

$$\left| \frac{\Delta K}{\Delta t} \right| \lesssim \left(\frac{2\mu_0 |K|}{\sigma} \frac{|K|}{2\mu_0 L} \frac{|K|}{2\mu_0 L \Delta t} \right)^{1/2} = \left(\frac{K^2}{2\sigma\mu_0 L^2 \Delta t} \right)^{1/2} = \left(\frac{K^2}{2\tau_R \Delta t} \right)^{1/2}$$

a pro relativní změnu helicity platí řádový odhad

$$\left| \frac{\Delta K}{K} \right| < \left(\frac{\Delta t}{\tau_R} \right)^{1/2}. \quad (3.94)$$

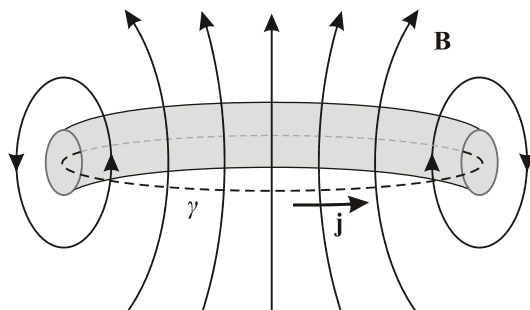
Pro rychlé děje ($\Delta t \ll \tau_R$) je změna helicity ΔK zanedbatelná. Například sluneční koronální erupce s dobou rekonekce $\Delta t \sim 1\,000$ s, lineárními rozměry $L \sim 5\,000$ km a koeficientem magnetické difúze $\eta_M \sim 10^{-6} \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$ dají charakteristický rezistivní čas $\tau_R \sim 10^{13}$ s a relativní změnu helicity $\Delta K/K < 10^{-5}$. Opačná situace je v plazmatu tokamaku. Rezistivní čas je v řádu jednotek sekund a doba udržení v desítkách sekund. Změna helicity je zde podstatná.

3.2.4 Tekutinové dynamo

Velmi důležitou částí magnetohydrodynamiky je problematika generování magnetických polí v nitru Slunce a planet. Současná teorie tekutinového dynamo nedokáže vysvětlit vznik těchto polí, ale úspěšně popisuje jejich udržování, zesilování a překlápění mezi dipólovou a azimutální složkou.

Cowlingův anti-dynamo teorém

Anglický astronom Thomas George Cowling (1906–1990) ukázal v roce 1934, že *stacionární osově symetrické magnetické pole nemůže vznikat osově symetrickým prouděním plazmatu*. Představme si jednoduché osově symetrické pole podle obrázku.



Obr. 55: Anti-dynamo teorém.

Elektrický proud generující pole teče v proudové trubici podél neutrální linie, kde je rotace pole nenulová a samotné pole nulové. Na obrázku je neutrální linie vyznačena čárkovaně. Integrujme proudovou hustotu podél této neutrální linie s využitím Ohmova zákona (3.7):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma} \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

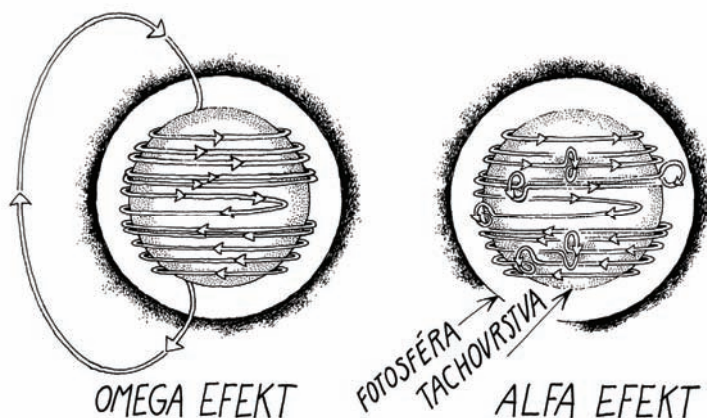
Magnetické pole je podél neutrální linie nulové, a proto je nulový i druhý člen integrace. První člen převedeme na plošný integrál ze Stokesovy věty a upravíme ho pomocí Maxwellových rovnic. Ze stacionarity plyne poté i nulovost prvního členu:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \sigma \int_S (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \sigma \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Dostali jsme se tak do sporu s předpokladem, že stacionární osově symetrické pole bylo generováno nenulovým proudem tekoucím podél neutrální linie. Generování magnetického pole je složitější záležitostí, dochází k přelévání mezi dipólovou a azimutální složkou.

Parkerův model tekutinového dynama

Současnou teorii tekutinového dynama v rotujícím tělese rozpracoval americký astrofyzik Eugene Parker (1927). K teorii dynama ovšem přispěla i řada dalších fyziků, například významný sovětský teoretik Jakov Borisovich Zeldovich (1914–1987) nebo skotský astrofyzik Henry Keith Moffatt (1935). Pokud těleso rotuje s diferenciální rotací, jsou původně dipólové magnetické indukční čáry vytahovány v místech rychlejší rotace (u Slunce v okolí rovníku) v azimutálním směru. Tím dochází k natahování magnetické indukční čáry, tj. zvětšování její délky. Tomuto jevu říkáme *omega efekt* (podle písmene omega, kterým se zpravidla značí úhlová frekvence rotujícího tělesa, ale i podle tvaru vychlípené indukční čáry). Při omega efektu se mění dipólová složka v azimutální složku. U Slunce k tomuto jevu dochází nejvýrazněji v blízkosti tzv. tachovrstvy, což je oblast přechodu mezi radiačním a konvektivním přenosem energie. Nachází se přibližně 220 000 km pod slunečním povrchem. Navinutí magnetické indukční čáry kolem dokola Slunce trvá přibližně 8 měsíců. U Země dochází k obdobnému jevu ve vodivém plastickém prostředí na hranici jádra a pláště.



Obr. 56: Sluneční dynamo.

Druhým významným jevem je *alfa efekt*. Dochází při něm k vychýlení magnetické trubice vlivem Coriolisovy síly, k její následné deformaci a překlopení do dipólové složky. Jev je nazván podle tvaru vychlípené indukční čáry, která připomíná písmeno alfa řecké abecedy. Tyto jevy umožňují vzájemnou transformaci obou složek pole a udržování dynamického stavu.

žování pole tekutinovým dynamem. Vždy je jedna složka postupně zesilována na úkor druhé a poté naopak. Magnetický dipól generovaný tímto mechanismem se proto pravidelně překlápí. Například pro Slunce trvá celý cyklus (doba, za kterou je severní pól zpět na svém místě) 22 let. V období překlápění dipólu má pole výrazně vyšší momenty (kvadrupólový a oktapólový), pole připomíná *vlasatou kouli*, na jejímž povrchu se střídá více oblastí vystupujících a vstupujících indukčních čar.

Při odvození omega a alfa efektu je podstatná jednak diferenciální rotace tělesa a jednak fluktuační magnetického a rychlostního pole. Rozložme obě pole na část středovanou přes *krátkodobé fluktuační* a na fluktuační část:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \langle \mathbf{u} \rangle + \delta \mathbf{u}; \\ \mathbf{B} &= \langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B}.\end{aligned}\quad (3.95)$$

Střední hodnoty fluktuačních částí jsou zjevně nulové:

$$\begin{aligned}\langle \delta \mathbf{u} \rangle &= 0; \\ \langle \delta \mathbf{B} \rangle &= 0.\end{aligned}\quad (3.96)$$

Dosaďme nyní rozklad (3.95) do rovnice pro magnetické pole (3.13):

$$\frac{\partial [\langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B}]}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 [\langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B}] + \text{rot} [(\langle \mathbf{u} \rangle + \delta \mathbf{u}) \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B})]. \quad (3.97)$$

Středováním této rovnice zmizí členy lineární ve fluktuačních a získáme tak rovnici pro střední hodnotu magnetického pole:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle + \text{rot} [\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle] + \text{rot} \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle. \quad (3.98)$$

Odečteme-li nyní od (3.97) rovnici pro střední hodnoty (3.98), získáme rovnici pro fluktuační magnetického pole:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta \mathbf{B}) = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 (\delta \mathbf{B}) + \text{rot} [\langle \mathbf{u} \rangle \times \delta \mathbf{B} + \delta \mathbf{u} \times \langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} - \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle]. \quad (3.99)$$

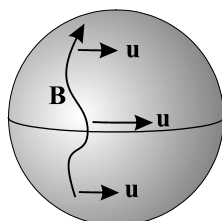
Chceme-li zjistit časovou změnu magnetického pole, musíme nalézt řešení rovnice (3.98), do které dosadíme řešení fluktuační magnetického pole z rovnice (3.99). Střední hodnota rychlostního pole je zpravidla dána dynamikou systému (například otáčením Slunce), fluktuační rychlostního pole je možné hledat z rovnice pro rychlostní pole (3.50) nebo jsou známy experimentálně (například z měřených turbulencí slunečního plazmatu). První člen na pravé straně rovnice (3.98) pro časový vývoj magnetického pole popisuje standardní difúzi pole, druhý člen je zodpovědný za Ω efekt a třetí za α efekt, kterýž má původ ve fluktuačních rychlostního a magnetického pole.

Omega efekt

Pro Ω efekt je podstatný druhý člen rovnice (3.98):

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \text{rot} [\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle]. \quad (3.100)$$

Střední hodnota magnetického pole je zamrznutá do střední hodnoty rychlostního pole, tj. magnetické pole sleduje pohyby plazmatu. Pokud těleso rotuje konstantní úhlovou rychlostí, tvar dipólového pole se nemění. Například Slunce ale rotuje diferenciální rotací, na rovníku je úhlová rychlost o třetinu větší než na pólech. Výsledkem diferenciální rotace je vznik azimutální složky magnetického pole. Pro úplnost uveďme, že na Slunci je v blízkosti tachovrstvy nenulová diferenciální rotace i v radiálním směru.



Obr. 57: Omega efekt.

Alfa efekt

Pro α efekt je podstatný třetí člen rovnice (3.98):

$$\triangleright \quad \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \text{rot} \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle. \quad (3.101)$$

Alfa efekt zajišťuje transformaci toroidální složky pole zpět na poloidální. Celá režie alfa efektu je čistě ve fluktuacích rychlostního a magnetického pole. Z hlediska statistické fyziky představuje výraz

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \langle \delta \mathbf{u} \times \delta \mathbf{B} \rangle; \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{klm} \langle \delta u_l \delta B_m \rangle. \quad (3.102)$$

korelační funkci $\langle ab \rangle$ mezi složkami fluktuací rychlosti a magnetického pole. Pokud by byl výraz nulový, neexistovala by žádná korelace mezi rychlostním a magnetickým polem, to ale není případ námi popisované vodivé tekutiny. Pokud jsou fluktuace rychlostního pole helikální, stane se ve vodivém plazmatu automaticky helikálním i magnetické pole, u kterého se objeví složka kolmá na původní směr. Podstatnou podmínkou je vznik rychlostních fluktuací, které mají nenulovou střední hodnotu hustoty helicity:

$$\mathcal{H} = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \text{rot} \delta \mathbf{u} \rangle = \langle \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle \neq 0. \quad (3.103)$$

Veličina $\delta \boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot} \delta \mathbf{u}$ je vířivost fluktuace rychlostního pole. Ke vzniku helikálních fluktuací může dojít jen v plazmatu s nenulovým odporem (když se helicity nezachovává). Za nenulovou helicitu rychlostních fluktuací je zodpovědná Coriolisova síla. Na jedné straně od rovníku vznikají fluktuace rychlostního pole s kladnou hodnotou hustoty helicity $\mathcal{H} > 0$ a na druhé straně se zápornou hodnotou hustoty helicity $\mathcal{H} < 0$. Další oblastí je tachovrstva na spodní části konvektivní zóny, kde se obracejí sestupné proudy na vzestupné a helicity turbulentních fluktuací je opět nenulová.

☞ **Příklad 12:** Představme si, že se v plazmatu vytvoří kruhově polarizovaná vlna šířící se ve směru osy x (lokálně, může jít i o azimutální směr):

$$\delta \mathbf{u} = (0, u_0 \cos(kx - \omega t), u_0 \sin(kx - \omega t)).$$

Výsledkem takové poruchy je nenulová vířivost

$$\delta \boldsymbol{\omega} = \text{rot } \delta \mathbf{u} = -k \delta \mathbf{u}.$$

Uvažovaná fluktuace rychlostního pole je Beltramovým polem a má hustotu helicity

$$\mathcal{H} = \delta \mathbf{u} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} = -k u_0^2.$$

Takový tok okamžitě povede k deformaci magnetického pole do helikální struktury. D

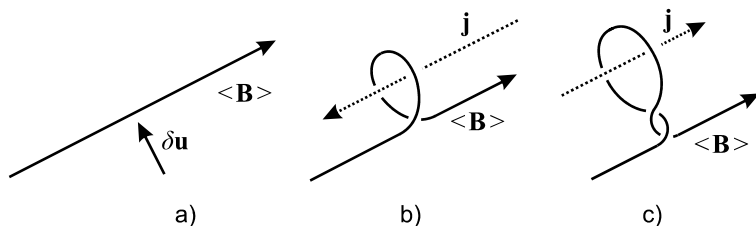
Výpočet korelační funkce (3.102) může být velmi komplikovaný, často se provádí jen numerickým řešením rovnice pro fluktuace magnetického pole (3.99). Jak uvidíme v následujícím příkladu, při výpočtu korelační funkce se objeví několik členů, z nichž jeden je *úměrný střední hodnotě magnetického pole*, tj.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle. \quad (3.104)$$

Právě tento člen je zodpovědný za α efekt, který je pojmenován podle koeficientu úměrnosti α . Dosadíme korelační funkci do rovnice pro α efekt (3.101):

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \alpha \text{rot} \langle \mathbf{B} \rangle. \quad (3.105)$$

Rotace střední hodnoty magnetického pole je úměrná proudové hustotě, a proto má změna magnetického pole složku ve směru tekoucího proudu. Magnetické pole tak díky fluktuacím získává komponentu ve směru proudové hustoty a nově vznikající (a postupně sílící) část pole je nutně helikální (jde o Beltramovo pole). Tím se vytváří složka pole kolmá na pole původní. Pokud jsou rychlostní fluktuace periodické jako v příkladu s kruhově polarizovanou vlnou, mění se periodicky i směr indukovaného proudu a magnetické pole vytvoří překroucenou smyčku [9]:



Obr. 58: Překroucení smyčky.

Uvedme na závěr, že alfa efekt sám postačí k překlápění jak toroidální složky v poloidální, tak i poloidální v toroidální. Modelu postavenému jen na α efektu se říká $\alpha\alpha$ model. Mnohem účinnější mechanismus, který jsme popsali již dříve, je tzv. Parkerův neboli $\alpha\Omega$ model.

☞ **Příklad 13:** Odhadněme korelační funkci pro plazma s vysokou hodnotou Reynoldsova magnetického čísla. Taková situace je jak na Slunci, tak ve fúzním plazmatu.

Řešení: V rovnici (3.99) pro fluktuaaci magnetického pole bude na pravé straně dominovat třetí člen, neboť magnetické fluktuaace jsou způsobeny především fluktuaacemi rychlostního pole. První člen je vzhledem k předpokladu vysokého Reynoldsova čísla zanedbatelný, členy s kvadráty fluktuaací jsou vyššího řádu. Proto v našem přiblížení máme pro fluktuaaci pole

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B}) \approx \text{rot}[\delta\mathbf{u} \times \langle \mathbf{B} \rangle] \Rightarrow$$

$$\delta B_k \approx \int_0^t \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mno} \partial_l \delta u_n(t') \langle B_o \rangle(t') dt',$$

kde jsme provedli integraci fluktuaace podle času a rozepsali dvojný vektorový součin. V zápisu vynecháváme zjevné prostorové závislosti. Nyní upravíme dvojný vektorový součin:

$$\delta B_k \approx \int_0^t \partial_n \delta u_k(t') \langle B_n \rangle(t') dt' - \int_0^t \partial_n \delta u_n(t') \langle B_k \rangle(t') dt'.$$

V dalším kroku provedeme naznačené derivace součinu a budeme předpokládat, že plazma se chová jako nestlačitelná kapalina (divergence obou polí jsou nulové):

$$\delta B_k \approx \int_0^t \delta u_{k,n}(t') \langle B_n \rangle(t') dt' - \int_0^t \delta u_n(t') \langle B_{k,n} \rangle(t') dt'.$$

Parciální derivace píšeme ve zkratce za čárku v indexu. Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu korelační funkce (3.102), která je zodpovědná za α efekt:

$$\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{ijk} \langle \delta u_j \delta B_k \rangle =$$

$$= \left\langle \int_0^t \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_{k,n}(t') \langle B_n \rangle(t') dt' \right\rangle - \left\langle \int_0^t \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_n(t') \langle B_{k,n} \rangle(t') dt' \right\rangle.$$

Výsledek lze napsat přehledně takto:

$$\varepsilon_i = \left\langle \int_0^t \alpha_{in}(t, t') \langle B_n \rangle(t') dt' \right\rangle - \left\langle \int_0^t \eta_{ikn}(t, t') \langle B_{k,n} \rangle(t') dt' \right\rangle;$$

$$\alpha_{in}(t, t') \equiv \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_{k,n}(t'), \quad (3.106)$$

$$\eta_{ikn}(t, t') \equiv \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_n(t').$$

Lze předpokládat, že korelační koeficienty jsou funkcí časové odlehlosti, tj.

$$\alpha_{in}(t, t') \equiv \alpha_{in}(t - t'),$$

$$\eta_{ikn}(t, t') \equiv \eta_{ikn}(t - t') \quad (3.107)$$

a do minulosti rychle konvergují k nule. Pomalu se měnící střední hodnotu pole a jeho derivaci lze z integrace (3.106) potom vytknout:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) &= \tilde{\alpha}_{in}(t) \langle B_n \rangle(t) - \tilde{\eta}_{ikn}(t) \langle B_{k,n} \rangle(t); \\ \tilde{\alpha}_{in}(t) &\equiv \left\langle \int_0^t \alpha_{in}(t-t') dt' \right\rangle, \\ \tilde{\eta}_{ikn}(t) &\equiv \left\langle \int_0^t \eta_{ikn}(t-t') dt' \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Fluktuace magnetického pole je tedy v našem přiblížení úměrná střední hodnotě pole samotného a jeho derivacím. Koeficienty úměrnosti jsou dány integrály z fluktuací rychlostního pole. Pokud budeme pro jednoduchost předpokládat izotropii plazmatu (to ale nemusí platit vždy), musí platit

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{in} &\sim \delta_{in}, \\ \tilde{\eta}_{ikn} &\sim \varepsilon_{ikn}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

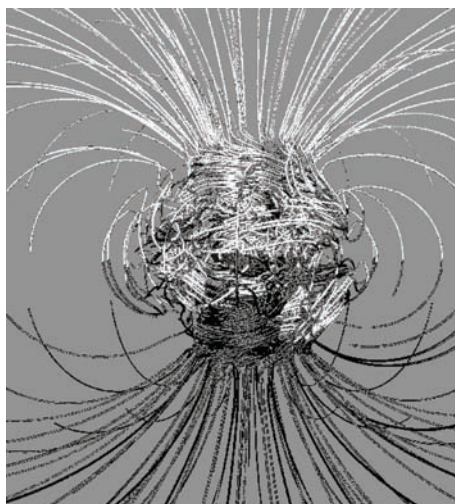
Za našich zjednodušujících předpokladů tedy pro korelační funkci (3.102) platí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \eta \mathbf{J} \quad (3.110)$$

a skutečně má část úměrnou střední hodnotě pole.



V obecném případě jsou k určení složek pole potřebné numerické simulace výchozích rovnic alfa a omega efektu, které jsou mimořádně náročné. Na následujícím obrázku jsou výsledky takových simulací pro zemské dynamo v superpočítačovém centru v San Diegu.



Obr. 59: Počítačová simulace tekutinového dynama uvnitř Země. Odstínem jsou odlišeny vstupující a vystupující indukční čáry. San Diego Supercomputer Centrum, 1999. Gary Glatzmaier, Paul Roberts.