolmo na ekvipotenciály.

Dvojměrné zdroje – komplexní proměnná

V tomto příkladě se zaměříme na dvojměrný problém. V nějaké rovině jsou rozmístěny plošné nabitě elektrody a naším úkolem je nalézt jimi generované elektrické pole. Při hledání polí lze s úspěchem využít komplexní funkci komplexní proměnné:

$$f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C};$$

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y). \quad (99)$$

Funkce U a V představují reálnou a imaginární část komplexní funkce komplexní proměnné. Derivace komplexní funkce podle $z = x + iy$ nesmí záviset na cestě, tedy derivace podle x musí dát stejný výsledek jako podle iy :

$$\frac{\partial}{\partial x}(U + iV) = \frac{\partial}{\partial iy}(U + iV) \quad (100)$$

Oddělením reálné a imaginární části dostáváme tzv. Cauchyho-Riemannovy (CR) podmínky:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (101)$$

Dalším derivováním Cauchyho-Riemannových podmínek zjistíme, že jak reálná, tak imaginární část komplexní funkce splňuje Laplaceovu rovnici:

$$\Delta U = 0; \quad \Delta V = 0. \quad (102)$$

Funkce U i V tedy mohou posloužit jako potenciál elektrického pole. Využijeme-li například reálnou část, budou křivky

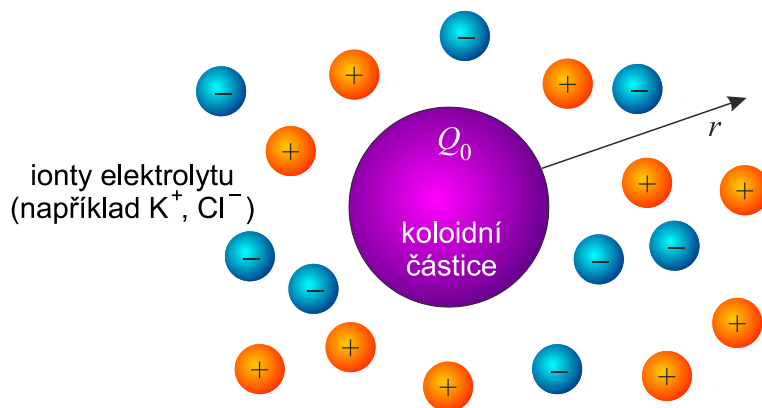
$$U(x, y) = 0 \quad (103)$$

definovat ekvipotenciály. V takovém případě budou křivky definované druhou z funkcí

$$V(x, y) = 0 \quad (104)$$

kolmé na předchozí sadu (plyne okamžitě z CR podmínek) a budou tedy představovat siločáry elektrického pole. Jediná komplexní funkce komplexní proměnné tak v dvojrozměrném případě umožní popsat jak ekvipotenciály, tak siločáry elektrického pole v okolí elektrod.

Koloidní částice v elektrolytu – Debyeův poloměr



Pokud budeme sledovat průběh potenciálu v okolí koloidní částice, bude ovlivněn ostatními nabitými částicemi – ionty v okolí. Není-li plazma daleko od termodynamické rovnováhy, přesunou se k vybranému zdroji částice opačné polarity a budou ho stínit. Výsledkem je exponenciální úbytek pole našeho zdroje s charakteristickou vzdáleností λ_D , na které potenciál i pole poklesne na $1/e$ hodnoty dané Coulombovým zákonem. Tato vzdálenost se nazývá *Debyeova stínící vzdálenost* a je pojmenována podle holandského fyzika a chemika Petera Debyeho (1884–1966). Elektrický potenciál $\phi(r)$ v okolí zdroje určíme z Poissonovy rovnice:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}$$

Budeme pro jednoduchost předpokládat, že kladné a záporné ionty mají stejný náboj a že jejich koncentrace dána Boltzmannovým statistickým rozdělením:

$$\Delta\phi = -\frac{Q_+n_+ + Q_-n_-}{\varepsilon_0} = -\frac{+Qn_+ - Qn_-}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[+Qn_0 \exp\left(-\frac{Q\phi(\mathbf{x})}{k_B T}\right) - Qn_0 \exp\left(+\frac{Q\phi(\mathbf{x})}{k_B T}\right) \right].$$

Není-li systém daleko od termodynamické rovnováhy, provedeme Taylorův rozvoj exponenciál do prvního řádu. Nulté členy se odečtou (roztok je celkově neutrální) a zbytek dá:

$$\Delta\phi = \alpha\phi; \quad \alpha = \frac{2Q^2n_0}{\varepsilon_0k_B T}$$

Rovnici budeme řešit ve sférických souřadnicích se středem v koloidní částici:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] = \alpha\phi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dr^2} = \alpha\psi; \quad \psi(r) \equiv r\phi(r) \Rightarrow$$

$$\psi(r) = C_1 e^{\sqrt{\alpha}r} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}r} \Rightarrow \phi(r) = \frac{C_1}{r} e^{\sqrt{\alpha}r} + \frac{C_2}{r} e^{-\sqrt{\alpha}r}.$$

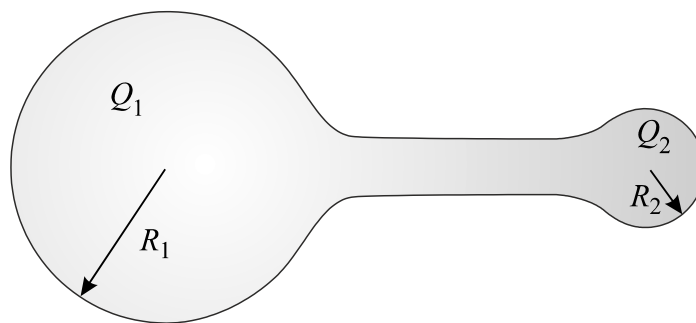
Vzhledem k tomu, že potenciál bodového zdroje nemůže divergovat v nekonečné vzdálenosti, je $C_1 = 0$. Konstantu C_2 určíme tak, aby potenciál v limitě malé vzdálenosti od zdroje přešel v klasický Coulombův potenciál zdroje s nábojem Q_0 :

$$\blacktriangleright \quad \phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}; \quad \lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{2Q^2 n_0}}. \quad (105)$$

Ionty odstiňují koloidní částici od okolí i od ostatních částic na charakteristické vzdálenosti λ_D (Debyeově délce). Pokud přidáme do roztoku sůl, zvýší se koncentrace iontů a sníží Debyeova vzdálenost. Koloidní částice jsou lépe stíněny a mohou se tím pádem snáze srážet a vytvářet větší celky. Proto se při přidání soli koloid může vysrážet.

Pole hrotu

Představme si kovový (vodivý) prvek s dvěma konci, které mají různá zakřivení.



Potenciály na povrchu koncových částí budou přibližně

$$\phi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}; \quad \phi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \quad (106)$$

Vzhledem k tomu, že jde o vodič, je vše vodivě spojené a na celém povrchu bude jediný potenciál (jinak by se náboje přesouvaly tak dlouho, až by se potenciály různých částí vodiče vyrovnaly):

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad (107)$$

Ve vodiči jsou odpuzující se náboje stejné polaroty vytlačeny na povrch. Intenzita elektrického pole u povrchu je úměrná plošné hustotě náboje:

$$E \sim \sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1 / 4\pi R_1^2}{Q_2 / 4\pi R_2^2} = \frac{Q_1 R_2^2}{Q_2 R_1^2}$$

Nyní za podíl nábojů dosadíme z (107) a máme

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad E \sim \frac{1}{R} \quad (108)$$

Intenzita elektrického pole u povrchu vodiče je nepřímo úměrná poloměru zakřivení oblasti. V blízkosti hrotů je pole proto extrémně veliké a vznikají zde různé výboje (korónový, Eliášův oheň atd.

Energie elektrického pole

Už víme, že intenzita elektrického pole a jeho potenciál spolu souvisí vztahem

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

Pokud do elektrického pole umístíme částici s nábojem Q , bude na ni působit síla

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} = -\nabla(Q\phi)$$

Vzhledem k tomu, že elektrostatické pole je konzervativní, tj. síla je záporně vzatým gradientem potenciální energie, musí pro potenciální energii platit

$$W_p = Q\phi.$$

Sílu působící na částici můžeme tedy zjistit tak, že elektrické pole vynásobíme nábojem částice, energii částice zjistíme tak, že vynásobíme nábojem částice potenciál:

▶	$\begin{aligned} \mathbf{F} &= Q\mathbf{E}; \\ W_p &= Q\phi. \end{aligned} \quad (109)$
---	---

Určeme nyní energii částice a v poli částice b :

$$U_{ab} = Q_a\phi_b = \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \quad (110)$$

U soustavy částic sečteme takové výrazy pro všechny možné dvojice částic a, b . Tím ale energii každé dvojice započteme dvakrát (Například jako W_{37} a W_{73}). Z výsledného součtu musíme proto použít jen polovinu, neboť všechny členy jsou dvakrát. A samozřejmě musíme vyloučit případy, kdy by částice tvořily pár samy se sebou, tedy požadovat $a \neq b$:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \quad (111)$$

Sumu nyní rozdělíme:

$$U = \frac{1}{2} \sum_a Q_a \sum_{b \neq a} \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}. \quad (112)$$

Vnitřní suma je součet potenciálů všech částic v místě \mathbf{r}_a , tedy celkový potenciál generovaný všemi částicemi v místě částice a :

$$U = \frac{1}{2} \sum_a Q_a \phi(\mathbf{r}_a). \quad (113)$$

Pokud bude rozložení náboje spojitě, přejde výraz v intergrál

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho_Q(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (114)$$

Integrační proměnnou bychom mohli označit \mathbf{r}' , ale je to zbytečné, ve vztahu nefigurují dva různé vektory (pozorovatel, zdroj pole), ale jen jeden jediný. Spočetli jsme celkovou energii všech nabitých částic. Tyto částice ale na sebe působí elektrickými poli, pomocí nichž také můžeme energii zapsat. Výrazy typu (111), (114) jasně energii vztahují k jednotlivým částicím. Pokud ale důsledně přepíšeme vztah do polí, může být energie deponována i mimo oblast nenulového náboje. Pole jsou totiž nenulová i ve vakuu. Tím získává pole charakter reálné entity, která je nositelem (a doslova přenašečem) energie. K prepisu do polí postačí vyjádřit hustotu náboje z Maxwellovy rovnice $\text{div } \mathbf{D} = \rho_Q$:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \phi \text{div } \mathbf{D} d^3\mathbf{r}. \quad (115)$$

Nyní využijeme integraci per partes ve třech dimenzích (viz [3])

$$U = \frac{1}{2} \int_V \phi (\partial_k D_k) d^3\mathbf{r} = -\frac{1}{2} \int_V (\partial_k \phi) D_k d^3\mathbf{r} + \oint_{S=\partial V} \phi D_k n_k dS.$$

První integrál lze upravit pomocí elektrického pole ($E_k = -\partial_k \phi$). Druhý integrál je přes hranici. Potenciál klesá se vzdáleností od zdrojů jako $1/r$, indukce elektrického pole jako $1/r^2$, integrand tedy klesá se vzdáleností od zdrojů polí jako $1/r^3$. Pokud povedeme integrační plochu dosti daleko od zdrojů, ideálně v nekonečno, bude příspěvek posledního integrálu nulový a celková energie vyjde:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3\mathbf{r}. \quad (116)$$

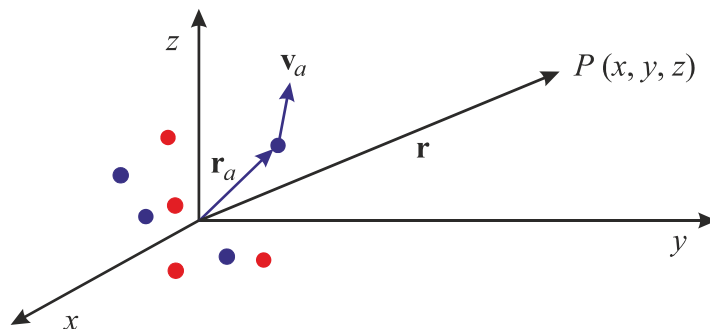
Hustota energie elektromagnetického pole (energie vztažená na objem, jednotkou v SI je J/m^3) je integrovaná proměnná, tedy polovina skalárního součinu obou elektrických vektorů:

$$\blacktriangleright \quad u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (117)$$

Stejný vztah se odvozuje v základních kurzech fyziky pro kondenzátor. Hustota energie pole v kondenzátoru je opět $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$.

Multipólový rozvoj

Předpokládejme, že zdroje polí jsou lokalizované, tvoří nějaký shluk částic v oblasti, do níž umístíme počátek souřadnicové soustavy:



Každý z nábojů má polohový vektor \mathbf{r}_a , rychlostní vektor \mathbf{v}_a , hmotnost m_a a náboj Q_a . Pozorovatel je ve velké vzdálenosti od zdroje polí a má polohu \mathbf{r} . Hustota náboje bude

$$\rho_Q(\mathbf{r}') = \sum_a Q_a \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a), \quad (118)$$

Potenciál elektrického pole bude mít v tomto případě jednoduché vyjádření

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_a \frac{Q_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}, \quad (119)$$

Pole pozorujeme ve vzdáleném místě \mathbf{r} , platí $r \gg r_a$, takže můžeme provést Taylorův rozvoj pro argument \mathbf{r} a přírůstek \mathbf{r}_a :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} - x_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} x_k^{(a)} x_l^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left(\frac{1}{r} \right) \pm \dots \quad (120)$$

Nyní provedeme derivace (při derivování využijeme $\partial r / \partial x_k = x_k / r$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} + x_k^{(a)} \frac{x_k}{r^3} + \frac{1}{2!} x_k^{(a)} x_l^{(a)} \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{r^5} \pm \dots \quad (121)$$

Odvozený rozvoj dosadíme do vztahu (119) pro potenciál a ze sumace vytkneme veličiny, přes které se nesčítá:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_a Q_a + \frac{x_k}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_a Q_a x_k^{(a)} + \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a x_k^{(a)} x_l^{(a)} + \dots \quad (122)$$

V posledním vypsaném členu rozvoje skalárního potenciálu lze výraz v sumaci upravit do obdobného tvaru, jaký má výraz před sumací:

$$\begin{aligned} \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a x_k^{(a)} x_l^{(a)} &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} \right) = \\ &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} - r_a^2 \delta_{kl} \right). \end{aligned} \quad (123)$$

Odečtením členu $r_a^2 \delta_{kl}$ získá tenzor v závorce nulovou stopu, fakticky se ale nic nestane, protože platí

$$\left(3x_k x_l - r^2 \delta_{kl} \right) r_a^2 \delta_{kl} = \left(3r^2 - 3r^2 \right) r_a^2 = 0. \quad (124)$$

Celkově tedy první členy rozvoje, které budeme potřebovat, mají tvar:

$$\begin{aligned} \phi^{(0)} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; & Q &\equiv \sum_a Q_a, \\ \phi^{(1)} &= \frac{\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}; & \mathbf{p}_E &\equiv \sum_a Q_a \mathbf{r}_a, \\ \phi^{(2)} &= \frac{3x_k x_l - r^2 \delta_{kl}}{24\pi\epsilon_0 r^5} Q_{kl}; & Q_{kl} &\equiv \sum_a Q_a \left(3x_k^{(a)} x_l^{(a)} - r_a^2 \delta_{kl} \right). \end{aligned} \quad (125)$$

Jednotlivé příspěvky se nazývají monopólový (0), dipólový (1) a kvadrupólový (2). Elektricky neutrální soustava má celkový náboj Q nulový, a tím je nulový i celý monopólový člen. Povšimněte si, že monopólový příspěvek klesá se vzdáleností jako $1/r$, dipólový jako $1/r^2$ a kvadrupólový jako $1/r^3$. Příslušné síly (derivace potenciálů) klesají jako $1/r^2$, $1/r^3$, $1/r^4$ (monopól, dipól, kvadrupól). Síla mezi dvěma interagujícími dipóly tedy klesá se třetí mocninou vzdálenosti. Pro dvě částice se stejným, ale opačným nábojem dá dipólový moment původní definici (9):

$$\mathbf{p}_E \equiv \sum_a Q_a \mathbf{r}_a = Q_+ \mathbf{r}_+ + Q_- \mathbf{r}_- = Q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = Q\mathbf{d}. \quad (126)$$

Poznamenejme, že elektrický kvadrupólový příspěvek lze zapsat invariantně jako:

$$\blacktriangleright \quad \phi^{(2)} = \frac{3\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} - r^2 \mathbf{1}}{24\pi\epsilon_0 r^5} : \mathbf{Q}; \quad \mathbf{Q} \equiv \sum_a Q_a (3\mathbf{r}_a \otimes \mathbf{r}_a - r_a^2 \mathbf{1}). \quad (127)$$

Monopól

Derivováním potenciálů (125) podle vztahu $E_k = -\partial_k \phi$ snadno určíme složky elektrického pole. Pro monopólový člen je výsledkem dle očekávání Coulombův zákon:

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (128)$$

Pole ubývá s druhou mocninou vzdálenosti od soustavy nábojů a siločáry mají radiální směr. Pole je nenulové jen tehdy, pokud je celkový náboj soustavy Q nenulový.

Dipól

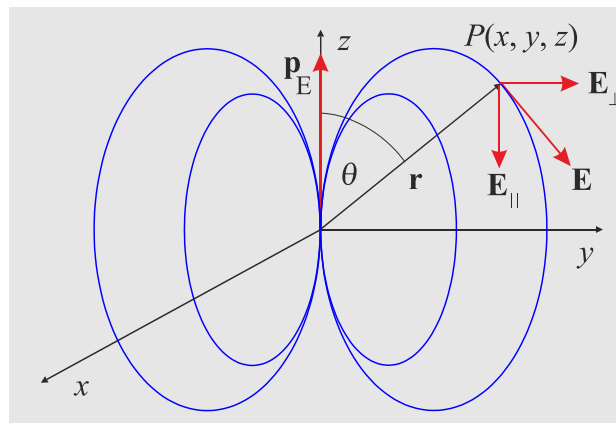
Nová definice dipólového momentu je důležitá při numerických simulacích. Pokud v simulaci sledujeme pohyby částic, známe v každém okamžiku jejich polohové vektory a můžeme tak určit nejenom celkový dipólový moment \mathbf{p}_E , ale i jeho hustotu, tj. polarizaci \mathbf{P} . To je užitečné například při výpočtu tenzoru permitivity, ale i v dalších situacích. Určeme nyní elektrické pole generované dipólovým momentem

$$E_k = -\partial_k \phi^{(1)} = -\frac{p_{El}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{x_l}{r^3} \right) = \frac{3p_{El}x_l x_k - p_{Ek}r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \quad (129)$$

Při výpočtu jsme využili $\partial_k r = x_k/r$. Kovariantní zápis dipólového pole je

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_E}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (130)$$

Pole ubývá se třetí mocninou vzdálenosti a má poměrně složitou směrovou závislost.



Je-li osa dipólu v ose z , mají jednotlivé složky hodnoty

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3n_z n_x, 3n_z n_y, 3n_z^2 - 1); \\ E_{\perp} &= \frac{p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} 3 \cos \theta \sin \theta; \\ E_{\parallel} &= \frac{p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned} \quad (131)$$

Kvadrupól

Kvadrupólový moment vyjadřuje odchylku rozdělení náboje od sférické symetrie. Je symetrický a jeho stopa je nulová, tj. platí

$$Q_{kl} = Q_{lk}, \quad (132)$$

$$\text{Tr}(\vec{\mathbf{Q}}) = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0. \quad (133)$$

V obecné soustavě má symetrická matice 6 nezávislých složek, podmínka na stopu redukuje počet nezávislých složek tenzoru kvadrupólového momentu na pět. U reálných symetrických matic jsou vlastní čísla reálná a vlastní vektory tvoří ortogonální systém. Pokud zvolíme tyto vlastní vektory za osy souřadnicové soustavy, bude mít tenzor kvadrupólového momentu jen diagonální složky. V takové souřadnicové soustavě budou díky nulovosti stopy nezávislé jen dvě složky tenzoru kvadrupólového momentu. Pro diagonální tenzor kvadrupólového momentu bude platit $Q_{kl}\delta_{kl} = 0$, neboť jde o stopu tenzoru a ve výrazech (125) zůstane pro potenciál $\phi^{(2)}$ jen první člen:

$$\phi^{(2)} = \frac{x_k x_l}{8\pi\epsilon_0 r^5} Q_{kl} = \frac{1}{2} \frac{Q_{kl} n_k n_l}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (134)$$

V kovariantním zápise budeme mít

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{(\vec{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (135)$$

Pro osově symetrické rozdělení náboje (kolem osy z) budou první dvě diagonální složky stejné, tj. tenzor kvadrupólového momentu bude mít jedinou nezávislou složku (stopa musí být nulová):

$$Q_{kl} = \begin{pmatrix} -Q/2 & 0 & 0 \\ 0 & -Q/2 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix}. \quad (136)$$

Pozor, veličina Q v tomto výrazu neznamena náboj! Směrová závislost potenciálu bude v případě osové symetrie kolem osy z (využijeme, že součet druhých mocnin všech složek směrového vektoru je roven jedné, tj. jde o jednotkový vektor):

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} &= Q_{kl} n_k n_l = Q_{11} n_1^2 + Q_{22} n_2^2 + Q_{33} n_3^2 = \\ &= -\frac{Q}{2} (n_1^2 + n_2^2) + Q n_3^2 = \\ &= -\frac{Q}{2} (1 - n_3^2) + Q n_3^2 = \\ &= \frac{Q}{2} (3n_3^2 - 1) = \frac{Q}{2} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

Za předpokladu osové symetrie kolem osy z tedy pro kvadrupólovou část potenciálu můžeme v souřadnicové soustavě tvořené vlastními vektory napsat

$$\phi^{(2)} = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (137)$$

což je jednoduchý a snadno použitelný vztah. Úhel θ je odklon polohového vektoru pozorovatele od osy symetrie (z). Příslušné elektrické pole lze získat derivováním vztahu, má komplikovanou strukturu a využívá se například v kombinaci s vhodným magnetickým polem pro udržení částic v elektromagnetické pasti.

Elektrický dipól ve vnějším poli

Nyní se budeme zabývat v jistém smyslu opačnou úlohou. Dosud jsme zkoumali, jaké pole generuje soustava částic lokalizovaná v nějakém místě prostoru. Počátek souřadnic jsme umístili někde v soustavě, například v jejím těžišti. Nyní budeme zjišťovat, jak taková soustava bude reagovat na vnější elektrické pole. Pokud je soustava neutrální, nultý člen multipólového rozvoje je nulový a soustava s vnějším polem interaguje až dipólově, případně kvadrupólově. Představme si opět soustavu nábojů lokalizovanou v okolí počátku souřadnicové soustavy, polohové vektory částic jsou \mathbf{r}_a . Částice jsou ponořeny do vnějšího pole s potenciálem ϕ . Energie soustavy ve vnějším poli bude

$$U = \sum_a Q_a \phi(\mathbf{r}_a) \quad (138)$$

Proveďme Taylorův rozvoj do prvního řádu v okolí počátku souřadnic:

$$U = \sum_a Q_a [\phi(0) + (\mathbf{r}_a \cdot \nabla) \phi + \dots]$$

Derivace potenciálu napíšeme jako složky elektrického pole ($E_k = -\partial_k \phi$) a ze sumy vytkneme vše, přes co se nescítá:

$$U = \left(\sum_a Q_a \right) \phi(0) - \left(\sum_a Q_a \mathbf{r}_a \right) \cdot \mathbf{E} + \dots$$

První člen bude pro neutrální soustavu nulový, druhý dá dipólový příspěvek k energii částic ve vnějším poli:

$$\blacktriangleright \quad U^{(1)} = -\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{E}. \quad (139)$$

Elektrický dipól má nejnižší energii, pokud je orientován ve směru elektrického pole a nejvyšší, pokud je orientován opačně. Proto se při nízkých teplotách soustava elementárních dipólů snaží zorientovat ve směru pole. Hustota pravděpodobnosti (a koncentrace dipólů, která jí je úměrná) je dána Boltzmannovým rozdělením

$$n = n_0 \exp \left[-\frac{U^{(1)}}{k_B T} \right] = n_0 \exp \left[+\frac{p_E E \cos \theta}{k_B T} \right], \quad (140)$$

kde θ je úhel mezi elektrickým polem a dipólem a k_B Boltzmannova konstanta. Dipóly se budou řadit podél pole tím lépe, čím je pole silnější, teplota nižší a dipólový moment větší.

* * *

Zajímavý je také moment síly působící na soustavu nabitých částic:

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{F} = \sum_a \mathbf{r}_a \times Q_a \mathbf{E} = \left(\sum_a \mathbf{r}_a Q_a \right) \times \mathbf{E}.$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{M} = \mathbf{p}_E \times \mathbf{E}. \quad (141)$$

Nenulový moment síly působí na dipóly i v homogenním poli.



3. MAGNETOSTATIKA

Jak už jsme viděli v elektrostatice, ve stacionárním případě, kdy pole nejsou časově proměnná, přestanou být rovnice pro elektrické a magnetické pole provázány. Pro magnetické pole zbudou z Maxwellovy soustavy dvě rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (142)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q. \quad (143)$$

V této kapitole budeme předpokládat, obdobně jako v elektrostatice, že látka nemá paměť, tj. reakce látky závisí jen na momentálně přiloženém poli a nikoli na jeho časových derivacích. Pole budou tak slabá, aby bylo možné předpokládat, že odezva látky je lineární (tedy postačí provést Taylorův rozvoj magnetizace jen do prvního řádu). Dále budeme předpokládat homogenní a izotropní látku, tj. při výpočtech v této kapitole se spokojíme s nejjednodušším možným materiálovým vztahem

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (144)$$

Vektorový potenciál

Magnetické pole není konzervativní, tj. sílu působící na částice nelze zapsat jako gradient nějaké funkce, která by hrála roli potenciální energie. Taková funkce v magnetickém poli neexistuje. Rovnice $\operatorname{div} \mathbf{B}$ ale umožňuje zavedení vektorového potenciálu. Snadno ukážeme, že pro libovolné pole platí $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{K}) = 0$. Pokud bychom mohli zapsat pole \mathbf{B} jako rotaci nějakého jiného pole \mathbf{A} , bude rovnice (142) automaticky splněna:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \quad (145)$$

Zásadní otázkou je, zda je možné takové vektorové pole najít. Odpověď je kladná, rovnice $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ je parciální diferenciální rovnicí pro pole \mathbf{A} , v níž pravé strany tvoří pole \mathbf{B} . Taková rovnice má, až na extravagantní zdroje, jako je magnetický monopól, vždy řešení, dokonce je jich nekonečně mnoho. Funkci \mathbf{A} nazýváme *vektorový potenciál magnetického pole*. Pokud najdeme vektorový potenciál, magnetické pole už snadno určíme z rovnice

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (146)$$

K danému poli ale není potenciál určen jednoznačně. Pokud k potenciálu přičteme gradient libovolné skalární funkce, magnetické pole se nezmění. Takovou gradientní transformaci nazýváme *kalibrační transformace* (v angličtině *gauge transformation*):

$$\blacktriangleright \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}. \quad (147)$$

Důkaz tohoto tvrzení je velmi jednoduchý:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{A}} = \operatorname{rot}(\mathbf{A} + \nabla f) = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Magnetické pole se tedy skutečně nezmění (rotace gradientu je nulová). Ke stejnému poli vede obrovské množství potenciálů. Tuto libovůli lze využít k výběru takového potenciálu (této proceduře říkáme kalibrace), pro který jsou příslušné rovnice co možná nejjednodušší. V elektrostatice jsme elektrické pole dokázali popsat pomocí jedné jediné funkce – skalárního potenciálu. Nic takového neplatí v magnetostatice. Namísto jednoho vektorového pole (\mathbf{B}) máme jiné vektorové pole (\mathbf{A}), jehož rovnice jsou jednodušší. Celkově tedy pro popis elektromagnetického pole stačí pouhá čtveřice funkcí (skalární a vektorový potenciál). To dobře koresponduje s tím, že žijeme ve čtyřrozměrném časoprostoru a většinu dějů popisujeme uspořádanými čtveřicemi. Později ukážeme, že čtveřice (ϕ , \mathbf{A}) popisující elektromagnetické pole tvoří tzv. čtyřvektor, který se transformuje za pomoci Lorentzovy transformace. Z transformovaných potenciálů určíme odpovídající pole v jiné souřadnicové soustavě.

Příklad: potenciál homogenního magnetického pole

Předpokládejme, že magnetické pole je homogenní. Souřadnicový systém zvolme tak, aby v něm pole mířilo v ose z :

$$\mathbf{B} = (0, 0, B). \quad (148)$$

Zkusme nyní najít vektorový potenciál přímo ze vztahu (146). Rovnici $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ rozepíšeme do složek:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B. \quad (149)$$

Nejpodstatnější je samozřejmě třetí rovnice: aby derivováním vznikla správná pravá strana, musíme vhodně zvolit složky A_x , A_y vektorového potenciálu. Vyzkoušejte si, že vhodnými potenciály jsou například

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (0, Bx, 0); \\ \mathbf{A} &= (-By, 0, 0); \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(-By, Bx, 0); \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (150)$$

Všechny tyto potenciály jsou stejně dobré. Po provedení rotace dostaneme pole $(0, 0, B)$.

Poissonova rovnice a její řešení

Zavedením vektorového potenciálu automaticky splníme první z rovnic magnetostatiky (142). Dosadíme proto vektorový potenciál do druhé z rovnic magnetostatiky (143)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}_Q \quad \Rightarrow \quad \text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{j}_Q \quad \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{j}_Q. \quad (151)$$

Jde o parciální diferenciální rovnici pro vektorový potenciál. Jako zdrojový člen vektorového potenciálu zde figuruje hustota vodivostních proudů. Nebýt prvního členu na levé straně, šlo by stejně jako v elektrostatice o Laplaceovu-Poissonovu rovnici. První člen ale rovnici zbytečně komplikuje. Víme, že vektorových potenciálů existuje nekonečně mnoho. Liší se od sebe o gradient libovolné funkce. Nešlo by tedy mezi nimi vybrat takový potenciál, aby byl první člen rovnice (151) nulový? Předpokládejme, že potenciál \mathbf{A} známe a hledáme nový, jehož divergence je nulová. Zkusme tedy provést transformaci

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f \quad (152)$$

a požadovat, aby byla divergence nového potenciálu nulová:

$$\text{div } \tilde{\mathbf{A}} = 0. \quad (153)$$

To vede na rovnici

$$\text{div}(\mathbf{A} + \nabla f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f = -\text{div } \mathbf{A}.$$

Vzhledem k tomu, že na pravé straně figuruje známá funkce, máme pro f generující transformaci k novému potenciálu rovnici

$$\Delta f = F(\mathbf{r}) \quad (154)$$

Taková rovnice má vždy řešení, tedy funkce f , která přetransformuje starý potenciál na nový, existuje. Pro nový potenciál bude platit jednodušší rovnice (vlnky v dalším textu vynecháme):

$$\blacktriangleright \quad \Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}_Q; \quad (155)$$

$$\blacktriangleright \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (156)$$

První rovnice je Laplaceova-Poissonova rovnice magnetostatiky pro vektorový potenciál, druhá rovnice je dodatečná podmínka (tzv. *Lorenzova kalibrační podmínka*), kterou musí vybraný potenciál splňovat. Nalezneme-li jakékoli řešení rovnice (155), musíme zkontrolovat, zda splňuje Lorenzovu kalibrační podmínku. Vzhledem k tomu, že známe Greenovu funkci Laplaceova operátoru (92) v třídímním neomezeném prostoru, můžeme rovnou napsat obecné řešení

$$\mathbf{A} = G * \mathbf{g}, \quad (157)$$

kde \mathbf{g} je pravá strana Laplaceovy-Poissonovy rovnice. Po dosazení máme

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{g}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \int_V \left(-\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) (-\mu \mathbf{j}_Q(\mathbf{r}')) d^3 \mathbf{r}' \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (158)$$

Řešení je zcela analogické skalárnímu potenciálu (93) pro elektrické pole. Zdrojem magnetického pole ale není hustota náboje, nýbrž tok elektrického náboje. Čárkované proměnné opět označují polohu zdrojů, nečárkované polohu pozorovatele. Ve jmenovateli je vzdálenost mezi zdrojem pole a pozorovatelem. Přímým výpočtem lze ukázat, že takto zvolený potenciál splňuje Lorenzovu kalibrační podmínku $\text{div } \mathbf{A} = 0$, pokud platí $\text{div } \mathbf{j}_Q = 0$, což je zákon zachování náboje ve stacionárním případě.

Biotův-Savartův zákon

Představme si nyní, že magnetické pole není buzené volně se pohybujícími částicemi, ale vodičem obecného tvaru (tvar vodiče popíšeme křivkou γ), kterým protéká elektrický proud. Pro tok náboje bude v takovém případě platit

$$\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = I d\mathbf{l}', \quad (159)$$

kde $d\mathbf{l}'$ je element křivky sledující vodič. Pro vektorový potenciál tedy budeme mít

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (160)$$

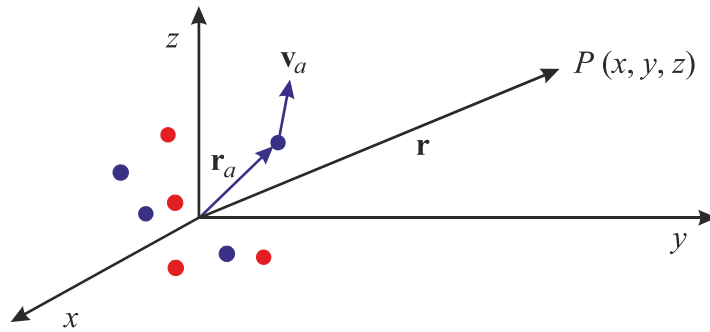
Magnetické pole vypočteme jako rotaci tohoto vektorového potenciálu:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (161)$$

Výpočet je přímočarý: $B_k = \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \dots$ Derivaci přesuneme do integrálu a jmenovatele derivujeme jako složenou funkci. Přitom využijeme nám už známý vztah $\partial r / \partial x_k = x_k / r$. Rovnice (161) se velmi často využívá v elektrotechnice při výpočtu magnetických polí generovaných vodiči protékanými proudy. Vztah poprvé odvodili francouzský fyzik a astronom Jean-Baptiste Biot (1774–1862) a francouzský fyzik a matematik Félix Savart (1791–1841) v roce 1820. Připomeňme, že zákon v podobě (161) platí jen ve stacionárním případě, tj. pro neproměnné elektrické proudy.

Multipólový rozvoj

Stejně jako v elektrostatice budeme i v magnetostatice předpokládat lokalizovanou soustavu nábojů. Počátek souřadnicového systému můžeme umístit například do těžiště soustavy. Každý z nábojů má polohový vektor \mathbf{r}_a , rychlostní vektor \mathbf{v}_a , hmotnost m_a a náboj Q_a . Pozorovatel je ve velké vzdálenosti od zdroje polí a má polohu \mathbf{r} .



Tok náboje bude mít tvar superpozice přes polohy jednotlivých částic

$$\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}') = \sum_a Q_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a). \quad (162)$$

Pro potenciál (158) máme (po dosazení) v tomto případě jednoduché vyjádření

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_a \frac{Q_a \mathbf{v}_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (163)$$

Pole pozorujeme ve vzdáleném místě \mathbf{r} , platí $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}_a$, takže můžeme provést Taylorův rozvoj pro argument \mathbf{r} a přírůstek \mathbf{r}_a (postup je zcela identický s elektrostatikou):

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} - x_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) \pm \dots \quad (164)$$

Nyní provedeme derivace (při derivování využijeme $\partial r / \partial x_k = x_k / r$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{r} + x_k^{(a)} \frac{x_k}{r^3} \pm \dots \quad (165)$$

Odvozený rozvoj dosadíme do vztahu pro potenciál a ze sumace vytkneme veličiny, přes které se nesčítá:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_a Q_a \mathbf{v}_a + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} x_k \sum_a Q_a \mathbf{v}_a x_k^{(a)} + \dots \quad (166)$$

První člen za rovnítkem je nulový (součet příspěvků všech elektrických proudů musí být ve stacionárním případě pro izolovanou soustavu nábojů nulový). V dalším členu lze vzniklou kombinaci rozložit na symetrickou a antisymetrickou část vzhledem k rychlosti a poloze nabitě částice ($\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a$)

$$\begin{aligned} \sum_a Q_a \mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) &= \sum_a Q_a \left(\frac{1}{2} [\mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) + \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_a)] + \frac{1}{2} [\mathbf{v}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) - \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_a)] \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_a) + \frac{1}{2} \sum_a Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (167)$$

Vzhledem k předpokladu stacionarity je symetrická část nulová (u záření, jak uvidíme později, už toto platit nebude) a antisymetrická část dá dvojný vektorový součin

$$\mathbf{A} = 0 + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \right) \times \mathbf{r} + \dots \quad (168)$$

První nenulový člen rozvoje má tvar:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{p}_M \times \mathbf{r}; \quad \mathbf{p}_M \equiv \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \quad (169)$$

Veličinu \mathbf{p}_M nazýváme magnetický dipólový moment. Jde o zobecnění jednoduchého vztahu $\mathbf{p}_M = I \mathbf{S}$ pro obecnou lokalizovanou soustavu nabitých částic. Vztah je vhodný pro numerické simulace, kde ze známých poloh a rychlostí částic můžeme okamžitě spočítat magnetický dipólový moment soustavy a z něho magnetizaci, tj., reakci systému na přiložené pole. Ukažme, že pro jednu jedinou nabitou částici, která krouží po kružnici, povede nová definice magnetického momentu na dříve používaný vztah $\mathbf{p}_M = I \mathbf{S}$. Nejprve určíme velikost magnetického momentu:

$$p_M = \left| \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \right| = \frac{1}{2} Q R v = \frac{1}{2} Q R \frac{2\pi R}{T} = \frac{Q}{T} \pi R^2 = I S.$$

Symbolem T jsme označili periodu oběhu nabitě částice, R je poloměr kružnice. Pokud budeme plochu uvažovat jako vektor $\mathbf{S} = S \mathbf{n}$, získáme původní vztah.

Magnetický dipól

Magnetické pole dipólu určíme jako rotaci potenciálu (169) při konstantním magnetickém momentu:

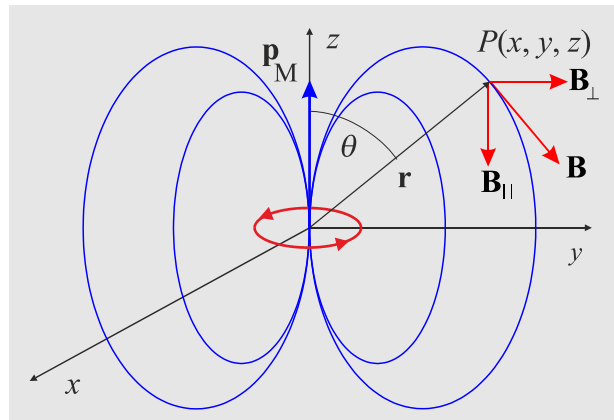
$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}^{(1)} = \text{rot } \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{p}_M \times \mathbf{r},$$

$$B_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{klm} \partial_l \varepsilon_{mop} p_o \frac{x_p}{r^3}.$$

Nyní standardním způsobem derivujeme podíl x_p/r^3 , Leviho-Civitovy symboly převedeme na Kroneckerovy delty a po přímočarém výpočtu dostaneme

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_M]; \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (170)$$

Tvar magnetických indukčních čar magnetického dipólu je shodný s tvarem siločar intenzity elektrického pole elektrického dipólu (130). Obě pole ubývají se třetí mocninou vzdálenosti od dipólu a většinou se popisují v souřadnicové soustavě s osou z totožnou s osou dipólu.



Je-li osa dipólu v ose z , mají jednotlivé složky hodnoty

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3} (3n_z n_x, 3n_z n_y, 3n_z^2 - 1);$$

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3} 3 \cos \theta \sin \theta; \quad (171)$$

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

Pro magnetický dipól lze odvodit obdobné vztahy jako pro dipól elektrický. Postupy jsou obdobné. Uveďme proto bez odvození jednotlivé výsledky a shrňme je s předchozími vztahy do jediné tabulky

veličina	elektrický dipól	magnetický dipól
dipólový moment soustavy	$\mathbf{p}_E \equiv \sum_{k=1}^N Q_k \mathbf{r}_k$	$\mathbf{p}_M \equiv \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} Q_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k$
nejjednodušší realizace	dva opačné náboje: $\mathbf{p}_E = Q \mathbf{d}$	kroužící náboj: $\mathbf{p}_M = I \mathbf{S}$
energie ve vnějším poli	$U = - \mathbf{p}_E \cdot \mathbf{E}$	$U = - \mathbf{p}_M \cdot \mathbf{B}$
moment síly působící na dipól	$\mathbf{M} = \mathbf{p}_E \times \mathbf{E}$	$\mathbf{M} = \mathbf{p}_M \times \mathbf{B}$
potenciál dipólu	$\phi = \frac{\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_M \times \mathbf{r}}{r^3}$
pole dipólu $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$	$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_E}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_M]$
rozklad pole	$E_{\perp} = \frac{3p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \sin \theta,$ $E_{\parallel} = \frac{p_E}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$	$B_{\perp} = \frac{3\mu_0 p_M}{4\pi r^3} \cos \theta \sin \theta,$ $E_{\parallel} = \frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$

V astronomii se magnetický dipólový moment jednotlivých objektů uvádí v poněkud nestandardních jednotkách. Vzhledem k tomu, že pole dipólu klesá se třetí mocninou vzdálenosti od zdroje, uvádějí astronomové magnetický dipólový moment jako součin vodorovné složky pole na rovníku a třetí mocniny poloměru tělesa. Taková veličina má rozměr Tm^3 a je úměrná námi zavedenému magnetickému momentu. Z osmi planet Sluneční soustavy nemají magnetický moment jen Venuše a Mars. Magnetické momenty planet jsou:

těleso	magnetický moment (Tm^3)	těleso	magnetický moment (Tm^3)
Merkur	5×10^{12}	Jupiter	160×10^{18}
Venuše	0	Saturn	$4,6 \times 10^{18}$
Země	8×10^{15}	Uran	$0,39 \times 10^{18}$
Mars	0	Neptun	$0,21 \times 10^{18}$



4. ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

Elektromagnetické pole, které zavedl anglický fyzik Michael Faraday jako prostředí pro přenos interakce, není jen matematickou pomůckou pro popis elektrických a magnetických jevů, ale reálnou entitou, která je schopna přenášet z jednoho místa na druhé energii, hybnost a moment hybnosti. Zákony zachování těchto veličin jsou zakódovány do Maxwellových rovnic a my se s nimi v této kapitole postupně seznámíme. Vypišme zde proto ještě jednu všechny Maxwellovy rovnice, abychom se na ně při odvozování mohli snadno odkazovat:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (172)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (173)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (174)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (175)$$

Zákon zachování energie

Zákony zachování můžeme formulovat lokálně, tj. tak, aby platily v každém bodě časoprostoru. Ukázali jsme si to na náboji, kde výsledkem byla rovnice kontinuity. Tento postup můžeme provést pro jakoukoli extenzivní veličinu, výsledkem je rovnice kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A = 0. \quad (176)$$

Velichina ρ_A je objemová hustota veličiny A , její jednotkou je $[A]/\text{m}^3$. Může jít například o hustotu hmoty (kg/m^3), hustotu energie (J/m^3), hustotu hybnosti ($\text{kg m s}/\text{m}^3$) atd. Velichina \mathbf{j}_A je tok veličiny A , má význam množství veličiny proteklé jednotkovou plochou za jednotku času a míří ve směru toku veličiny, tedy rychlostního pole. Jednotkou je $[A]/(\text{m}^2\text{s})$. Například tok energie, o který půjde v této kapitole, má rozměr $\text{J} \cdot \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Hustotu energie elektrického pole dobře známe, je dána výrazem (117) – jde o polovinu skalárního součinu obou elektrických vektorů, tedy $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$. Jde například o hustotu energie v kondenzátoru. Obdobně je hustota energie v magnetickém poli dána vztahem $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/2$, příkladem může být hustota energie obsažené v solenoidu. Z Maxwellových rovnic (172) až (175) vypočteme časovou změnu hustoty energie a upravíme ji do tvaru zákona zachování. Pro zjednodušení výpočtů budeme uvažovat lineární vztahy mezi oběma elektrickými vektory a mezi oběma magnetickými vektory ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \\ &= \mathbf{E} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) + \mathbf{H} \cdot (-\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \\ &= \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E} = \\ &= -\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Při odvození jsme využili vektorovou identitu (D.6) Výsledný zákon zachování energie pro pole má tvar rovnice kontinuity, jejíž členy snadno identifikujeme:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathcal{P}; \quad (177)$$

$$\blacktriangleright \quad u \equiv \rho_U \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}, \quad \mathbf{S} \equiv \mathbf{j}_U = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \mathcal{P} \equiv \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \quad (178)$$

V časové derivaci je celková hustota energie pole – skládá se z hustoty energie elektrické a magnetické. V prostorové derivaci (za divergencí) musí být tok energie. Vidíme, že je roven vektorovému součinu intenzit obou polí $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Tok energie elektromagnetického pole se nazývá *Poyntingův vektor* podle anglického fyzika Johna Henryho Poyntinga (1852–1914), obvykle ho značíme symbolem \mathbf{S} . Vidíme, že energie teče vždy kolmo na intenzitu elektrického pole a intenzitu magnetického pole. Na pravé straně není nula, což znamená, že se energie elektromagnetického pole nezachovává. Jak je to možné? Elektromagnetické pole může totiž svou energii předávat částicím. Například v mikrovlnné troubě, do které jste strčili oběd, dojde k jeho ohřevu elektromagnetickým polem. Člen $\mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}$ na pravé straně je hustotou Jouleova výkonu (W/m^3):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E} &= \rho_Q \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = Qn \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = n \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = \\ &= n \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = n \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{dt} = n P = \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Jouleův výkon popisuje, jak pole předává energii částicím. Pro pole jde o ztrátu energie, proto je na pravé straně znaménko minus. Teprve zákon zachování energie pro celou soustavu, tj. pole spolu s částicemi, by na pravé straně měl nulu [2]. Za časovou derivací by byly hustota energie pole a hustota energie částic, za divergencí tok energie pole a tok energie částic.

Zákon zachování hybnosti

U skalárních veličin, jakými jsou například energie nebo náboj, jsou příslušnými toky vektory. U vektorových veličin tomu ale bude jinak, toky budou tenzory druhého řádu. Abychom pochopili proč, budeme se nejprve zabývat zákonem zachování hybnosti obyčejné vodivé tekutiny a teprve až poté zákonem zachování hybnosti elektromagnetického pole.

Vodivá tekutina

Pro objekt o hmotnosti m platí Newtonova pohybová rovnice

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (179)$$

V našem případě ale nejde o jednu jedinou částici, ale hmotný element proudící tekutiny, na který působí síla $d\mathbf{F}$. Rychlost jedné částice \mathbf{v} nahradíme rychlostním polem $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$:

$$dm \frac{d\mathbf{u}}{dt} = d\mathbf{F}. \quad (180)$$

Nyní přejdeme k hustotám, tj. obě strany rovnice vydělíme objemovým elementem dV :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (181)$$

Symbol ρ reprezentuje hustotu hmoty proudící tekutiny, symbol \mathbf{f} hustotu působící síly. Uvědomíme-li si, že rychlostní pole je funkcí času a prostoru, tj. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, budeme mít

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (182)$$

První část na levé straně vyjadřuje explicitní změnu rychlostního pole, druhý člen změnu rychlostního pole způsobenou prouděním (při jarním tání přinese řeka množství rychle tekoucí vody z hor). Hustota síly na pravé straně se liší podle procesů, které popisujeme. Může jít o tlakovou sílu, viskózní procesy nebo Lorentzovu sílu působící na nabitě částice ve vodivé tekutině. V našem jednoduchém úvodním příkladě viskózní procesy vynecháme. Tlaková energie je $dW_p = F dx = pS dx = p dV$. Tlak je tedy hustotou energie. Hustota síly bude minus gradientem hustoty potenciální energie, tedy

$$\mathbf{f}_p = -\nabla p \quad (183)$$

Zbývá ještě určit hustotu Lorentzovy síly. Na nabitý element tekutiny působí element síly

$$d\mathbf{F}_L = dQ \mathbf{E} + dQ \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (184)$$

Rovnici vydělíme objemovým elementem, tj. přejdeme k hustotám:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{f}_L = \rho_Q \mathbf{E} + \rho_Q \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}. \quad (185)$$

Obě hustoty sil nyní přidáme na pravou stranu pohybové rovnice (182), hustotu Lorentzovy síly, zatím nebudeme rozepisovat (jde o předem dané síly způsobené vnějšími poli):

$$\blacktriangleright \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f}_L. \quad (186)$$

Tato pohybová rovnice a rovnice kontinuity pro hmotnost

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (187)$$

je vše, co potřebujeme k odvození zákona zachování hybnosti vodivé tekutiny. Nezapomeňte, že ρ je hustota hmoty, ρ_Q je hustota náboje. Hustota mechanické hybnosti tekutiny bude

$$\mathbf{g} \equiv \rho \mathbf{u}. \quad (188)$$

Nalezneme časovou změnu jedné ze složek hustoty hybnosti

$$\frac{\partial}{\partial t} g_k = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u_k + \rho \frac{\partial u_k}{\partial t}.$$

Za časovou změnu hustoty dosadíme z rovnice kontinuity (187) a za časovou změnu rychlosti z pohybové rovnice (186):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) = -\partial_l (\rho u_l) u_k - \rho (u_l \partial_l) u_k - \partial_k p + f_{Lk}.$$

Všechny členy s derivacemi převedeme na levou stranu a upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial (\rho u_l)}{\partial x_l} u_k + (\rho u_l) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial p}{\partial x_k} &= f_{Lk} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_l u_k) + \frac{\partial p}{\partial x_k} &= f_{Lk} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (p \delta_{kl} + \rho u_k u_l) &= f_{Lk}. \end{aligned}$$

Získali jsme zákon zachování hybnosti. V závorce za časovou derivací je hustota hybnosti. V závorce za prostorovými derivacemi je tok hybnosti neboli tenzor tlaku. Sama hybnost je vektorová veličina, a proto její tok tvoří tenzor druhého řádu. Symetrie tenzoru tlaku zajišťuje zachování momentu hybnosti v proudící tekutině. Tenzor tlaku se skládá ze dvou částí: skalární části, kterou tvoří normální tlak působící ve všech směrech stejně. Druhou částí je tenzorová část související s prouděním tekutiny. Napravo není nula, hybnost vodivé tekutiny se nezachovává, protože na ni působí hustota Lorentzovy síly, která jí hybnost předává. Zákon zachování hybnosti s rozepsanou Lorentzovou silou můžeme napsat ve složkovém zápisu

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (T_{kl}^P) = \rho_Q E_k + \varepsilon_{klm} j_{Ql} B_m; \quad T_{kl}^P \equiv p \delta_{kl} + \rho u_k u_l \quad (189)$$

nebo v invariantním tvaru

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}}^P = \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}; \quad \vec{\mathbf{T}}^P \equiv p \vec{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}. \quad (190)$$

Elektromagnetické pole

Elektromagnetické pole můžeme chápat jako soustavu fotonů s nulovou klidovou hmotností a energií

$$\mathcal{E} = pc. \quad (191)$$

Pro hustotu energie ρ_U a hustotu hybnosti pole γ máme

$$\rho_U = \gamma c. \quad (192)$$

Pro hustotu hybnosti γ jako vektor můžeme psát

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\rho_U}{c} \mathbf{e}_c = \frac{\rho_U}{c} \frac{\mathbf{c}}{c}. \quad (193)$$

V čitatelích je součin hustoty energie a rychlosti šíření, tj. tok energie, který je dán Poyntingovým vektorem, proto

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}. \quad (194)$$

V kapitole o elektromagnetických vlnách odvodíme vztah mezi rychlostí světla, permitivitou a permeabilitou ($c^2 = 1/\epsilon\mu$), pomocí něhož vztah přepíšeme:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \quad (195)$$

Povšimněte si, že vektorový součin intenzit polí má význam toku energie, zatímco vektorový součin indukci polí má význam hustoty hybnosti. Naším cílem je nyní sestavit zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole, tedy najít časovou derivaci vztahu (195). Při úpravách využijeme soustavu Maxwellových rovnic (172) až (175):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times (-\text{rot } \mathbf{E}) = \dots$$

Následují standardní úpravy pro „kátou“ složku časové změny hustoty hybnosti, ve kterých členy s prostorovými derivacemi převedeme do tvaru divergence. Lze to provést například prepisem vektorových součinů pomocí Leviho-Civita tenzoru. Detaily nalezne čtenář v záznamu přednášky na serveru aldebaran.cz (sekce studium, teoretická fyzika). Výsledkem elementárních úprav s využitím Maxwellových rovnic je

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}}^{\text{EM}} = -\rho_Q \mathbf{E} - \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}; \quad (196)$$

$$\blacktriangleright \quad \vec{\mathbf{T}}^{\text{EM}} \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \vec{\mathbf{1}} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{D} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \vec{\mathbf{1}} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}, \quad (197)$$

$$\blacktriangleright \quad T_{kl}^{\text{EM}} \equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \delta_{kl} - E_k D_l + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{kl} - H_k B_l. \quad (198)$$

V zákonu zachování (196) vystupuje za časovou derivací hustota hybnosti elektromagnetického pole. Za prostorovou derivací (divergencí) je *tenzor toku hybnosti pole* $\vec{\mathbf{T}}^{\text{EM}}$, který se nazývá *Maxwellův tenzor pnutí* nebo také někdy *tenzor tlaku*. Skládá se z elektrické a magnetické části, každá z nich má dva členy – skalární (diagonální) a tenzorový. Je to obdobné jako u tenzoru tlaku částic, kde jsme měli skalární tlak $p\delta_{kl}$ a dynamický tlak $\rho u_k u_l$. Vidíme, že hybnost elektromagnetického pole se nezachovává. Je to dáno předáváním hybnosti pole částicím. Teprve celkový součet hybnosti všech částic a pole má tvar zákona zachování. Získáme ho sečtením rovnic (190) a (196):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u} + \mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{T}}^{\text{P}} + \vec{\mathbf{T}}^{\text{EM}}) = 0. \quad (199)$$

Odvozená rovnice je zákonem zachování hybnosti pro vodivou tekutinu respektive soustavu nabitých částic a elektromagnetické pole. První člen v časové derivaci má význam hustoty hybnosti látky $\mathbf{g} \equiv \rho \mathbf{u}$, což je ale současně tok hmoty z rovnice kontinuity. Druhý člen $\boldsymbol{\gamma} \equiv \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ je hustotou hybnosti elektromagnetického pole. V prostorových derivacích se nacházejí tenzory toku hybnosti částic, a toku hybnosti elektromagnetického pole.

Časová změna hybnosti je síla, časová změna hustoty hybnosti je hustota Lorentzovy síly, která vystupuje na pravých stranách zákonů zachování (kladně u částic a se záporným znaménkem u polí). Teprve součet obou rovnic dá na pravé straně nulu. Sepišme ještě jednou celkový výsledek:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}} = 0; \\ \blacktriangleright & \quad \bar{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\gamma} = \rho \mathbf{u} + \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad (200) \\ & \bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}^P + \bar{\mathbf{T}}^{EM} = p \bar{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \bar{\mathbf{1}} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{D} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \bar{\mathbf{1}} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}. \end{aligned}$$

V této celkové bilanci jsme zavedli celkovou hustotu hybnosti částic a pole $\boldsymbol{\pi}$ a celkový tenzor toku hybnosti částic a pole \mathbf{T} .

Tlak pole

V této části se budeme zabývat tlakem, kterým elektromagnetické pole působí na své okolí.

Statický tlak

U tekutiny hrála skalární část toku hybnosti roli běžného tlaku. Nejinak je tomu u toku hybnosti pole (Maxwellova tenzoru pnutí). Obsahuje dvě skalární části, jednu magnetickou a druhou elektrickou, které můžeme ztotožnit s magnetickým a elektrickým tlakem:

$$\blacktriangleright \quad p_M = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}, \quad (201)$$

$$\blacktriangleright \quad p_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}^2}{2\epsilon}. \quad (202)$$

Povšimněte si, že oba tlaky jsou hustotou příslušné energie pole (magnetické nebo elektrické). Obdobně je tomu i v mechanice, například mgh je energie v tíhovém poli a hustota energie ρgh je hydrostatický tlak způsobený tíží. Ve slunečních skvrnách dosahuje lokální magnetické pole hodnoty až 0,3 tesla, tomu odpovídá tlak $B^2/2\mu_0$ přibližně 400 000 Pa, což není nikterak málo. Kolem plazmových vláken protékaných elektrickým proudem se vytváří magnetické pole a v okolí vlákna vzniká gradient magnetického tlaku. Ten zpětně působí na vlákno a komprimuje ho do té doby, než je gradient tlaku magnetického pole vyrovnán gradientem tlaku látky. Vzniklá rovnovážná konfigurace je analogií kulových struktur v gravitaci (zde namísto gradientu magnetického tlaku objekt komprimuje gravitační síla). V plazmatu je většinou taková rovnovážná konfigurace nestabilní, jen pro proudy tekoucí po šroubovici můžeme dosáhnout stability útvaru, viz [2]. Obdobně může i elektrické pole způsobovat enormní tlaky, které jsou zodpovědné za přesuny látky a mnohé další jevy.

Tlak záření

Elektromagnetické záření není ničím jiným než pravidelně se měnícím elektrickým a magnetickým polem. Ve statistické fyzice, viz například [1], se dá odvodit, že záření působí na okolí tlakem rovným třetině průměrné hustoty energie. My tento vztah odvodíme prostým středováním tenzoru hybnosti elektromagnetického pole, jehož jednotlivé členy mají význam skalárního a tenzorového tlaku. Budeme-li integrovat zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole ve vakuu přes libovolně vybraný objem dostaneme (s použitím Gaussovy věty)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{T}^{\text{EM}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \iiint_V \gamma dV + \oint_{S=\partial V} \mathbf{T}^{\text{EM}} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že první člen reprezentuje časovou změnu hybnosti, tedy působící sílu, musí mít tenzor toku pole význam síly působící na jednotku plochy (vyplývá to okamžitě i s jeho ztotožněním s tlakem, který je opět silou na jednotku plochy). Označíme-li \mathbf{n} směrový vektor, bude tlak elektromagnetického záření roven:

$$p = \overline{T_{kl}^{\text{EM}}} \langle n_k n_l \rangle. \quad (203)$$

Pruh nad symbolem označuje středování přes všechny možné hodnoty a úhlová závorka středování přes všechny možné směry. Určíme nejprve středování přes úhly:

$$\langle n_k n_l \rangle = \frac{1}{4\pi} \int n_k n_l d\Omega = A \delta_{kl}. \quad (204)$$

Střední hodnota směrových vektorů přes všechny směry nesmí záviset na volbě souřadnicového systému, půjde tedy o diagonální symetrický tenzor, který bude úměrný Kroneckerovu delta. Konstantu A určíme ze stopy levé a pravé strany:

$$\langle n_k n_k \rangle = A \delta_{kk} \quad \Rightarrow \quad \langle 1 \rangle = 3A \quad \Rightarrow \quad A = 1/3.$$

Proto platí

$$\langle n_k n_l \rangle = \frac{1}{3} \delta_{kl}. \quad (205)$$

Pro tlak elektromagnetického záření máme

$$p = \overline{T_{kl}^{\text{EM}}} \frac{1}{3} \delta_{kl} = \frac{1}{3} \overline{T_{kk}^{\text{EM}}} = \frac{1}{3} \overline{\left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \delta_{kk} - E_k D_k + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \delta_{kk} - H_k B_k \right)} \Rightarrow$$

$$p = \frac{1}{3} \overline{\left(\frac{3}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{3}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right)} = \frac{1}{3} \overline{\left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right)} \Rightarrow$$

$$\blacktriangleright \quad p = \frac{1}{3} \overline{u}. \quad (206)$$

Tlak elektromagnetického záření je třetinou střední hustoty jeho energie. Tento tlak je schopen pohánět sluneční plachetnice, odfouknout ohon komety, či vytvořit bublinu kolem rodící se hvězdy v její zárodečné mlhovině.

Zákon zachování momentu hybnosti

Moment hybnosti je standardně definován vztahem

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (207)$$

Ve skutečnosti nejde o vektor, ale o tzv. pseudovektor, antisymetrickou matici tvořenou složkami

$$M_{kl} = x_k p_l - x_l p_k. \quad (208)$$

Taková matice má jen tři nezávislé členy, které interpretujeme jako složky vektorového součinu:

$$\begin{aligned} b_1 &= M_{23} = x_2 p_3 - x_3 p_2; \\ b_2 &= M_{31} = x_3 p_1 - x_1 p_3; \\ b_3 &= M_{12} = x_1 p_2 - x_2 p_1. \end{aligned} \quad (209)$$

Matici M_{kl} tedy můžeme ztotožnit s momentem hybnosti. Nyní zavedeme hustotu momentu hybnosti elektromagnetického pole vztahem

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{M}_{kl} = x_k \pi_l - x_l \pi_k, \quad (210)$$

tedy jsme jen zaměnili hybnosti p_k za jejich hustoty π_k . Jde o celkovou hustotu hybnosti pole a částic $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\gamma}$. Obdobně bude $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\text{P}} + \mathbf{T}^{\text{EM}}$ celkový tenzor toku hybnosti částic a polí. Nyní budeme zkoumat časovou změnu hustoty momentu hybnosti. Časové změny hustoty hybnosti vyjádříme ze zákona zachování hybnosti (199):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{kl} = x_k \frac{\partial \pi_l}{\partial t} - x_l \frac{\partial \pi_k}{\partial t} = x_k (-\partial_n T_{nl}) - x_l (-\partial_n T_{nk}).$$

Nyní přesuneme derivace dle vztahu pro derivaci součinu $f g' = (f g)' - f' g$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{kl} &= -\partial_n (x_k T_{nl}) + T_{nl} \delta_{nk} + \partial_n (x_l T_{nk}) - T_{nk} \delta_{nl} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{kl} &= -\partial_n (x_k T_{ln} - x_l T_{nk}) + T_{kl} - T_{lk}. \end{aligned}$$

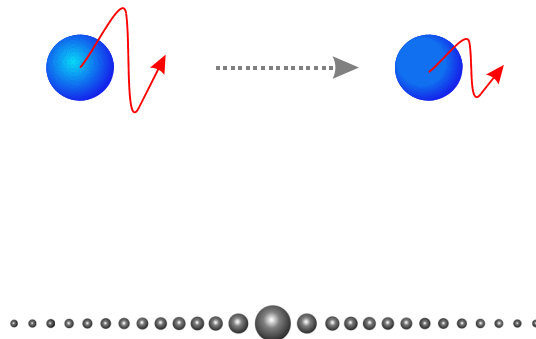
Již jsme se zmínili, že symetrie tenzoru toku hybnosti souvisí se zákonem zachování momentu hybnosti. Pro symetrický tenzor se poslední dva členy odečtou a máme zákon zachování momentu hybnosti pro elektromagnetické pole a s ním interagující částice:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{kl} + \partial_n \mathcal{N}_{kln} &= 0; \\ \mathcal{M}_{kl} &\equiv x_k \pi_l - x_l \pi_k, \\ \mathcal{N}_{kln} &\equiv x_k T_{ln} - x_l T_{kn}. \end{aligned} \quad (211)$$

Tok momentu hybnosti \mathcal{N}_{kln} je tenzor třetího řádu. Pokud by tenzor toku hybnosti T_{kl} nebyl symetrický, neplatil by zákon zachování momentu hybnosti a tekutina či pole by se samy od sebe mohly roztáčet, což je samozřejmě v rozporu s pozorováním.

Pole jako reálná entita

Představme si, že máme k dispozici dvě nabitě částice, například dva elektrony, ve vzdálenosti jednoho metru. Nějakým způsobem pohneme první částicí. Počkáme-li určitou dobu, projeví se naše akce i na druhé částici, která se pohne také. Nebude to ale okamžitě. První elektron vytvoří svým pohybem elektromagnetické pole, kterému předá určitou část energie, hybnosti a momentu hybnosti. Tyto tři atributy přeneše pole rychlostí světla ke druhé částici. Opět vidíme, že pole není pouhou matematickou konstrukcí ulehčující výpočty, ale fyzikální realitou. Pole je nositelem energie, hybnosti i momentu hybnosti.



5. ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

Základní pojmy

Označme veličinu, jejíž hodnoty se mění v čase a prostoru $\psi(t, \mathbf{x})$. Je jedno, zda jde o skalární, nebo strukturovanou, například vektorovou, veličinu. Může jít o tlak, hustotu prostředí, teplotu, rychlostní, elektrické či magnetické pole, výšku mořské hladiny a podobně. Uvedme si nejprve některé pojmy, které se používají v teorii vln.

Vlnová funkce

Veličina $\psi(t, \mathbf{x})$ popisuje vlnění v čase a v prostoru. Položíme-li $t = \text{const}$, pozorujeme časový snímek vlnění. Můžete si představit, že vyfotografujeme například vlnící se mořskou hladinu a prohlédneme si vzniklou fotografii. Položíme-li $\mathbf{x} = \text{const}$, pozorujeme časový průběh sledované veličiny v jednom určitém místě. Vlnění většinou popisujeme komplexní vlnovou funkcí, použití komplexních čísel významně zjednoduší některé výpočty. Fyzikální význam má ale zpravidla jen reálná část vlnové funkce. Tak jako každou komplexní funkci, můžeme vlnovou funkci zapsat pomocí dvou reálných funkcí, amplitudy A a fáze φ :

$$\blacktriangleright \quad \psi(t, \mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}. \quad (212)$$

Vlnoplocha

Plocha spojující místa s konstantní hodnotou fáze φ vlnové funkce se nazývá vlnoplocha. Na vlnoploše je vlnění ve stejné fázi (například vlnoplocha spojující místa, v nichž má tlak 75 % maximální hodnoty).

Úhlová frekvence

Úhlovou frekvencí chápeme změnu fáze vlnění s časem, budeme ji definovat vztahem

$$\blacktriangleright \quad \omega \equiv -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (213)$$

Minus v definici není podstatné, zajišťuje jen, aby se rovinná vlna pohybovala ve směru vlnového vektoru. Později bude toto znaménko užitečné i ke správnému relativistickému zápisu vztahů. Úhlová frekvence se může měnit jak s časem, tak od místa k místu. Je-li úhlová frekvence neproměnná, lze její velikost zapsat pomocí periody T jako $\omega = 2\pi/T$.

Vlnový vektor

Vlnovým vektorem nazveme změnu fáze vlnění se všemi prostorovými proměnnými,

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{k} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \varphi. \quad (214)$$

Vlnový vektor jakožto gradient míří kolmo na vlnoplochu, tj. ve směru šíření vln. Jeho velikost i směr se může měnit s časem i od místa k místu. Je-li vlnový vektor neproměnný, lze jeho velikost zapsat pomocí vlnové délky λ jako $k = 2\pi/\lambda$.

Disperzní relace

Vlnění je v každém místě popsáno čtyřmi čísly (ω, \mathbf{k}) , později uvidíme, že tvoří relativistický čtyřvektor. Tato čísla jsou závislá. Vztah mezi nimi lze odvodit z rovnic popisujících daný typ vlnění. Většinou má závislost obecný tvar

$$\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (215)$$

a nazývá se *disperzní relace*. V některých případech je možné z disperzní relace explicitně vypočítat úhlovou frekvenci v závislosti na vlnovém vektoru nebo vlnový vektor v závislosti na úhlové frekvenci:

$$\omega = \omega(\mathbf{k}), \quad (216)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega). \quad (217)$$

Tam, kde to explicitně možné není, můžeme použít větu o implicitní funkci a disperzní relaci ve tvaru $\omega(\mathbf{k})$ určit alespoň lokálně.

Rovinná (monochromatická) vlna

Jde o nejjednodušší typ vlny, která má konstantní amplitudu a fázi, jež je lineární funkcí času a prostoru:

$$\begin{aligned} A(t, \mathbf{x}) &= A; \\ \varphi(t, \mathbf{x}) &= c_0 t + c_1 x + c_2 y + c_3 z = -\omega t + k_x x + k_y y + k_z z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \end{aligned} \quad (218)$$

Význam koeficientů c_k plyne z definice úhlové frekvence a vlnového vektoru. Termín *monochromatická* v názvu vlny znamená, že ve vlně je zastoupena jediná frekvence neboli barva (*chromos*). Rovinná (monochromatická) vlna má tedy tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]}. \quad (219)$$

Na první pohled je zřejmé, že plochy konstantní fáze $\varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$ představují rovnice přesouvajících se rovin:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{x}) &= \text{const} \quad \Rightarrow \\ k_x x + k_y y + k_z z - \omega t &= \text{const} \quad \Rightarrow \\ ax + by + cz + d(t) &= 0. \end{aligned}$$

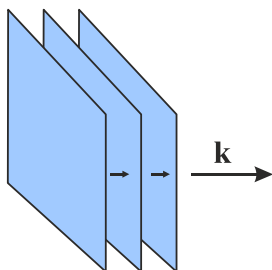
Přesun roviny budeme chápat jako kolmý k této rovině (šikmé přesuny rovin lze tak jako tak nahradit kolmým přesunem s rychlostí rovnou projekci rychlosti do kolmého směru). Směr přesunu určíme jako gradient rovnice roviny:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \quad \Rightarrow \quad \nabla \varphi = \mathbf{k}.$$

Vlnový vektor proto míří ve směru šíření vlnění.

Fázová rychlost

Fázová rychlost je rychlost přesunu roviny konstantní fáze. Zvolme souřadnicový systém tak, aby se roviny přesouvaly ve směru první osy, tj. $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$



Diferencováním rovnice plochy konstantní fáze získáme rychlost přesunu plochy (fázovou rychlost)

$$kx - \omega t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad k dx - \omega dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Pro obecnou volbu souřadnicového systému platí

$$\blacktriangleright \quad v_f = \frac{\omega}{k}; \quad \mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \mathbf{e}_k. \quad (220)$$

První výraz určuje jen velikost fázové rychlosti, druhý výraz ukazuje, že vektor fázové rychlosti míří ve směru vlnového vektoru. Fázová rychlost souvisí jen s přesunem místa, které má stejnou fázi vlnění, nesouvisí se skutečným makroskopickým přesunem hmoty (kola šířící se na vodní hladině mají jinou rychlost než voda samotná). Fázová rychlost může být, a v mnoha případech je, nadsvětelná. Tvar disperzní relace určuje hodnotu fázové rychlosti pro různé frekvence. Jev, kdy se vlny různých frekvencí šíří různou rychlostí se nazývá *disperze*.

Obecná vlna

S rovinnými vlnami se velmi snadno pracuje a můžeme z nich poskládat vlnu obecnějšího tvaru:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d^3 \mathbf{k}. \quad (221)$$

Jde vlastně o Fourierovu transformaci $\psi(t, \mathbf{x}) \leftrightarrow a(\omega, \mathbf{k})$. Amplitudy vln jsou Fourierovým obrazem vlnové funkce. Integrace se provádí jen přes složky vlnového vektoru. Úhlová frekvence je na vlnovém vektoru závislá prostřednictvím disperzní relace (216), a proto se přes ni neintegruje. Formálně můžeme integraci zapsat čtyřrozměrně pomocí Diracovy distribuce:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \delta[\omega - \omega(\mathbf{k})] d\omega d^3 \mathbf{k}. \quad (222)$$

Grupová rychlost

Zkoumejme nyní rychlost přesunu vlnového balíku – klubka vln podobných frekvencí a vlnových vektorů. Pro jednoduchost budeme uvažovat balík šířící se ve směru osy x (tak zvolíme souřadnicový systém):

$$\psi(t, x) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(\omega, k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (223)$$

Amplituda vln je nenulová jen v intervalu $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ a nahradíme ji konstantní amplitudou:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega t)} dk.$$

V dalším kroku vytkneme z integrálu střední vlnu

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]} dk.$$

Nesmíme zapomenout, že $\omega = \omega(k)$ a integrace se „skrytě“ provádí i přes ω . Další úpravy jsou zřejmé:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) \left(x - \frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} t \right) \right] dk.$$

Zlomek v argumentu exponenciály lze nahradit derivací (pro $\Delta k \rightarrow 0$)

$$\frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} \approx \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} = v_g(k_0).$$

Veličina v_g má zatím význam jen označení pro výše definovanou parciální derivaci. Vlnový balík má nyní tvar:

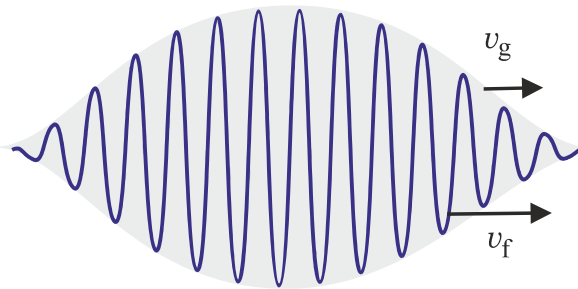
$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp\left[i(k - k_0)(x - v_g t)\right] dk.$$

Je zřejmé, že po integraci přes vlnový vektor bude výsledek integrálu funkcí $x - v_g t$:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} F(x - v_g t) = A(x - v_g t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Vlnový balík má tedy obálku šířící se rychlostí v_g , které říkáme *grupová rychlost*. Vnitřní část balíku je vyplněna nosnou vlnou $\exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]$. Výpočet jsme pro jednoduchost provedli v jedné dimenzi. Pro obecně mířící vlnový vektor je

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right). \quad (224)$$



Rychlost šíření vlnového balíku jako celku se nazývá *grupová rychlost*. Je to rychlost šíření informace o tvaru balíku a rychlost přenosu energie balíku. Nutně musí být podsvětelná. S využitím de Broglieho vztahů a Hamiltonových kanonických rovnic $dq_k/dt = \partial H/\partial p_k$ snadno ukážeme, že jde o mechanickou rychlost částice kvantově spojené s vlnovým balíkem:

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \hbar \omega}{\partial \hbar \mathbf{k}} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\text{mech}}.$$

Grafický význam fázové a grupové rychlosti

Grafický význam fázové a grupové rychlosti vidíme na obrázku. Fázová rychlost je dána tangentou úhlu, který svírá spojnice bodu na křivce disperzní relace s počátkem (vzhledem k vodorovné ose), grupová rychlost je dána směrnici tečny (jde o derivaci):

$$v_f = c \operatorname{tg} \gamma_1; \quad (225)$$

$$v_g = c \operatorname{tg} \gamma_2. \quad (226)$$

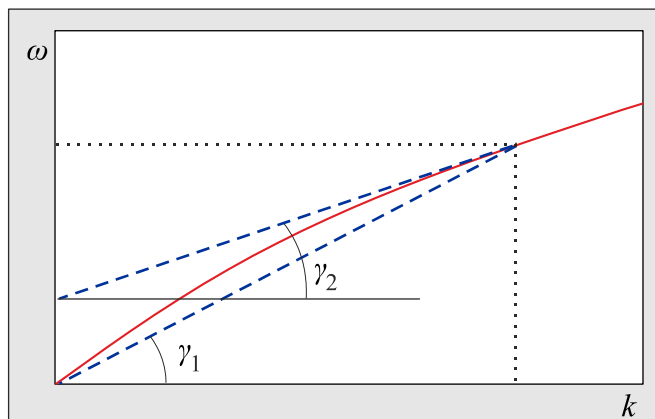


Schéma výpočtu

Máme-li ke sledovanému jevu nějaký teoretický model, nejlépe uspořádaný do přehledné soustavy rovnic, je napůl vyhráno. Uvedme nyní základní postup výpočtu:

1. Můžeme se pokusit některé proměnné ze soustavy vyloučit a snížit tak počet proměnných. Ideálem je samozřejmě získat jedinou rovnici pro jedinou neznámou. Popisuje-li model vlnění, bude výsledná rovnice nějakým druhem vlnové rovnice. Tuto proceduru můžeme kdykoli přerušit a přejít k následujícímu kroku.
2. Je-li soustava nelineární, budeme ji linearizovat, tj. řešení napíšeme jako nějaké nalezené řešení, k němuž přidáme malou poruchu prvního řádu (vyšší mocniny než první zanedbáme). Maxwellova soustava rovnic je lineární a tento krok můžeme vynechat.
3. Obecné řešení (vlnu) složíme z rovinných vln podle vztahu (221). Vzhledem k linearitě soustavy se každou rovinnou vlnou můžeme zabývat zvlášť. Úplné řešení lze kdykoli později z těchto parciálních vln složit. S rovinnými vlnami se mimořádně snadno zachází. Zkusme rovinnou vlnu derivovat podle časové a prostorové proměnné:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \psi &= \frac{\partial}{\partial t} A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = -i\omega A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = -i\omega \psi, \\ \frac{\partial}{\partial x_l} \psi &= \frac{\partial}{\partial x_l} A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = +ik_l A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = +ik_l \psi.\end{aligned}$$

Vidíme, že parciální derivace pro rovinnou vlnu přecházejí na algebraické výrazy. Jakékoli kombinace parciálních derivací lze nahradit algebraickými výrazy plynoucími z obou uvedených relací. Sestavme je do přehledné tabulky:

Výraz	Příklad
$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$	$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f$
$\frac{\partial}{\partial x_l} \rightarrow +ik_l$	$\frac{\partial f}{\partial x_l} = +ik_l f$
$\nabla \rightarrow +i\mathbf{k}$	$\nabla f = +i\mathbf{k} f$
$\text{div} \rightarrow i\mathbf{k} \cdot$	$\text{div} \mathbf{V} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$
$\text{rot} \rightarrow i\mathbf{k} \times$	$\text{rot} \mathbf{V} = i\mathbf{k} \times \mathbf{V}$
$\nabla^2 \rightarrow -k^2$	$\nabla^2 f = -k^2 f$

Podle těchto pravidel převedeme výchozí soustavu na algebraickou soustavu rovnic, se kterou se snáze zachází. Tento krok je ekvivalentní provedení Fourierovy transformace.

4. Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení, musí být determinant soustavy nulový (předpokládáme, že výsledná soustava nemá pravou stranu a většinou tomu tak skutečně je). Z této podmínky získáme vztah mezi ω a \mathbf{k} , tedy disperzní relaci. Často je výhodné eliminací snížit počet proměnných soustavy, a tím řád počítaného determinantu. Snižování počtu proměnných můžeme provádět před použitím pravidel Fourierovy transformace (pro parciální diferenciální rovnice, viz krok 1) i po něm v algebraické soustavě.
5. Je-li disperzní relace komplexní, je vhodné řešit případnou stabilitu či nestabilitu nalezeného řešení. Komplexní úhlová frekvence nebo vlnový vektor znamenají, že ve výrazu $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ jsou exponenciální neoscilující členy, které mohou vést k útlumu nebo exponenciálnímu narůstání řešení (nestabilitě).

6. Z disperzní relace se pokusíme určit úhlovou frekvenci a ze vztahů (220) a (224) nalezneme fázovou a grupovou rychlost vln.
7. Vrátime se k původní soustavě rovnic a zkoumáme vztahy mezi jednotlivými veličinami, vzájemné směry různých vektorů, zda je vlnění příčné či podélné atd.

Vlny ve vakuu

Jako jednoduchý příklad na uvedený postup řešíme elektromagnetické vlny ve vakuu, kde platí $\rho_Q = 0$, $\mathbf{j}_Q = 0$ a materiálové vztahy jsou pouze $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. V soustavě (46) až (49) ponecháme vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t. \end{aligned} \quad (228)$$

Ukážeme dva postupy řešení. V prvním se pokusíme eliminovat proměnné ještě před provedením Fourierovy transformace, v druhém až po jejím provedení.

Postup 1

Z Maxwellových rovnic se pokusíme vyloučit magnetickou indukci a získat rovnici pro elektrické pole. Na čtvrtou rovnici zapůsobíme operací rotace a na pravé straně za $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ dosadíme z třetí rovnice:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ &(\operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2) \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, získáváme výslednou rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (229)$$

Jde o známou vlnovou rovnici pro elektrické pole. Obdobně bychom eliminací elektrického pole mohli z Maxwellových rovnic získat stejnou rovnici pro magnetické pole. Nyní provedeme Fourierovu transformaci podle pravidel uvedených na předchozí straně:

$$(-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Parciální diferenciální rovnici jsme převedli na algebraickou rovnici bez pravé strany. Nenulové řešení bude existovat pouze tehdy, když

$$-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

►
$$\omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k. \quad (230)$$

Z podmínky nenulovosti řešení jsme odvodili disperzní relaci. Fázová rychlost šíření (rychlost světla) je

►
$$c \equiv v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (231)$$

Nalezená disperzní relace tvaru $\omega = ck$ je nejjednodušší možná (přímková), fázová i grupová rychlost je stejná a vlnění nejeví disperzi, tj. rychlost není závislá na vlnové délce resp. vlnovém vektoru.

Postup 2

Budeme předpokládat, že se nám nepodařilo ze soustavy Maxwellových rovnic eliminovat rovnici pro elektrické či magnetické pole. Provedme proto Fourierovu transformaci již v původní soustavě rovnic (228):

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= +\omega \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (232)$$

Eliminaci proměnných lze provést nyní. Dosadíme \mathbf{B} z poslední rovnice do předposlední:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} &= -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}. \end{aligned}$$

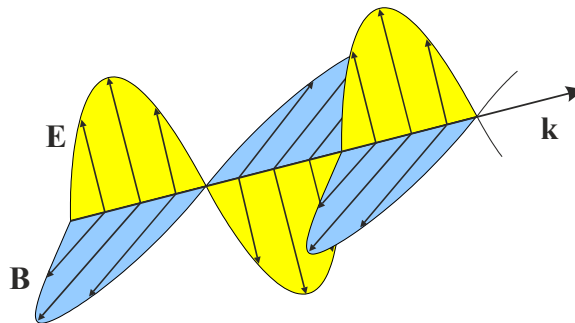
První výraz je podle první rovnice z (4.23) nulový a rovnice pro elektrické pole proto je

$$(k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Podmínkou nenulovosti elektrického pole je opět disperzní relace

$$k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k = ck.$$

Z původní soustavy (232) snadno zjistíme, že vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{k} jsou navzájem kolmé a elektromagnetické vlnění je proto příčné.



Vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} nejsou v elektromagnetické vlně nezávislé, z rovnice $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ plyne po Fourierově transformaci $kE = \omega B$ a tedy

$$\blacktriangleright \quad \frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = v_f \quad (233)$$

Tento vztah má hlubší význam. Podíl elektrické intenzity a magnetické indukce má vždy význam typické rychlosti v daném systému. Například pro plazma jde o driftovou rychlost částic, pro elektromagnetickou vlnu o fázovou rychlost jejího šíření. V případě vakua je fázová rychlost rovna c . V materiálovém prostředí zavádíme index lomu

$$\blacktriangleright \quad n \equiv \frac{c}{v_f} \quad (234)$$

a podíl obou polí je v elektromagnetické vlně roven $E/B = v_f = c/n$.

Polarizace

Polarizací elektromagnetické vlny rozumíme rovinu kmitů elektrického pole. Tato polarizace může být *rovinná* (žlutá rovina na obrázku), při níž vektor elektrického pole kmitá stále ve stejné rovině. Rovina kmitů elektrického pole se ale může i stáčet (a s ní i rovina kmitů magnetického pole). Polarizace může být například *kruhová* (koncový bod elektrického pole opisuje kružnici) nebo *chaotická* (elektromagnetická vlna se skládá z mnoha emisních aktů různých polarizací).

Poznámka 1: Vidíme, že není důležité, v jaké fázi výpočtu provedeme Fourierovu transformaci, oba postupy vedou ke stejnému výsledku. Pokud neumíme zacházet s parciálními diferenciálními rovnicemi, je výhodné provést transformaci co nejdříve. Nepodaří-li se nám provést eliminaci proměnných ani před, ani po transformaci, bude podmínkou nenulovosti řešení nulovost determinantu celé soustavy.

Poznámka 2: Rychlost světla nám vyšla závislá pouze na permitivitě a permeabilitě vakua. Je dána vlastnostmi vakua. Rychlost je ve všech souřadnicových soustavách stejná. To je důsledkem faktu, že Maxwellovy rovnice mají odlišné transformační vlastnosti od klasické mechaniky, kde se rychlosti soustavy a zdroje sčítají. Nesoulad klasické mechaniky a elektrodynamiky vyústil v řadu experimentů, které ukázaly, že chování přírody odpovídá Maxwellově elektrodynamice. Proto bylo třeba klasickou mechaniku upravit tak, aby byla v souladu s elektrodynamikou. Tuto úpravu provedl Albert Einstein v roce 1905 – nazývá se speciální teorie relativity. Vede k dnes známé kontrakci délek a dilataci času.

Poznámka 3: Z Maxwellových rovnic plyne, že se elektromagnetické vlny mohou šířit i ve vakuu, daleko od zdrojů, z nichž vznikly.

Poznámka 4: Maxwell ze svých rovnic ukázal, že světlo je elektromagnetickým vlněním a že musí existovat i elektromagnetické vlnění kratších i delších vlnových délek, než má světlo. Taková vlnění byla později objevena.

Vlny v anizotropním prostředí

Vlastnosti látky mohou vnést do šíření elektromagnetických vln výraznou anizotropii. Totéž může způsobit vnější elektrické a ještě častěji magnetické pole. Věnujme se v této kapitole velmi krátce anizotropním materiálům. Pro jednoduchost předpokládejme lineární odezvu a pouze elektricky anizotropní prostředí (například obyčejnou sůl), kde platí $D_k = \varepsilon_{kl}E_l$:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (235)$$

Vektor \mathbf{D} už obecně nemíří ve směru vektoru \mathbf{E} , permitivita není jediné číslo, ale devítice čísel tvořících tenzor permitivity druhého řádu. Ze základních fyzikálních úvah, které jdou za hranici tohoto kurzu, plyne, že tenzor permitivity musí být symetrickou maticí tj. $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$. Symetrické matice ale mají reálná vlastní čísla a tři navzájem kolmé vlastní vektory, které mohou hrát roli přirozené báze, jinými slovy přirozené souřadnicové soustavy. Například v krystalické látce jde o osy, podél nichž se vlnění šíří podstatně jednodušeji než v ostatních směrech. Pokud budeme látku popisovat v takové souřadnicové soustavě, bude mít tenzor permitivity jen diagonální členy, tedy tři hodnoty permitivity lišící se ve třech směrech.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (236)$$

Různá permitivita v různých směrech znamená různé rychlosti šíření a různý index lomu:

$$n_k \equiv \frac{c}{v_k} = \frac{1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{1/\sqrt{\epsilon_k\mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_k}{\epsilon_0}} \quad (237)$$

Pokud jsou všechny tři permitivity, a tím i indexy lomu, různé ($n_1 \neq n_2 \neq n_3$), hovoříme o dvouosém krystalu. U mnohých krystalů jsou ale dva ze tří indexů lomu stejné, tj. například

$$n_1 = n_2 \neq n_3 ; \quad (238)$$

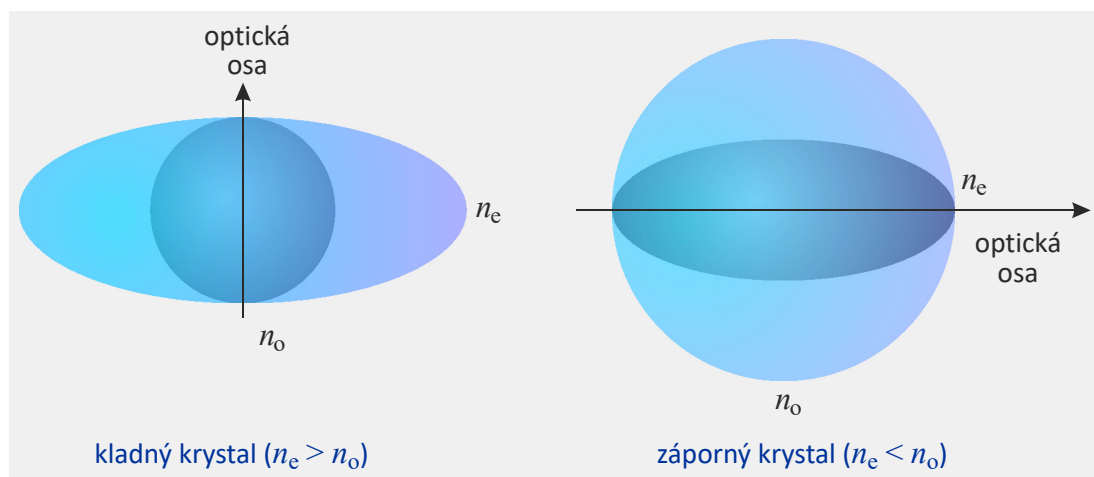
V tomto případě hovoříme o jednoosých krystalech, oba shodné indexy nazýváme řádným indexem lomu (*ordinary*) a třetí, lišící se od ostatních, nazýváme mimořádným (*extraordinary*) indexem:

$$\begin{aligned} n_o &= n_1 = n_2, \\ n_e &= n_3 \end{aligned} \quad (239)$$

Příklady indexů lomu některých jednoosých krystalů jsou v následující tabulce:

krystal	n_o	n_e
křemen	1,544	1,553
rutil	2,616	2,903
islandský vápenec	1,658	1,486
turmalín	1,669	1,638
beryl	1,598	1,590

U elektricky anizotropních látek se setkáváme s řadou nových vlastností. V krystalech se objevují současně dvě vlnoplochy odpovídající šíření řádné a mimořádné vlny. Tomu odpovídají i dva vlnové vektory a dvojitý obraz věcí zobrazených dvojlomným krystalem. Vždy ale existuje jedna osa, v níž oba vlnové vektory splývají a vlnoplochy řádné a mimořádné vlny se dotýkají. Takové ose říkáme *optická osa*.

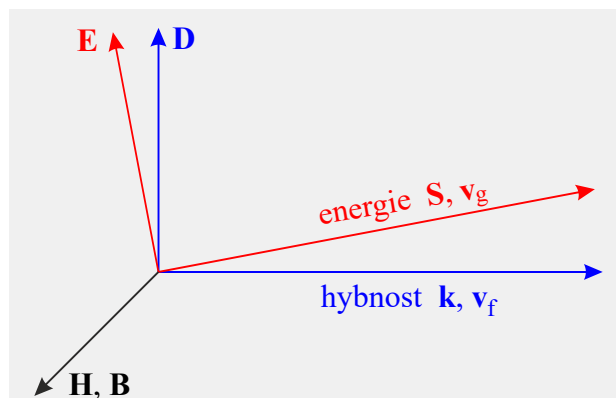


Směry jednotlivých vektorů získáme z Maxwellových rovnic, v nichž nebudeme uvažovat ani prostorové náboje, ani tekoucí proudy a ponecháme oba elektrické i oba magnetické vektory a provedeme Fourierovu transformaci:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (240)$$

Vlnový vektor \mathbf{k} je kolmý na vektory \mathbf{D} a \mathbf{B} , tj. má směr hustoty hybnosti $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ a tedy fázové rychlosti vlnění. Naopak grupová rychlost má směr šíření energie, tedy směr Poyntingova

vektoru (toku energie) $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Za paprsek považujeme směr šíření energie, tedy není už kolmý na vlnoplochy.

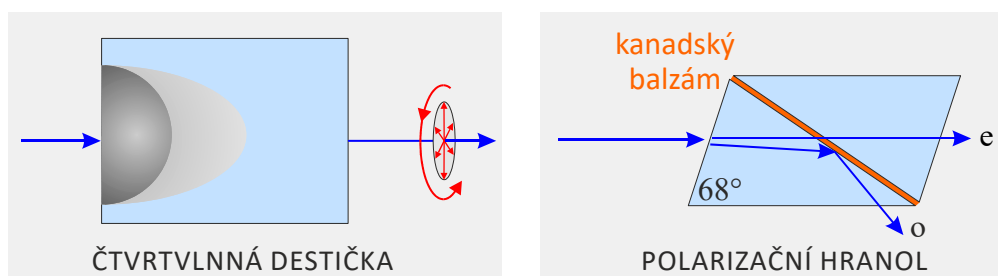


Zapamatujte si:

- Fázová rychlost a vlnový vektor míří ve směru hustoty hybnosti $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$;
- Grupová rychlost a paprsek míří ve směru toku energie $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$;
- Optická osa je směr s jediným vlnovým vektorem.

Pokud vstupuje paprsek do krystalu, rozdělí se původní vlna na dvě: řádnou a mimořádnou. Řádná vlna se láme podle indexu lomu n_o , mimořádná podle indexu lomu n_e . Obě nové vlny jsou polarizované a jejich polarizace (roviny kmitů elektrického pole) jsou navzájem kolmé.

Dvojlomné prostředí lze využít v řadě zajímavých zařízení. Jmenujme alespoň dvě. Prvním je **čtvrtvlnná destička**. Krystal je vybroušen tak, že jedním z povrchů vstupuje kolmý paprsek kolmo na optickou osu. Obě vzniklé vlny se šíří ve stejném směru. Různé polarizace se ale šíří různou rychlostí. Destička má takovou tloušťku, aby došlo k posunu obou polarizací o 90° . Na výstupu se obě vlny spojí. Kmity elektrického pole vln jsou navzájem kolmé a přitom posunuté o 90° . Tím vznikne kruhově polarizovaný elektromagnetický signál. Jiným zajímavým zařízením je **polarizační hranol** (tzv. nikol). v jehož nitru je řezná plocha slepená kanadským balzámem. Do anizotropního krystalu z islandského vápence vstupuje nepolarizovaný paprsek, který se rozdělí na dvě polarizace. Index lomu kanadského balzámu je takový, že u řádného paprsku dojde k úplnému odrazu a krystal opustí. Druhá vlna kanadským balzámem projde. Obě polarizace se oddělí, a hranol je proto zdrojem polarizovaného světla.



Vlny ve vodivém prostředí

Nalezneme vlnovou rovnici pro elektromagnetickou vlnu šířící se v kovu. V Maxwellových rovnicích dosadíme za proudovou hustotu $\mathbf{j}_Q = \sigma \mathbf{E}$, kde σ je diferenciální vodivost

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (241)$$

Na třetí rovnici aplikujeme operaci divergence a za $\operatorname{div} \mathbf{D}$ dosadíme z první rovnice:

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_Q \approx \rho_0 \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right]. \quad (242)$$

Prostorová hustota náboje ve vodiči exponenciálně vymizí a nemusíme ji proto uvažovat. Za výchozí sadu Maxwellových rovnic pro vlny ve vodiči můžeme použít

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (243)$$

Aplikací operace rotace na třetí rovnici můžeme eliminovat elektrické pole

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \sigma\mu \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} &= -\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

Obdobně můžeme získat i rovnici pro pole elektrické. Ve vodiči splňují elektromagnetické vlny tzv. telegrafní rovnici:

$$\left(\nabla^2 - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0.$$

Po dosažení rovinné vlny (provedení Fourierovy transformace) získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 - i c^2 \sigma \mu \omega. \quad (244)$$

Je-li vodivost nulová ($\sigma = 0$), přejde tato disperzní relace ve známou disperzní relaci vln v nevodivém prostředí. Ve vodiči je disperzní relace komplexní, což obecně znamená útlum.

Útlum v prostoru

Hledejme nejprve prostorový útlum (řešení v k):

$$c^2 k^2 = \omega^2 + i c^2 \sigma \mu \omega \approx i c^2 \sigma \mu \omega.$$

Vzhledem k vysoké vodivosti kovů jsme první člen na pravé straně zanedbali. Tento výraz již snadno odmocníme. Nezapomeňte, že $i^{1/2} = (1+i)/2^{1/2}$. Proto

$$k = k_1 + i k_2; \quad k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega}{2}}. \quad (245)$$

Reálná i imaginární část vlnového vektoru je stejně veliká (to je pro kovy typické). V prostoru tedy bude mít vlna charakter

$$\psi = \mathbf{A} \exp \left[i \sqrt{\sigma \mu \omega / 2} x - \sqrt{\sigma \mu \omega / 2} x \right] \quad (246)$$

Vlna je exponenciálně tlumená. Snadno určíme charakteristickou vzdálenost, na které se vlna utlumí faktorem e :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}.$$

Tuto vzdálenost (do které vlna ve vodivém prostředí pronikne) nazýváme *skinová hloubka*.

Útlum v čase

Hledejme nyní útlum v čase (řešení v ω). Disperzní relace je kvadratická rovnice pro frekvenci ω s řešením

$$\omega_{1,2} = -\frac{i}{2} c^2 \sigma \mu \pm \frac{1}{2} \sqrt{-c^4 \sigma^2 \mu^2 + 4c^2 k^2}.$$

V diskriminantu je vodivostní člen dominantní, poslední člen zanedbáme. V takovém případě zbývá jediné nenulové řešení

$$\omega \cong -i c^2 \sigma \mu. \quad (247)$$

Řešení ve frekvenci je ryze imaginární a má charakter útlumu

$$\psi = \mathbf{A} e^{-c^2 \sigma \mu t} \quad (248)$$

s charakteristickou dobou útlumu, na níž bude vlna utlumena faktorem e

$$\tau = 1 / (c^2 \sigma \mu). \quad (249)$$

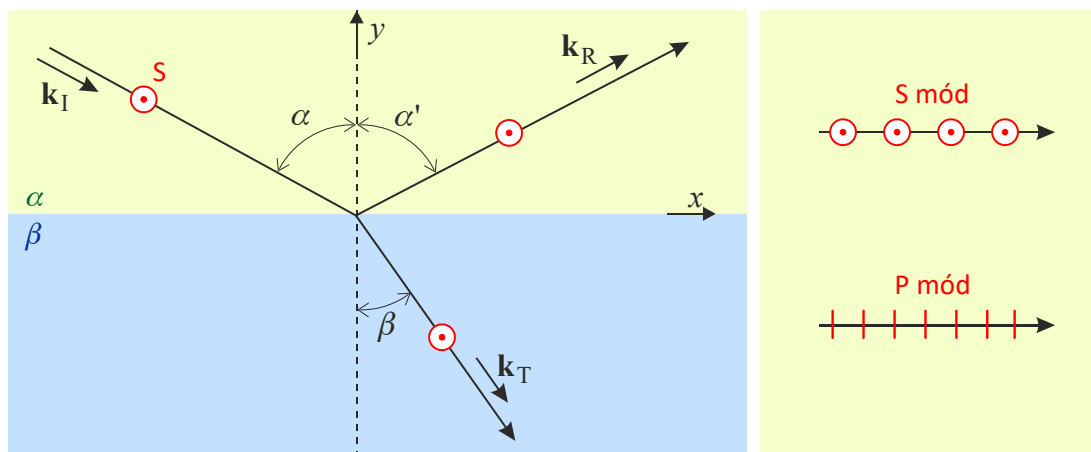
Povšimněte si, že při dodržení znaménkové konvence (+ prostor, – čas) v zápise rovinných vln typu $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ vyšel pro elektromagnetickou vlnu pronikající do vodivého prostředí útlum v čase i v prostoru, což je správně.

Světlo na rozhraní dvou prostředí

Zákon odrazu a lomu

Zákony odrazu a lomu poprvé odvodil arabský učenec Ibn Sahl (asi 940–1000) v roce 984. V západním světě znovuobjevil zákon lomu až holandský astronom a matematik Willebrord Snellius (1580–1626) v roce 1621. Jeho předchůdci popisovali lom světla pomocí experimentálně sestavených tabulek. Zákon lomu se také pokoušel nalézt francouzský filozof, fyzik a matematik René Descartes (1596–1650). Vycházel z analogie míčků, které při letu proniknou skrze tenkou překážku, ztratí energii a jejich dráha změní směr. Bohužel došel tímto postupem k výsledku, v němž sice správně vystupují siny úhlů dopadu a lomu, ale poměr rychlostí světla v obou prostředích mu vyšel obrácený. Správnou formuli odvodil také francouzský matematik a právník Pierre de Fermat (1601–1665) z principu minimálního času.

Způsobů odvození zákona lomu a odrazu je mnoho – od Huyghensova principu přes Fermatův princip až po přímý výpočet z podmínek na rozhraní, které okamžitě plynou z Maxwellových rovnic. Odvození provedeme dle následujícího obrázku:



Rovina rozhraní je $y = 0$. Rovina interakce je $z = 0$ (rovina papíru či monitoru). Pokud elektrický vektor míří kolmo na rovinu interakce, hovoříme o *S polarizaci* (*Stick*, propíchnout). Pokud elektrický vektor kmitá v rovině interakce, hovoříme o *P polarizaci* (*Parallel*, rovnoběžná). Z těchto polarizací lze superpozicí složit libovolnou jinou polarizaci. Vlnový vektor paprsku dopadajícího na rozhraní je označen \mathbf{k}_I (*Incident*), odraženého paprsku \mathbf{k}_R (*Reflected*) a paprsku prošlého rozhraním \mathbf{k}_T (*Transmitted*). Rovina kmitů elektrického pole je naznačena červenými body, elektrické pole míří směrem k vám – jde o S polarizaci, pro kterou provedeme výpočet. Elektrické pole má v tomto módu jen tečnou složku k rozhraní, která bude spojitá. Uhly jsou měřeny od kolmice k rozhraní, úhel dopadu je označen α , úhel odrazu α' a úhel lomu β . Vlnové vektory budou mít složky

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_I &= (k_I \sin \alpha, -k_I \cos \alpha, 0); \\ \mathbf{k}_R &= (k_R \sin \alpha', k_R \cos \alpha', 0); \\ \mathbf{k}_T &= (k_T \sin \beta, -k_T \cos \beta, 0).\end{aligned}\quad (250)$$

Tečné složky pole jsou spojité, tj.

$$\mathbf{E}_{0I} e^{i[\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t]} + \mathbf{E}_{0R} e^{i[\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega_R t]} = \mathbf{E}_{0T} e^{i[\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega_T t]}.\quad (251)$$

Do posledního vztahu dosadíme jednotlivé vlnové vektory a rozhraní ($y = 0$):

$$E_{0I} e^{i[k_I x \sin \alpha - \omega t]} + E_{0R} e^{i[k_R x \sin \alpha' - \omega_R t]} = E_{0T} e^{i[k_T x \sin \beta - \omega_T t]}.\quad (252)$$

Tato podmínka na rozhraní musí platit v libovolném čase t a v libovolné poloze x , což bude splněno jen, pokud platí

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T,\quad (253)$$

$$k_I \sin \alpha = k_R \sin \alpha' = k_T \sin \beta.\quad (254)$$

Při odrazu ani lomu se nemění frekvence elektromagnetického záření. Z druhé podmínky už snadno odvodíme

$$\begin{aligned}\frac{\omega_I}{v_I} \sin \alpha &= \frac{\omega_R}{v_R} \sin \alpha' = \frac{\omega_T}{v_T} \sin \beta \Rightarrow \\ \frac{\sin \alpha}{v_\alpha} &= \frac{\sin \alpha'}{v_\alpha} = \frac{\sin \beta}{v_\beta}.\end{aligned}\quad (255)$$

Z posledního vztahu okamžitě plyne jak zákon odrazu, tak zákon lomu:

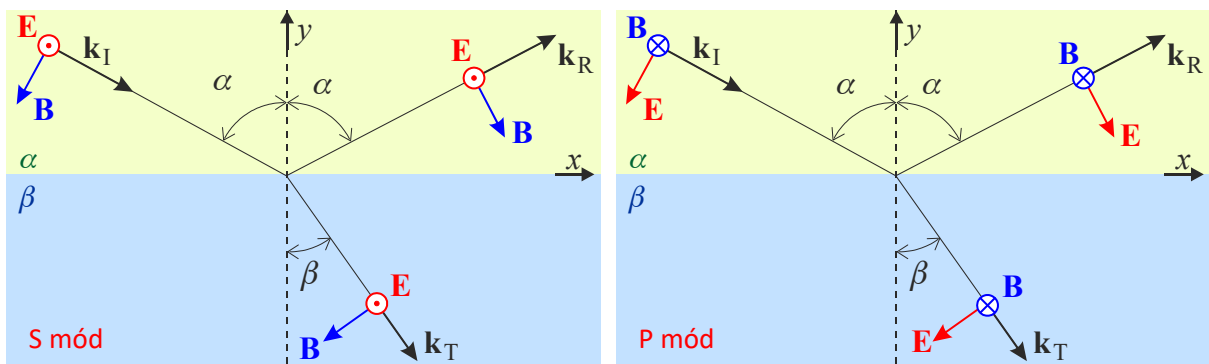
$$\blacktriangleright \quad \alpha = \alpha',\quad (256)$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_\alpha}{v_\beta} = \frac{n_\beta}{n_\alpha}\quad (257)$$

Index lomu je definován jako podíl rychlosti světla ve vakuu ku rychlosti světla v daném prostředí, tedy platí:

$$n \equiv \frac{c}{v_f}\quad (258)$$

Fresnelovy vztahy



Detailnější rozbor chování světla na rozhraní provedl v roce 1823 francouzský inženýr a fyzik Augustin-Jean Fresnel (1788–1827). Byl jedním z prvních, kteří prosazovali vlnovou povahu světla a odmítali Newtonovu korpuskulární teorii původu světla. Odvodme nyní jeho slavné vztahy pro koeficienty odrazu a propustnosti obou základních polarizací. Směry vektorů

(elektrické pole, magnetické pole, vlnový vektor) pro S mód a P mód jsou zakresleny na obrázku. Fresnel zkoumal vlastnosti složek obou polí, které byly rovnoběžné s rozhraním. Elektrické pole \mathbf{E} má tečnou složku spojitou. Magnetické pole má spojitou tečnou složku vektoru \mathbf{H} , pole \mathbf{B} má v tečné složce skok. Budeme ale předpokládat, že obě prostředí mají stejné permeability. To platí pro většinu prostředí průhledných pro světlo. V takovém případě je spojitá i tečná složka magnetické indukce \mathbf{B} (v prostředí 1 jde samozřejmě vždy o součty složek dopadající a odražené vlny). Tím se situace zjednodušuje a můžeme snadno napsat podmínky spojitosti tečných složek obou polí \mathbf{E} , \mathbf{B} . Pro S mód platí levá část obrázku, spojitost tečných složek obou polí dá rovnice

$$\begin{aligned} E_I + E_R &= E_T, \\ -B_I \cos \alpha + B_R \cos \alpha &= -B_T \cos \beta. \end{aligned} \quad (259)$$

Ze vztahu (233) víme, že podíl elektrického pole a magnetické indukce je roven rychlosti šíření vln $E/B = v_f = c/n$. Toho využijeme k vyjádření magnetické indukce

$$\begin{aligned} E_I + E_R &= E_T, \\ -E_I n_\alpha \cos \alpha + E_R n_\alpha \cos \alpha &= -E_T n_\beta \cos \beta. \end{aligned} \quad (260)$$

Z rovnic snadno vypočteme amplitudy odrazivosti E_R/E_I a propustnosti E_T/E_I . Podíl indexů lomu vyjádříme ze Snellova zákona lomu (257). Pro polarizaci S vychází:

$$\blacktriangleright \quad r_S \equiv \frac{E_R}{E_I} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (261)$$

$$\blacktriangleright \quad t_S \equiv \frac{E_T}{E_I} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (262)$$

Zcela obdobně určíme obdobné vztahy pro polarizaci P:

$$\blacktriangleright \quad r_P \equiv \frac{E_R}{E_I} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}, \quad (263)$$

$$\blacktriangleright \quad t_P \equiv \frac{E_T}{E_I} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \quad (264)$$

Tyto vztahy pro amplitudy odrazivosti a propustnosti v sobě nesou mnoho informací o chování jednotlivých polarizací vlnění. Pokud například vlna dopadá na opticky hustší prostředí (s vyšším indexem lomu), odráží se v protifázi – obě amplitudy odrazivosti jsou záporné, protože $\alpha > \beta$ (tzv. lom ke kolmici). Obdobně se chová vlna v gumové hadici, jejíž jeden konec je upevněn. Postupující vlna se od pevného konce odráží v protifázi.

Někdy potřebujeme znát energetickou bilanci. Tok energie (Poyntingův vektor) je úměrný druhé mocnině polí. U odrazivosti se nemusíme starat o směry (dopadající a odražený paprsek mají zrcadlově symetrický směr vzhledem ke kolmici k rozhraní) a koeficient odrazivosti je druhou mocninou amplitudy odrazivosti

$$R \equiv r^2. \quad (265)$$

Amplituda odrazivosti je poměr amplitud polí, *odrazivost (reflektivita)* je poměr energetických toků. U *propustnosti (transmisivity)* je tomu jinak. Paprsek dopadá pod jiným úhlem, než se láme. Proto bychom museli do propustnosti zahrnout i úhlovou závislost: dopadající energie závisí na směru, pod jakým paprsek dopadne, stejně tak jako energie prošlá do druhého prostředí závisí na úhlu lomu prošlého paprsku. Propustnost můžeme ale snadno určit ze zákona zachování energie: součet odrazivosti a propustnosti musí být roven jedné, proto

$$T = 1 - R. \quad (266)$$

Pro odrazivosti a propustnosti obou polarizací proto máme jednoduché vztahy

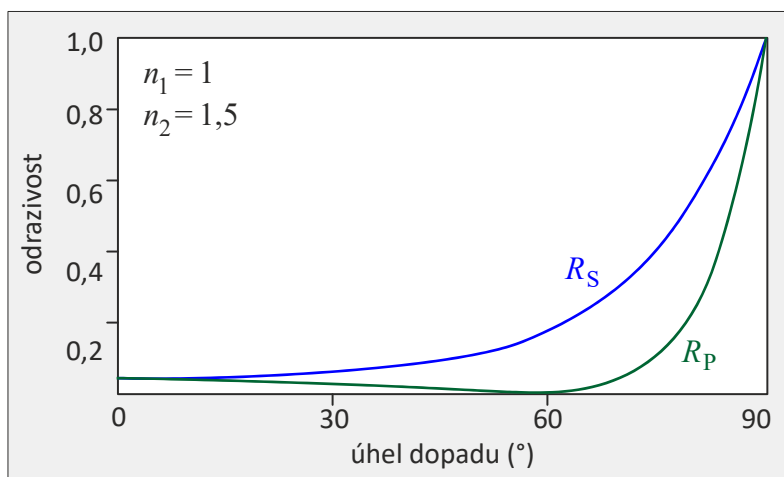
$$\blacktriangleright \quad R_S = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}, \quad (267)$$

$$\blacktriangleright \quad R_P = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}, \quad (268)$$

$$\blacktriangleright \quad T_S = 1 - R_S, \quad (269)$$

$$\blacktriangleright \quad T_P = 1 - R_P. \quad (270)$$

Na obrázku jsou vykresleny odrazivosti (reflektivity) pro obě polarizace pro rozhraní vzduchu a skla. Úhel lomu je ve vztazích (267) a (268) určen ze zákona lomu.



Brewsterův zákon

Každá z polarizací se při odrazu chová poněkud jinak. Hodnotu pro nulový úhel dopadu musíme určit z výrazu typu 0/0. K tomu využijeme součtový vzorec pro siny a sinus úhlu lomu vyjádříme ze zákona lomu. Odražené světlo má vždy zastoupenou S polarizaci, ale pro určitý úhel dopadu zcela vymizí P polarizace (zelená křivka má nulovou hodnotu). Pokud mělo dopadající světlo smíšenou polarizaci, bude odražené světlo zcela polarizované. Experimentálně tento úhel poprvé určil skotský vynálezce sir David Brewster (1781–1868). Mimo jiné vynalezl kaleidoskop a vylepšil optický mikroskop. Pomocí dvouosých krystalů měřil v letech 1813 až 1814 úhel maximální polarizace a zjistil, že pokud je tangenta úhlu dopadu rovna indexu lomu, je polarizace maximální. My můžeme tento vztah snadno odvodit z Fresnelových vztahů. Ze vztahu (268) je jasné, že odrazivost P polarizace je nulová, pokud je součet úhlu dopadu a úhlu lomu právě 90° (tangenta ve jmenovateli diverguje):

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (271)$$

Ze zákona lomu potom máme

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{n_\beta}{n_\alpha}. \quad (272)$$

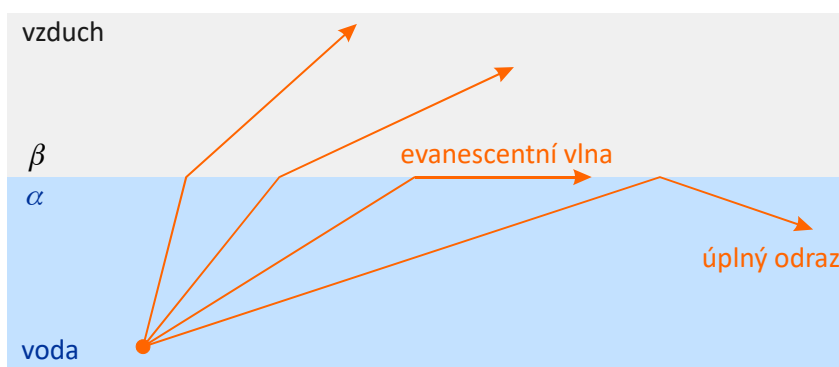
Odsud již snadno odvodíme Brewsterův zákon pro úhel dopadu, při němž zcela vymizí P polarizace dopadajícího světla

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{tg} \alpha_B = n; \quad n \equiv \frac{n_\beta}{n_\alpha}. \quad (273)$$

Světlo odražené od Měsíce nebo vodní hladiny je vždy částečně polarizované. Dopadá-li pod Brewsterovým úhlem, obsahuje odražené světlo jen S polarizaci.

Úplný odraz (totální reflexe)

Dalším zajímavým jevem je úplný odraz. Nastává při dopadu paprsku na opticky řidší prostředí (například z vody nebo ze skla do vzduchu). Pokud budeme zvětšovat úhel dopadu, bude paprsek lomen stále více od kolmice, až se nakonec bude šířit podél rozhraní. V rozhraní vznikne tzv. *evanescentní vlna*, která je exponenciálně tlumená s rostoucí vzdáleností od rozhraní (vlnový vektor má komplexní složku). Při zkoumání evanescentních vln se ukázalo, že ze zatím neznámých důvodů mají fotony pohybující se podél rozhraní atypickou složku spinu ve směru pohybu. Při ještě větších úhlech už k lomu nedochází. Světlo či elektromagnetická vlna se jen odrazí od rozhraní a zůstane v opticky hustším prostředí. Toho se využívá například ve světelných vláknech.



Pro mezní úhel je úhel lomu roven 90° a ze Snellova zákona máme

$$\sin \alpha_M = n; \quad n \equiv \frac{n_\beta}{n_\alpha}. \quad (274)$$

Z Fresnelových vztahů je možné detailně zkoumat poměry v S a P polarizaci při úplném odrazu, ale to už je za hranicí možností tohoto úvodního kurzu.

Raytracing

Velmi zajímavou úlohou je sledování paprsku, který se pohybuje disperzním prostředím s proměnným indexem lomu (v přiblížení geometrické optiky). Existují vytříbené metody jak ze znalosti tenzoru permeability a tenzoru permitivity určit v daném místě směr paprsku a jeho přesun do následujícího místa. Takto pojatá úloha ale předpokládá znalost obou tenzorů. Trasování paprsku lze provést jednoduše i z pouhé znalosti disperzní relace (závislosti úhlové frekvence a vlnového vektoru) pro šíření elektromagnetické vlny. Začneme Hamiltonovými rovnicemi pro kvantum elektromagnetického záření

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \quad (275)$$

Nyní využijeme relace pro částicově-vlnový dualizmus

$$H = \hbar \omega; \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (276)$$

a obě relace dosadíme do Hamiltonových rovnic:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad \dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}}. \quad (277)$$

Nalezené rovnice mohou být použity pro sledování paprsku. Je třeba si ale uvědomit několik základních faktů: 1) čas zde figuruje pouze jako parametr trajektorie paprsku; 2) při provádě-

dění numerické simulace dostaneme vždy v daném bodě \mathbf{x} vektor \mathbf{k} , tedy tečnu ke sledovanému paprsku. Po ní se přesuneme do dalšího místa a postup opakujeme; 3) nalezené rovnice pro *ray-tracing* vyžadují explicitní znalost disperzní relace $\omega = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, tedy z disperzní relace musíme umět vyjádřit úhlovou frekvenci, což může být někdy problém; 4) závislost na poloze \mathbf{x} se do disperzní relace dostane prostřednictvím znalosti závislosti koncentrace či vnějšího magnetického (elektrického) pole na poloze v plazmatu. Nejčastěji známe disperzní relaci v implicitním tvaru, tj. neřešenou vzhledem k proměnným ω ani \mathbf{k} :

$$\phi(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (278)$$

Nalezneme diferenciál této relace (frekvence ω je fixní, daná frekvencí vyslaného paprsku)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{k}} \cdot d\mathbf{k} = 0. \quad (279)$$

Předpokládejme, že trasa paprsku je dána parametricky, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\tau); \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}(\tau). \end{aligned} \quad (280)$$

Ze vztahu (279) okamžitě máme

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = 0. \quad (281)$$

Parametr τ může být libovolný. Toho využijeme a zvolíme ho tak, aby platilo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{k}}; \\ \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} &= -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (282)$$

Touto volbou jednak splníme rovnici (281) a jednak získáme nové rovnice pro sledování paprsku, v nichž roli hamiltoniánu zastává funkce ϕ , tedy libovolný implicitní zápis disperzní relace. Na soustavu Hamiltonových rovnic (282) lze použít libovolné diferenční schéma a můžeme pohodlně sledovat průchod paprsku plazmatem.



6. ELEKTROMAGNETICKÉ POTENCIÁLY

Už ve stacionárním případě jsme viděli, že z nezdroyvých rovnic je možné definovat čtveřici potenciálů elektromagnetického pole. Obdobně budeme uvažovat i v případě časově proměnných polí, definici potenciálů jen zobecníme.

Definice potenciálů

Vyjděme z nezdroyvé části Maxwellových rovnic:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (283)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (284)$$

Z první rovnice stejně jako ve stacionárním případě plyne existence takové funkce $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$, že

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (285)$$

Pole \mathbf{A} nazýváme vektorový potenciál, jeho zavedením je Maxwellova rovnice (283) automaticky splněna, neboť $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$. Nyní se věnujme druhé rovnici (284), do níž za \mathbf{B} dosadíme z definice vektorového potenciálu (285):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \\ \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že jde o dvakrát spojitě diferencovatelné funkce, a mohli jsme proto zaměnit pořadí druhých derivací. Má-li být rotace nějakého pole nulová, tj. $\operatorname{rot} \mathbf{K} = 0$, potom lze tuto rovnici automaticky splnit volbou $\mathbf{K} = \operatorname{grad} f$, neboť rotace z gradientu je vždy nulová. Můžeme tedy psát

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi.$$

Znaménko minus je, stejně jako ve stacionárním případě, voleno proto, aby síly mířily do minima potenciální energie. Vztah pro elektrické pole tedy bude mít tvar

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (286)$$

Jde o zobecnění stacionárního vztahu (86). V případě proměnných polí je elektrické pole generováno i časovými změnami potenciálu \mathbf{A} . Potenciály nejsou určeny jednoznačně, v jejich volbě je značná libovůle. Velké množství potenciálů vede na stejná elektrická a magnetická pole. Touto libovůlí se budeme zabývat v kapitole *Kalibrační vlastnosti potenciálů*.

Lorentzova transformace

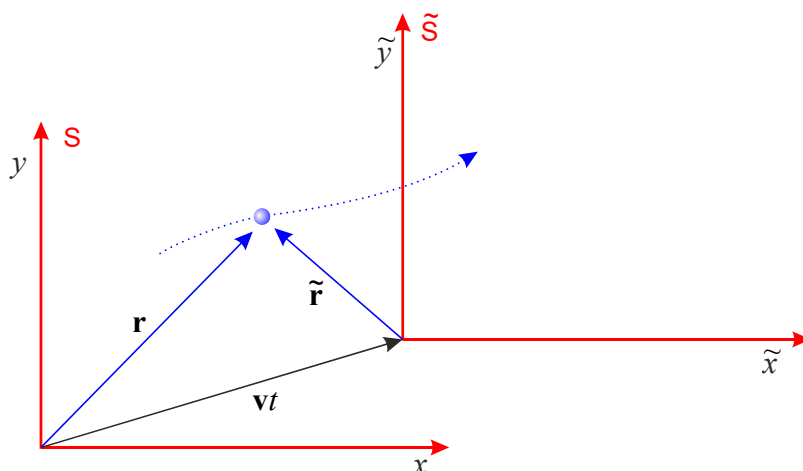
U šíření rovinné elektromagnetické vlnoplochy ve vakuu jsme zjistili, že se pohybuje vždy, tedy ve všech souřadnicových soustavách, stálou rychlostí

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (287)$$

Tento výsledek je ale v rozporu s Galileovou transformací souřadnic mezi dvěma inerciálními souřadnicovými soustavami

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad (288)$$

Inerciální soustava je jakási ideální souřadnicová soustava, v níž platí zákon setrvačnosti, tj. tělesa jsou v klidu nebo se pohybují rovnoměrně přímočaře, pokud na ně nepůsobí síla. Různé inerciální souřadnicové soustavy se vůči sobě mohou pohybovat jen konstantní rychlostí – pokud by vzájemná rychlost nebyla konstantní, nemohly by obě soustavy být současně inerciální.



Z Galileovy transformace získáme derivováním podle času klasické skládání rychlostí

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad (289)$$

s nímž je neměnná rychlost šíření elektromagnetických vln v příkrém rozporu. Tento zjevný rozpor mezi klasickou mechanikou a Maxwellovou elektrodynamikou nelze vyřešit „na papíře“, bylo třeba experimentálně rozhodnout, která z teorií je správně. Poprvé tak učinili Albert Abraham Michelson (1852–1931) a Edward Morley (1838–1923) ve svém slavném experimentu z roku 1887, v němž interferometricky měřili rozdíl rychlosti světla na letící Zemi ve směru jejího pohybu kolem Slunce a ve směru kolmém na tento pohyb. Výsledek dal za pravdu Maxwellově elektrodynamice, rychlost světla nezávisela na pohybu Země. Od té doby byla učiněna řada experimentů, které prokázaly správnost Maxwellovy elektrodynamiky.

Předpokládejme pro jednoduchost, že se dvě inerciální souřadnicové soustavy pohybují vůči sobě jen v ose x a „opravme“ Galileovu transformaci (288) za pomoci opravného koeficientu $\gamma(v)$, který se pro malé rychlosti blíží k jedné:

$$\tilde{x} = \gamma(x - vt), \quad (290)$$

Ze symetrie obou soustav plyne, že inverzní transformace musí mít stejný tvar, ale opačný směr rychlosti, tj.:

$$x = \gamma(\tilde{x} + v\tilde{t}). \quad (291)$$

Představme si nyní, že v okamžiku, kdy se obě soustavy míjejí, blikneme baterkou. Pokud se v obou soustavách světlo šíří stejnou rychlostí c , musí platit

$$x = ct; \quad \tilde{x} = c\tilde{t}, \quad (292)$$

proto z (290) a (291) máme

$$\begin{aligned} c\tilde{t} &= \gamma(ct - vt); \\ ct &= \gamma(c\tilde{t} + v\tilde{t}). \end{aligned} \quad (293)$$

vynásobením obou rovnic získáme relaci

$$c^2\tilde{t}\tilde{t} = \gamma^2(c-v)(c+v)t\tilde{t}, \quad (294)$$

v níž můžeme vykrátit oba časy a poté spočítat opravný koeficient γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (295)$$

Nová transformace souřadnic proto bude

$$\tilde{x} = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (296)$$

Nyní již zbývá jen odvodit rovnici pro transformaci času. K tomu můžeme využít soustavu rovnic (290) a (291), v níž už známe koeficient γ . Z první rovnici dosadíme \tilde{x} do druhé rovnice a po snadném výpočtu vyjde

$$\tilde{t} = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (297)$$

Nalezená transformace se nazývá Lorentzova transformace a pro celou událost (časovou i prostorovou souřadnici) ji můžeme zapsat ve tvaru

$$\tilde{t} = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad \tilde{x} = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad \tilde{y} = y; \quad \tilde{z} = z, \quad (298)$$

Elegantnější je maticový zápis Lorentzovy transformace

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_S, \quad (299)$$

kde jsme označili

$$\beta = v/c; \quad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (300)$$

a souřadnice jsou $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ a $x_3 = z$. Časová souřadnice x_0 má stejný rozměr jako prostorové souřadnice. Transformaci rychlostí získáme diferencováním vztahu (298):

$$\tilde{u} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{(dx-vdt)/\sqrt{\dots}}{(dt-vdx/c^2)/\sqrt{\dots}} = \frac{dx-vdt}{dt-vdx/c^2}.$$

Po „vydělení“ čitatele i jmenovatele diferencialem dt máme

$$\tilde{u} = \frac{u-v}{1-uv/c^2}. \quad (301)$$

V případě, že je vzájemný pohyb soustav opačný ($v \rightarrow -v$), máme

$$\tilde{u} = \frac{u+v}{1+uv/c^2}. \quad (302)$$

Transformace (301) a (302) představují nové skládání rychlostí. V čitateli je skládání shodné s Galileovým, ale ve jmenovateli je relativistická oprava, která se uplatní až při vysokých rychlostech. Položíme-li ve vztahu (302) rychlost u rovnou rychlosti světla, máme

$$\tilde{u} = \frac{c+v}{1+cv/c^2} = \frac{c+v}{(c+v)/c} = c.$$

Vidíme, že rychlost světla se skutečně v nové transformaci s ničím neskládá a zůstane ve všech inerciálních soustavách stejná. Pro malé rychlosti v porovnání s rychlostí světla je

oprava ve jmenovateli zanedbatelná a rychlosti se skládají galileovsky. Lorentzova transformace je pojmenována po holandském fyzikovi Hendriku Antoonovi Lorentzovi (1853–1928), který se zabýval transformačními vlastnostmi Maxwellových rovnic. Transformaci k úpravě rovnic klasické mechaniky použil Albert Einstein v roce 1905, kdy vytvořil speciální relativitu – mechaniku, která je v souladu s Maxwellovou elektrodynamikou.

Čtyřvektory

Lorentzovu transformační matici lze snadno invertovat běžnými matematickými postupy. Snazší je si uvědomit, že inverzní transformace mezi dvěma inerciálními soustavami není ničím jiným, než otočením směru rychlosti, tedy změnou znaménka u koeficientu β :

$$\blacktriangleright \quad A = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (303)$$

Čtveřice veličin, které se transformují za pomoci Lorentzovy matice, nazýváme čtyřvektory a budeme je značit horním (*kontravariantním*) indexem, tj. A^α . Čtveřice veličin, které se transformují za pomoci inverzní matice, budeme značit dolním (kovariantním) indexem, tj. A_α . Detailně je tato symbolika probrána např. v učebnici [1]. Skalární součin dvou vektorů je pak dán výrazem

$$A \cdot B = A_\alpha B^\alpha = A^\alpha B_\alpha. \quad (304)$$

Kombinace horního a dolního indexu znamená v případě změny souřadnicové soustavy po sobě jdoucí Lorentzovu transformaci a inverzní Lorentzovu transformaci, což ale znamená, že ke změně nedojde a takto definovaný skalární součin je skutečným skalárem, tedy je invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. Řeckými písmeny označujeme indexy, které probíhají přes všechny čtyři osy, časovou i prostorové. Časovou osu budeme dávat na pozici 0, prostorové na pozice 1, 2, 3. Příkladem čtyřvektorů jsou: událost, čtyřtok náboje, vlnový čtyřvektor a čtyřpotenciál. V časové oblasti přidáváme konstantu c tak, aby měly všechny čtyři složky stejný rozměr. Kovariantní podoby mají v časové oblasti minus dané opačným znaménkem inverzní Lorentzovy matice (podrobnosti ve výše zmíněné literatuře):

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} x^\mu &\equiv \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & J^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \rho_Q c \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix}; & k^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; & A^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; \\ x_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & J_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\rho_Q c \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix}; & k_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; & A_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (305)$$

Z tohoto celkem jednoduchého zápisu se poněkud vymyká čtyřgradient. Je to proto, že derivace podle času či prostoru $\partial/\partial x^\mu$ mají složky události ve jmenovateli, proto se netransformují Lorentzovou maticí, ale maticí k ní inverzní a výsledný index operace musí být dole, tj. $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$:

$$\blacktriangleright \quad \partial_\mu \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial ct \\ \nabla \end{pmatrix}; \quad \partial^\mu \equiv \begin{pmatrix} -\partial/\partial ct \\ \nabla \end{pmatrix}. \quad (306)$$

U čtyřgradientu jsou tedy znaménka u horních a dolních indexů opačná než u ostatních čtyřvektorů. Fakt, že tyto čtveřice skutečně tvoří čtyřvektory, které se transformují Lorentzovou transformací, plyne z jednoduchých úvah. Událost je čtyřvektorem přímo z definice Lorentzovy transformace (transformační matice pro událost), čtyřgradient odvozený z události je na tom stejně. Ze vztahu pro fázi vlnění, která je invariantem

$$\varphi = k^\alpha x_\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t \quad (307)$$

okamžitě plyne, že vlnový čtyřvektor se opět transformuje Lorentzovou maticí. Obdobně ze zákona zachování náboje (7) zapsaného za pomoci čtyřvektorů

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \quad (308)$$

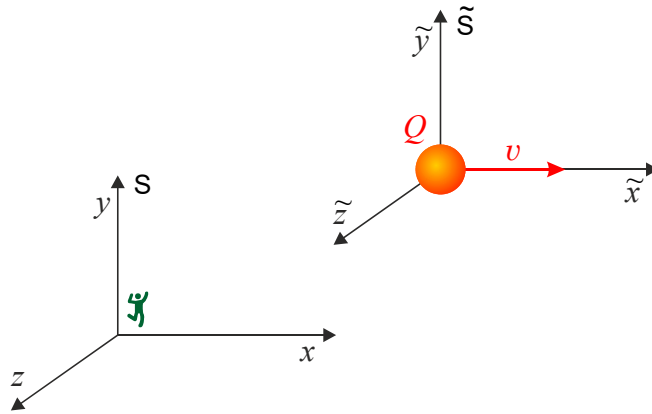
plyne, že čtyřtok náboje je opět čtyřvektorem. Později v této kapitole ukážeme, že čtyřpotenciál elektromagnetického pole splňuje Lorenzovu kalibrační podmínku

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0, \quad (309)$$

z níž plyne, že čtyřpotenciál musí mít čtyřvektorové transformační vlastnosti. Toho lze okamžitě využít k transformaci polí z jedné souřadnicové soustavy do jiné. Postačí nalézt čtyřpotenciál v jedné souřadnicové soustavě, zapůsobit na něho Lorentzovou maticí a z potenciálů vygenerovat nová pole v jiné souřadnicové soustavě.

Příklad: Heavisideovo pole

Pole nabitě částice letící konstantní rychlostí určíme z transformace čtyřpotenciálu pole.



V soustavě spojené s nábojem je zřejmě vektorový potenciál nulový (není zde přítomno magnetické pole) a skalární potenciál je dán Coulombovým zákonem:

$$\tilde{\phi} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}}. \quad (310)$$

Provedeme inverzní Lorentzovu transformaci do soustavy S pozorovatele

$$\begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q/(4\pi\epsilon_0 c\tilde{r}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (311)$$

Po vynásobení matic dostáváme pro potenciály v soustavě pozorovatele

$$\phi = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}}; \quad A_x = \frac{\gamma\beta Q}{4\pi\epsilon_0 c\tilde{r}}; \quad A_y = 0; \quad A_z = 0. \quad (312)$$

Ve výsledku jsme označili

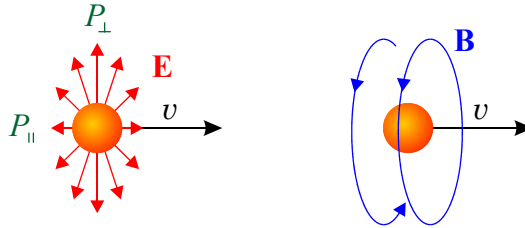
$$\tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} = \sqrt{\gamma^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2}. \quad (313)$$

Z definičních vztahů snadno určíme elektrické a magnetické pole

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x-vt, y, z)}{[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}; \quad (314)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\gamma\beta Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{(0, -z, y)}{[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (315)$$

Důležitá je kolmá ($x = vt$) a rovnoběžná ($y = z = 0$) složka elektrického pole. Vidíme, že elektrické pole je napříč pohybu nataženo faktorem γ a ve směru pohybu je stlačeno faktorem γ^{-2} . Pole se pohybuje spolu s nábojem. Magnetické pole tvoří kružnice kolmé na pohyb náboje. Pro nekonečnou řadu nábojů bychom získali pole kolem vodiče.



Tenzor elektromagnetického pole

Elektromagnetické pole je derivacemi potenciálů, oba vztahy (285) a (286) lze jednoduše zapsat za pomoci tenzoru elektromagnetického pole

$$\blacktriangleright \quad F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (316)$$

Jde o antisymetrický tenzor druhého řádu, který má jen šest nezávislých složek (těmi je elektrické a magnetické pole). Složky pole lze snadno odečíst z příslušných pozic tenzoru.

Kalibrační volnost potenciálů

Potenciály nejsou určeny jednoznačně, dvěma různým potenciálům může odpovídat stejné elektromagnetické pole. Pokud zavedeme nové, přetransformované potenciály za pomoci tzv. *gradientní transformace*

$$\blacktriangleright \quad \tilde{A}^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu f, \quad (317)$$

kde f je zcela libovolná dvakrát spojitě diferencovatelná funkce, pole se nezmění:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}. \quad (318)$$

Gradientní transformaci (317) potenciálů lze psát i odděleně jako

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} \tilde{\phi} &= \phi - \frac{\partial f}{\partial t}, \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} + \nabla f. \end{aligned} \quad (319)$$

Uvedená transformace nezmění hodnoty polí, funkce f může být libovolná. Této libovůli v potenciálech lze s výhodou využít při konstrukci co nejjednodušší varianty Maxwellových rovnic v potenciálech. Maxwellovy rovnice (283) a (284) jsme využili k zavedení potenciálů elektromagnetického pole.

Maxwellovy rovnice

Zbývající dvě rovnice se zdrojovými členy můžeme za pomoci tenzoru elektromagnetického pole snadno přepsat do tvaru

$$\blacktriangleright \quad F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad (320)$$

kde čtyřvektor J^μ prezentuje zdroje elektrických a magnetických polí, indexy za čárkou označují příslušné derivace, např. $A_{\alpha,\beta}$ znamená $\partial_\beta A_\alpha$. Tento tvar Maxwellových rovnic je zjevně relativistický. Přepíšme Maxwellovy rovnice ve tvaru (320) za pomoci potenciálů:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= \mu_0 J^\mu; \\ \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \mu_0 J^\mu; \\ \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu &= \mu_0 J^\mu. \end{aligned} \quad (321)$$

Druhý člen na levé straně je d'Alambertův vlnový operátor aplikovaný na čtyřpotenciál pole, pravá strana zjevně prezentuje zdroje polí. Jedinou „vadou na kráse“ rovnic zapsaných v potenciálech je první člen. Zde využijeme velké libovůle v potenciálech dané kalibrační transformací. Předpokládejme, že veličina $\partial_\nu A^\nu$ je rovna nějaké funkci času a prostoru $F(t, \mathbf{x})$:

$$\partial_\nu A^\nu = F(t, \mathbf{x})$$

a zvolme za pomoci gradientní transformace (317) jiný čtyřpotenciál, pro který budeme požadovat, aby

$$\partial_\nu \tilde{A}^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu A^\nu + \partial_\nu \partial^\nu f = 0 \quad \Rightarrow \quad F(t, \mathbf{x}) + \square f = 0.$$

Taková gradientní transformace bude vždy existovat. Funkci f , která generuje transformaci, stačí volit tak, aby splňovala rovnici

$$\square f = -F(t, \mathbf{x}). \quad (322)$$

V nových potenciálech je první člen v rovnici (321) nulový a Maxwellovy rovnice získají jednoduchý tvar

$$\square \tilde{A}^\mu = -\mu_0 J^\mu; \quad (323)$$

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0. \quad (324)$$

Jde o vlnové rovnice pro čtyřpotenciál A^μ , u kterých jsou zdrojovými členy složky čtyřvektoru J^μ . Rovnice jsou doplněny Lorenzovou kalibrační podmínkou (324). V dalším textu budeme samozřejmě vlnky vynechávat:

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} \square A^\mu &= -\mu_0 J^\mu; \\ \partial_\mu A^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (325)$$

Uvedené rovnice můžeme rozepsat odděleně pro časovou a pro prostorové složky:

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} \square \phi &= -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}; \\ \square \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j}_Q; \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} &= 0. \end{aligned} \quad (326)$$

V případě stacionárních dějů se D'Alambertův operátor změní na Laplaceův a rovnice dají Poissonovy rovnice elektrostatiky a magnetostatiky včetně Lorenzovy kalibrační podmínky.

Potenciály ve volném prostoru

Ukázali jsme, že libovůle potenciálů lze využít k tomu, aby Lorenzova kalibrační podmínka byla splněna. Dokonce ani požadavek na její splnění neurčuje potenciály jednoznačně! Z rovnice (322) je zřejmé, že funkce f není určena jednoznačně a lze k ní přičíst jakékoli řešení vlnové rovnice

$$\square f_0 = 0. \quad (327)$$

Proto je možná ještě další gradientní transformace

$$\tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu f_0,$$

kteřou je lze využít například k vynulování skalárního potenciálu ve volném prostoru bez nábojů a proudů. Pro potenciál ϕ bude možná transformace

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial f_0}{\partial t}. \quad (328)$$

Je jasné, že nový skalární potenciál bude nulový, pokud původní potenciál půjde napsat jako

$$\phi = \frac{\partial f_0}{\partial t}. \quad (329)$$

Takový potenciál ale splňuje vlnovou rovnici s nulovou pravou stranou:

$$\square \tilde{\phi} = \square \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \square f_0 = \frac{\partial}{\partial t} 0 = 0, \quad (330)$$

což je rovnice pro původní potenciál bez zdrojového členu, tedy v prázdném prostoru. Proto taková transformace vždy existuje a ve volném prostoru můžeme jakékoli elektromagnetické pole popsat pouze vektorovým potenciálem (vlnky už nebudeme psát):

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (331)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (332)$$

Transformace polí

Tensor elektromagnetického pole lze využít k transformaci polí stejně dobře jako čtyřpotenciál. U čtyřpotenciálu musíme po transformaci získat derivováním příslušná pole. Sestavíme-li v určité souřadnicové soustavě tenzor pole, můžeme pomocí Lorentzovy matice získat přímo tenzor pole v jiné soustavě a jen si ze získané matice odečíst hodnoty elektrického a magnetického pole. Transformační vztah má tvar:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu F^{\mu\nu}. \quad (333)$$

Vzhledem k symetrii Lorentzovy matice můžeme psát transformaci maticově:

$$\tilde{F} = \Lambda \cdot F \cdot \Lambda. \quad (334)$$

Máme tedy dvě možnosti: buď transformovat potenciály a potom dopočítat příslušná pole, nebo rovnou transformovat celý tenzor pole. Transformace (334) vede na vztahy

$$\tilde{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E} \right) \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad (335)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{B} \right) \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (336)$$

Lagrangeova funkce elektromagnetického pole

V teoretické mechanice je ústřední veličinou Lagrangeova funkce. Pro polní problematiku jde o hustotu Lagrangeovy funkce. K Maxwellovým rovnicím se zdrojovými členy vede hustota Lagrangeovy funkce (viz [1])

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{L} = J_{\mu} A^{\mu} - \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (337)$$

První člen popisuje interakci částic s polem, druhý pole samotné. Bez prvního členu bychom dostali Maxwellovy rovnice ve vakuu.

Aharonův-Bohmův experiment

V klasické elektrodynamice je možné elektromagnetické pole popsat buď za pomoci elektrické intenzity a magnetické indukce nebo za pomoci čtyřpotenciálů. Každý z těchto popisů má své výhody a nevýhody:

1. Elektromagnetické pole je měřitelné přístroji, potenciály ne. Tato situace vytváří dojem, že pole jsou reálné veličiny, zatímco potenciály jen pomocné matematické objekty.
2. Elektrická a magnetická pole jsou jednoznačná, potenciálů k danému problému existuje nekonečně mnoho. Toho lze využít ke konstrukci co nejjednodušších rovnic pro potenciály. Na druhou stranu nejednoznačnost potenciálů opět vzbuzuje dojem, že koncept potenciálů je jen pomocnou matematickou konstrukcí.
3. Maxwellovy rovnice v potenciálech jsou jednodušší, vedou na vlnovou rovnici s nenulovou pravou stranou, pro kterou existuje řada možností řešení. Po nalezení potenciálů musíme ale ještě určit pole z formulí $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$.
4. Při transformaci polí do jiné souřadnicové soustavy jsou vhodnější potenciály. Tvoří čtyřvektor, který se transformuje Lorentzovou maticí. Samotná transformace polí je poněkud nepřehledná a je dána transformací tenzoru pole.
5. Do čtyřrozměrného světa relativity na první pohled lépe zapadá čtyřpotenciál pole (ϕ, \mathbf{A}) než šestice hodnot \mathbf{E} a \mathbf{B} . Ty jsou ve skutečnosti součástí tenzoru pole $F_{\mu\nu}$, který je antisymetrický a má právě 6 nezávislých složek.

V klasické elektrodynamice jsou oba popisy zcela ekvivalentní a nelze některý z nich preferovat na úkor druhého. Částice může měnit svou rychlost pouze vlivem elektrických a magnetických polí. Pokud jsou pole nulová a potenciály nenulové (taková situace může nastat), na částici žádné síly nepůsobí. V kvantové mechanice je situace jiná. Pouhá přítomnost nenulového potenciálu mění fázi vlnové funkce i v případě, že samotná pole jsou nulová (například v prostoru vně dlouhé cívky je magnetické pole nulové a vektorový potenciál nenulový). Změna fáze vlnové funkce se projeví změnou interferenčního obrazce u dvouštěřbinového experimentu a jde tedy o měřitelný jev.

V tomto smyslu je klasická Maxwellova elektrodynamika doplněná Lorentzovou pohybovou rovnicí neúplným popisem přírody, neboť nepostihuje všechny v přírodě probíhající a měřitelné děje. Potenciály pole navíc nejsou jen matematickou konstrukcí, ale mají na pohyb nabitých částic reálný fyzikální dopad daný kvantovými zákony. Poprvé na tuto skutečnost upozornili angličtí teoretici Werner Ehrenberg a Raymond Siday v roce 1949, jejich práce se ale nerozšířila. Obdobný jev o deset let později (1959) znovu předpověděli izraelský fyzik Yakir Aharonov a americko-anglický teoretik David Bohm. Aharonův-Bohmův jev (AB jev) byl experimentálně potvrzen až v roce 1986 japonským fyzikem Akirou Tonomurou.

Uvažujme nejprve dvojštěřbinový experiment s uspořádáním podle obrázku nalevo. Za štěrbinami je úzký pás nenulového magnetického pole (tloušťky Δl), které míří kolmo na pohyb elektronů. Toto pole na ně bude působit Lorentzovou silou

$$F = evB \quad (338)$$

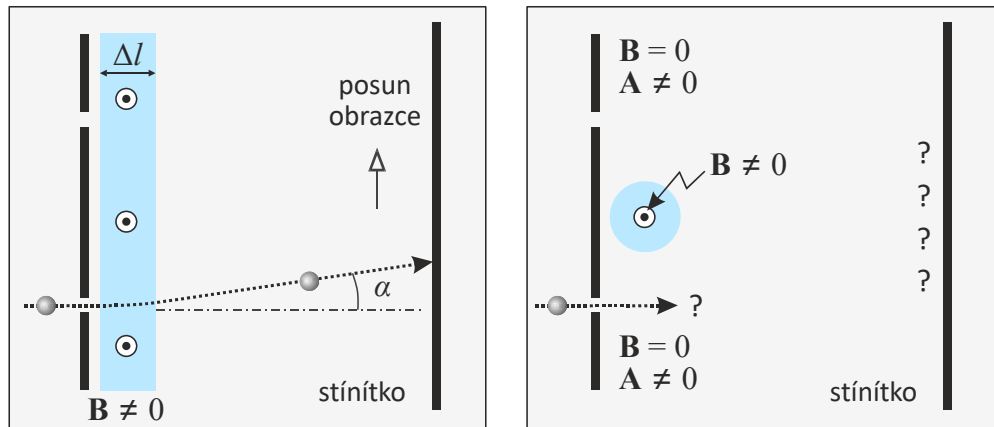
směrem vzhůru. Vzhledem k tomu, že je tloušťka vrstvy nenulového pole malá, budeme uvažovat, že se svazek elektronů pohne vzhůru vlivem působení konstantního zrychlení $a = F/m$ po dobu $\Delta t = \Delta l/v$. Ve svislém směru budou elektrony vychýleny o vzdálenost

$$\Delta y \cong \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \frac{evB}{m} \left(\frac{\Delta l}{v} \right)^2 = \frac{eB}{2mv} \Delta l^2. \quad (339)$$

Úhel vychýlení svazku bude podle klasického výpočtu

$$\text{tg } \alpha \cong \frac{\Delta y}{\Delta l} = \frac{eB \Delta l}{2mv}. \quad (340)$$

At' už bude obrazec dopadu elektronů na stínítku jakýkoli, měl by se působením magnetického pole úhlově posunout vzhůru o úhel α daný vztahem (340).



Uvažujme nyní dvojštěrbínový experiment s uspořádáním podle obrázku napravo. Za štěrbinami je dlouhý solenoid, v němž je nenulové magnetické pole. Vně solenoidu, tedy v oblasti, kterou se pohybují elektrony, je magnetické pole nulové a obrazec by neměl být posunut. Nenulový je zde pouze vektorový potenciál. Čtyřpotenciál ale vystupuje v Lagrangeově i Hamiltonově funkci a odsud se dostane do řešení Schrödingerovy časové rovnice. Vlnová funkce bude mít tvar (odvození lze nalézt v učebnicích kvantové teorie)

$$\psi = A \exp \left[\frac{iQ}{\hbar} \int A_\mu dx^\mu \right] \quad (341)$$

a pravděpodobnost výskytu elektronu bude ovlivněna přítomností nenulového potenciálu a obrazec by měl být posunut i vně solenoidu, tedy v prostředí nulového magnetického pole.

V oblasti, kterou prolétají v Aharonově-Bohmově myšlenkovém experimentu elektrony, je sice magnetické pole nulové, nenulový je ale vektorový potenciál, který způsobí změnu fáze vlnové funkce a tím posun interferenčního obrazce.

Poprvé se pokusil tento jev změřit japonský fyzik Akira Tonomura v roce 1982 za pomoci elektronového holografického mikroskopu, který dokáže kromě intenzity elektronového svazku také zaznamenat fázi elektronů (vyzařují koherentní elektromagnetické pole). Výsledky pro použitou cívku nebyly průkazné, neboť pole prosakovalo i vně cívky. Proto v roce 1986 použil Tonomura jako zdroj pole feromagnet ve tvaru toroidu o průměru 6 μm . Povrch byl pokryt supravodivým niobem, který dokonale odstínil magnetické pole. Teplota byla udržována na 5 K. Měření bylo posun interferenčních proužků mezi svazkem elektronů procházejících vnitřkem toroidu a svazkem elektronů procházejících vně magnetu. V těchto oblastech je nulové magnetické pole, ale různý vektorový potenciál. Proužky byly posunuty o hodnotu předpovězenou Aharonovým-Bohmovým jevem. Výsledkem experimentu je potvrzení faktu, že na mikroskopické úrovni hrají při interakci nabitého objektu mikrosvětla s elektromagnetickým polem primární roli potenciály.

Retardované a advanceované potenciály

V elektrostatice a magnetostatice jsme z Poissonových rovnic pro potenciály našli řešení

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}; \quad (342)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (343)$$

V elektrodynamice je Laplaceův operátor nahrazen D'Alambertovým a máme rovnice

$$\begin{aligned} \square\phi &= -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}; & \square\mathbf{A} &= -\mu_0\mathbf{j}_Q; \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} &= 0. \end{aligned} \quad (344)$$

Tyto rovnice započítávají konečnou dobu šíření informace a mají řešení

$$\blacktriangleright \phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t - \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}; \quad (345)$$

$$\blacktriangleright \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t - \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (346)$$

Potenciály se počítají v retardovaném čase, tedy čase pozorovatele, od něhož je odečtena doba šíření signálu ze zdroje:

$$\blacktriangleright \Delta t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / c. \quad (347)$$

Získané potenciály nazýváme *retardované* (zpožděné). Jejich hodnota se počítá z rozložení nábojů v kuželu minulosti pozorovatele. Toto není ale jediné řešení vlnových rovnic (344). Samotná vlnová rovnice se totiž nezmění při záměně $c \rightarrow -c$, proto ji podle (347) splňují i řešení

$$\phi_+(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t + \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (348)$$

$$\mathbf{A}_+(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t + \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (349)$$

Takové řešení je nefyzikální, přichází jakoby z budoucnosti, tedy záleží na rozložení nábojů v kuželu budoucnosti pozorovatele a nesplňuje princip kauzality (příčina musí předcházet ve všech souřadnicových soustavách důsledek). Řešení nazýváme *advanceované* (někdy se používá slovo *avanceované*). Obě řešení můžeme (fyzikální i nefyzikální) souhrnně zapsat jednou formulí

$$\blacktriangleright \phi_{\pm}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t \pm \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (350)$$

$$\blacktriangleright \mathbf{A}_{\pm}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t \pm \Delta t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (351)$$

Obdobně lze zapsat řešení Maxwellových rovnic pro celý čtyřpotenciál

$$\blacktriangleright \quad A_{\pm}^{\alpha}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^{\alpha}(t \pm \Delta t, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (352)$$

Advanceovaná řešení mají význam v kvantové teorii, uplatňují se ale formálně i v klasické elektrodynamice při popisu záření. Přímým derivováním lze ukázat, že nalezené potenciály splňují Lorenzovu kalibrační podmínku. Potenciály jsme spočetli pro pozorovatele v místě \mathbf{r} . Náboje jsou lokalizovány v místech \mathbf{r}' , přes která integrujeme. Dosti daleko od zdrojů je možné provést klasický multipólový rozvoj a určit zářivá pole generovaná pohybujícími se částicemi. Pokud nás zajímá reakce částice na její vlastní pole, musíme postupovat opačně a zjistit pole generované v těsné blízkosti sledované částice.



7. ELEKTROMAGNETICKÉ ZÁŘENÍ

Zatím jsme se zabývali multipólovým rozvojem skalárního a vektorového potenciálu ve stacionárním případě. Přineslo nám to definice dipólových momentů, elektrického kvadrupólu atd. Nyní máme potenciály součástí jediného čtyřvektoru a u elektromagnetických vln jsme samozřejmě museli opustit stacionární přístup. Je tedy na čase provést multipólový rozvoj v nestacionárním případě, který nám umožní pochopit základní mechanismy vyzařování nabitých částic.

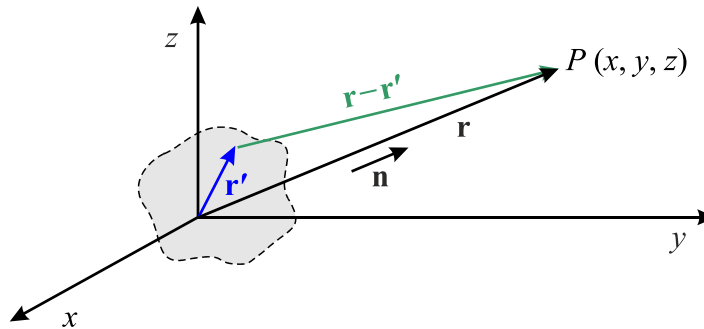
Zářivý multipólový rozvoj

Uvažujme nyní časově proměnné zdroje potenciálů

$$A^\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^\alpha(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'; \quad (353)$$

$$t' \equiv t - \Delta t = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c}. \quad (354)$$

Situace je v tomto případě o něco složitější. Jednak není retardovaný čas určen explicitně, ale je zadán implicitní formulí (354), jednak se bude muset provést Taylorův rozvoj jak ve jmenovateli, tak v čitateli, a poté vybrat zářivé členy. Ty ubývají se vzdáleností jako $1/r$, kde r je vzdálenost pozorovatele od počátku souřadnicové soustavy, který je lokalizován v oblasti zdrojů. Uvažujeme jen pole, které je schopné odnést energii do libovolné vzdálenosti od zdroje, tedy integrace Poyntingova vektoru $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, který je tokem energie, přes prostorový úhel $r^2 d\Omega$ musí dát v jakékoli vzdálenosti konečný příspěvek. Tento fakt úlohu naopak zjednodušuje, neboť z rozvoju potenciálů i polí postačí vybírat jen členy ubývající jako $1/r$.



Rozvoj jmenovatele jsme prováděli i ve stacionárním případě, viz (120), pro účely teorie záření postačí vzít jen první člen, ostatní ubývají rychleji než $1/r$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}. \quad (355)$$

V argumentu čtyřtoku bude třeba rozvinout retardovaný čas pro pozorovatele nacházejícího se ve velké vzdálenosti od zdroje

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} = t - \frac{r}{c} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{r}{c} \right) (-x'_k) + \dots = t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{x_k}{r} x'_k + \dots = t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} + \dots$$

Získaný výsledek je celkem pochopitelný. První člen je čas pozorovatele, druhý člen je retardovaný čas vzhledem k počátku (společný všem zdrojům) a poslední člen představuje jemné nuance retardace pro jednotlivé elementy zdroje pole. Zapišme ho přehledně:

$$t' \approx \tau + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}; \quad (356)$$

$$\tau \equiv t - r/c. \quad (357)$$

Symbolem τ jsme označili společný retardovaný čas vzhledem k počátku, symbolem \mathbf{n} normálový vektor ke vzdálené integrační ploše (jednotkový vektor spojnice počátku soustavy s pozorovatelem), $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Samozřejmě jsme se nezbavili implicitní závislosti, vektor \mathbf{r}' je opět vyjádřen v retardovaném čase. Uvážíme-li oba rozvoje (355) a (356), přejde vztah (353) pro čtyřpotenciál do tvaru

$$A^\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int J^\alpha(\tau + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'/c, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (358)$$

Nyní rozvineme čtyřtok v čase τ a přírůstku $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'$.

$$A^\alpha(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int J^\alpha(\tau, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \frac{\partial J^\alpha}{\partial \tau} \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) d^3\mathbf{r}' + \dots \quad (359)$$

Skalární potenciál můžeme ve volném prostoru volit nulový a radiační pole počítat ze vztahů

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{rad}}}{\partial t}, \quad (360)$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = \text{rot } \mathbf{A}_{\text{rad}}. \quad (361)$$

Ve vztahu (359) se budeme tedy nadále zabývat jen prostorovou částí a navíc vytkneme derivaci podle společného retardovaného času τ před integraci:

$$\mathbf{A}(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}_Q(\tau, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial \tau} \int \mathbf{j}_Q(\tau, \mathbf{r}') \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) d^3\mathbf{r}' + \dots \quad (362)$$

V dalším uvidíme, že první člen popisuje elektrické dipólové záření a druhý člen magnetické dipólové a elektrické kvadrupólové záření. Provedme nyní integraci pro soustavu nabitých částic lokalizovaných v okolí počátku, pro něž je

$$\mathbf{j}_Q(\tau, \mathbf{r}') = \sum_a Q_a \mathbf{v}_a(\tau) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a). \quad (363)$$

Ihned dostaneme

$$\mathbf{A}(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_a (Q_a \mathbf{v}_a) + \frac{\mu_0}{4\pi r c} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_a Q_a \mathbf{v}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a) + \dots \quad (364)$$

V prvním členu vytkneme před sumu časovou derivaci (vše je nyní ve společném retardovaném čase τ), v druhém členu provedeme symetrizaci (167) – nyní ale nebude časová derivace symetrické části nulová jako ve stacionárním případě:

$$\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}^{(E1)} + \mathbf{A}^{(M1)} + \mathbf{A}^{(E2)} + \dots; \quad (365)$$

$$\mathbf{A}^{(E1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a, \quad (366)$$

$$\mathbf{A}^{(M1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \times \mathbf{n}, \quad (367)$$

$$\mathbf{A}^{(E2)} = \frac{\mu_0}{8\pi r c} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a). \quad (368)$$

Všechny tři zářivé potenciály lze přepsat za pomoci veličin zavedených při stacionárním rozvoji. V prvním se vyskytuje elektrický dipólový moment, ve druhém magnetický dipólový moment, jedině třetí potenciál bude třeba ještě upravit. Z předchozího víme – viz (317) –, že potenciál můžeme změnit o gradient libovolné funkce

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}). \quad (369)$$

Volme pouze funkci vzdálenosti, pak bude transformace k novému potenciálu vypadat

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (370)$$

a potenciál $\mathbf{A}^{(E2)}$ snadno změním do tvaru s elektrickým kvadrupólovým momentem

$$\mathbf{A}^{(E2)} = \frac{\mu_0}{8\pi r c} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{3} \sum_a 3Q_a \mathbf{r}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a) \rightarrow \frac{\mu_0}{24\pi r c} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \left[3\mathbf{r}_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a) - r_a^2 \mathbf{n} \right]. \quad (371)$$

Výsledné vztahy pro zářivé potenciály tedy jsou (vše je vyjádřeno ve společném retardovaném čase τ , časové derivace jsou také podle τ)

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}^{(E1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}_E, \quad (372)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}^{(M1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \dot{\mathbf{p}}_M \times \mathbf{n}, \quad (373)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}^{(E2)} = \frac{\mu_0}{24\pi r c} \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}. \quad (374)$$

V posledním výrazu jde o zúžení tenzoru $\ddot{\mathbf{Q}}$ a vektoru \mathbf{n} .

Elektrické dipólové záření

Určeme nyní elektrické a magnetické pole pro potenciál ve tvaru (372). Nesmíme zapomenout, že společný retardační čas je také funkcí r (pevná poloha pozorovatele) a platí

$$\tau = t - r/c \quad \Rightarrow \quad (375)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = -\frac{1}{c} \frac{x_k}{r}. \quad (376)$$

Nyní přistoupíme k samotnému výpočtu elektrického a magnetického pole. Při derivování budeme vybírat jen zářivé členy s radiální závislostí $1/r$, vyšší mocniny zanedbáme. Takto konstruovaná radiační pole budeme značit psacími symboly:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}^{(E1)}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}^{(E1)}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}_E;$$

$$\mathcal{B}_k = \left(\text{rot } \mathbf{A}^{(E1)} \right)_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\dot{p}_m}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{klm} \frac{\frac{\partial \dot{p}_m}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_l} r - \dot{p}_m \frac{\partial r}{\partial x_l}}{r^2}.$$

Druhý člen se chová jako $1/r^2$, není radiační a vynecháme ho:

$$\mathcal{B}_k = \frac{\mu_0}{4\pi r} \varepsilon_{klm} \ddot{p}_m \left(-\frac{1}{c} \frac{x_l}{r} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi c r} (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}_E)_k.$$

Výsledek tedy je:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}^{(E1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}_E; \quad (377)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{B}^{(E1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi c r} (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}_E) = \frac{1}{c} (\mathbf{n} \times \mathcal{E}^{(E1)}). \quad (378)$$

Je patrné, že dosti daleko od zdroje má elektromagnetické pole charakter rovinné vlnoplochy. V blízkosti zdroje (dipólu) by pole bylo mnohem komplikovanější. Nalezené řešení platí jen v tzv. radiální zóně. Při výpočtu pole všech typů záření postačí v radiální zóně spočítat jen elektrické pole a magnetické pole dopočíst ze vztahu pro rovinnou vlnoplochu (je to rychlejší než pomocí rotace vektorového potenciálu)

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}(\mathbf{n} \times \mathcal{E}). \quad (379)$$

Pro zářivá pole nyní určíme tok energie (Poyntingův vektor). Zůstanou v něm jen členy $1/r^2$:

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E} \times (\mathbf{n} \times \mathcal{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathcal{E}^2 \mathbf{n} - (\mathcal{E} \cdot \mathbf{n}) \mathcal{E}] \quad (380)$$

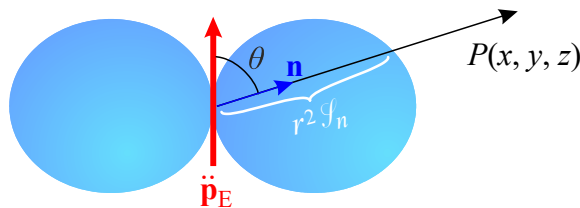
Nás bude zajímat projekce Poyntingova vektoru do směru od nábojů k nám (radiální tok energie, intenzita), tj.

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E} \cdot \mathbf{n})^2] = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^2 \cos^2 \theta] = \frac{\mathcal{E}^2}{\mu_0 c} \sin^2 \theta. \quad (381)$$

Nyní do radiálního toku energie dosadíme za elektrické pole z (377) a převedeme permeabilitu na permitivitu pomocí vztahu $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$. Dostaneme radiální tok energie

$$\mathcal{S}_n = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta; \quad \theta = \angle(\mathcal{E}, \mathbf{n}) = \angle(\ddot{\mathbf{p}}_E, \mathbf{n}), \quad [\mathcal{S}_n] = \frac{W}{m^2}, \quad (382)$$

v němž θ je úhel mezi vzdáleným elektrickým polem (druhou časovou derivací \mathbf{p}_E) a směrem k pozorovateli. Nejintenzivněji proto částice září ve směru kolmém na druhou časovou derivaci elektrického dipólového momentu (u jedné částice jde o směr kolmý na zrychlení)



Element výkonu vyzářený do prostorového úhlu je

$$d\mathcal{P} = \mathcal{S} d\mathbf{S} = (\mathcal{S} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathcal{S}_n dS = \mathcal{S}_n r^2 d\Omega. \quad (383)$$

Po dosazení z (382) získáme *Larmorovu diferenciální formuli*

$$d\mathcal{P} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega. \quad (384)$$

Celkový vyzářený výkon získáme integrací

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int \sin^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_1^{-1} (1 - \xi^2)(-d\xi) = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \left[\xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}; \quad [\mathcal{P}] = W. \quad (385)$$

Z Larmorovy formule (385) plyne několik zajímavých důsledků:

1) Pokud se částice pohybují se zrychlením, tak září, protože

$$\ddot{\mathbf{p}}_E = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a = \sum_a Q_a \ddot{\mathbf{r}}_a. \quad (386)$$

2) Pokud jde o izolovanou soustavu stejných nábojů ($Q_a = q$) lokalizovaných v jedné oblasti (kolem počátku našich souřadnic), tak nezáří, protože druhá časová derivace elektrického dipólového momentu bude úměrná součtu všech vnitřních sil, který je v izolované soustavě nulový:

$$\ddot{\mathbf{p}}_E = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_a Q_a \mathbf{r}_a = \frac{q}{m} \sum_a m \ddot{\mathbf{r}}_a = \frac{q}{m} \sum_a \mathbf{F}_a = 0. \quad (387)$$

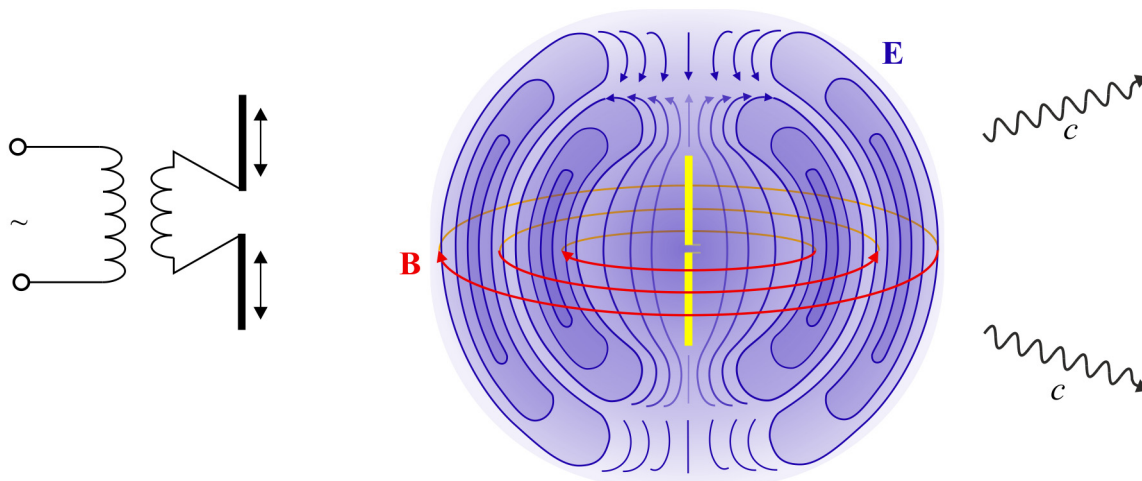
3) Nejjednodušší realizací elektrického dipólového záření je tzv. *Hertzův dipól*. Jde o otevřený lineární prvek protékáný střídavým proudem (napájený například indukčně z nějakého střídavého obvodu). Úvaha 2) nyní neplatí, nejde o izolovanou soustavu. Elektrické náboje putují v tomto prvku sem a tam, což vede na jednoduchý vztah pro elektrický dipólový moment

$$\mathbf{p}_E = p_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_3. \quad (388)$$

Uvážíme-li, že střední hodnota druhé mocniny kosinu je $\frac{1}{2}$, dostaneme ze vztahu (385) pro střední výkon

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}. \quad (389)$$

I nepatrné zvýšení frekvence s sebou přinese velké zvýšení vyzařovaného výkonu.



Hertzův dipól. Nalevo: jednoduchá realizace. Napravo: blízká pole v okolí Hertzova dipólu. Zobrazeny jsou dvě vlnové délky odpovídající dvěma překlopením dipólu. Nami odvozené vztahy platí až ve velké vzdálenosti od dipólu.

Thomsonův rozptyl

Prozkoumejme nyní záření volného elektronu, na který dopadá elektromagnetická vlna s nízkou energií (rozptyl elektronu na elektromagnetickém záření). Elektrická složka vlnění bude na elektron působit silou $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ a udělí mu zrychlení

$$\ddot{\mathbf{r}}_e = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}. \quad (390)$$

Působení magnetického pole jsme zanedbali, protože se pohybujeme v nízkoenergetické limitě, kde platí $v \ll c$. Výsledkem bude nenulový elektrický dipólový moment, jehož druhá časová derivace bude

$$\ddot{\mathbf{p}}_E = -e\ddot{\mathbf{r}}_e = \frac{e^2}{m_e} \mathbf{E}. \quad (391)$$

Volný elektron začne kmitat ve shodě s příchozí vlnou, získá nenulové periodické zrychlení a začne sám zářit. Jím vyzařovaný výkon určíme z Larmorovy formule (384), do které dosadíme za druhou časovou derivaci elektrického dipólového momentu ze vztahu (391):

$$d\mathcal{P}_{\text{out}} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} d\Omega = \frac{e^4 E^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (392)$$

Pravděpodobnost rozptylu bude dána podílem odcházející a přicházející energie. Pokud budeme reprezentovat odcházející energii Larmorovým výkonem (392) a přicházející energii Poyntingovým vektorem dopadající elektromagnetické vlny (využijeme, že $E/B = c$)

$$\mathcal{I}_{\text{in}} = EH = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0}, \quad (393)$$

bude jejich podíl

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{out}}}{\mathcal{I}_{\text{in}}} = \frac{dW/dt}{dW/(dt dS)} = dS = d\sigma \quad (394)$$

roven elementu plochy, kterou je elektron schopen přijímat dopadající záření, což je efektivní účinný průřez. Pro účinný průřez rozptylu elektronu na elektromagnetické vlně proto máme

$$d\sigma = \frac{d\mathcal{P}_{\text{out}}}{\mathcal{I}_{\text{in}}} = \frac{\frac{e^4 E^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega}{\frac{E^2}{c\mu_0}} = \frac{e^4 c \mu_0}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (395)$$

Permeabilitu převedeme na permitivitu a získáme výsledný diferenciální účinný průřez

$$\blacktriangleright \quad d\sigma = \frac{e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^4 m_e^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (396)$$

Celkový účinný průřez získáme integrací přes prostorový úhel

$$\blacktriangleright \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{e^4}{6\pi \varepsilon_0^2 c^4 m_e^2}. \quad (397)$$

Celkový účinný průřez rozptylu elektromagnetického záření na elektronu je dán univerzální konstantou, kterou bývá z historických důvodů zvykem zapisovat pomocí tzv. klasického poloměru elektronu, za něhož považujeme takový rozměr, při němž elektrostatické pole generuje klidovou hmotnost elektronu:

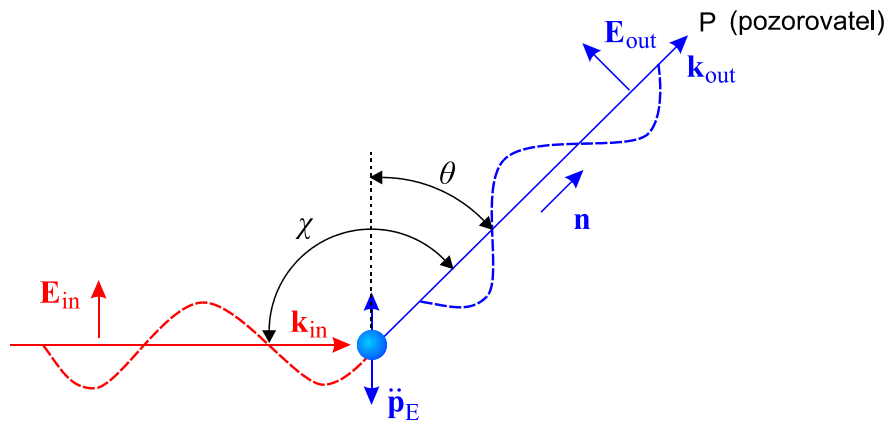
$$\frac{e^2}{4\pi \varepsilon a_e} = m_e c^2 \quad \Rightarrow \quad a_e = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon m_e c^2}; \quad a_e \approx 2.8 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (398)$$

Účinný průřez v tomto zápisu vyjde jako malý násobek průřezu elektronu reprezentovaného klasickým poloměrem elektronu:

$$\blacktriangleright \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{8}{3} \pi a_e^2; \quad \sigma_{\text{tot}} \approx 6.7 \times 10^{-29} \text{ m}^2. \quad (399)$$

Poznámka 1: Provedený výpočet je nerelativistický a platí jen pro nízké energie záření. Výsledkem je stejná frekvence dopadající vlny i vlny generované elektronem. Účinný průřez navíc na frekvenci nezávisí. Pro vysoké energie bychom museli vzít v úvahu zákony zachování energie a hybnosti dané relativistickou čtyřhybností. Foton změní směr pohybu, tím se změní jeho hybnost a samozřejmě tedy i energie (tj, i frekvence), která je s hybností provázána přes velikost čtyřvektoru hybnosti. Výsledkem dopadu fotonu s vysokou energií bude rozptyl fotonu na elektronu, který povede ke změně jeho frekvence. V tomto případě hovoříme o *Comptonově jevu*. Thomsonův rozptyl je jeho limitou při nízkých energiích.

Poznámka 2: Dopadající vlnu rozptýlí elektron současně do různých směrů dle formule (396). Pokud budeme pozorovat jednu konkrétní rozptýlenou vlnu ve směru θ , rovina polarizace se nezmění. Elektrické pole bude samozřejmě kolmé na nový směr šíření. Úhel rozptylu je v obrázku označen χ .



Rayleighův rozptyl

Thomsonův rozptyl se týká volných elektronů. Elektrony jsou ale často vázané – buď v atomárních obalech, v molekulách nebo na malých částicích prachu. Takový elektron také reaguje na elektrické pole dopadající vlny, ale má určitou vlastní frekvenci ω_0 , na které se přirozeným způsobem může rozkmitat v hostitelském systému a přirozený útlum δ těchto kmitů, který může být způsoben například vlastním vyzařováním elektronu. Pohybová rovnice bude mít nyní namísto (390) o něco málo složitější tvar:

$$\ddot{\mathbf{r}}_e + 2\delta\dot{\mathbf{r}}_e + \omega_0^2\mathbf{r}_e = -\frac{e}{m_e}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (400)$$

Jde o vynucené kmity, známou úlohu z klasické mechaniky. Budící pole \mathbf{E} má frekvenci ω . Píšeme ho v exponenciální tvaru, který je snadno možné derivovat. Skutečné řešení pro $\mathbf{r}(t)$ je potom reálnou částí nalezeného řešení, které je součtem homogenního a partikulárního řešení. Homogenní řešení představuje tlumené kmity na vlastní frekvenci, tedy z dlouhodobého hlediska jde o přechodový jev, který nás nezajímá. Partikulární řešení má tvar

$$\mathbf{r}_e(t) = A\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}; \quad A = \frac{-e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)}. \quad (401)$$

Amplituda je obecně komplexní číslo, které lze zapsat v goniometrickém tvaru

$$A = |A|e^{i\varphi}; \quad |A| = \frac{e/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \quad (402)$$

Skutečné kmity elektronu budou reálnou částí nalezeného řešení, tj.

$$\mathbf{r}_e(t) = |A|\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{e\mathbf{E}_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (403)$$

Druhá derivace elektrického dipólového momentu $\mathbf{p}_e = -e\mathbf{r}_e$ bude

$$\ddot{\mathbf{p}}_e(t) = \frac{e^2 \omega^2 \mathbf{E}_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (404)$$

Dále už je postup zcela identický s odvozením Thomsonova účinného průřezu. Jediným rozdílem je středování druhé mocniny kosinu přes periodu, které dá

$$\langle \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle_T = 1/2. \quad (405)$$

Pro vyzářený výkon dostaneme

$$d\mathcal{P}_{\text{out}} = \frac{\ddot{p}_E^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} d\Omega = \frac{e^4 \omega^4 E_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m_e^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right)} \sin^2 \theta d\Omega \quad (406)$$

U dopadajícího výkonu opět vystředujeme přes periodu:

$$\mathcal{S}_{\text{in}} = \langle EH \rangle = \langle EB / \mu_0 \rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}. \quad (407)$$

Hledaný diferenciální účinný průřez je podílem obou posledních veličin, viz (394), tj.

$$\blacktriangleright \quad d\sigma = \frac{e^4 \omega^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^4 m_e^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right)} \sin^2 \theta d\Omega \quad (408)$$

U Thomsonova rozptylu jsme středování neprováděli, protože generovaná i dopadající vlna byly ve fázi, takže se časové závislosti zkrátily. Po přeintegrování přes prostorovou závislost dostaneme celkový účinný průřez

$$\blacktriangleright \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{e^4 \omega^4}{6\pi \varepsilon_0^2 c^4 m_e^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right)}. \quad (409)$$

Povšimněte si, že pro volný elektron, tj. $\omega_0 = 0$, $\delta = 0$, přejdou obě formule ve vztahy (396) a (397) pro Thomsonův rozptyl. Pro nízké frekvence $\omega \ll \omega_0$ (to platí například pro elektrony vázané v atomech a molekulách a pro frekvenci světla dopadajícího ze Slunce) vyjde

$$\blacktriangleright \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{e^4}{6\pi \varepsilon_0^2 c^4 m_e^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4. \quad (410)$$



Jde o známou Rayleighovu formuli pro rozptyl slunečního světla na atmosféře. Účinný průřez klesá se čtvrtou mocninou vlnové délky. Modrá barva je rozptylována mnohem účinněji než červená. To je důvodem modré barvy oblohy. Rozptyl je pojmenován po anglickém fyzikovi Johnu Williamu Struttovi (1842–1919), který byl za své výzkumy povýšen do šlechtického stavu a stal se lordem Rayleighem.

Brzdné záření elektronů na iontech

Ocitne-li se elektron v poli těžkého Z násobně ionizovaného iontu, dojde k elastické srážce, při níž se změní směr pohybu elektronu. Na elektron při srážce působí dostředivé zrychlení (směrem k iontu), jehož výsledkem je záření elektronu. Pokud budeme srážku popisovat v souřadnicové soustavě spojené s těžkým iontem, bude velikost zrychlení elektronu

$$\ddot{r}_e = \frac{F}{m_e} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_e^2 m_e} \quad (411)$$

a tomu odpovídající velikost druhé časové derivace elektrického dipólového momentu

$$\ddot{p}_E = e\ddot{r}_e = \frac{Ze^3}{4\pi\epsilon_0 r_e^2 m_e}. \quad (412)$$

Z Larmorovy formule (385) je zřejmé, že vyzařování závisí jen na velikosti zrychlení elektronu. Je zcela lhostejné, zda jde o zrychlení tečné či dostředivé. Velikost zrychlení je u Coulombovy srážky dána pouze polohou elektronu vzhledem k iontu, u něhož se elektron rozptyluje. Intenzita vyzařování či výkon jsou tedy dány pouze vzdáleností elektronu od jádra. Čím blíže k iontu se elektron dostane, tím více září. Snadno určíme okamžitý výkon vyzařovaný elektronem:

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\ddot{p}_E^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{Z^2 e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 [r_e(t)]^4}. \quad (413)$$

S uvedenou formulí je možné dále pracovat. Ze znalosti dráhy elektronu při srážce lze například dopočítat fourierovské spektrum vyzařovaného výkonu. Další možností je vzít homogenní vzorek elektronů s různými záměrnými parametry a středovat vyzářený výkon pro celý vzorek elektronů rozložených symetricky kolem iontu

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{Z^2 e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{n_e 4\pi r_e^2 dr_e}{r_e^4} = \frac{4\pi Z^2 e^6 n_e}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \frac{1}{r_{\min}}. \quad (414)$$

To s sebou ale nese další problémy: Prvním je dolní ořez minimální vzdálenosti, která nemůže být nulová. Druhým problémem je kvantové chování elektronu při interakci s elektrony atomárního obalu. Pokud za dolní hranici záměrného parametru zvolíme de Broglieovu vlnovou délku počítanou z nejpravděpodobnější (tepelné) rychlosti elektronu

$$r_{\min} \approx \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_e k_B T_e}}, \quad (415)$$

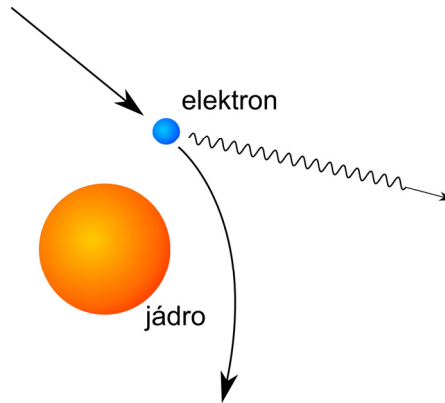
vyjde středovaný výkon souboru elektronů rozptylujících se na jednom iontu

$$\langle \mathcal{P} \rangle \approx \frac{Z^2 e^6 n_e}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e \hbar} \left(\frac{2k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (416)$$

Pokud bude rozptyl probíhat na iontech s koncentrací n_i , bude výkon vyzařovaný z objemové jednotky (hustota výkonu) roven

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P} = \langle \mathcal{P} \rangle n_i \approx \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e \hbar} \left(\frac{2k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2}; \quad [\mathcal{P}] = \frac{W}{m^3}. \quad (417)$$

Poznámka: Provedený výpočet je nekvantový. Při kvantovém výpočtu se ve výsledném vztahu objeví ještě tzv. Gauntův faktor (je pojmenovaný podle Johna Arthura Gaunta), který je slabě frekvenčně závislý a jeho hodnota je řádově rovna jedné. V prvním přiblížení ho tedy nemusíme uvažovat.



Cyklotronové záření

Nabitá částice vykonává v magnetickém poli tzv. gyrační pohyb, tj. pohybuje po šroubovici a přitom má samozřejmě nenulové dostředivé zrychlení dané Lorentzovou silou. Vzhledem k tomu, že cyklotronové záření je důležité jak pro elektrony, tak pro ionty, provedeme výpočet pro obecný náboj Q . Zrychlení nabitě částice bude mít velikost:

$$\ddot{r}_0 = \frac{F}{m} = \frac{Qv_{\perp}B}{m}. \quad (418)$$

Tomu odpovídající velikost druhé časové derivace elektrického dipólového momentu bude

$$\ddot{p}_E = Q\ddot{r}_0 = \frac{Q^2 v_{\perp} B}{m}. \quad (419)$$

Z Larmorovy formule (385) snadno určíme okamžitý výkon vyzařovaný částicí

$$\mathcal{P} = \frac{\ddot{p}_E^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{Q^4 v_{\perp}^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2}. \quad (420)$$

Vzhledem ke kvadratické závislosti na hmotnosti částice je cyklotronové vyzařování intenzivnější pro elektrony než pro ionty. Speciálně pro elektron lze za pomoci klasického poloměru elektronu (398) výkon vyzařovaný jednou částicí přepsat do tvaru

$$\mathcal{P} = \frac{8}{3} \pi a_e^2 \epsilon_0 c v_{\perp}^2 B^2. \quad (421)$$

Sestavme energetickou bilanci pro elektronovou složku plazmatu:

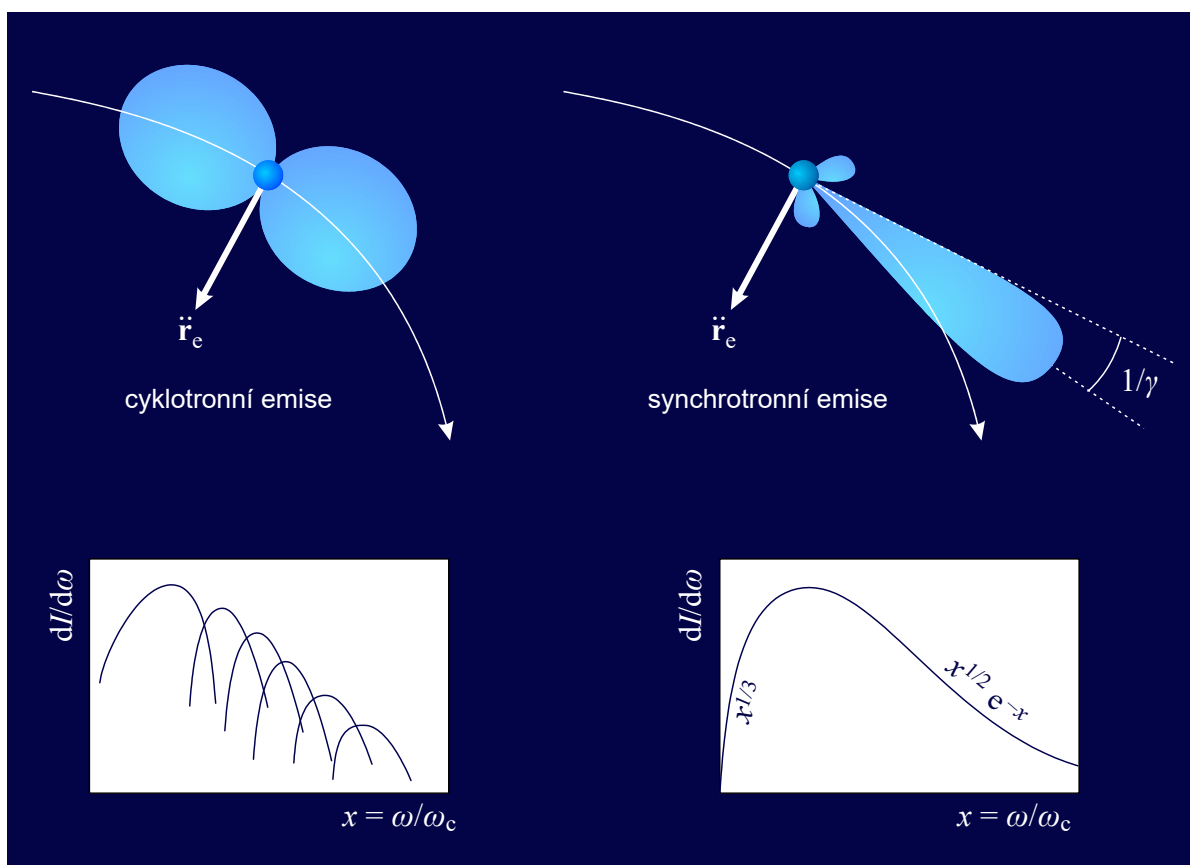
$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n_e k_B T_e \right) = \mathcal{P} n_e. \quad (422)$$

Nalevo je úbytek hustoty energie elektronů, napravo hustota vyzařovaného výkonu, v němž obě kolmé složky rychlosti nahradíme nejpravděpodobnějšími (tepelnými) rychlostmi

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n_e k_B T_e \right) = \frac{8}{3} \pi a_e^2 \epsilon_0 c \frac{2k_B T_e}{m_e} B^2 n_e. \quad (423)$$

Nalezená diferenciální rovnice pro teplotu vede na exponenciální úbytek teploty elektronové složky plazmatu způsobený cyklotronovým zářením elektronů.

$$T_e = T_0 \exp[-\alpha t]; \quad \alpha = \frac{32}{9} \frac{\pi a_e^2 \epsilon_0 c}{m_e} B^2. \quad (424)$$



Poznámka 1: Provedený výpočet cyklotronového záření je nerelativistický. Cyklotronové záření probíhá zejména na cyklotronové frekvenci a jejích vyšších harmonických. Při vysokých energiích elektronů ale tento výpočet neplatí. Cyklotronová frekvence závisí prostřednictvím hmotnosti na rychlosti částice a navíc je třeba ji transformovat do laboratorní soustavy (uplatní se relativistický Dopplerův jev). Stejně tak je třeba transformovat vyzářený výkon. Závislost cyklotronové frekvence na rychlosti částice vede pro velký soubor částic k rozšiřování píků cyklotronové emise na jednotlivých harmonických a při vysokých energiích bude spektrum spojité. V tomto případě hovoříme o synchrotronovém záření. Úhlová charakteristika záření je deformována mocninami Lorentzova faktoru γ do charakteristického tvaru dopředného laloku. Formulí pro synchrotronové záření lze získat transformacemi vztahů pro cyklotronové záření, nicméně elegantnější je přímý výpočet z Feynmanovy formule (viz *Liénardovy-Wiechertovy potenciály*).

Poznámka 2: Ve Sluneční soustavě je velmi silným zdrojem cyklotronového záření planeta Jupiter. Jupiter má nejsilnější magnetické pole ze všech planet, jeho magnetosféra má ohon dlouhý 5,5 astronomické jednotky a sahá až k oběžné dráze planety Saturn. Elektrony kroužící kolem siločar magnetického pole vytvářejí intenzivní elektromagnetické vlny v úzkém pásmu radiových frekvencí, které jsou označovány zkratkou ECE (*Electron Cyclotron Emission*). U Jupiteru pochází nejvíce vln z elektronů rotujících na siločarách pole procházejících měsícem Io, jehož vulkanické projevy zanechávají kolem planety charakteristický plazmový torus složený převážně z iontů síry. Jupiter je využíván jako referenční zdroj rádiového signálu pro kalibraci přístrojů na sondách (například Planck).

Vyšší momenty záření

Nabitě částice samozřejmě nevyzařují jen dipólově, méně intenzivně, ale také důležité je i magnetické dipólové a elektrické kvadrupólové záření. Budeme postupovat stejně jako u elektrického dipólového záření. V dosti velké vzdálenosti od zdroje jsou vlnoplochy rovinné, proto postačí určit jen elektrické pole ze vztahu

$$\mathcal{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t \quad (425)$$

a magnetické pole snadno dopočteme ze vztahů

$$\mathcal{B} = \frac{1}{c}(\mathcal{E} \times \mathbf{n}); \quad (426)$$

$$\mathcal{E} = c(\mathcal{B} \times \mathbf{n}). \quad (427)$$

Ze vztahů (373) a (374) snadno určíme elektrické a magnetické pole magnetického dipólového a elektrického kvadrupólového záření:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}^{(M1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi rc} \ddot{\mathbf{p}}_M \times \mathbf{n}, \quad (428)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{B}^{(M1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi rc^2} \ddot{\mathbf{p}}_M; \quad (429)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E}^{(E2)} = -\frac{\mu_0}{24\pi rc} \ddot{\ddot{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{n}, \quad (430)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{B}^{(E2)} = -\frac{\mu_0}{24\pi rc^2} \left(\left[\ddot{\ddot{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n} \right); \quad (431)$$

Obdobně jako u dipólového záření určíme normálovou složku Poyntingova vektoru a integrací přes celý prostorový úhel získáme celkový vyzářený výkon soustavy částic. Ve výsledných vztazích vyjádříme permeabilitu vakua za pomoci permitivity ze vztahu $\mu_0 = 1/(c^2 \epsilon_0)$:

$$\mathcal{J}_n^{(M1)} = \frac{\ddot{p}_M^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^5 r^2} \sin^2 \theta; \quad (432)$$

$$\mathcal{J}_n^{(E2)} = \frac{(\ddot{Q}_{kl} n_l)(\ddot{Q}_{km} n_m) - (\ddot{Q}_{kl} n_k n_l)(\ddot{Q}_{mo} n_m n_o)}{576\pi^2 \epsilon_0 c^5 r^2}; \quad (433)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P}^{(M1)} = \frac{\ddot{p}_M^2}{6\pi \epsilon_0 c^5}, \quad (434)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P}^{(E2)} = \frac{\ddot{\mathbf{Q}} : \ddot{\mathbf{Q}}}{720\pi \epsilon_0 c^5}. \quad (435)$$

Na následujícím obrázku je ukázka elektrického kvadrupólového záření v těsné blízkosti zdroje zobrazená metodou LIC (*Line Integral Convolution*). Počítačově generovaná šumová textura se za pomoci konvoluce s elektrickým polem deformuje ve směru siločar elektrického pole. Výpočet byl proveden na Dukeově univerzitě.



Liénardovy-Wiechertovy potenciály

Pokud se částice pohybují vysokou rychlostí a nejsou lokalizovány v okolí počátku souřadnicové soustavy, není možné provést rozvoj potenciálů pro pozorovatele ve velké vzdálenosti. Navíc se příslušným rozvojem vytratilo relativistické chování částic. V obecném případě je proto třeba postupovat jinak. Vyjděme opět z retardovaných potenciálů

$$A^\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^\alpha(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'; \quad t' \equiv t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c}. \quad (436)$$

Pro skalární a vektorový potenciál z této relace dostaneme vztahy

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (437)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (438)$$

Pro bodovou částici jsou zdrojové členy

$$\rho_Q = Q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0), \quad (439)$$

$$\mathbf{j}_Q = Q \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0). \quad (440)$$

U vztahů (437), (438) pro potenciály je třeba zajistit, aby byly parametry částice brány v retardovaném čase, proto u vyjádření pro jedinou částici přibude ještě distribuce přes čas:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt' d^3\mathbf{r}', \quad (441)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Q \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt' d^3\mathbf{r}'. \quad (442)$$

Časová distribuce bude nenulová jen pro

$$\blacktriangleright \quad t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c}, \quad (443)$$

tedy skutečně v retardovaném čase, jak jsme požadovali. Nejprve provedme integraci přes prostorovou distribuci:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dt', \quad (444)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \int \frac{\mathbf{v}(t') \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dt'. \quad (445)$$

Integrace přes čas je poněkud složitější, neboť jde o distribuci funkce, pro kterou platí vztah

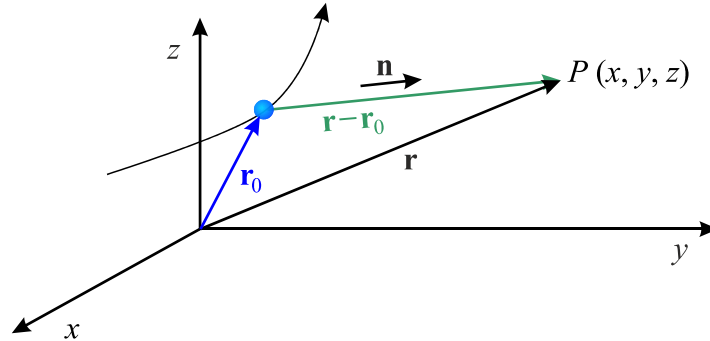
$$\blacktriangleright \quad \delta(F(\xi)) = \frac{\delta(\xi - \xi_0)}{F'(\xi_0)}; \quad F(\xi_0) = 0, \quad (446)$$

který nyní využijeme. Nalezněme nejprve derivaci funkce F :

$$\frac{dF}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left(t' - t + \frac{1}{c} \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dF}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \left(-\frac{d\mathbf{r}_0}{dt'} \right) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t'))^2}} = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{cR} = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}. \quad (447)$$

Pro nelokalizovanou částici musíme za jednotkový vektor normály k ploše v místě pozorovatele volit směr od částice k nám, tedy $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, dále jsme označili $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$.



Po provedení integrace přes časovou distribuci nyní snadno získáme výsledné potenciály (tzv. Liénardovy-Wiechertovy potenciály):

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}, \quad (448)$$

$$\mathbf{A} = \frac{Q\boldsymbol{\beta}}{4\pi\epsilon_0 cR} \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}, \quad (449)$$

kde jsme označili

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}, \quad (450)$$

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{v}(t')}{c}. \quad (451)$$

Veškeré argumenty související s částicí jsou brány v retardovaném čase, tj. $\mathbf{r}_0(t')$, $\mathbf{v}(t')$. Liénardovy-Wiechertovy potenciály jsou relativistické a nebyly v nich učiněny žádné rozvoje ani žádná zjednodušení. Přímým výpočtem nyní určíme elektromagnetická pole. K tomu si musíme předpočítat jednotlivé potřebné derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (452)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_k} \quad (453)$$

Určeme například $\partial t'/\partial t$:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = 1; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \left[t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c} \right] = 1; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t'}{\partial t} \left[1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{cR} \right] = 1.$$

Odsud již snadno určíme

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}; \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}. \quad (454)$$

Analogicky nalezneme

$$\frac{\partial t'}{\partial x_k} = -\frac{n_k}{c(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}. \quad (455)$$

Výpočet elektrických polí z Liénardových-Wiechertových potenciálů je nyní přímočarý, ale poněkud zdoluhavý. Elektrické pole získáme ze vztahu $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ a magnetické pole ze vztahu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Výsledkem je Feynmanova formule

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1-\beta^2)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cR} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3}, \quad (456)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{c}. \quad (457)$$

První část pole je zobecněné coulombické pole, druhá část je obecné zářivé pole, v němž nebyly činěny žádné rozvoje, a je plně relativistické. Z takto určených formulí je možné dále spočítat Poyntingův vektor a jeho integrací vyzářený výkon. Takovým postupem lze například získat přesný vztah pro synchrotronové záření.

Relativistické brzdé a synchrotronové záření

Pokud nás nezajímá pole v těsném okolí částice, ale jen radiační pole, můžeme ve Feynmanově formuli zanedbat první (coulombickou) část a ponechat jen druhou (radiační) část:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cR} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \quad (458)$$

Určeme nyní Poyntingův vektor.

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0 c} \boldsymbol{\mathcal{E}} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \frac{1}{\mu_0 c} [\boldsymbol{\mathcal{E}}^2 \mathbf{n} - (\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\mathcal{E}}]. \quad (459)$$

Druhý člen v hranaté závorce je evidentně nulový, protože je elektrické pole dle (458) kolmé na \mathbf{n} . Normálová složka toku energie proto bude

$$\mathcal{S}_n = \boldsymbol{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}^2}{\mu_0 c} \quad \Rightarrow \quad (460)$$

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cR} \right)^2 \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^6} \quad (461)$$

Celá pravá strana je funkcí retardovaného času, proto bude vyzářovaná energie do prostoro-
rového úhlu rovna

$$d\mathcal{W} = \mathcal{S}_n dt R^2 d\Omega = \mathcal{S}_n dt' \frac{\partial t}{\partial t'} R^2 d\Omega. \quad (462)$$

Vyzářený výkon bude

$$d\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{W}}{dt'} = \mathcal{S}_n \frac{\partial t}{\partial t'} R^2 d\Omega. \quad (463)$$

Nyní dosadíme za Poyntingův vektor (461) a za časovou derivaci (454) a máme finální vztah

$$\blacktriangleright \quad d\mathcal{P} = \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^5} d\Omega. \quad (464)$$

Uvedme nyní tři limitní případy této obecné formule pro záření relativistické částice:

Limita pomalé částice

Nejprve bychom měli zkontrolovat, zda v limitě malých rychlostí dá naše nová formule původní Larmorův vztah. Budeme tedy předpokládat, že $\beta \ll 1$, tj. $1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} \approx 1$, $\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{n}$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 d\Omega = \\ &= \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} |(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 d\Omega = \\ &= \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} |\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp}|^2 d\Omega = \\ &= \frac{Q^2 \dot{v}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} d\Omega. \end{aligned}$$

Přepíšeme-li tento vztah za pomoci elektrického dipólového momentu $\mathbf{p}_e = Q\mathbf{r}$, máme

$$\blacktriangleright \quad d\mathcal{P} = \frac{\ddot{p}_e^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} d\Omega, \quad (465)$$

což je Larmorova formule (384) pro pomalé částice. Připomeňme, že θ je úhel mezi zrychlením částice a směrem od částice k pozorovateli, tj.

$$\theta \equiv \sphericalangle(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{n}). \quad (466)$$

Relativistické brzdné záření

Jde o částici urychlovanou nebo brzděnou ve směru svého pohybu, tj. platí $\boldsymbol{\beta} \parallel d\boldsymbol{\beta}/dt$. Typicky jde například o relativistické brzdné záření. Obecná formule se zjednoduší na

$$d\mathcal{P}_{\parallel} = \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^5} d\Omega. \quad (467)$$

Pro částici urychlovanou ve směru jejího pohybu platí

$$\theta \equiv \sphericalangle(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{n}) = \sphericalangle(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{n}), \quad (468)$$

proto bude úhlová závislost vyzařovaného výkonu

$$\blacktriangleright \quad d\mathcal{P}_{\parallel} = \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\Omega. \quad (469)$$

Po integrování přes všechny úhlové závislosti máme celkový vyzařovaný výkon

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P}_{\parallel} = \frac{Q^2}{6\pi^2 \varepsilon_0 c} \gamma^6 \dot{v}^2. \quad (470)$$

Synchrotronové záření

V tomto případě jde o částici, jejíž zrychlení je kolmé na její rychlost $d\boldsymbol{\beta}/dt \perp \boldsymbol{\beta}$. K tomu dochází například při pohybu po kružnici, kdy je generováno synchrotronové záření. Výpočet je složitější než v minulém případě. Volme okamžitou souřadnicovou soustavu, v níž míří osa z ve směru pohybující se částice a osa x ve směru zrychlení částice (v případě kruhového pohybu do středu kružnice):

$$\mathbf{e}_z \equiv \frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta}; \quad \mathbf{e}_x \equiv \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\dot{\beta}}; \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0. \quad (471)$$

Nyní zavedeme standardní sférické souřadnice, tj. ϑ bude odklon od osy z a φ bude polární úhel v rovině (x, y) . V této soustavě bude platit

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = \beta \cos \vartheta, \quad (472)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\beta} \sin \vartheta \cos \varphi. \quad (473)$$

Po přepsání všech dvojných vektorových součinů na skalární součiny přejde obecná formule (464) v případě zrychlení kolmého na rychlost na vztah

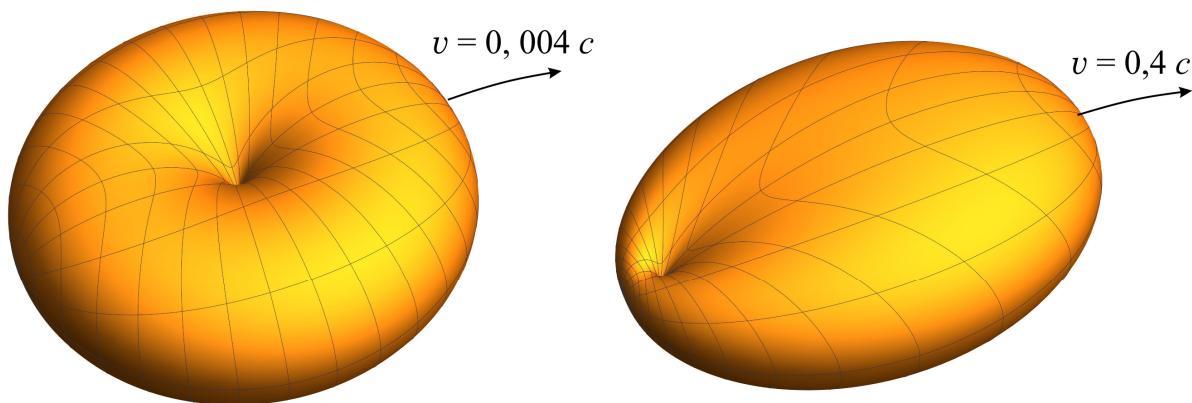
$$\blacktriangleright \quad d\mathcal{P}_{\perp} = \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{(1 - \beta \cos \vartheta)^2 + (\sin \vartheta \cos \varphi)^2 (\beta^2 - 1)}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5} \dot{\beta}^2 d\Omega. \quad (474)$$

Jde o obecnou formuli pro synchrotronní záření. Po integraci přes úhlové proměnné máme

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{P}_{\perp} = \frac{Q^2}{6\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \gamma^4 \dot{v}^2. \quad (475)$$

Pokud bychom se neomezili jen na případ částice se zrychlením rovnoběžným či kolmým na směr rychlosti a ponechali obecný směr rychlosti i zrychlení, byl by celkový vyzařovaný výkon prostým součtem obou limitních případů (470) a (475). Integrace „mix“ členů dá nulový příspěvek.

Na následujícím obrázku je směrová charakteristika synchrotronního záření určená v programu Wolfram MATHEMATICA podle formule (474) pro $\beta = 0,004$ (nalevo) a $\beta = 0,4$ (napravo). Při vysoké rychlosti záření výrazně převládá ve směru pohybu částice. Nejmenší množství záření (proláklna na obrázku) je emitováno na spojnici částice se středem kružnice, po níž se pohybuje.



8. POLE V REZONANČNÍ DUTINĚ

Už jsme si řekli, že elektromagnetické pole je médiem, které je schopné přenášet energii, hybnost a moment hybnosti. Energie pole je kvantována a elementárními kvanty jsou jednotlivé fotony. Celkově lze tedy elektromagnetické pole chápat jako soustavu fotonů a každý foton jako harmonický oscilátor. Při tomto popisu tedy elektromagnetické pole není ničím jiným než soustavou harmonických oscilátorů. Takovou představu nebudeme rozvádět pro obecné elektromagnetické pole, ale pro fotony zachycené v dutinovém rezonátoru. Je to dutina, v níž se pole na vnitřních stěnách odráží, a proto dlouhodobě v rezonátoru přebývá. Dutinové rezonátory se používají třeba na největším urychlovači světa LHC k urychlování nabitých částic. K dokonalosti je dovedl francouzský fyzik Serge Haroche, který dokázal vyrobit několikacentimetrovou dutinu se supravodivým povrchem, v níž se jediný foton odrážel celých 130 ms. Za tu dobu foton uletěl vzdálenost rovnou obvodu Země. Serge Haroche prováděl jako první na světě v takových dutinách nedestruktivní měření počtu fotonů. Jediný foton v dutině byl schopný opakovaně detekovat i několiksetkrát. Za tyto práce obdržel Nobelovu cenu pro rok 2012. Při uzavřenému v rezonanční dutině se někdy lidově říká „pole v krabici“. Pole v dutině vytvoří stojaté vlnění s uzly na stěnách. Proto jsou v dutině možné jen některé módy elektromagnetického pole. Právě jim se budeme věnovat v této kapitole.

Potenciály v dutině

Pole v dutině nemá žádné zdroje – nejsou zde ani náboje, elektrické proudy. Maxwellovy rovnice pro potenciály spolu s Lorenzovou kalibrační podmínkou mají jednoduchý tvar:

$$\square \mathbf{A} = 0; \quad (476)$$

$$\square \phi = 0; \quad (477)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (478)$$

V předchozím textu jsme ukázali, že ve volném prostoru bez proudů a nábojů lze díky kalibrační volnosti dokonce zvolit skalární potenciál nulový. Rovnice pro pole v dutině pak mají tvar

$$\blacktriangleright \quad \square \mathbf{A} = 0; \quad (479)$$

$$\blacktriangleright \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (480)$$

Elektromagnetická pole budou dána vztahy

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad (481)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (482)$$

Vlastní kmity pole

Předpokládejme, že se elektromagnetické pole nachází v dutině ve tvaru kvádrů o hranách L_1 , L_2 a L_3 . Souřadnicové osy povedeme ve směru hran. Budeme předpokládat, že se v dutině vytvoří stojaté vlnění s uzly na stěnách. Pro hledaný potenciál postačí požadovat, aby na protilehlých stěnách měl stejnou hodnotu (tzv. periodickou okrajovou podmínku). Potenciál zapíšeme jako superpozici Fourierových módů

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (483)$$

Každý z módů musí splňovat rovnici (479), odkud pro amplitudy \mathbf{a} plyne

$$-k^2 \mathbf{a}_k - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{a}}_k = 0 \quad (484)$$

Vzhledem k tomu, že pole v dutině musí splňovat disperzní relaci

$$\omega_k = c k, \quad (485)$$

můžeme rovnici pro amplitudu přepsat do tvaru

$$\ddot{\mathbf{a}}_k + \omega_k^2 \mathbf{a}_k = 0. \quad (486)$$

Tato rovnice má dvě řešení $\exp[\pm i \omega_k t]$, obecné řešení je jejich lineární kombinací. Pokud budeme požadovat, aby vlnový vektor mířil ve směru fázové rychlosti vlny a aby celková fáze vlny tvořila relativistický skalár $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t$, musíme volit řešení se znaménkem minus (plusové řešení ale později také využijeme), tj.:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{a}_k(t) = \mathbf{c}_k e^{-i \omega_k t} \quad (487)$$

Celkové řešení pro vektorový potenciál tedy je obyčejná rovinná vlna

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}_k(t, \mathbf{r}) = \mathbf{a}_k(t) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{c}_k e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t]}, \quad (488)$$

což je dáno jednoduchým pravoúhlým tvarem dutiny. Nesmíme zapomenout na Lorenzovu kalibrační podmínku, která znamená omezení na směr konstantních vektorů \mathbf{c}_k :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_k = 0. \quad (489)$$

Stěny dutiny neumožní vznik vln libovolných vlnových délek, proto nebude vlnový vektor \mathbf{k} spojitý, ale bude nabývat jen některých hodnot. Potenciál musí být stejný pro $x = 0$ a $x = L_1$, obdobně také pro $y = 0$ a $y = L_2$ a totéž bude platit i v třetí ose pro $z = 0$ a $z = L_3$. Například v ose x budeme mít

$$e^{k_1 0 + k_2 y + k_3 z} = e^{k_1 L_1 + k_2 y + k_3 z} \quad \Rightarrow \quad 1 = e^{k_1 L_1} \quad \Rightarrow \quad k_1 L_1 = n_1 2\pi. \quad (490)$$

Obdobně postupujeme i v dalších osách. Vlnový vektor tedy může nabývat pouze hodnot

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{k} = \left(\frac{2\pi}{L_1} n_1, \frac{2\pi}{L_2} n_2, \frac{2\pi}{L_3} n_3 \right); \quad n_l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (491)$$

$$k = 2\pi \sqrt{\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2}}. \quad (492)$$

Pokud přejdeme k normovaným Fourierovým modům (za každou dimenzi je $1/\sqrt{L_k}$)

$$\varphi_k \equiv \frac{1}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (493)$$

můžeme výsledné řešení pro potenciál zapsat jako

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_k(t) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{a}_k^*(t) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right). \quad (494)$$

Koeficient před řešením je normovací konstanta bázových funkcí. K námi nalezenému řešení je přičteno komplexně sdružené řešení, aby byl výsledek reálný. Také bychom mohli využít reálnou část $\text{Re } \mathbf{A} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)/2$ a vzniklou polovinu zahrnout do amplitud \mathbf{a}_k resp. \mathbf{c}_k . V komplexně sdruženém řešení se v časové části uplatní i druhé z řešení $\exp[+i \omega t]$. Řešení můžeme také chápat jako dvě stejné vlny pohybující se proti sobě, které v dutině vytvoří stojaté

vlnění. Zbývá poslední úloha – spočítat elektrické a magnetické pole. Získaný potenciál je superpozicí rovinných elektromagnetických vln. Časová část je schována v amplitudách \mathbf{a} , \mathbf{a}^* . V případě dutiny jiného tvaru než kvádru by časová část neměla tvar $\exp[\pm i\omega t]$. U rovinných vlnoploch vedou časové a prostorové derivace na jednoduché algebraické vztahy (227). Okamžitě proto dostaneme hodnotu elektrického a magnetického pole v rezonanční dutině:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right); \quad (495)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \times \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (496)$$

Připomeňme, že $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ je amplituda \mathbf{k} -té Fourierovy komponenty a čísla \mathbf{k} jsou diskrétní podle vztahu (491). Obě pole jsou superpozicí Fourierových módů a jsou reálná.

Energie a hybnost pole v dutině

Nyní se budeme věnovat výpočtu celkové energie a celkové hybnosti všech módů elektromagnetického pole uzavřeného v dutině, tj. bude třeba vyčíslit integrály z hustoty energie (178) a hustoty hybnosti (195):

$$\mathcal{E} = \int_V \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) d^3\mathbf{r} = \epsilon_0 \int_V \left(\frac{\mathbf{E}^2}{2} + c^2 \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) d^3\mathbf{r}, \quad (497)$$

$$\mathcal{G} = \int_V \boldsymbol{\gamma} d^3\mathbf{r} = \int_V \mathbf{D} \times \mathbf{B} d^3\mathbf{r} = \epsilon_0 \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3\mathbf{r}. \quad (498)$$

Do obou vztahů dosadíme za pole z (495) a (496). Při úpravách jednotlivých členů postupně použijeme následující vztahy

$$(1) \quad \frac{1}{V} \int_V e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \quad \frac{1}{V} \int_V e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}, \quad (499)$$

$$(2) \quad \mathbf{a}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*, \quad \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^* = \mathbf{a}_{\mathbf{k}}, \quad (500)$$

$$(3) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* = 0, \quad (501)$$

$$(4) \quad [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (502)$$

První relace plyne ihned z ortonormality báze funkcí, na pravé straně jsou Kroneckerova delta jednotlivých diskrétních indexů. Druhá relace plyne z výrazu (494) pro vektorový potenciál, ve kterém zaměníme sčítací index \mathbf{k} za $-\mathbf{k}$. Záměna indexu nesmí výraz změnit, po záměně se druhá část stane první a první druhou. Porovnáním s původní relací dostaneme druhou relaci. Třetí relace plynou z Lorenzovy kalibrační podmínky (489) a jejího komplexního sdružení. Poslední relace je známý Cramerův vzorec (D.2). Nyní se můžeme konečně pustit do výpočtu energie pole v rezonanční dutině dané vztahem (497). Nejprve si dopředu spočteme výrazy $\int_V \mathbf{E}^2 d^3\mathbf{r}$, $\int_V \mathbf{B}^2 d^3\mathbf{r}$, do nichž dosadíme za pole z (495) a (496):

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{E}^2 d^3\mathbf{r} &= -\frac{1}{V} \int_V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \cdot \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}'}^* e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \right) d^3\mathbf{r} \stackrel{(1)}{=} \\ &= -\sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{-\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{a}_{-\mathbf{k}} \right) \stackrel{(2)}{=} \\ &= -\sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \right) = 0; \end{aligned}$$

Obdobným postupem nyní určíme druhou mocninu magnetického pole

$$\begin{aligned}
 \int_V \mathbf{B}^2 d^3\mathbf{r} &= -\frac{1}{V} \int \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \cdot \left(\mathbf{k}' \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{k}' \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}'}^* e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \right) d^3\mathbf{r} \stackrel{(1,2)}{=} \\
 &= -\sum_{\mathbf{k}} \left[(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) - (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) - (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) + (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) \right] = \\
 &= 4 \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}) \stackrel{(4)}{=} \\
 &= 4 \sum_{\mathbf{k}} k^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \stackrel{(3)}{=} \\
 &= 4 \sum_{\mathbf{k}} k^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*).
 \end{aligned}$$

Výsledná energie elektromagnetického pole po dosazení do (497) tedy je

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_0 c^2 k^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*).$$

Z disperzní relace víme, že v prázdném prostoru platí $ck = \omega_{\mathbf{k}}$, což nás dovede k výslednému vztahu pro energii. Analogickým postupem určíme i vztah pro hybnost:

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}}^2 (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*), \quad (503)$$

$$\mathcal{G} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{G}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_0 \omega_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) \mathbf{k}. \quad (504)$$

Energii a hybnost elektromagnetického pole v rezonanční dutině můžeme vyjádřit jako součet energií a hybností jednotlivých nezávislých lineárních harmonických oscilátorů s „dovolenými“ čísly $\mathbf{k} = (2\pi n_1/L_1, 2\pi n_2/L_2, 2\pi n_3/L_3)$. Jde o popis kompatibilní s korpuskulárním obrazem elektromagnetického pole. Mezi hybnostními módy, které míří ve směru vlnového vektoru, a energetickými módy platí jednoduché vztahy (vektorový a pro velikost):

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \mathbf{k} = \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{c} \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (505)$$

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}^2}{c^2}, \quad (506)$$

což je známý vztah mezi hybností a energií fotonů, který plyne ze speciální relativity pro částice s nulovou klidovou hmotností.

Hamiltonovy rovnice

Fourierovy amplitudy \mathbf{a} , \mathbf{a}^* jsou komplexní čísla charakterizující šíření vln v rezonanční dutině ve směrech \mathbf{k} , $-\mathbf{k}$, neboť jde o koeficienty u vln $\exp[\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}]$. Obecně jde o komplexní čísla, pomocí nichž budeme definovat nové reálné amplitudy $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ vztahy

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\varepsilon_0} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}), \quad (507)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} \equiv i\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\varepsilon_0} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}). \quad (508)$$

Obě funkce jsou reálné vektorové funkce. První je úměrná reálné části $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$, druhá imaginární. Ukážeme, že takto přeškálované amplitudy hrají roli zobecněných souřadnic a hybností oscilátorů popisujících elektromagnetické pole v dutině. Sečtením a odečtením definičních rovnic (koeficienty převedeme vlevo) můžeme rekonstruovat původní amplitudy:

$$\mathbf{a}_k = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \left(\mathbf{Q}_k + \frac{i}{\omega_k} \mathbf{P}_k \right), \quad (509)$$

$$\mathbf{a}_k^* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \left(\mathbf{Q}_k - \frac{i}{\omega_k} \mathbf{P}_k \right). \quad (510)$$

Nové proměnné \mathbf{Q}_k , \mathbf{P}_k nemají zatím jiný význam, než reálných amplitud vytvořených z původních komplexních amplitud \mathbf{a}_k , \mathbf{a}_k^* . Původní amplitudy v sobě zahrnují časové faktory $\exp[\pm i\omega_k t]$ a podle (487), (489) pro ně platí

$$\dot{\mathbf{a}}_k = -i\omega_k \mathbf{a}_k, \quad (511)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_k^* = +i\omega_k \mathbf{a}_k^*. \quad (512)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_k = 0, \quad (513)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_k^* = 0. \quad (514)$$

S pomocí těchto relací snadno zjistíme, že pro nově zavedené amplitudy platí vztahy

$$\dot{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{P}_k, \quad (515)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_k + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k = 0. \quad (516)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}_k = 0, \quad (517)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_k = 0, \quad (518)$$

Vidíme, že amplituda \mathbf{P}_k hraje roli zobecněné rychlosti/hybnosti k amplitudě \mathbf{Q}_k . Druhá relace plyne přímo z vlnové rovnice $\square \mathbf{A} = 0$ už pro původní amplitudy \mathbf{a}_k . Třetí a čtvrtý vztah znamenají, že obě nové amplitudy jsou vždy kolmé na směr šíření elektromagnetického vlnění. Určeme nyní celkovou energii elektromagnetického pole v rezonanční dutině za pomoci nových amplitud \mathbf{Q}_k , \mathbf{P}_k :

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{E} = \mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_0 \omega_k^2 (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k^*) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\mathbf{P}_k^2 + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k^2). \quad (519)$$

Energie vyjádřená pomocí nových amplitud má roli Hamiltonovy funkce pro elektromagnetické pole v dutině. Je kvadratická v obou proměnných, jak je tomu u harmonického oscilátoru. Ukážeme, že nové amplitudy jsou vzájemně kanonicky sdružené, tj. že splňují Hamiltonovy rovnice. Za tím účelem Hamiltonovu funkci (519) zderivujeme podle obou nových amplitud:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_k} = \mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k;$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{Q}_k} = \omega_k^2 \mathbf{Q}_k = -\ddot{\mathbf{Q}}_k = -\dot{\mathbf{P}}_k.$$

Ve finále tedy máme Hamiltonovy kanonické rovnice

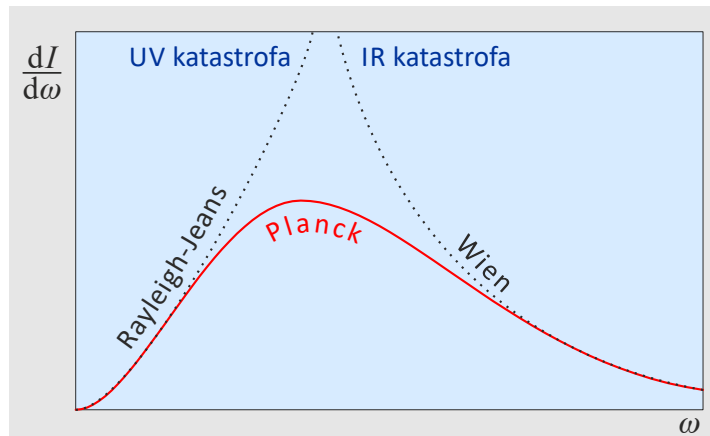
$$\blacktriangleright \quad \dot{\mathbf{Q}}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_k}; \quad (520)$$

$$\blacktriangleright \quad \dot{\mathbf{P}}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{Q}_k}. \quad (521)$$

Nové amplitudy splňují Hamiltonovy rovnice, jsou tedy kanonicky sdružené. Elektromagnetické pole v dutině lze popsat jako soustavu harmonických oscilátorů se zobecněnými souřadnicemi \mathbf{Q}_k a zobecněnými hybnostmi \mathbf{P}_k .

Tepelné záření

Elektromagnetické pole v dutině, které je v termodynamické rovnováze se stěnami o teplotě T , má charakteristickou závislost intenzity/hustoty energie na frekvenci. Je jedno, zda hovoříme o intenzitě nebo o hustotě energie. Intenzita je tok energie, tedy jde o hustotu energie vynásobenou rychlostí světla. Obě veličiny se liší pouze faktorem c . Pro oblast malých frekvencí tuto závislost odvodili anglický fyzik John Rayleigh (1842–1919) a anglický matematik a astronom James Jeans (1877–1946), naopak pro oblast vysokých frekvencí německý fyzik Wilhelm Wien (1864–1928). V celém rozsahu frekvencí se podařilo odvodit správný vztah až německému fyzikovi Maxu Planckovi (1858–1947) v roce 1900, když zavedl pro tehdejší dobu umělý předpoklad o kvantování energie elektromagnetického záření.



Počet módu v dutině

Vyjďeme z „povolených“ vlnových vektorů \mathbf{k} podle vztahu (491). Počet vlastních kmitů v pásmu $d\mathbf{k}$ bude

$$\begin{aligned} d\Gamma &= 2 dn_1 dn_2 dn_3 = 2 \frac{L_1 L_2 L_3}{(2\pi)^3} dk_1 dk_2 dk_3 = \\ &= 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{d\omega}{c}. \end{aligned}$$

Koeficient 2 před výrazem zohledňuje dvě nezávislé polarizace elektromagnetického záření. Diferenciály vlnového vektoru jsme vyjádřili ve sférických souřadnicích, 4π je plný prostorový úhel (je jedno, zda ho počítáme v kartézských nebo ve sférických souřadnicích). Diferenciál velikosti vlnového vektoru jsme vyjádřili z disperzní relace $\omega = ck$. Výsledný vztah pro počet stavů ve frekvenčním pásmu $d\omega$ je

$$\blacktriangleright \quad d\Gamma_\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega. \quad (522)$$

Rayleighův a Jeansův výpočet

Intenzita vyzařování je dána tokem energie, tedy hustotou energie násobenou rychlostí šíření

$$dI_\omega = uc d\Gamma_\omega \quad (523)$$

Pokud budeme předpokládat, že každý mód elektromagnetického záření odpovídá tepelné energii $k_B T$, tj. $u = k_B T/V$, dostaneme Rayleighův-Jeansův zákon

$$\blacktriangleright \quad dI_\omega = \frac{k_B T}{\pi^2 c^2} \omega^2 d\omega, \quad (524)$$

který platí dobře pro nízké frekvence a zcela selhává pro vysoké frekvence, kde je podstatné kvantování energie elektromagnetického záření.

Planckův výpočet

Předpokládejme, že je energie kvantována a mohou existovat jen stavy oscilátorů s energií

$$\varepsilon_n = n \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (525)$$

Každý oscilátor se může vyskytovat v různých energetických stavech s různým kvantovým číslem n . Označme w_n pravděpodobnost, že má náhodný oscilátor právě energii ε_n :

$$w_n = C \exp\left[-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}\right] = C \exp[-n \beta \hbar \omega]; \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}. \quad (526)$$

Normovací konstantu vypočteme z podmínky, že součet všech pravděpodobností je roven 1 (nějakou energii vybraný oscilátor mít musí):

$$1 = C \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-\beta \hbar \omega]^n = \frac{C}{1 - \exp[-\beta \hbar \omega]} \quad \Rightarrow$$

$$C = 1 - \exp[-\beta \hbar \omega].$$

Správně bychom měli ověřovat konvergentnost geometrické řady, ale to není třeba, neboť vždy platí, že kvocient $q = \exp(-x) < 1$ pro $x > 1$. Pravděpodobnost tedy je

$$\blacktriangleright \quad w_n = (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) e^{-\beta n \hbar \omega}; \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}. \quad (527)$$

Nyní určíme střední hodnotu energie jednoho oscilátoru:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n w_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \hbar \omega (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) e^{-\beta n \hbar \omega} = \\ &= \hbar \omega (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta n \hbar \omega} \end{aligned}$$

Potřebnou řadu snadno sečteme jednoduchým trikem:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\alpha n} &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\alpha})^n = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2}. \end{aligned}$$

Výsledek dosadíme do vztahu pro střední hodnotu energie, čitatele i jmenovatele vydělíme $\exp[-\beta \hbar \omega]$ a máme výsledek

$$\blacktriangleright \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}. \quad (528)$$

K výpočtu intenzity opět použijeme vztah (523), ale nyní za hustotu energie dosadíme střední hodnotu energie oscilátoru vydělenou objemem:

$$dI_{\omega} = u c d\Gamma_{\omega} = \frac{\bar{\varepsilon}}{V} c d\Gamma_{\omega} = \frac{1}{V} \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} c \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega.$$

Po triviální úpravě koeficientů máme slavný Planckův vyzařovací zákon.

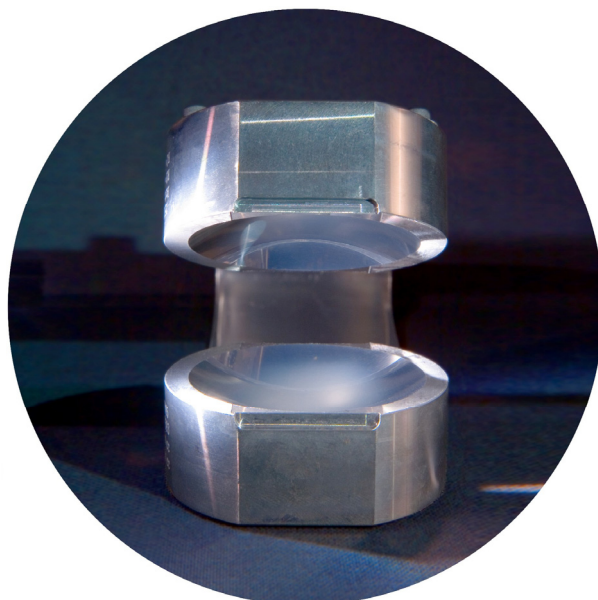
$$\blacktriangleright \quad dI_{\omega} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} d\omega. \quad (529)$$

V limitě nízkých frekvencí provedeme rozvoj exponenciály ve jmenovateli do prvního řádu a získáme Rayleighův-Jeansův zákon. Planckova konstanta zmizí, pro malé frekvence není kvantování podstatné. Naopak pro vysoké frekvence je exponenciála ve jmenovateli dominantní, můžeme zanedbat jednotku a dostáváme Wienův zákon pro vysoké frekvence:

$$\blacktriangleright \quad dI_\omega \approx \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 c^2} k_B T \omega^2 d\omega; & \beta \hbar \omega \ll 1, \\ \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \omega^3 e^{-\beta \hbar \omega} d\omega; & \beta \hbar \omega \gg 1. \end{cases} \quad (530)$$

* * *

Na následujícím obrázku je supravodivá rezonanční dutina zkonstruovaná francouzským fyzikem Sergem Harochem (*1944) a jeho týmem. Skládá se ze dvou polokulových měděných zrcadel, jejichž povrch je opracován s přesností několika nanometrů a slouží jako podklad pro tenkou vrstvičku niobu, který je supravodivý při teplotách pod 9 kelvinů. Mikrovlnná dutina má otevřenou geometrii, aby jejím středem mohly jeden za druhým prolétat Rydbergovy atomy sloužící jako měřicí zařízení, které je schopné nedestruktivně detekovat počet fotonů v dutině. Rydbergův atom je v superpozici dvou energetických stavů a chová se jako rotující dipól. V přítomnosti fotonu se změní fáze jeho rotace. Při teplotě 0,8 K je podle Planckova vyzařovacího zákona dutina prázdná po 95 % času, nicméně v 5 % času se v ní vyskytuje jeden foton. Harochova mikrovlnná dutina je natolik kvalitní, že v ní každý vzniklý foton přežívá kolem 130 milisekund. To je tak dlouhý čas, že foton odrážející se mezi zrcadly urazí celkovou dráhu kolem 40 000 kilometrů, což odpovídá obvodu Země! Za tuto dobu projde dutinou až tisícovka Rydbergových atomů, které jsou opakovaně (až několiksetkrát) schopny detekovat jednotlivé fotony. Samozřejmě, že v mikrovlnné dutině nemusí být jeden jediný foton, ale třeba i několik fotonů (stačí zvýšit teplotu) nebo je snadné generovat větší množství fotonů za pomoci elektromagnetického impulzu. Za první nedestruktivní měření počtu fotonů získal Haroche Nobelovu cenu pro rok 2012.



9. MAGNETOHYDRODYNAMIKA

Popis plazmatu v rámci teorie kontinua poprvé použil švédský fyzik a astrofyzik Hannes Alfvén (1908–1995). Za práce v oblasti magnetohydrodynamiky získal v roce 1970 Nobelovu cenu za fyziku. Základní rovnice magnetohydrodynamiky zobecňují hydrodynamiku na vodičovou tekutinu, případně na více prolínajících se tekutin, jejichž chování dominantně ovlivňuje magnetické pole. Veličiny popisující plazma jsou polní veličiny, tj. jsou funkcí času a prostoru, například hustota látky $\rho(t, \mathbf{x})$, magnetické pole $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ či teplota $T(t, \mathbf{x})$. Namísto rychlostí jednotlivých částic \mathbf{v} budeme mít rychlostní pole $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Rychlostní pole značíme záměrně symbolem \mathbf{u} , aby nedošlo k záměně s rychlostmi jednotlivých částic \mathbf{v} . Existuje několik možných variant výchozích předpokladů teorie, my se v tomto textu zaměříme na tzv. minimální variantu s nejjednoduššími předpoklady. Nejprve se ale seznámíme s dvěma pojmy z teorie kontinua, které budeme pro pochopení magnetohydrodynamiky potřebovat.

Substancionální derivace

Nalezneme úplnou časovou derivaci nějakého vektorového pole $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_k(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dt} = \\ &= \frac{\partial A_k}{\partial t} + u_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} = \frac{\partial A_k}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) A_k. \end{aligned}$$

Úplná derivace vektorového pole (tzv. substancionální derivace) se skládá ze dvou částí

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A}. \quad (531)$$

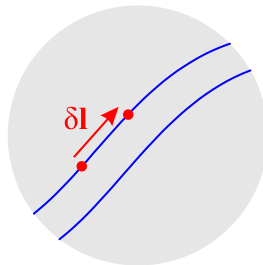
První část odpovídá explicitním změnám polí, druhá souvisí s prouděním. Pro substancionální derivaci můžeme operátorově psát

$$\blacktriangleright \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (532)$$

Se substancionální derivací jsme se již setkali, bylo tomu například na levé straně pohybové rovnice (186) při odvozování zákona zachování hybnosti proudící kapaliny. Substancionální derivaci lze samozřejmě bez nejmenších problémů aplikovat i na jakékoli skalární pole.

Rovnice proudnice

Určeme nyní časovou změnu elementu proudnice $\delta \mathbf{l}$, která je způsobena změnou rychlostního pole:



$$\frac{d\delta \mathbf{l}}{dt} = \delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u},$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{d\delta \mathbf{l}}{dt} = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (533)$$

Minimální varianta

Základem magnetohydrodynamiky je popis plazmatu jakožto vodivé tekutiny. Takový přístup má své výhody, ale také svá omezení. Neumožňuje například popsat statistické předávání energie, hybnosti a momentu hybnosti mezi tekutinou a polem, není vhodný pro studium svazků částic atd. Magnetohydrodynamika má nejrůznější varianty a odnože, kterým je společné to, že je možné popsat nabitě částice jako kontinuum. V ostatních detailech se jednotlivé varianty liší. My se v tomto úvodním textu budeme zabývat jen nejjednodušší, tzv. minimální verzí magnetohydrodynamiky, která je postavena na následujících předpokladech:

- **Popisovaná látka je kontinuum.** Látka je srážkově dominantní a na prostorových i časových škálách jsou srážky podstatným jevem. Střední volné dráhy částic jsou mnohem kratší než rozměry sledované oblasti a střední kolizní čas pro jednotlivé částice je mnohem kratší než doba, po kterou tekutinu sledujeme.
- **Jde o plazma.** Předpokládáme, že je tekutina ionizovaná, tj. jsou v ní volné nosiče náboje a je tedy schopná vést elektrický proud. Částice reagují kolektivně na elektromagnetická pole a jsou jimi také kolektivně vytvářena. Předpokládáme, že v libovolném makroskopickém objemu je stejný počet kladných i záporných jedinců, tj. látka je kvazineutrální.
- **Jednotekutinový model.** Předpokládáme, že látku je možné popsat jako jednu jedinou vodivou tekutinu, která se pohybuje (elektrony a ionty společně) pod vlivem jak vnějších polí, tak polí, která vodivá tekutina vytváří.
- **Nerelativistické plazma.** Předpokládáme, že rychlosti pohybu všech částic jsou podstatně nižší, než je rychlost světla ve vakuu. Nerelativistická magnetohydrodynamika umožňuje popis většiny dějů probíhajících v laboratorním plazmatu.
- **Posuvný proud je zanedbatelný.** Předpokládáme, že magnetické pole vzniká dominantně pohyby částic, tj. vodivostním proudem. Zanedbáváme genezi magnetického pole, za níž jsou zodpovědná měnící se elektrická pole. Takový přístup je vhodný pro nízkofrekvenční děje. Při vysokých frekvencích kmitů plazmatu vznikají elektromagnetické vlny, pro něž takové přiblížení neplatí.

V mnoha situacích výše uvedené předpoklady neplatí. V tekutinách často vznikají schodovitá řešení (rázové vlny), na kterých může dojít k narušené kvazineutralitě plazmatu, v některých situacích reagují elektrony jinak než ionty a není možné obě entity popsat jako jednu jedinou tekutinu, v astronomických aplikacích – například u výtrysků z černých děr – mají částice relativistické rychlosti a při popisu interakce elektromagnetických vln s plazmatem nemůžeme zanedbat Maxwellův posuvný proud. Přesto je minimální varianta magnetohydrodynamiky účinným nástrojem při popisu celé řady jevů. Plazma popisujeme pouze jedním skalárním a dvěma vektorovými poli: hustotou plazmatu, rychlostním polem a magnetickým polem. Představme si nyní rovnice pro jednotlivé proměnné. Časový vývoj hustotního pole je dán rovnicí kontinuity:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0. \quad (534)$$

Další rovnicí je vztah pro časový vývoj rychlostního pole. Jde samozřejmě o pohybovou rovnici tekutiny (186), v níž za hustotu Lorentzovy síly dosadíme ze vztahu (185). První člen je díky kvazineutralitě nulový, proto máme:

$$\blacktriangleright \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}. \quad (535)$$

Zbývá už jen odvodit rovnici pro časový vývoj magnetického pole a poradit si s tlakem, který se objevil v pohybové rovnici. Vzhledem k tomu, že je magnetické pole generované elektrickým proudem, musíme se nejprve věnovat Ohmově zákonu v proudící tekutině. V pohybujícím se plazmatu je třeba transformovat elektrické pole z laboratorní soustavy na pole v soustavě pohybující se s plazmatem, kde platí Ohmův zákon

$$\mathbf{j} = \sigma \tilde{\mathbf{E}}; \quad \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (536)$$

Transformace pole je jen nerelativistickou variantou obecného transformačního vztahu (335). Ohmův zákon má v pohybujícím se plazmatu tedy tvar

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (537)$$

Samotný pohyb plazmatu v magnetickém poli také způsobuje vznik elektrického proudu. Nyní už snadno odvodíme rovnici pro magnetické pole. Časovou změnu pole určíme z Faradayova indukčního zákona (48), do kterého za elektrické pole dosadíme z Ohmova zákona (537):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot} \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) = -\frac{1}{\sigma \mu} \text{rot rot } \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Dvojnou rotaci přepíšeme pomocí vektorové identity (D.5) a získáme výslednou rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (538)$$

První člen na pravé straně popisuje změny magnetického pole způsobené jeho difúzí, druhý popisuje změny pole souvisící s pohybem plazmatu. Rovnice pro hustotu (534), rovnice pro rychlostní pole (535) a rovnice pro magnetické pole (538) představují základní rovnice minimální verze magnetohydrodynamiky. Pro tlak, který vystupuje v pohybové rovnici, musíme mít nějakou další rovnici. Zpravidla soustavu uzavřeme nějakou obecnou formou stavové rovnice, například předpokladem, že tlak závisí mocninně (polytropně) na hustotě plazmatu:

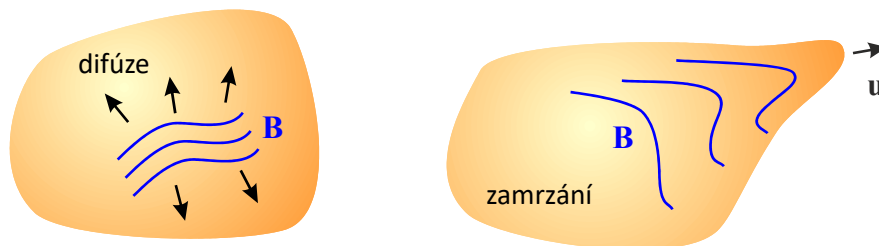
$$p = K \rho^\gamma. \quad (539)$$

Existují ale i jiné způsoby, jak pospat tlakové poměry v plazmatu. Můžeme například vycházet z rovnice pro časový vývoj vnitřní energie. Pro naše účely bude uzavření soustavy jednoduchým vztahem (539) dostačující.

Koncept zamrzlých polí

Magnetické pole se může podle (538) změnit dvěma způsoby. První člen na pravé straně je klasická *difúze* – pomalé pronikání magnetického pole do okolního plazmatu. Stejnou rovnicí splňuje difúze částit, tepla atd. O difúzi se dozvíte více v [2]. Druhý člen v sobě obsahuje rychlostní pole, a souvisí proto s pohybem plazmatu, říká se mu *člen zamrzání*. Magnetické indukční čáry sledují pohyb plazmatu, jsou jakoby vmrznuty do plazmové tekutiny. Nyní zhruba odhadněme poměr příspěvků obou členů (tzv. Reynoldsovo magnetické číslo). Všechny vektory odhadneme jejich velikostmi a derivace převrácenou hodnotou rozměrů systému:

$$\#_{\text{Re,M}} = \frac{\text{člen zamrzání}}{\text{člen difúze}} \approx \frac{\frac{1}{L} u B}{\frac{1}{\sigma \mu} \frac{1}{L^2} B} = \sigma \mu u L. \quad (540)$$



Pro ideálně vodivé plazma ($\sigma \rightarrow \infty$) dominuje člen zamrzání ($\#_{\text{Re,M}} \gg 1$). Naopak pro pomalé pohyby plazmatu dominuje člen difúze ($\#_{\text{Re,M}} \ll 1$). Limitní případy mají tvar

$$\begin{aligned} \sigma \rightarrow \infty: \quad & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}); \\ \mathbf{u} \rightarrow 0: \quad & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta_M \nabla^2 \mathbf{B}; \quad \eta_M \equiv \frac{1}{\sigma \mu}. \end{aligned} \quad (541)$$

Zabývejme se nyní jen členem zamrznání, tj. rovnicí

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (542)$$

Rotaci na pravé straně upravíme pomocí dvojného vektorového součinu – viz (D.7)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{u}.$$

Dosaďme za $\text{div} \mathbf{u}$ z rovnice kontinuity

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{u} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \text{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{div} \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho. \end{aligned}$$

Po elementárních úpravách máme (zanedbáváme člen difúze)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho.$$

Celou rovnici vydělme hustotou a přeskupme jednotlivé členy

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho.$$

První dva členy na levé straně lze spojit do jednoho výrazu a druhé dva na pravé straně také:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\rho}.$$

Substitucí $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/\rho$ rovnice přejde na

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Po zavedení substancionální derivace získáme rovnici proudnice (533) pro veličinu \mathbf{b}

$$\blacktriangleright \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (543)$$

Magnetické pole proto sleduje proudnice a je vmrzlé do plazmatu. Pojem zamrznání lze zformulovat i jinak: Magnetický tok uzavřenou smyčkou, jež se pohybuje spolu s plazmatem, je konstantní. Pro většinu laboratorních i astrofyzikálních plazmat je zamrznání dominantní a difúze se uplatňuje minimálně. Pokud někde vznikne magnetické pole, už se ho nezbavíme, stále plazma sleduje. Například u slunečního plazmatu je Reynoldsovo magnetické číslo přibližně 10^8 a difúzí magnetického pole se s výjimkou přepojování siločar nemusíme vůbec zabývat. Obdobně je tomu v laboratorním fúzním plazmatu.

Helicita

V plazmových vláknech se často pozorují typické šroubovicové útvary. Nacházejí se v laboratorním i vesmírném plazmatu, v piních i v kometárních ohonech. V matematice se pro podobně strukturovaná pole zavádí pojem helicity.

Helicita a Beltramova podmínka

Hustota helicity vektorového pole \mathbf{V} se definuje jako

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} \quad , \quad (544)$$

celkovou helicitou potom rozumíme integrál

$$\blacktriangleright \quad K(t) = \int_V \mathcal{H}(t, \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} . \quad (545)$$

Helicita je skalární veličina charakterizující helikálnost (šroubovitost) indukčních čar pole. Je nulová pro všechna pole splňující podmínku nevířivosti ($\text{rot } \mathbf{V} = 0$) a také pro všechny víry s kruhovými proudnicemi. Pole s helikální strukturou mají helicitu úměrnou $\sin \beta$, kde β je úhel stoupání šroubovice. Pro plazmová vlákna popisovaná v rámci MHD teorie může být důležitá hustota helicity magnetického pole, která se definuje přes vektorový potenciál \mathbf{A} nebo rychlostního pole \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A &= \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} , \\ \mathcal{H}_u &= \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} . \end{aligned} \quad (546)$$

Veličinu $\boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot } \mathbf{u}$ nazýváme vířivost. Zabývejme se nyní poli, která splňují tzv. Beltramovu podmínku: *rotace pole je úměrná samotnému poli* (Beltramovo pole)

$$\blacktriangleright \quad \text{rot } \mathbf{V} = \alpha \mathbf{V} \quad , \quad \text{neboli} \quad \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = 0 . \quad (547)$$

Jde o pole pojmenovaná podle italského matematika Eugenia Beltramiho (1835–1899). Koeficient úměrnosti α se může měnit v čase i v prostoru, my ho budeme v dalším textu považovat za konstantní. Beltramovo pole je 1) nezdvojové, 2) helikální, 3) splňuje Helmholtzovu rovnici. Nezdvojovost ($\text{div } \mathbf{V} = 0$) plyne aplikací divergence na podmínku (547). Helikálnost je pro nenulové pole patrná přímo z definice:

$$\mathcal{H} \equiv \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} = \alpha \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \alpha V^2 . \quad (548)$$

Aplikací rotace na podmínku (547) zjistíme, že Beltramova pole splňují Helmholtzovu rovnici (šlo o neekvivalentní úpravu, opačně to platit nemusí)

$$\blacktriangleright \quad \Delta \mathbf{V} + \alpha^2 \mathbf{V} = 0 . \quad (549)$$

Vektor \mathbf{V} je v tomto případě vlastním vektorem Laplaceova operátoru v odpovídající geometrii. Typickým matematickým příkladem Beltramových polí jsou tzv. ABC toky:

$$\mathbf{V} = (A \cos y + B \sin z, B \cos z + C \sin x, C \cos x + A \sin y) . \quad (550)$$

Pro ABC pole platí $\text{rot } \mathbf{V} = \alpha \mathbf{V}$ a $\Delta \mathbf{V} = -\alpha^2 \mathbf{V}$. Tyto toky jsou důležité v teorii chaosu.

Ve fyzice plazmatu se často uvažují bezsilové konfigurace, ve kterých míří proudová hustota ve směru magnetického pole $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$ (tzv. Birkelandovy proudy). V tomto případě je hustota Lorentzovy síly $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ nulová. Konfigurace má nejnižší možnou energii a disipativní plazma se k této konfiguraci vždy postupně blíží. Magnetické pole v bezsilové konfiguraci splňuje Beltramovu podmínku. Snadno to ukážeme z Ampérova zákona:

$$\mathbf{j} \parallel \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j} \sim \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{B} \sim \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} = 0 . \quad (551)$$

Magnetické pole v bezsilové konfiguraci je proto vždy helikální.

Zachování magnetické helicity

Ukažme, že integrální magnetická helicity se zachovává za těchto předpokladů:

Ideálně vodivé plazma. Předpokládáme, že diferenciální vodivost $\sigma \rightarrow \infty$, proto v rovnici pro časový vývoj magnetického pole dominuje jen člen zamrznání

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (552)$$

Ohmův zákon (537) v limitě nekonečné vodivosti získá tvar

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (553)$$

Nestlačitelnost plazmatu. Magnetické siločáry splňují $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Požadujeme, aby (díky zamrznání pole) splňovalo stejnou rovnici i rychlostní pole, tj.

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (554)$$

Magnetické pole neuniká. Normálová složka pole je na povrchu systému nulová. Tento předpoklad znamená uzavřené indukční čáry. Na povrchu systému platí vztah

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (555)$$

kde \mathbf{n} je vektor normály k ploše povrchu. Aby tento předpoklad byl pravdivý, musíme vzít za systém celou magnetickou trubici nebo musí být systém velmi rozsáhlý.

Integrální helicity pro vektorový potenciál magnetického pole je definována jako

$$K = \int \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dV = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3\mathbf{r}. \quad (556)$$

Úplná časová derivace vede na výraz (musíme použít i prostorovou část, integrační množina se pohybuje s trubicí)

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \right] d^3\mathbf{r},$$

První člen budeme derivovat jako součin, druhý upravíme do tvaru divergence (využijeme nestlačitelnost $\text{div } \mathbf{u} = 0$) a poté převedeme Gaussovou větou na plošný integrál

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3\mathbf{r} + \int_V \text{div} [\mathbf{u} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})] d^3\mathbf{r}, \\ \frac{dK}{dt} &= \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} \right) d^3\mathbf{r} + \int_V \left(\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3\mathbf{r} + \int_{S=\partial V} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (557)$$

Nejprve upravíme prostřední člen získané rovnice. Za časový vývoj magnetického pole dosadíme člen zamrznání a výraz upravíme pomocí vztahu (D.6):

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d^3\mathbf{r} &= \int_V \mathbf{A} \cdot \text{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{r} = - \int_V \text{div} [\mathbf{A} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] d^3\mathbf{r} + \int_V (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \text{rot } \mathbf{A} d^3\mathbf{r} = \\ &= - \int_V \text{div} [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B}] d^3\mathbf{r} + \int_V (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} d^3\mathbf{r} = \\ &= - \int_V \text{div} [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B}] d^3\mathbf{r} = \\ &= - \int_S [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})] dS = \\ &= - \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Pravý člen na předposledním řádku je nulový, protože na hranici systému je nulová – dle předpokladu (2) – normálová složka magnetického pole $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$. Zbýlý nenulový člen se vyruší s posledním členem v rovnici (557), ze které proto zbude:

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} d^3 \mathbf{r}. \quad (558)$$

Časovou derivaci vektorového potenciálu určíme z rovnice pro elektrické pole

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (559)$$

a následně dosadíme do rovnice (558):

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -\int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \nabla \phi \cdot \mathbf{B}) d^3 \mathbf{r} = -\int_V [(-\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} + \text{div}(\phi \mathbf{B})] d^3 \mathbf{r} = \\ &= -\int_S \phi (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \end{aligned} \quad (560)$$

Integrální helicity se tedy za výše zmíněných předpokladů zachovává.

Stav s minimální magnetickou energií

Uvažujme nyní magnetickou trubici vyplněnou dokonale vodivým plazmatem. Na povrchu plazmatu je normálová složka pole nulová. Difúzní procesy jsou zanedbatelné, zachovává se magnetická helicity K . Hledejme proto extrém magnetické energie s vazbou danou zachováním magnetické helicity. Použijeme standardní metodu Lagrangeových multiplikátorů pro extrém s vazbou. Nutná podmínka extrémnosti je:

$$\begin{aligned} \delta(W_M + \lambda K) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \delta \int \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \lambda \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) d^3 \mathbf{r} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \int \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B} + \lambda \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \lambda \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{B} \right) d^3 \mathbf{r} &= 0. \end{aligned}$$

Variace pole $\delta \mathbf{B}$ je provázaná s variací magnetického potenciálu $\delta \mathbf{A}$. Vzhledem k tomu, že $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, platí $\delta \mathbf{B} = \text{rot } \delta \mathbf{A}$ (derivace a variace jsou záměnné, viz [1])

$$\int \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \text{rot } \delta \mathbf{A} + \lambda \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \lambda \mathbf{A} \cdot \text{rot } \delta \mathbf{A} \right) d^3 \mathbf{r} = 0.$$

Členy s rotací převedeme na divergence za pomoci vztahu (D.6):

$$\int \left(-\frac{1}{\mu_0} \text{div}(\mathbf{B} \times \delta \mathbf{A}) + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{A} + \lambda \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \lambda \text{div}(\mathbf{A} \times \delta \mathbf{A}) + \lambda \text{rot } \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{A} \right) d^3 \mathbf{r} = 0.$$

Nyní za pomoci Gaussovy věty převedeme integrály přes divergence na integrály přes povrch magnetické trubice, zbylé integrály ponecháme a dosadíme $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$:

$$-\int_{\partial V} \left[\left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \lambda \mathbf{A} \right) \times \delta \mathbf{A} \right] \cdot d\mathbf{S} + \int_V \left[\left(\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} \right) \cdot \delta \mathbf{A} \right] d^3 \mathbf{r} = 0.$$

Variace vektorového potenciálu musí být na hranici integrační oblasti nulová, a proto bude první integrál nulový:

$$\int_V \left[\left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} \right) \cdot \delta \mathbf{A} \right] d^3 \mathbf{r} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že tento výsledek platí pro jakoukoli oblast a variace vektorového potenciálu δA_k jsou nezávislé, musí být nulový („skoro všude“) samotný integrand:

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} = 0.$$

Odtud ale okamžitě plyne nutná podmínka extrémnosti magnetické energie ve tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}. \quad (561)$$

Ve stavu s minimální energií, za podmínky zachování magnetické helicity, je tedy magnetické pole Beltramovým polem. Proudová hustota míří ve směru pole, jde o bezsilovou konfiguraci, ve které tečou proudy podél magnetických indukčních čar (tzv. Birkelandovy proudy). Stav s minimální magnetickou energií je nutně helikální. Magnetické pole splňuje Helmholtzovu rovnici, kterou získáme aplikováním operace rotace na rovnici (561):

$$\left(\nabla^2 + \alpha^2 \right) \mathbf{B} = 0. \quad (562)$$

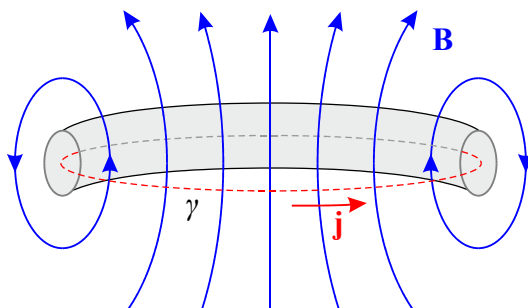
Je třeba ovšem poznamenat, že ne všechna řešení rovnice (562) jsou řešeními rovnice (561), neboť derivováním jsme zvýšili řád rovnice. Helmholtzova rovnice (562) již tedy není nutnou podmínkou extrémnosti magnetické energie. Pokud má plazma konečnou vodivost, dochází k disipaci energie a přepojování magnetických indukčních čar. Plazma se snaží zaujmout stav s co možná nejnižší magnetickou energií a dospět do stavu bezsilové konfigurace. Při těchto procesech se ovšem helicity mění.

Tekutinové dynamo

Velmi důležitou částí magnetohydrodynamiky je problematika generování magnetických polí v nitru Slunce a planet. Současná teorie tekutinového dynamo nedokáže vysvětlit vznik těchto polí, ale úspěšně popisuje jejich udržování, zesilování a překlápění mezi dipólovou a azimutální složkou.

Cowlingův anti-dynamo teorém

Anglický astronom Thomas George Cowling (1906–1990) ukázal v roce 1934, že *stacionární osově symetrické magnetické pole nemůže vznikat osově symetrickým prouděním plazmatu*. Představme si jednoduché osově symetrické pole podle obrázku.



Elektrický proud generující pole teče v proudové trubici podél neutrální linie, kde je rotace pole nenulová a samotné pole nulové. Na obrázku je neutrální linie vyznačena čárkovaně. Integrujme proudovou hustotu podél této neutrální linie s využitím Ohmova zákona (537):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma} \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

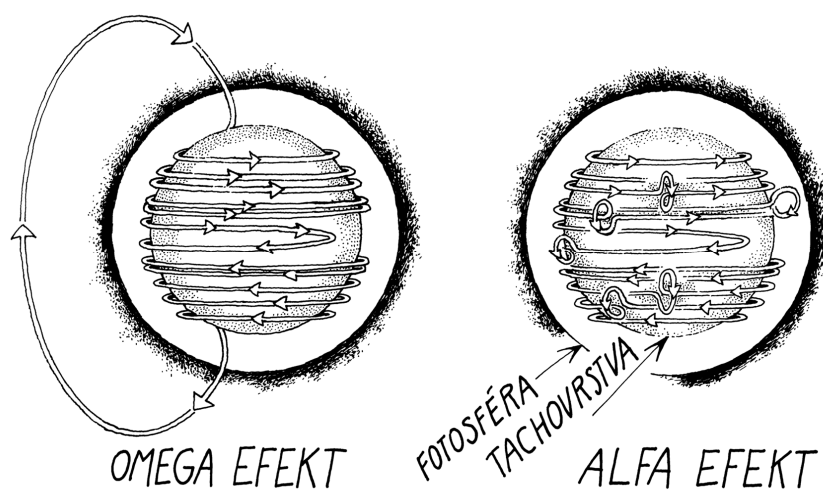
Magnetické pole je podél neutrální linie nulové, a proto je nulový i druhý člen integrace. První člen převedeme na plošný integrál ze Stokesovy věty a upravíme ho pomocí Maxwellových rovnic. Ze stacionarity plyne poté i nulovost prvního členu:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \sigma \int_S (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \sigma \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Dostali jsme se do sporu s předpokladem, že stacionární osově symetrické pole je generováno nenulovým proudem tekoucím podél neutrální linie. Generování magnetického pole je složitější záležitostí, je nestacionární – dochází k přelévání mezi dipólovou a azimutální složkou.

Parkerův model tekutinového dynama

Současnou teorii tekutinového dynama v rotujícím tělese rozpracovali americký astrofyzik Eugene Parker (1927), sovětský teoretik Yakov Borisovich Zeldovich (1914–1987) a skotský astrofyzik Henry Keith Moffatt (1935). Pokud těleso rotuje s konstantní úhlovou rychlostí, sleduje zamrzlé pole pohyb tělesa – hovoříme o tzv. *isorotaci*. Pokud těleso rotuje s diferenciální rotací, jsou původně dipólové magnetické indukční čáry vytahovány v místech rychlejší rotace (u Slunce v okolí rovníku) v azimutálním směru. Tím dochází k natahování magnetické indukční čáry, tj. zvětšování její délky. Tomuto jevu říkáme *omega efekt* (podle písmene Ω , kterým se zpravidla značí úhlová frekvence rotujícího tělesa, ale i podle tvaru vychlípené indukční čáry). Při omega efektu se mění dipólová složka v azimutální složku. U Slunce k tomuto jevu dochází nejvýrazněji v blízkosti tzv. *tachovrstvy*, což je oblast přechodu mezi radiačním a konvektivním přenosem energie. Nachází se přibližně 220 000 km pod slunečním povrchem. Navinutí magnetické indukční čáry kolem dokola Slunce trvá přibližně 8 měsíců. U Země dochází k obdobnému jevu ve vodivém plastickém prostředí na hranici jádra a pláště.



Druhým významným jevem je *alfa efekt*. Jde o tyze statistický jev. Fluktuace rychlostního pole vedou k postupnému zesilování složky magnetického pole kolmé na střední hodnotu pole. Azimutální magnetické pole je deformováno zpět na pole dipólové. Jev se nazývá alfa efekt podle tvaru vychlípené indukční čáry, která připomíná písmeno alfa řecké abecedy a také podle označení koeficientu úměrnosti u členu, který tento jev způsobuje. Omega efekt spolu s alfa efektem umožňují vzájemnou transformaci složek pole a udržování pole tekutinovým dynamem. Vždy je jedna složka postupně zesilována na úkor druhé a poté naopak. Magnetický dipól generovaný tímto mechanismem se proto pravidelně překlápí. Například pro Slunce trvá celý cyklus (doba, za kterou je severní pól zpět na svém místě) 22 let. V období překlápění dipólu má pole výrazné vyšší momenty (kvadrupólový a oktapólový), pole připomíná *vlasatou kouli*, na jejímž povrchu se střídá více oblastí vystupujících a vstupujících indukčních čar. U Země došlo k poslednímu překlápění pole přibližně před 760 tisíci lety a v současnosti se blíží její další přepólování.

Předpokládejme nejprve, že v rovnici (538) pro magnetické pole má rychlost jen prostorovou závislost, tj. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$. To nemusí být pravda vždy, ale pokud tomu tak je, lze magnetické pole separovat na časovou a prostorovou část:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{b}(\mathbf{r}) e^{\lambda t} \quad (563)$$

Po dosazení do rovnice pro pole máme problém pro vlastní čísla, který je plně řešitelný s příslušnými okrajovými podmínkami:

$$\frac{1}{\sigma\mu} \Delta \mathbf{b} + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{b}. \quad (564)$$

Vlastní číslo λ bude obecně komplexní. Pokud bude mít nenulovou reálnou část, která bude navíc kladná, bude pole exponenciálně narůstat. To je základním předpokladem tekutinového dynama, které má za úkol pole generovat, tedy zesilovat.

Separace škál

Z Cowlingova teorému je zjevné, že pro vznik magnetického pole nemůže být situace dokonale osově symetrická. Nesymetrii mohou způsobovat například vhodné turbulence rychlostního pole. Takovéto fluktuace probíhají jen na malých škálách. Naopak na velkých škálách jsou změny pole malé a lze ho považovat za téměř homogenní. Magnetické i rychlostní pole tedy mají dvě složky na zcela odlišných škálách: fluktuace na malých škálách a změny tvaru isochar na velkých škálách. Hovoříme o tzv. *separaci škál*, kterou matematicky popíšeme rozdělením na střední hodnotu příslušného pole a fluktuační část:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \langle \mathbf{u} \rangle + \delta \mathbf{u}; \\ \mathbf{B} &= \langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (565)$$

Střední hodnoty fluktuačních částí jsou zjevně nulové:

$$\langle \delta \mathbf{u} \rangle = 0; \quad \langle \delta \mathbf{B} \rangle = 0. \quad (566)$$

Dosaďme nyní rozklad (565) do rovnice pro magnetické pole (538):

$$\frac{\partial [\langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B}]}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 [\langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B}] + \text{rot} [(\langle \mathbf{u} \rangle + \delta \mathbf{u}) \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B})]. \quad (567)$$

Středováním této rovnice zmizí členy lineární ve fluktuacích a získáme tak rovnici pro střední hodnotu magnetického pole:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle + \text{rot} [\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle] + \text{rot} \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle. \quad (568)$$

Odečteme-li nyní od (567) rovnici pro střední hodnoty (568), získáme rovnici pro fluktuace magnetického pole:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial}{\partial t} (\delta \mathbf{B}) = \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 (\delta \mathbf{B}) + \text{rot} [\langle \mathbf{u} \rangle \times \delta \mathbf{B} + \delta \mathbf{u} \times \langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} - \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle]. \quad (569)$$

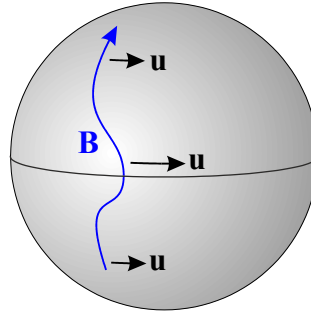
Chceme-li zjistit časovou změnu magnetického pole, musíme nalézt řešení rovnice (568), do které dosadíme řešení fluktuací magnetického pole z rovnice (569). Střední hodnota rychlostního pole je zpravidla dána dynamikou systému (například otáčením Slunce), fluktuace rychlostního pole je možné hledat z rovnice pro rychlostní pole (535) nebo jsou známy experimentálně (například z měřených turbulencí slunečního plazmatu). První člen na pravé straně rovnice (568) pro časový vývoj magnetického pole popisuje standardní difúzi pole, druhý člen je zodpovědný za Ω efekt a třetí za α efekt, který má původ ve fluktuacích rychlostního a magnetického pole.

Omega efekt

Pro Ω efekt je podstatný druhý člen rovnice (568):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \text{rot} [\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle]. \quad (570)$$

Střední hodnota magnetického pole je zamrznutá do střední hodnoty rychlostního pole, tj. magnetické pole sleduje pohyby plazmatu. Pokud těleso rotuje konstantní úhlovou rychlostí, tvar dipólového pole se nemění. Například Slunce ale rotuje diferenciální rotací, na rovníku je úhlová rychlost o třetinu větší než na pólech. Výsledkem diferenciální rotace je vznik azimutální složky magnetického pole. Pro úplnost uveďme, že na Slunci je v blízkosti tachovrstvy nenulová diferenciální rotace i v radiálním směru.



Navíjení magnetických indukčních čar v azimutálním směru ale nebude pokračovat neustále. Nakonec se přece jen v časovém vývoji magnetického pole uplatní difúzní člen, který je sice malý, ale vede k trvalým disipačním procesům, za něž je zodpovědný konečný odpor plazmatu – proto hovoříme o ohmické difúzi. Maximální počet úspěšně navinutých siločar bude roven poměru obou členů (zamrznání a difúze), tedy Reynoldsovu magnetickému číslu.

Alfa efekt

Pro α efekt je podstatný třetí člen rovnice (3.98):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \text{rot} \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle. \quad (571)$$

Alfa efekt zajišťuje transformaci toroidální složky pole zpět na poloidální. Celá reže alfa efektu je čistě ve fluktuacích rychlostního a magnetického pole. Z hlediska statistické fyziky představuje výraz

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle; \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{klm} \langle \delta u_l \delta B_m \rangle. \quad (572)$$

korelační funkci $\langle ab \rangle$ mezi složkami fluktuací rychlosti a magnetického pole. Pokud by byl výraz nulový, neexistovala by žádná korelace mezi rychlostním a magnetickým polem, to ale není případ námi popisované vodivé tekutiny.

Z obou klíčových rovnic (568) a (569) plyne lineární vztah mezi fluktuacemi magnetického pole $\delta \mathbf{B}$ a střední hodnotou magnetického pole $\langle \mathbf{B} \rangle$. Proto bude korelační funkce, která je úměrná fluktuaci magnetického pole, úměrná také střední hodnotě magnetického pole:

$$\varepsilon_k = \alpha_{kl} \langle B_l \rangle + \beta_{klm} \partial_l \langle B_m \rangle + \dots \quad (573)$$

Koeficienty α, β jsou dány pouze statistickými vlastnostmi fluktuací rychlostního pole. Pokud jsou tyto fluktuace izotropní, což platí ve většině situací, musí mít koeficienty tvar

$$\alpha_{kl} = \alpha \delta_{kl}; \quad \beta_{klm} = \beta \varepsilon_{klm}, \quad (574)$$

tedy být úměrné Kroneckerovu a Leviho-Civitovu tenzoru. Po dosazení koeficientů (574) do korelační funkce (573) a rovnice pro změnu pole (571) dostaneme

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle + \beta \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle + \dots, \quad (575)$$

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \alpha \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle - \beta \Delta \langle \mathbf{B} \rangle + \dots. \quad (576)$$

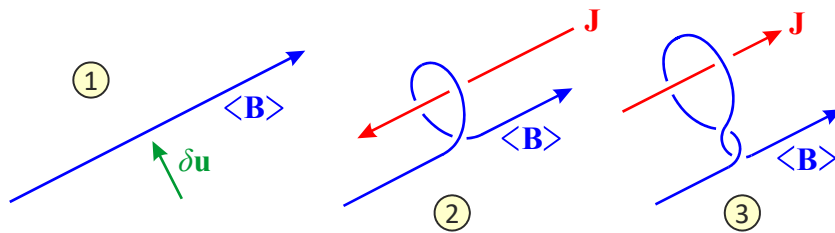
Druhý člen představuje turbulentní příspěvek k difúzi pole (koeficient β bude ve skutečnosti záporný). První člen je zodpovědný za α efekt:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \alpha \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle + \dots. \quad (577)$$

Pro Beltramovo pole je $\operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle \sim \langle \mathbf{B} \rangle$ a dochází k exponenciálnímu nárůstu pole. Pro jakékoli pole můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\langle \mathbf{B} \rangle_{t+\Delta t} \approx \langle \mathbf{B} \rangle_t + \alpha \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle_t \Delta t. \quad (578)$$

Rotace střední hodnoty magnetického pole je úměrná proudové hustotě, a proto má nově vznikající pole složku ve směru tekoucího proudu. Magnetické pole tak díky fluktuacím získává komponentu ve směru proudové hustoty a nově vznikající (a postupně sílící) část pole je nutně helikálním Beltramovým polem. Tím vzniká složka pole kolmá na pole původní a magnetické pole vytvoří překroucenou smyčku:



Pokud jsou fluktuace rychlostního pole helikální, stane se ve vodivém plazmatu automaticky helikálním i magnetické pole, u kterého se objeví složka kolmá na původní směr. Podstatnou podmínkou účinného fungování celého mechanismu je tedy vznik rychlostních fluktuací, které mají nenulovou střední hodnotu hustoty helicity:

$$\mathcal{H} = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \delta \mathbf{u} \rangle = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} \rangle \neq 0; \quad \delta \boldsymbol{\omega} \equiv \operatorname{rot} \delta \mathbf{u}. \quad (579)$$

Veličina $\boldsymbol{\omega}$ je vířivost fluktuace rychlostního pole. Ke vzniku helikálních fluktuací může dojít jen v plazmatu s nenulovým odporem (když se helicity nezachovává). Za nenulovou helicity rychlostních fluktuací je zodpovědná Coriolisova síla. Na jedné straně od rovníku vznikají fluktuace rychlostního pole s kladnou hodnotou hustoty helicity $\mathcal{H} > 0$ a na druhé straně se zápornou hodnotou hustoty helicity $\mathcal{H} < 0$. Další oblastí je tachovrstva na spodní části konvektivní zóny, kde se obrací sestupné proudy na vzestupné a helicity turbulentních fluktuací je opět nenulová. Jaké jsou tedy potřebné podmínky pro fungování tekutinového dynamika založeného na ω a α efektu?

1. Helicity fluktuací rychlostního pole musí být nenulová. Jedině tak může vzniknout a sílit složka magnetického pole kolmá na původní siločáru. Vzniklá smyčka je vlastně jedním závitěm šroubovice. Z matematického hlediska je korelační funkce $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B}$ vektorem. Samo magnetické pole je pseudovektor a přítomný vektorový součin zajistí, že výsledek je vektor. Z rovnice $\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle$ pak plyne, že koeficient je α musí být pseudoskalár, tedy se záměnou levotočivé soustavy na pravotočivou změní znaménko. Takové narušení zrcadlové symetrie může zajistit jen nenulová helicity pole.
2. Plazma musí mít konečnou vodivost a odpor. Jedině tak se nezachovává helicity a může vzniknout složka pole kolmá na původní siločáru (α efekt). Navíc zajistí ohmická difúze saturaci ω efektu, což umožní nástup α efektu a překlacení pole.

3. Systém musí být natolik velký, aby byla umožněna separace turbulentní škály od malých změn polí probíhajících na škále celého systému.
4. Rotace objektu musí být diferenciální, jinak nedojde k rozvoji *omega efektu*.

Výpočet korelační funkce (572) může být velmi komplikovaný, zejména v situaci, kdy chceme zahrnout i to, že rostoucí složka pole působí na nabitě částice a mění rychlostní pole. Problém se stává nemileárním a v takové situaci je jedinou možností numerická simulace probíhajících procesů. Uvedme na závěr, že *alfa efekt* sám postačí k překlápění jak toroidální složky v poloidální, tak i poloidální v toroidální. Modelu postavenému jen na α efektu se říká $\alpha\alpha$ model. Mnohem účinnější mechanismus, který jsme zde popsali, je tzv. Parkerův neboli $\alpha\Omega$ model.

Vlny konečné amplitudy

Soustava magnetohydrodynamických rovnic je nelineární a velmi složitá. Při provádění linearizace sice dostáváme řešení ve tvaru rovinných vln, ze kterých můžeme složit vlny komplikovanější, ale vždy s infinitezimální amplitudou. Podstatnou část řešení ale vůbec nenacházíme. V této části ukážeme, že existují speciální řešení, která splňují obyčejnou vlnovou rovnici, jejímž řešením je postupující vlna libovolného tvaru a libovolné amplitudy. V silných magnetických polích se plazma chová jako nestlačitelná kapalina ($\rho = \text{const}$), nebudeme proto potřebovat rovnici kontinuity pro časový vývoj hustoty. V pohybové rovnici vyjádříme proudovou hustotu v Lorentzově síle z Maxwellovy rovnice $\mathbf{j}_Q = \text{rot } \mathbf{H}$. Dále budeme uvažovat ideálně vodivé plazma ($1/\sigma = 0$), tj. rovnice pro magnetické pole nemá člen difúze, ale jen člen zamrznání:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}; \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]; \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0; \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (580)$$

Jde o rovnici pro rychlostní pole (pohybovou rovnici s tlakovou a Lorentzovou silou) a rovnici pro pole magnetické se členem zamrznání. Doplnkové jsou rovnice pro nestlačitelnost a Gaussova věta pro magnetické pole. Předpokládejme nyní, že veličiny se mění jen v jednom určitém směru. Volme osu z souřadnicové soustavy v tomto směru. Potom hledáme řešení ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, z); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t, z); \quad p = p(t, z). \quad (581)$$

Z doplňkových rovnic (divergencí) v (580) okamžitě plyne

$$u_z = u_0(t); \quad B_z = B_0(t). \quad (582)$$

Předpokládejme, že chceme nalézt řešení v podobě přesouvajícího se vlnového balíku, který je lokalizovaný v prostoru, proto nemůže rychlost plazmatu být nenulová v nekonečnu a musíme položit $u_0 = 0$. V uvedené geometrii tedy máme

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_0), \quad \nabla \rightarrow (0, 0, \partial/\partial z). \quad (583)$$

Napišme nyní členy v prvních dvou rovnicích (580):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \left[\rho \frac{\partial u_x}{\partial t}, \rho \frac{\partial u_y}{\partial t}, 0 \right] \quad (584)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = [0, 0, 0]; \quad (585)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \left[B_0 \frac{\partial B_x}{\partial z}, B_0 \frac{\partial B_y}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_x^2 + B_y^2}{2} \right) \right]; \quad (586)$$

$$\nabla p = \left[0, 0, \frac{\partial p}{\partial z} \right]; \quad (587)$$

$$\text{rot } (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \left[B_0 \frac{\partial u_x}{\partial z}, B_0 \frac{\partial u_y}{\partial z}, 0 \right]. \quad (588)$$

Vidíme, že rozpisy jednotlivých veličin se liší ve směru osy z a v rovině (x, y) . Naše výchozí rovnice dají:

Podélný směr (v ose z)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[p + \frac{B_x^2 + B_y^2}{2\mu} \right] = 0; \quad (589)$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial t} = 0. \quad (590)$$

Z první rovnice plyne nezávislost celkového tlaku na souřadnici z , složku $B_z = B_0$ můžeme do pravé strany první rovnice klidně přidat, protože B_0 nezávisí na z . Podle druhé rovnice B_0 nezávisí ani na t a jde o skutečnou konstantu v čase i v prostoru. Pro celkový tlak platí

$$\Pi \equiv p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} = \Pi(t). \quad (591)$$

Kolmý směr (v rovině xy)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}; \quad (592)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (593)$$

V kolmém směru je soustava rovnic lineární, aniž bychom byli nuceni linearizaci provádět. Obě rovnice jsou navíc triviálně splněny i ve směru osy z , protože zde jsou veličiny konstantní. Lze je tedy chápat jako výchozí soustavu rovnic pro vlnění v obou směrech. Jednoduchým vyloučením proměnných získáváme pro rychlostní i magnetické pole vlnové rovnice: stačí první rovnici derivovat podle času a za $\partial \mathbf{B} / \partial t$ dosadit z druhé rovnice nebo naopak derivovat podle času druhou rovnici a dosadit za $\partial \mathbf{u} / \partial t$ z rovnice první. Výsledek je

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{u} = 0; \\ & \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (594)$$

kde jsme označili

$$\blacktriangleright \quad v_A \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho}}. \quad (595)$$

Jde o vlnovou rovnici s charakteristickou rychlostí rovnou Alfvénově rychlosti. Nelineární soustava rovnic magnetohydrodynamiky poskytuje pro případ ideálně vodivé nestlačitelné

kapaliny bez tření řešení ve tvaru obecné vlny libovolné amplitudy. Poznamenejme, že hodnotu Alfvénovy rychlosti snadno určíme z rovnosti hustoty kinetické a magnetické energie $\rho v_A^2/2 \approx B_0^2/2\mu$. Jde o rychlost, kterou plazma získá při přeměně magnetické energie na energii kinetickou.

Magnetozvukové vlny

V této kapitole si povšimneme nízkofrekvenčních vln generovaných pohybem iontů v přítomnosti magnetického pole. Jde o analogii normálních zvukových vln šířících se v tekutinách. Magnetické pole vnáší do hry zcela nový prvek – anizotropii. Dalšími činiteli ovlivňujícími charakter vln jsou samozřejmě elektrický náboj iontů a vodivost prostředí. Za výchozí sadu rovnic budeme uvažovat klasickou jednotekutinovou magnetohydrodynamiku, v níž zanedbáme v rovnici pro magnetické pole difúzní člen, který je pouze odpovědný za útlum vln a řešení jí zbytečně komplikoval:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \\ p &= p(\rho).\end{aligned}\tag{596}$$

Soustava rovnic je doplněna stavovou rovnicí pro tlak. Předpokládejme, že existuje řešení ve tvaru poruch (perturbací) klidového stavu:

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho; \quad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}; \quad p = p_0 + \delta p.\tag{597}$$

Toto řešení dosadíme do soustavy (596) a zanedbáme druhé a vyšší mocniny poruch. Tím soustavu linearizujeme a dále můžeme postupovat standardním způsobem, který jsme použili při odvozování disperzní relace pro elektromagnetické vlny ve vakuu a ve vodivém prostředí. Do soustavy dosadíme rovinnou vlnoplochu (provedeme Fourierovu transformaci), a tím ji převedeme na soustavu algebraických rovnic. Rovnice pro tlak už algebraická je, pro poruchu tlaku můžeme psát $\delta p = (\partial p / \partial \rho) \delta\rho$. Výsledná linearizovaná algebraická soustava rovnic je:

$$\begin{aligned}-\omega \delta\rho + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{k} \delta p - \rho_0 \omega \delta\mathbf{u} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \delta\mathbf{B}) \mathbf{k} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \delta\mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{B}_0 \times \delta\mathbf{u}) - \omega \delta\mathbf{B} &= 0, \\ \delta p - c_s^2 \delta\rho &= 0; \quad c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}.\end{aligned}\tag{598}$$

Jde o soustavu osmi rovnic (2 skalární a 2 vektorové) bez pravých stran. Rychlost zvuku je označena c_s . Postupnou eliminací proměnných je možné nalézt jen rovnici pro rychlost (druhá rovnice). Nejprve dosadíme za δp z poslední rovnice. Poté za $\delta\rho$ z první rovnice a nakonec za $\delta\mathbf{B}$ ze třetí rovnice (upravíme dvojný vektorový součin). Získáme tak soustavu rovnic pro poruchy rychlostního pole

$$\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{u} = \mathbf{0}.\tag{599}$$

Složky symetrické matice \mathbf{M} mají tvar

$$M_{kl} = \left[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \delta_{kl} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) (k_k v_l^{(A)} + k_l v_k^{(A)}) - (v_A^2 + c_s^2) k_k k_l.\tag{600}$$

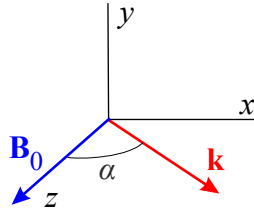
Tuto matici můžeme také zapsat v invariantním tvaru

$$\mathbf{M} = \left[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \vec{\mathbf{1}} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) [\mathbf{k} \otimes \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_A \otimes \mathbf{k}] - (v_A^2 + c_s^2) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}. \quad (601)$$

Veličina \mathbf{v}_A je Alfvénova rychlost a je definována jako

$$\mathbf{v}_A \equiv \mathbf{B}_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}. \quad (602)$$

Setkali jsme se s ní už u vln konečné amplitudy. Pro dopočet disperzní relace můžeme zvolit souřadnicový systém. Osu z volme ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 (ve směru Alfvénovy rychlosti). Kolem této osy otočíme souřadnicový systém tak, aby vlnový vektor \mathbf{k} byl v rovině (x, z) . V takto zvoleném souřadnicovém systému platí $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$, $\mathbf{v}_A = (0, 0, v_A)$ a pro vlnový vektor máme výraz $\mathbf{k} = (k \sin \alpha, 0, k \cos \alpha)$. Úhel mezi vektory \mathbf{B}_0 a \mathbf{k} je α .



Pro tuto volbu má matice \mathbf{M} jednoduchý tvar:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega^2 - k^2 v_A^2 - c_s^2 k^2 \sin^2 \alpha & 0 & -c_s^2 k^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & \omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2 \alpha & 0 \\ -c_s^2 k^2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \omega^2 - c_s^2 k^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}. \quad (603)$$

Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení soustavy (599), musí být determinant matice \mathbf{M} nulový. Z této podmínky získáme disperzní relaci magnetoakustických vln, a to dokonce ve tvaru nezávislém na souřadnicové soustavě

$$\left[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \cdot \left[\omega^4 - k^2 (v_A^2 + c_s^2) \omega^2 + c_s^2 k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] = 0. \quad (604)$$

Alfvénova rychlost míří ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 . Již na první pohled je vidět, že magnetoakustické vlny jsou mnohem složitější než obyčejný zvuk. Bude-li výraz v první hranaté závorce nulový, získáme jeden z módů, tzv. *Alfvénovu vlnu* (A). Bude-li nulový výraz v druhé hranaté závorce, získáme snadno řešitelnou bikvadratickou rovnici pro úhlovou frekvenci. Její řešení poskytuje další dva módy magnetoakustických vln, tzv. *pomalou vlnu* (S , Slow) a *rychlou vlnu* (F , Fast). Disperzní relace jednotlivých módů zřejmě jsou (α je úhel mezi vlnovým vektorem a magnetickým polem resp. Alfvénovou rychlostí):

$$\omega^2 = v_A^2 k^2 \cos^2 \alpha,$$

$$\blacktriangleright \quad \omega^2 = \frac{1}{2} k^2 (c_s^2 + v_A^2) - \frac{1}{2} k^2 \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}, \quad (605)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} k^2 (c_s^2 + v_A^2) + \frac{1}{2} k^2 \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}.$$

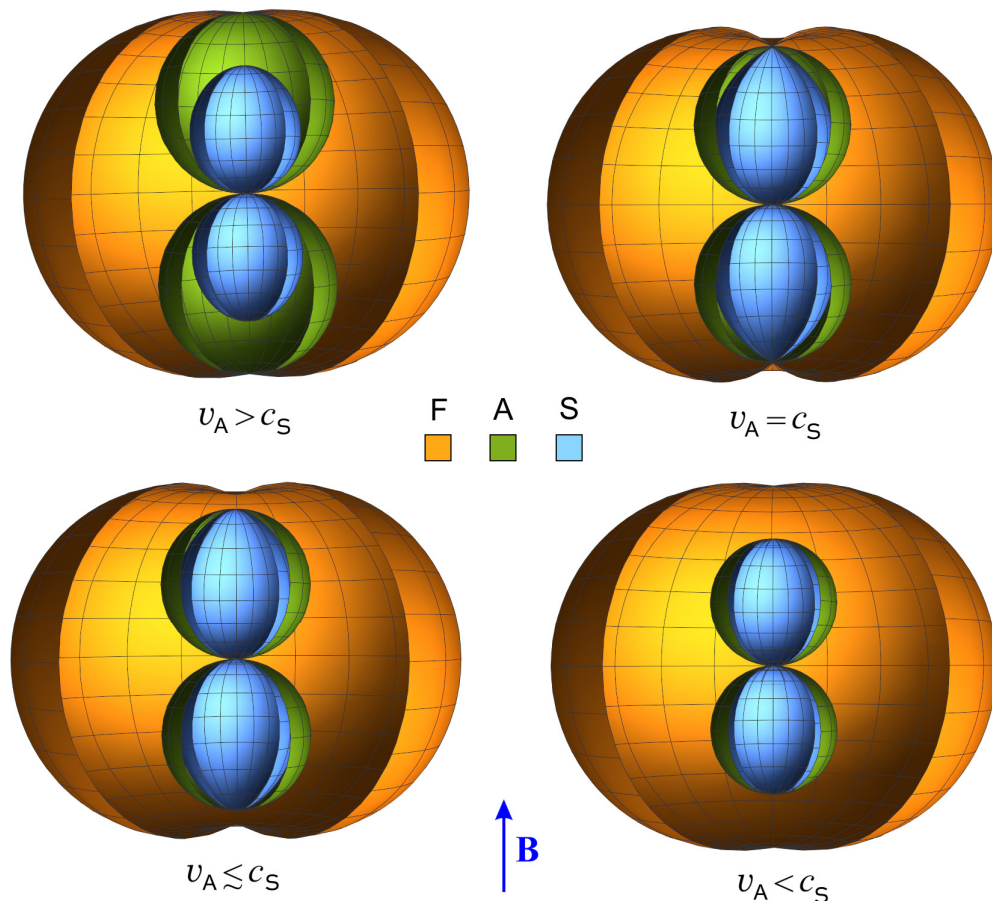
Poznamenejme, že v některé literatuře se Alfvénovými vlnami nazývají všechny tři zde zavedené módy magnetoakustických vln. V klasické zvukové vlně dochází k přelévání hustoty energie mezi chaotickou (tlakovou, p) částí energie a uspořádanou (kinetickou, $\rho v^2/2$) částí energie. V magnetoakustické vlně je rovnocenným partnerem ještě hustota energie magnetického pole (magnetický tlak, $p_M = B^2/2\mu_0$). Z disperzních relací (605) snadno určíme fázové rychlosti šíření jednotlivých módů:

$$\begin{aligned}
 v_{Af}^2 &= v_A^2 \cos^2 \alpha, \\
 v_{Sf}^2 &= \frac{1}{2}(c_s^2 + v_A^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}, \\
 v_{Ff}^2 &= \frac{1}{2}(c_s^2 + v_A^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}.
 \end{aligned}
 \tag{606}$$

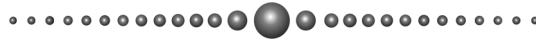
Nalezneme nyní tyto rychlosti ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 ($\alpha = 0$) a ve směru kolmém na toto pole ($\alpha = \pi/2$). Ve směru pole je fázová rychlost Alfvénovy vlny rovna Alfvénově rychlosti, pomalá vlna získá menší z obou základních rychlostí (rychlosti zvuku a Alfvénovy rychlosti) a rychlá vlna se bude šířit větší z obou rychlostí. Ve směru kolmém na původní magnetické pole má nenulovou rychlost šíření jen rychlá vlna, pomalá a Alfvénova mají nulové rychlosti. Výsledek je v následující tabulce:

mód	A	S	F
$\alpha = 0$	v_A	$\min(v_A, c_s)$	$\max(v_A, c_s)$
$\alpha = \pi/2$	0	0	$\sqrt{v_A^2 + c_s^2}$

Situace je dobře patrná na polárním diagramu závislosti fázové rychlosti všech tří módů. Takový diagram můžeme interpretovat jako tvary jednotlivých vlnoploch. Při zmenšujícím se magnetickém poli se vlnoplochy Alfvénovy vlny a pomalé magnetoakustické vlny zmenšují a vlnoplocha rychlé magnetoakustické vlny se stává „obyčejnou“ zvukovou vlnoplochou. Magnetické pole vnáší do šíření zvuku anizotropii. Tvar vlnoploch resp. polární diagram fázové rychlosti pro různé hodnoty magnetických polí si prohlédněte na obrázcích. Pokud je v plazmatu přítomen prach, je vlnoploch ještě více a jsou složitější.



Na levém horním obrázku dominuje magnetické pole ($v_A > c_s$). Na pravém horním obrázku je vyrovnán vliv magnetického a dynamického tlaku ($v_A = c_s$). Na dolních obrázcích je znázorněna situace pro slabé magnetické pole ($v_A < c_s$). Rychlá vlna (F) reprezentuje „běžnou“ zvukovou vlnu. Dobře je vidět, že při slábnoucím poli se anizotropní vlnoplochy zmenšují, až zaniknou. Vlnoplocha rychlé magnetoakustické vlny se zakulacuje a limitně při nulovém poli získá kulový tvar. Obrázky vznikly v programu MATHEMATICA. Detailní výpočet směru poruch nalezne čtenář v učebnici [2]. Magnetoakustické vlny jsou jedním z nejběžnějších projevů v plazmatu.



DODATKY**Tabulka potenciálů**

zdroj	potenciál	pole
homogenní \mathbf{E}	$\phi = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$	$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$
homogenní \mathbf{B}	$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$	$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$
bodový náboj	$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$
mg. monopól	\mathbf{A} nelze nalézt	$\mathbf{B} = \frac{Q_M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$
elektrický dipól	$\phi = \frac{\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_E}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$
magnetický dipól	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_M \times \mathbf{r}}{r^3}$	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{p}_M \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_M}{r^3}; \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$

Vektorové identity

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{D.1})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{D.2})$$

$$\text{div rot } \mathbf{K} = 0 \quad (\text{D.3})$$

$$\text{rot grad } f = 0 \quad (\text{D.4})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{K} = \text{grad div } \mathbf{K} - \Delta \mathbf{K} \quad (\text{D.5})$$

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B} \quad (\text{D.6})$$

$$\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{div } \mathbf{A} \quad (\text{D.7})$$

$$\mathbf{K} \times \text{rot } \mathbf{K} = \nabla \left(\frac{K^2}{2} \right) - (\mathbf{K} \cdot \nabla)\mathbf{K} \quad (\text{D.8})$$

$$\text{div grad } f = \Delta f \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r} \quad (\text{D.10})$$



LITERATURA

Na co navázat

- [1] Petr Kulhánek: *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky*, AGA 2016, [pdf](#)
- [2] Petr Kulhánek: *Úvod do teorie plazmatu*, AGA 2011, [pdf](#)
- [3] Petr Kulhánek: *O vztahu matematiky a fyziky*, AGA 2018, [pdf](#)
- [4] Petr Kulhánek: *Fyzika I*, AGA 2020, [pdf](#)

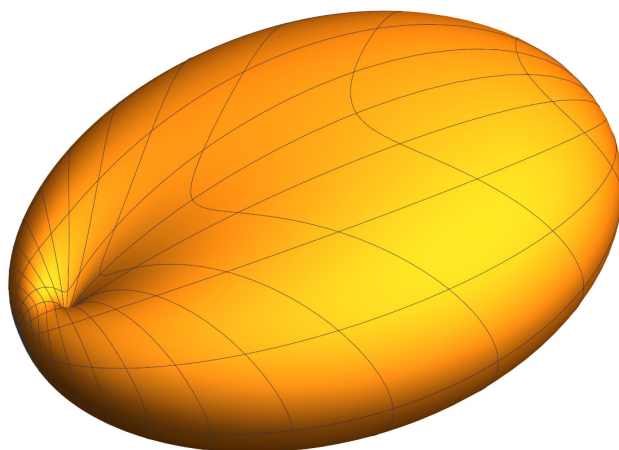
Nestárnoucí knihy, které vešly do dějin

- [5] James Clerk Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism*; Oxford, Clarendon Press, 1873, [pdf 1. díl](#), [pdf 2. díl](#)
- [6] Julius Adam Stratton: *Electromagnetic Theory*; McGRAW-HILL Book Company 1941, další reedice Adams Press 2008, [pdf](#)
- [7] John David Jackson: *Classical Electrodynamics*; John Wiley & Sons, New York, 1962, 1999 a další reedice, [pdf](#)
- [8] Lev Davidovich Landau, Evgeny Lifschitz: *The Classical Theory of Fields – Course of Theoretical Physics 2*; originál 1939, 1973, reedice 1994 Butterworth Heinemann, [pdf](#)
- [9] Lev Davidovich Landau, Evgeny Lifshitz: *Electrodynamics of Continuous Media*, Volume 8 in Course of Theoretical Physics; Elsevier 1984, [pdf](#)
- [10] Jozef Kvasnica: *Teorie elektromagnetického pole*, Academia 1985

Další učebnice

- [11] George B. Rybicki, Alan P. Lightman: *Radiative Processes in Astrophysics*; John Wiley & Sons 1979.
- [12] Thomas Howard Stix: *Waves in Plasmas*; Springer 2006
- [13] Umran S. Inan, Robert A. Marshall: *Numerical Electromagnetics – The FDTD Method*; Cambridge University Press 2011
- [14] Anupam Garg: *Classical Electromagnetism in a Nutshell*; Princeton University Press 2012
- [15] Andrew Zangwill: *Modern Electrodynamics*; Cambridge University Press 2013
- [16] David J. Griffith: *Introduction to Electrodynamics*; první vydání 1981; čtvrtá reedice Cambridge University Press 2017
- [17] Jakob Schwichtenberg: *No-Nonsense Electrodynamics: A Student Friendly Introduction*; No-Nonsense Books 2018
- [18] John Pierrus: *Solved Problems in Classical Electromagnetism – Analytical and Numerical Solutions with Comments*; Oxford University Press 2018
- [19] Ophelia Burgess: *Principles of Electromagnetism*; Larsen & Kefer 2019
- [20] Jonathan W. Keohane, Joseph P. Foy: *An Introduction to Classical Electrodynamics*; Maricourt Academic Press 2019
- [21] Xin Tao: *Classical Electrodynamics*; University of Science and Technology of China, 2019, [pdf](#)





Petr Kulhánek
TF4: Teorie elektromagnetického pole



Každá část této publikace může být šířena jakýmkoli způsobem.
Cílem není restrikce, ale vzdělávání co nejširšího okruhu čtenářů.

Autor: Prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.

Odborná recenze: průběžná, studenti kurzu

Formát: elektronické skriptum, pdf, A4, 117 stran

Nakladatelství: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)

Sazba: AGA (Aldebaran Group for Astrophysics)

Vydání: první, 2020 průběžně aktualizované

Ikona videa: freepik.com CC BY 3.0

